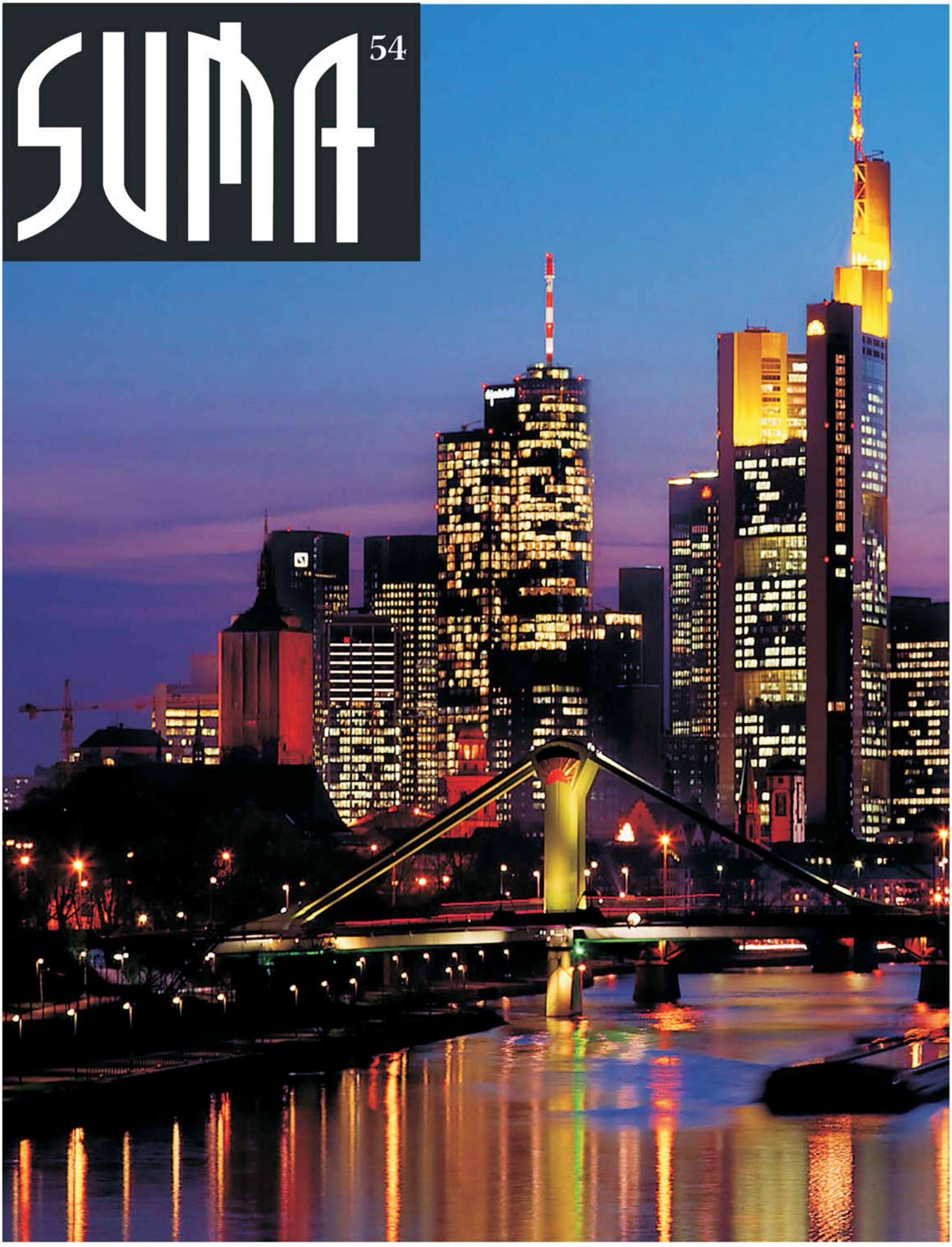
SUMA 54



SUMA. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las MATEMÁTICAS

MADRID · FEBRERO 2007 · Nº. 54 · ISSN 1130-488X

SUMA 54
Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las MATEMÁTICAS
Febrero 2007

Índice

Edita
FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS (FESPM)
Web
Antonio Alamillo Sánchez
www.revistasuma.es

Diseño de la portada
Javier Alvariño y Jorge Alvariño (foto)
Diseño interior
Raquel Fraguas (NIVOLA)
Maquetación
A. Alamillo y F. Martín
Abstracts
M. Manso de Zúñiga y P. Satrústegui
Revista Suma
Apdo. 19012
E-28080-Madrid
España
Fax: *+(34) 912 911 879*
Tirada: *6700 ejemplares*
Deposito legal: *Gr 752-1988*
ISSN: *1130-488X*

actividades de la FESPM

SUMA 54
Febrero 2007

Libros de matemáticas y las XIII JAEM

La aparición de libros relacionados con las matemáticas en los últimos años se ha ido incrementando paulatinamente.

El buen momento editorial empezó con este siglo y con la celebración, el año 2000, del año internacional de las matemáticas. Pero lo que podría haber sido un momento efímero parece consolidarse con el paso del tiempo. Cada año el sector editorial pone en el mercado más de doscientos títulos relacionados con las matemáticas, aun excluyendo de entre ellos los libros de texto y los manuales para su estudio.

La divulgación científica –en nuestro caso la matemática– a la que estamos aún poco habituados, comienza a ser objeto de muchos de estos libros y, en general, con unos niveles de calidad suficientes. Lo más novedoso es que no se trata de traducciones, sino de obras de autores españoles, obras nuevas en el mercado.

Las matemáticas están incluso entrando en el ámbito de la producción literaria. En los últimos años son frecuentes los libros con trama o argumento más o menos matemático o en relación con las matemáticas.

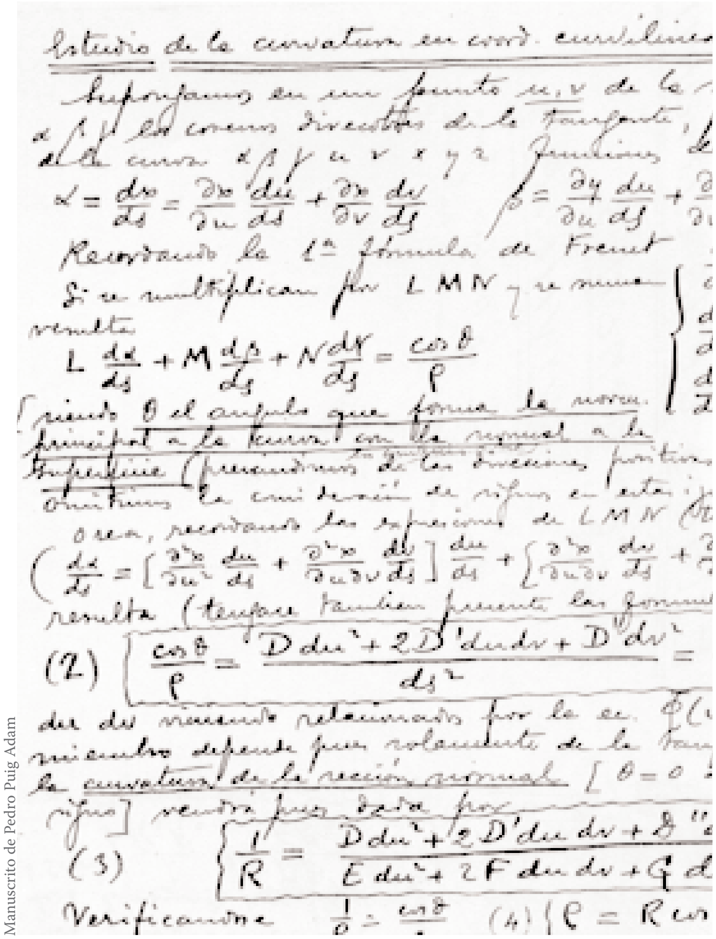
Desde SUMA nos congratulamos de este buen momento editorial y animamos a nuestros lectores a que contribuyan a su continuidad. Instamos a todos a seguir escribiendo sobre matemáticas y también, sobre todo, a leer sobre matemáticas.

En Julio de 2007 se celebrarán en Granada las XIII Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Pasados más de veinticinco años desde la celebración de las primeras en Barcelona, las JAEM se han convertido en una referencia consolidada sobre la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas en nuestro país.

A cinco meses vista os animamos a todos los lectores a inscribiros y participar activamente en las JAEM y sobre todo animamos a los que aún no habéis ido nunca a este tipo de acontecimientos.

El movimiento para la renovación didáctica de las matemáticas es probablemente uno de los más fuertes y activos de nuestro país, pero, pasados ya 25 años sería bueno que nuevas personas, con nuevas ideas, se incorporaran a él y que, a medio plazo, se produjera una profunda renovación de nuestras propias ideas y estructuras. Implicar a los compañeros más jovenes de nuestra profesión en las ilusiones que, desde hace años, nos han llevado a unirnos y a tratar de renovar lo que hacemos todos los días, es una tarea esencial e ineludible. Darles protagonismo y responsabilidad en nuestras estructuras organizativas es la única vía para mantenernos al día y saber afrontar los nuevos desafíos de la enseñanza de las matemáticas. Ésta es también una tarea de todos, pongámonos a ella cuanto antes. ■

SUMA



Manuscrito de Pedro Puig Adam

artículos

SUMA 54
Febrero 2007, pp. 7-13

La marcha Dufour: Un recurso para hacer matemáticas en la calle[i]

Dufour inventó un sistema de representación geográfica basado en principios topológicos en lugar de los principios geométricos de los mapas, croquis y planos habituales. La llamada marcha Doufour, aunque de origen militar, se emplea actualmente en actividades excursionistas y alpinistas para moverse por la montaña, pero es fácilmente adaptable a recorridos urbanos. Posee enormes posibilidades didácticas de carácter abstracto, obligando a los usuarios a desarrollar no sólo pautas de orientación sino también de razonamiento lógico sistemático. Ha sido utilizada con éxito en pruebas de calle de Olimpiadas Matemáticas.

Dufour invented a geographic representation system based on topological principles instead of the usual geometrical principles of maps sketches and planes. This representation is named the Doufour march. It has a militar origin, however it is today used in field trips and alpinist activities to move throught mountainous terrain and it is very easy to adapt to urban trips. The Dufour march has a lot of didactical potential of abstract character because it forces the users to develop no only orientation patterns also systematic logical thinking. It has been used with success in street proofs of Mathematical competitions.

Probablemente en la primera década del siglo XIX, el más tarde general *Guillaume Henri Dufour* (Constanza, 1787–Ginebra, 1875), ideó para el uso de sus exploradores[ii] un sistema de representación del terreno, fácil de aprender e interpretar y fiable para orientar los desplazamientos de la tropa. Como se verá más adelante, este sistema de representación contiene virtudes didácticas muy interesantes para las matemáticas.

Guillaume Henri Dufour, 1850

En su carrera militar *Dufour* se caracterizó por su talante humanitario, ideando el emblema de la Cruz Roja para el socorro de los heridos en los campos de batalla. En 1864, junto con Dunant, Moynier, Appia y Maunoir, presidió la asamblea que dio lugar a la *Convención de Ginebra,* origen del Derecho Internacional Humanitario (Bory, 1982).

Fue el encargado de dirigir los trabajos para levantar el mapa de Suiza (1832–1864) y en su memoria se bautizó el *Dufourspitze* (4638 metros), punto culminante del macizo del monte Rosa de los Alpes, en la frontera italosuiza.

Mariano Segura Mármol
Colegio Sagrada Familia
Elda. Alicante
Ricardo Martínez Rico
Universidad de Alicante
Alicante
Francisco Jesús García García
IES Lloixa
Sant Joan d'Alacant. Alicante

Dufourspitze, 3638 m. Los Alpes

De su uso militar, el sistema *Dufour* pasó a tener utilidad topográfica y fue adoptado como método de orientación en alta montaña y en actividades de marcha y senderismo, que empiezan a ser populares hacia finales del siglo XIX, sobre todo en Valencia[iii]. Está documentado el uso del sistema *Dufour* en 1928 por la Colla Excursionista el Sol de Valencia y por la Institución de Exploradores de España (Riscos, 1963). Se empleó también por el *Comité Regional de Senderos de Gran Recorrido para el trazado del Sendero Europeo de Gran Recorrido por Montaña (número 7)*, que discurre desde la extinta Chevcoslovaquia a Portugal pasando por la Comunidad Valenciana y en el *Itinerario Ibérico del Mediterráneo al Atlántico* que nace en Monte Picayo (Valencia).

En Elda está documentado su empleo al menos desde el año 1963, en el V Campamento Regional de Montaña (Esteve, 1999). En la actualidad es también utilizado en competición, al menos en la denominada *Copa Catalana De Marxes Tècniques Regulades*.

Precisamente a través del Club Alpino Eldense llegamos a saber de la existencia del sistema de representación *Dufour*. En la fase provincial de la *Olimpiada Matemática Cap-i-Cúa* de segundo de ESO celebrada en Monforte del Cid (Alicante) en el 2000, *Año Mundial de las Matemáticas*, decidimos diseñar una prueba matemática de calle basada en él.

En dicha prueba de calle participaron diez equipos de tres concursantes cada uno, con el objetivo de realizar un recorrido urbano decodificando un mapa *Dufour* y resolviendo en tres puestos de control una serie de breves pruebas de cálculo, medición y estimación. De los diez equipos participantes, ocho completaron el recorrido sin extraviarse, habiendo tenido previamente una corta instrucción de únicamente 20 minutos.

Fundamentos de la representación Dufour

Según muestra la figura 1, todo mapa urbano puede ser concebido de forma abstracta como una representación gráfica en el plano de un determinado grafo[iv] o red en el que las aristas son las calles y los vértices son las intersecciones de calles. Una interpretación similar (aunque algo más compleja) puede formularse para los mapas rurales.

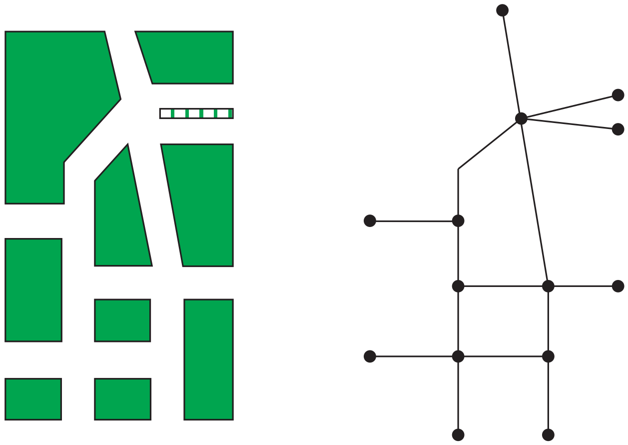


Figura 1. A la izquierda el plano usual y
a la derecha un grafo del mismo

En este sentido se define un *camino* en una representación gráfica de un grafo como una sucesión ordenada de vértice, arista, vértice, arista, ..., vértice, de modo que el vértice final de una arista sea el inicial de la arista siguiente[v]. Al primer vértice de la sucesión se le denomina *vértice inicial* y al último, *vértice final*.

Definiremos una *aplicación Dufour* como aquella que, dado cualquier camino de la representación gráfica del grafo original, devuelve una nueva representación gráfica de un grafo cuyos elementos son:

a. *Vértices*: Todos los vértices del camino original y todos los vértices adyacentes a cada uno de los vértices del citado camino.
b. *Aristas*: Todas las aristas del camino original y todas las aristas que sean incidentes con cada uno de los vértices del citado camino.

Esta aplicación contiene toda la información relevante sobre el camino entre el vértice inicial y el vértice final y equivale a una rectificación del camino conteniendo un entorno alrededor de cada punto del mismo.

Consecuentemente, la aplicación *Dufour* permite una *codificación secuencial* del camino del plano original con las siguientes características:

a. Representa biunívocamente el camino.
b. Está en línea recta.
c. No conserva necesariamente la escala del grafo originario.

Sin pérdida ninguna de información el grafo imagen se puede fragmentar, de modo que la linealidad no es un obstáculo para el almacenamiento de la información, que no será más que una secuencia[vi] que consta de líneas, que a su vez se pueden almacenar en varias páginas y éstas en tomos si fuese necesario.

La representación no necesita, pero tampoco es incompatible, de información complementaria que podría resultar útil en sus aplicaciones prácticas: así, por ejemplo, las aristas o/y los vértices del grafo imagen podrían tener asignados pesos que representasen distancias, tiempos, pendientes medias, cotas de altitud o cualquier combinación de esas medidas. Del mismo modo los vértices podrían tener asignados signos o códigos convencionales para facilitar la localización que representasen carreteras, pistas forestales, sendas, casas, ruinas, árboles, balsas, fuentes, puentes, cuevas, ríos, barrancos, vértices geodésicos, pozos, pedregales, simas,... No obstante, desde el punto de vista matemático (no así, por supuesto, desde el punto de vista del senderismo o del alpinismo), la representación alcanza su más alta cota de interés didáctico en su versión más simple y abstracta.

Levantamiento de un mapa Dufour

En la Olimpiada Matemática 2000, situamos a los participantes en un punto de Monforte, les facilitamos un plano *Dufour* previamente confeccionado por la organización y les pedimos que, tras una corta instrucción de un cuarto de hora, fuesen capaces de interpretarlo, orientarse y llevar a cabo un recorrido prefijado por el casco antiguo del citado municipio.

Aunque en este caso fue la organización quien construyó (o levantó, para ser estrictos con la denominación alpinista) el plano *Dufour*, éste no deja de ser una actividad igualmente interesante para los alumnos. La metodología más atractiva es levantar el plano directamente desde la realidad, esto es, situarnos en la calle, darnos un paseo, confeccionar el *Dufour* y disfrutar de los atractivos, matemáticos o no, de nuestras ciudades y pueblos.

Resulta evidente que en ocasiones, y este escrito es un ejemplo, no es posible situarnos directamente en la realidad, por ello es necesario a veces levantar el recorrido *Dufour* a partir de un plano o mapa convencional.

Partiendo de la figura 2, veamos paso a paso cómo se levanta el mapa *Dufour* y los diferentes tipos de razonamiento que para ello se utilizan.

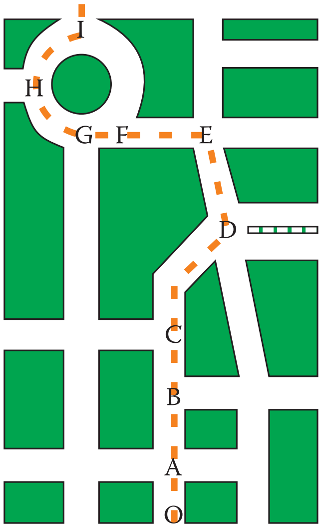


Figura 2

En primer lugar se observa que, de modo natural, un recorrido que lleva desde un origen a un destino, no discurre necesariamente en línea recta sino que efectúa obligados giros, salvando los accidentes urbanísticos o geográficos del terreno. Estos accidentes son los que dotan al plano de una *topología no trivial*.

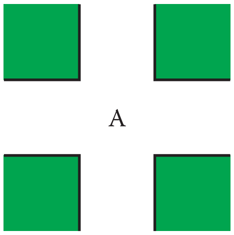
En el plano del ejemplo de la figura 2 se han marcado las *singularidades*[vii] del camino con letras del abecedario, para analizar detalladamente a continuación la construcción del mapa *Dufour*. Los puntos *ordinarios* del camino son topológicamente irrelevantes.

O es el punto de partida. Para que el mapa *Dufour* esté bien definido es necesario que este punto no sea una singularidad, esto es, no debe ser una confluencia de calles; en caso contrario, no existiría una correspondencia biunívoca entre el camino y su representación *Dufour*. De igual modo, el punto *I* de llegada tampoco puede ser una singularidad.

El mapa *Dufour* no está hecho a escala, por lo tanto no hay (mejor dicho, no es necesario que haya) correspondencia entre la distancia de *A* a *B* en el croquis originario y en *Dufour*, así como tampoco ha de haberla entre *O* y *A* o entre cualquier otro par de vértices.

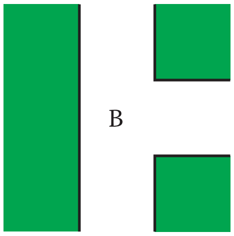
La idea fundamental para levantar un mapa *Dufour* es trazar un segmento, que será la imagen del camino que deseamos recorrer. En él iremos indicando cada una de las bocacalles de las sucesivas singularidades. Es de crucial importancia mantener el orden en el que van apareciendo las bocacalles según el sentido de la marcha.

A es la primera singularidad con la que nos encontramos.



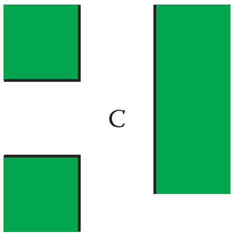
Según nos indica el trazo discontinuo, deseamos seguir hacia arriba, por lo tanto dejamos una calle a la derecha y, simultáneamente, otra a la izquierda, lo que se representa en *Dufour* como dos caminos que parten del trazo principal a la misma altura y que, sin continuidad, se interrumpen inmediatamente (la información más allá de esos caminos no es relevante para el recorrido que se desea representar).

En *B* se presenta el siguiente elemento de interés para el camino que se recorre.

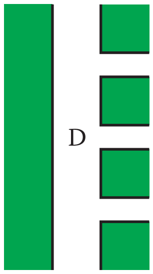


Aquí se observa que, siguiendo el sentido de la marcha, la posición relativa del caminante en *B* es dejar a su derecha un camino que no va a recorrer, lo que en el mapa *Dufour* queda representado por una derivación interrumpida a la derecha.

En el punto *C* pasa algo parecido pero a la izquierda.

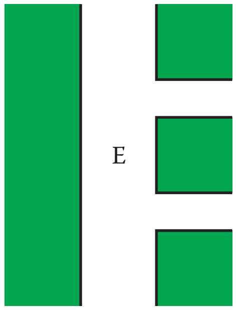


En el punto *D* la situación es más compleja pero, en el sentido de la marcha, se dejan a la derecha secuencialmente tres caminos sin interés para el recorrido que son los que se representan en el correspondiente *Dufour*.



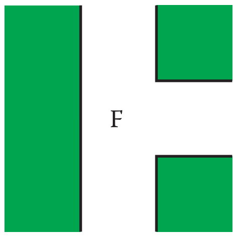
Obsérvese que lo único que interesa para levantar el plano es el *número de caminos* que dejamos sin recorrer y si estos quedan *a la derecha o la izquierda* del sentido de la marcha; es indiferente la distancia que los separa o el ángulo que forman entre ellos o con el trazo discontinuo.

En *E* de nuevo el sentido de la marcha deja a la derecha (posición relativa del móvil) dos caminos que se representan en *Dufour* por dos entrantes.

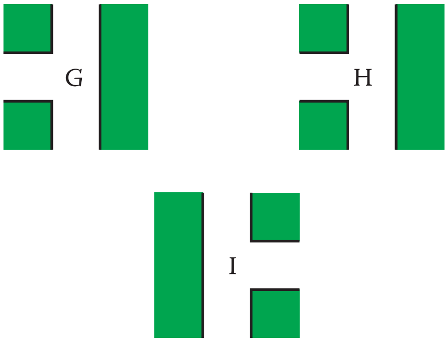


Las singularidades de *F* a *I* son las propias de una rotonda. La primera dificultad aparece a la hora de determinar con precisión cuáles son esas singularidades, pero basta con aplicar rigurosamente el principio básico de la secuencialidad. Primero debemos decidir en *F*, puesto que debemos elegir en qué sentido tomamos la rotonda; luego en *G*, para saber si nos salimos de ella o no; y así sucesivamente hasta *I*. Una vez establecidas las singularidades, vamos a ver cómo llevarlas al plano *Dufour*.

Según el sentido en el que entramos a la rotonda en *F*, dejamos una calle a la derecha de la marcha, por lo que su representación en *Dufour* es:



De modo totalmente análogo las representaciones de las singularidades *G*, *H*, *I* son:



Obsérvese que, a pesar de que la rotonda es circular en la realidad, en el *sistema Dufour* se sigue representando como una línea recta. Esta es una de las situaciones en las que más claro se ve cómo la geometría del plano usual no se traslada al plano *Dufour*, aunque sí se preserva la topología original.

Uniendo secuencialmente las representaciones de cada una de las singularidades obtenemos definitivamente el plano *Dufour* del camino que hemos escogido como ejemplo (figura 1).

Interpretación en el plano de un mapa Dufour

La reconstrucción, bien en un plano a escala o en la realidad, de un recorrido desde un mapa *Dufour*, consiste en esencia en interpretar la inversa de la aplicación utilizada al construir el mapa. Localmente, esta aplicación inversa está bien definida y eso asegura la reconstrucción unívoca del camino.

No obstante, detallamos a continuación el proceso, en tanto que genera la necesidad de realizar razonamientos en los que se encuentra la principal virtud didáctica de la marcha *Dufour*.

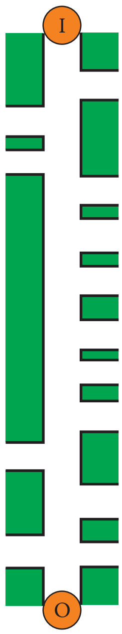


Figura 1

Estos razonamientos se pueden agrupar en dos tipos: razonamiento por inducción y razonamiento por deducción.

El primero hace referencia a la transposición mental directa de la información contenida en el mapa *Dufour* al mapa ordinario o a la realidad. Se trata de un proceso de lectura del código *Dufour* para traducir o descifrar su significado e interpretarlo para tomar la decisión de escoger uno de entre los trayectos posibles que se presentan en una singularidad.

El segundo tipo de razonamiento traslada la información en sentido inverso, esto es, analizando una por una todas las trayectorias posibles, observando en cada caso cuál sería la posición relativa de la singularidad y su codificación *Dufour*, y comprobando su correspondencia exacta con el mapa disponible. Se trata de un razonamiento por reducción al absurdo en el que se van descartando todas las alternativas que se presentan hasta quedarse de manera lógica con sólo una. Si se tiene en cuenta que, sobre todo cuando se realiza el proceso en la calle, uno de los errores que se pueden cometer consiste en confundir en el mapa *Dufour* la singularidad que se está analizando, se comprende el porqué de la importancia y eficacia de este tipo de razonamiento.

Estos dos modos de razonar no necesariamente se presentan en estado puro o excluyente. Lo habitual en la práctica es que se razone a la vez de los dos modos, combinando coherentemente las informaciones que se obtienen de ambos.

Ilustramos ahora el proceso con la reconstrucción paso a paso del recorrido del ejemplo anterior. Partimos ahora del mapa *Dufour* (figura 2).

El punto de salida *O* debe estar indicado en la realidad, o en el plano sobre el que se quiere reconstruir el camino representado, con un vector o sentido de marcha. Esto constituye la *condición inicial del mapa*[viii].

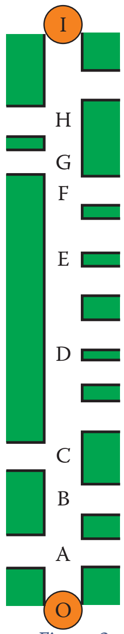
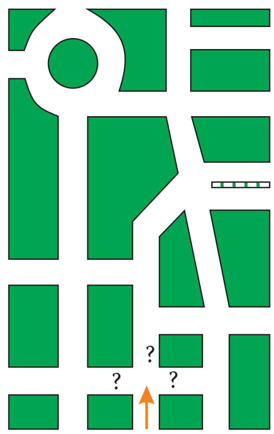


Figura 2

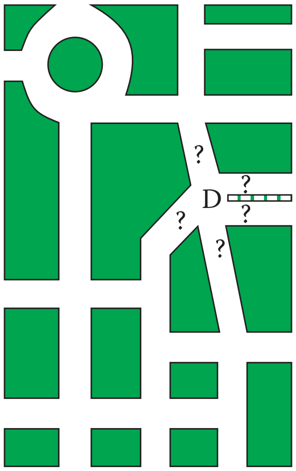


En cuanto llegamos a un cruce de calles nos encontramos con la primera singularidad, identificada como *A* en el mapa *Dufour*. Obsérvese que estamos razonando ahora desde la realidad. Debemos tomar una decisión entre cuatro alternativas: retroceder, girar a la derecha, continuar en línea recta o girar a la izquierda. En el Duforur observamos que dejamos un camino a la derecha y otro a la izquierda y eso mismo será lo que hagamos para continuar nuestro trayecto.

El siguiente cruce viene identificado como *B*. Tenemos ahora tres posibles decisiones: retroceder, girar a la derecha o seguir de frente. El mismo tipo de razonamiento de antes nos induce a seguir el camino de frente.

Otro tanto pasa en *C*. Las posibilidades son: seguir adelante, girar a la izquierda o retroceder, de modo que, dejando un camino a la izquierda, como indica *Dufour*, seguimos de frente.

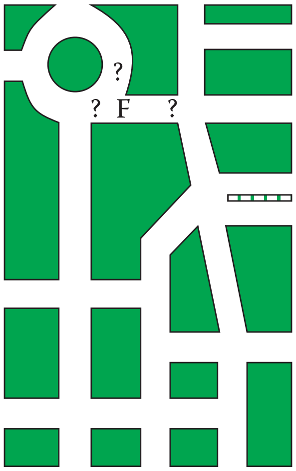
Algo más compleja deviene la situación en *D*.



Aquí hay cinco decisiones posibles pero sólo una de ellas deja exactamente tres caminos a la derecha tal y como viene representada en *Dufour* la singularidad. En este caso estamos haciendo un doble razonamiento. Situados en el cruce de calles vemos que en *D* se produce una intersección de cinco aristas, lo que nos obliga a considerar como una única singularidad todo el tramo de *Dufour;* este contiene tres ramales aparte del entrante y del saliente, que forman ambos parte del camino y son consecuentemente parte de la línea recta principal de la representación. A continuación, razonando por reducción al absurdo (o descarte de posibilidades) deducimos la conclusión.

El siguiente cruce de calles determina la singularidad *E* que cubre el tramo de *Dufour* que contiene los siguientes dos ramales entrantes, de modo que debemos dejar dos calles a la derecha y por lo tanto girar a la izquierda para continuar el recorrido.

En *F* desembocamos en una rotonda en la que podemos circular en el mismo sentido que las agujas del reloj o al contrario. Optamos entre tres decisiones y el mapa *Dufour* indica que el camino codificado se corresponde con el recorrido que deja a la derecha un camino, de modo que entraremos en la rotonda siguiendo el sentido de giro del reloj o negativo.



Si errásemos en el análisis y entrásemos en la rotonda en el sentido equivocado, pronto la comparación entre la realidad y el mapa *Dufour* devendría incoherente, de modo que deberíamos retrotraernos hasta la última singularidad analizada con seguridad.

En *G* hay un cruce de dos caminos y el plano indica que debemos dejar uno a la izquierda, de modo que continuaremos por la rotonda. Exactamente lo mismo ocurre en *H*.

Por el contrario, en *I*, según el plano *Dufour* debemos dejar un camino a la derecha, de modo que debemos abandonar la rotonda.

El plano *Dufour* no incluye más singularidades. Por lo tanto, antes de llegar al próximo cruce, habremos alcanzado el final del trayecto.

Fenomenología didáctica

La marcha *Dufour* puede inscribirse dentro del conjunto de las denominadas *actividades matemáticas de calle*, aunque conserva buena parte de su potencial formativo si se desarrolla dentro del aula.

Entre las *matemáticas de calle* cabe distinguir las que tienen como intencionalidad la *construcción de estructuras geométricas*, las que pretenden ver matemáticas en el entorno[ix], o las que proponen problemas que se utilizan en contextos al aire libre[x].

La marcha *Dufour* no encaja en ninguno de los tipos anteriores, pues utiliza un código de representación topológico mientras que el denominador común de las actividades mencionadas es la geometría. Paradójicamente es mucho más fácil levantar un mapa *Dufour* que un mapa a escala, pues *Dufour* no requiere recopilar tanta información. Al mismo tiempo el levantamiento se hace con un nivel de abstracción mucho mayor.

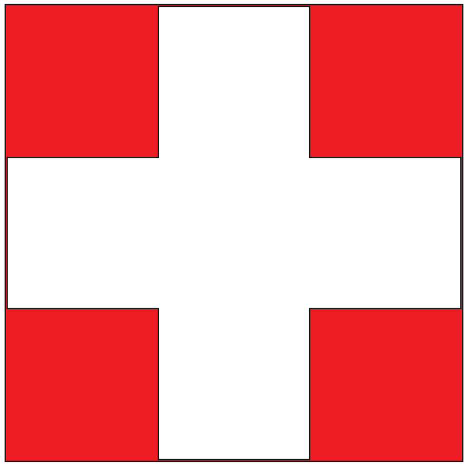
Además de la simplicidad de confección e interpretación, el sistema *Dufour* contribuye de modo natural al desarrollo de los siguientes procesos y habilidades:

a. La lateralidad con distintos grados de abstracción.
b. El concepto de espacio y de representación abstracta del espacio.
c. El razonamiento por descarte de casos o reducción al absurdo.
d. La confección e interpretación de planos.
e. La comprensión de las ventajas de la codificación coherente.

Las anteriores habilidades y procesos pueden ser abordados en la marcha *Dufour* con distintos grados de abstracción, que van desde la realización de recorridos cortos a partir de planos *Dufour* preconfeccionados, al levantamiento de planos *Dufour* de largos caminos, pasando por la localización en un mapa o plano a escala de una trayectoria codificada en *Dufour*, o levantando a partir de un mapa a escala el correspondiente plano *Dufour*. Consecuentemente, el espectro de edades adecuado para esta propuesta es muy amplio, incluyendo desde luego un rango mayor que el de toda la Educación Secundaria Obligatoria.

Entre los obstáculos para su realización cabe citar el tráfico en las zonas urbanas, aunque en casi todas las ciudades pueden localizarse sitios adecuados que eliminan o reducen a niveles aceptables los riesgos. Merece la pena buscar tales sitios pues la riqueza formativa es mucho mayor operando sobre la realidad que sobre el intermedio de un mapa a escala.

Otra posibilidad es realizar los recorridos en zonas no urbanas. ■



La bandera federal del general Dufour, propuesta en 1817, desplegada por primera vez en 1821, adoptada por Argovie en 1833 y en el ejército entero de Suiza en 1840. La cruz está formada por 5 cuadrados iguales.

NOTAS

i Nuestro reconocimiento al Club Alpino Eldense que ha recogido, conservado y practicado durante años la marcha *Dufour*, y que nos ha brindado la posibilidad de conocer los detalles de esta actividad sugiriéndonos su enorme potencial formativo.

ii Instrucciones sobre el dibujo de los reconocimientos militares. Otras obras suyas fueron: Memoria sobre la artillería de los antiguos y la Edad Media y Curso de táctica geométrica perspectiva.

iii En el año 1880 se crea el Centre Excursionista de Lo Rat Penat.

iv Es decir, un conjunto $V = \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$ cuyos elementos se llaman vértices, y un subconjunto A de VxV cuyos elemento se llaman aristas.

v Técnicamente ... $v_{i-1}\, v_i\, v_{i+1}$ ... de modo que para todo k, el par (v_k, v_{k+1}) es de A.

vi El carácter secuencial de todo camino es esencial al proceso de codificación *Dufour*. Esto significa en esencia una digitalización del camino.

vii Entenderemos por singularidad cada una de las intersecciones de dos o más aristas en las que se debe tomar una decisión sobre qué camino seguir.

viii Esta condición es ajena al sistema de representación propiamente dicho. Si no se proporciona, no necesariamente se puede asociar unívocamente un camino al mapa *Dufour*.

ix Por ejemplo, las Rutas matemáticas o los concursos de Fotografía Matemática.

x Rallies matemáticos, gymkhanas matemáticas,... En esencia, se aprovechan estas actividades para realizar tareas de estimación y medición que habitualmente no se hacen en el aula.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BORY, F. (1982): Génesis y desarrollo del Derecho Internacional Humanitario, Publicaciones CICR (Versión digital en http://www.icrc.org/icrcspa.nsf).

ESTEVE POVEDA, D. (1999): Memorias de un presidente: historia del Centro Excursionista Eldense, 1956-1981, Caja de Crédito de Petrel, Ayuntamiento de Elda.

RISCOS (1963): Boletín del Centro Excursionista Eldense, n.º 2.

VERDÚ, M.; PÉREZ, F.; RIQUELME, J. A. y MAESTRE, J. M. (1978): La Marcha Dufour. Manual de iniciación, Servicio de Información de Montaña del Club Alpino Eldense, Elda.

PRIMER CONGRESO INTERNACIONAL DE MATEMÁTICAS EN INGENIERÍA Y ARQUITECTURA

del 30 de mayo al 1 de junio de 2007

COMITÉ ORGANIZADOR:

Grupo de Investigación de la Universidad Politécnica de Madrid:
Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil.

Áreas Temáticas

. Aplicaciones científicas a la Ingeniería Topográfica, Geodésica y Cartográfica.
. Matemática Aplicada a la Ingeniería Civil.
. Matemática y diseño en Arquitectura.
. Matemáticas en las Ciencias de la Computación.
. Metodología y Didáctica de la Matemática Aplicada a la Ingeniería y Arquitectura.
. Matemáticas y Medio Ambiente.
. Desarrollos teóricos de la Matemática Aplicada.

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, C. y P.
de la Universidad Politécnica de Madrid.
www.caminos.upm.es/actividades/Congreso%20Matematicas/index.htm
email: congreso.m.i@caminos.upm.es

POLITÉCNICA

SUMA 54
Febrero 2007, pp.15-22

La Banda de Möbius: un camino que te llevará de cabeza

Este artículo se ha escrito con el objetivo de mostrar la superficie geométrica denominada banda de Möbius como herramienta para potenciar la motivación e interés de los alumnos, tanto de bachillerato como universitarios, en sus clases de Matemáticas. Esta superficie, que tiene varias propiedades muy curiosas, es en realidad un bucle girado, normalmente hecho de papel, fácilmente manipulable por los estudiantes. Para su construcción únicamente se necesitan lápiz, papel, pegamento y tijeras.

The goal of this paper is to show a geometrical surface named Möbius Band as an useful tool to achieve the motivation and interest from Secondary or university students when facing their mathematical classes. This surface, which has several strange properties is in fact a twisted loop which can be easily manipulated by students. To construct it, strips of paper, sticky type, scissors and a pen are only needed.

Este artículo se ha escrito con el objetivo principal de mostrar la superficie geométrica denominada banda de Möbius como herramienta para conseguir un mayor grado de motivación e interés de los alumnos, tanto de bachillerato como universitarios, en sus clases de Matemáticas.

El punto de partida de este artículo son dos experiencias relativas a la utilización de esta superficie, realizadas respectivamente en las clases de estos alumnos.

Tras una exposición detallada de ambas experiencias, se indican los objetivos que se pretende conseguir.

Estos objetivos están relacionados sobre todo con la introducción de los cuerpos geométricos en Secundaria.

Se muestra el proceso de construcción de la banda de Möbius y se comentan algunos aspectos curiosos relativos a esta superficie, como pueden ser el tema de los cortes en la Banda y algunas aplicaciones de la misma entre las que destacamos una totalmente sorpresiva a priori: la casa Möbius.

Para finalizar, se dan unas breves notas sobre la biografía del descubridor de la banda, August Ferdinand Möbius, que pueden ser útiles para el profesor en clase y así facilitar el uso de la Historia de las Matemáticas en las clases, lo cual también se ha considerado como uno de los objetivos a alcanzar.

Dos experiencias con la banda de Möbius

Iniciamos este artículo con la narración de dos experiencias que ponen de manifiesto cómo la utilización de la banda de Möbius en las clases de Matemáticas de cualquier nivel superior al de Primaria permite conseguir un mayor grado de motivación e interés en los alumnos. La primera de ellas tiene como actores principales a un profesor de Secundaria de esta asignatura y a un grupo de sus alumnos, mientras que en la segunda los protagonistas son los propios autores del artículo.

> *En los momentos de crisis, sólo la imaginación es más importante que el conocimiento.*
> Albert Einstein

Ana Belén Granados Pérez
Ana Grau de la Herrán
Juan Núñez Valdés
Universidad de Sevilla.
Sevilla

La primera experiencia fue realizada por un profesor de Matemáticas de un Centro de Secundaria a instancia suya.

Aprovechó parte de la clase, en la que iba a explicar a sus alumnos (de 1º de ESO) las primeras nociones sobre cuerpos geométricos, para sacar a tres alumnos a la pizarra, *X*, *Y* y *Z*, entregándole a cada uno un rectángulo de papel, de medidas 40 x 15 cm, con una recta pintada a lo largo y que lo dividía en dos mitades, y con las letras *A* y *B*, respectivamente, escritas en las esquinas de uno de los dos lados de menor longitud del papel, y las letras *A'* y *B'*, en las mismas esquinas del lado paralelo. Al mismo tiempo, le comentó al resto de los alumnos que les iba a explicar el tema de cuerpos geométricos pero que antes deseaba hacer una pequeña experiencia, para lo cual dividió la clase en tres grupos, también denominados *X*, *Y* y *Z*, y les dijo que los alumnos de cada grupo deberían hacer lo mismo que el alumno de la pizarra que tenía su misma letra. Todos los alumnos tuvieron que sacar una hoja de cuaderno grande, lo más parecida posible al rectángulo de papel, y pintar la línea en medio y las letras de las esquinas en la hoja. El profesor, mientras tanto, observaba muy fijamente la conducta de los alumnos en este proceso, para conocer, aunque fuese intuitivamente, si los alumnos parecían estar más motivados o interesados de lo habitual.

Los alumnos observaron que, una vez dada la vuelta completa a un cilindro, el lápiz volvía al mismo punto del que había salido.

Cuando todos los alumnos tenían un rectángulo, el profesor se dirigió individualmente a cada uno de los alumnos de la pizarra, de forma que ninguno de ellos pudiera escuchar lo que les decía a los otros dos, y les indicó que las intrucciones que él iba a proporcionarles, deberían ellos transmitírselas a los compañeros que formaban su grupo y pedirles que las siguieran.

El profesor le dijo al alumno *X* que escribiese en el papel lo siguiente:

> Un cilindro es un cuerpo geométrico redondo que tiene dos bases circulares planas y una superficie lateral curva.

Al alumno *Y*, el profesor le dijo que doblase el papel de forma que la esquina *A* coincidiese con la *A'* y la *B* con la *B'*, respectivamente, y que el cuerpo que se había formado era un cilindro.

Al tercero, *Z*, le dijo que en primer lugar hiciese exactamente lo mismo que *Y*, pero que después deshiciese la operación y la repitiera, pero que ahora antes de doblar el papel lo girase haciendo coincidir ahora *A* con *B'* y *B* con *A'*. Cuando *Z* realizó esta operación, el profesor le dijo que el cuerpo que acababa de obtener no era un cilindro, como la primera vez, sino otro cuerpo geométrico que se llama *banda de Möbius*. El profesor le dijo también a *Z* que una de las diferencias fundamentales entre ambos cuerpos es que el cilindro es orientable y la banda de Möbius no. Para aclarar algo más este concepto, el profesor les dijo que los de los grupos *Y* y *Z* colocasen el capuchón de un bolígrafo o un pequeño lápiz con la punta hacia arriba en uno de los puntos de la línea central previamente dibujada en el papel y que lo desplazasen en esa forma a lo largo de esa línea. Los alumnos del grupo *Y* observaron que una vez dada la vuelta completa al cilindro el lápiz volvía al mismo punto del que había salido y además, en la misma posición de la que había partido, mientras que los alumnos del grupo *Z* vieron que, realizando la misma operación, el lápiz volvía al mismo punto del que salió, pero ahora en posición invertida, es decir, boca abajo.

Servilletero Zara Home. Foto CTB

Las dos preguntas que el profesor les hizo finalmente a todos los alumnos fueron: ¿Cuál de los tres grupos de alumnos pensaban ellos que iba a estar más motivado para recibir las explicaciones del profesor sobre los cuerpos geométricos? ¿Habían estado contentos con el grupo que les había tocado, o hubiesen deseado estar en otro?

Evidentemente, es muy difícil cuantificar las respuestas, y de hecho el profesor no lo hizo de manera explícita, pero sí nos observó que eran los alumnos del grupo *Z*, el de la banda de Möbius, los que habían mostrado un mayor interés por seguir con gran atención las explicaciones posteriores, incluso atreviéndose a formular preguntas que se les habían ocurrido a ellos mismos como resultado de la experiencia vivida.

Animado por esta experiencia, el profesor autor de este artículo pasó a repetirla en sus clases universitarias de uno de los grupos de la asignatura de *Geometría Local de Curvas y Superficies*, que imparte en el tercer curso de la licenciatura, en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla.

Por motivos obvios, esta nueva experiencia se realizó sin tanta parafernalia como en el caso de Secundaria y, por supuesto, respetándose ahora completamente el rigor matemático al hablar de superficies y cuerpos, si bien manteniendo en esencia las preguntas a los tres alumnos y dedicándole a la discusión común con la totalidad del grupo un tiempo mucho mayor que el que la obligación de impartir el temario completo en Secundaria permitía.

Resultado directo de la misma fue la petición al profesor por parte de dos alumnas de la clase de permitirles realizar un trabajo sobre la citada banda, en el que pudieran profundizar algo más en sus propiedades y aplicaciones, lo que aprovechó a su vez el profesor para solicitarles que consideraran también su utilización como recurso didáctico en la explicación de determinados temas de Matemáticas de Secundaria y Bachillerato. En esto radica la génesis de este artículo.

Objetivos y motivación

Como ya se ha comentado anteriormente, este artículo se ha escrito con el objetivo principal de mostrar la banda de Möbius como ayuda para facilitar la motivación y el interés de los alumnos, tanto de Bachillerato como universitarios, a la hora de afrontar sus clases de Matemáticas.

No obstante, nos parece conveniente desglosar este objetivo principal en otros más particulares, destinados cada uno de ellos a tratar aspectos parciales relativos al estudio de esta superficie y a su aplicación a la metodología a utilizar por el profesor de Matemáticas en sus clases de esta asignatura.

Un aspecto consiste en aprovechar el conocimiento de la generación y utilización de esta superficie para usar la Historia de las Matemáticas en la introducción de determinados temas del currículo, lo que no debe limitarse a la mera indicación de unos cuantos datos biográficos, sino que debe ser aprovechada para explicar a los alumnos cómo surgió el resultado del que se trate, sus antecedentes, las dificultades que en esa época existían para obtenerlo y su relación con otros resultados, tanto de Matemáticas como de otras disciplinas.

Por otra parte, el estudio de los cuerpos geométricos, por sus propias connotaciones con la vida real, resulta en general interesante para los alumnos de secundaria. Entendemos que la forma de abordar este tema que hemos presentado anteriormente puede resultar eficaz a la hora de presentar el estudiar los cuerpos geométricos.

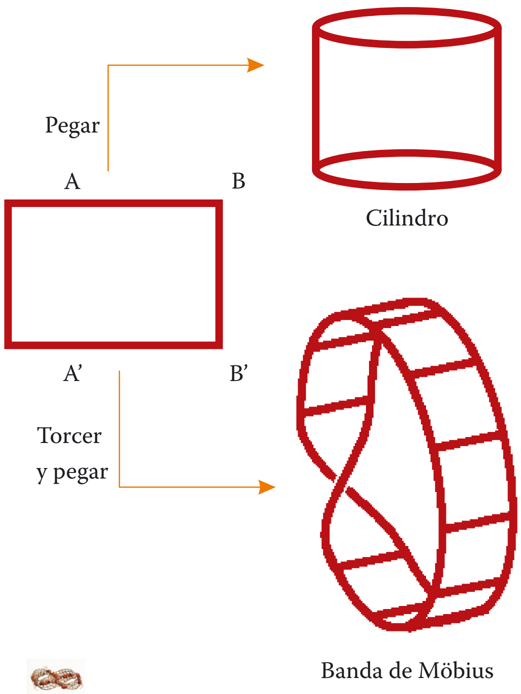
Por todo ello, los objetivos que nos hemos planteado al escribir este artículo pueden resumirse en los siguientes:

1.- Dar a conocer a los alumnos de Secundaria (y a los universitarios, en su caso) la superficie geométrica conocida como banda de Möbius y utilizarla como instrumento de motivación en el aprendizaje de determinados temas del currículo.
2.- Utilizar la Historia de las Matemáticas como herramienta de apoyo para las clases de Matemáticas de Secundaria (este objetivo es naturalmente extrapolable a la enseñanza universitaria).
3.- Mostrar una introducción al estudio de los cuerpos geométricos amena, sencilla y agradable en la enseñanza secundaria.
4.- Estimular la capacidad de pensamiento y de razonamiento de los alumnos de secundaria con la presentación de situaciones más o menos ingeniosas, distintas de las tradicionales.

Construcción de la banda de Möbius

En esta sección se indica cómo construir en la práctica una banda de Möbius. Nuestra intención es que el alumno pueda fabricarla de manera sencilla a partir de unas mínimas instrucciones. Como materiales a utilizar se necesitan únicamente: tiras de papel, pegamento y tijeras.

Para fabricar la banda basta coger una tira rectangular de papel y algo de pegamento. Girar uno de los extremos del papel y después unir ambos extremos (eso debería dejar a la tira de papel con un medio giro dentro). La superficie obtenida es la denominada Banda de Möbius. Nótese que si se realiza esta misma operación sin girar uno de los extremos del papel, la figura que se obtendría es un cilindro (ver la figura siguiente).



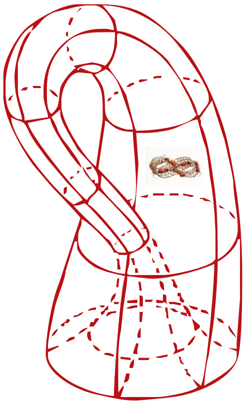
Cortes en la banda

Comenzamos esta sección refiriendo una de las anécdotas que le ocurrió a un grupo de alumnos universitarios de la ya citada asignatura de Geometría Local, durante el curso académico 1999-2000. Eran los organizadores de la exposición de curvas y superficies, celebrada en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla, con motivo de la conmemoración del año 2000 como el Año Mundial de las Matemáticas (una descripción completa de esta Exposición puede verse en —Aguilera y otros—).

Un visitante de la Exposición, que creemos que era otro alumno de la Facultad, preguntó a los alumnos organizadores que estaban en aquel momento en labores de *guías* de la Exposición si sabían qué se obtenía al cortar una banda de Möbius longitudinalmente por su mitad. Éstos le contestaron, quizás sin meditarlo mucho, que *se obtendrían dos bandas de Möbius*. El visitante no sólo se limitó a responderles negativamente, sino que pasó directamente a la acción construyendo una banda con una tira de papel que traía preparada y cortándola con unas tijeras que también traía, obteniendo así otra banda de Möbius con dos rizos. Ya no preguntó nada más, sino que volvió a cortar de igual forma esta nueva banda para hacer ver a los organizadores que lo que se obtenía ahora eran dos bandas de Möbius con dos rizos cada una, enlazadas.

Esta primera curiosidad hizo que posteriormente los alumnos organizadores pidiesen ayuda al profesor de la asignatura para estudiar este tipo de hechos con mayor detenimiento, encontrando que esta propiedad no sólo es característica de la banda de Möbius, sino que se verifica en general en todas aquellas bandas generadas mediante vueltas o rizos. Así, dada una banda con n medios rizos, con n impar, al cortarla longitudinalmente por su mitad quedaría una nueva banda con $2n+2$ medios rizos, mientras que si la banda tiene $2k$ medios rizos, al cortarla longitudinalmente por su mitad quedarán 2 bandas con $2k$ medios rizos cada una, enlazadas k veces (véase Gardner, 1984).

Al respecto presentamos aquí (parte inferior de la página) una poesía (tanto en su versión original en inglés como traducida), que aparte de explicarnos clara y concisamente el hecho anterior, nos relaciona de alguna forma la banda de Möbius con otra superficie no menos conocida denominada botella de Klein:



Pasamos a continuación a analizar las particularidades de una banda de Möbius al ser cortada transversalmente. Aconsejamos a los lectores que comprueben experimentalmente, a la vez que leen, lo fascinante que puede llegar a ser la banda de Möbius. Para ello necesitará varias tiras de papel, pegamento, tijeras y un bolígrafo, lápiz o rotulador.

Empecemos con algo sencillo: construyan con la primera tira de papel una banda de Möbius (si desean pueden comprobar con el bolígrafo que tiene una sola cara y un solo borde) y posteriormente corten la banda por el medio, tal como se muestra en la imagen de la página siguiente. Un tratamiento más completo del tema puede verse en (enlace web tercero), de donde ha sido extraída la citada imagen.

A mathematician confined
that a Mobius band is one–side,
and you will get quite a laugh
if you cut one in half.
For it stays in one piece when divided.

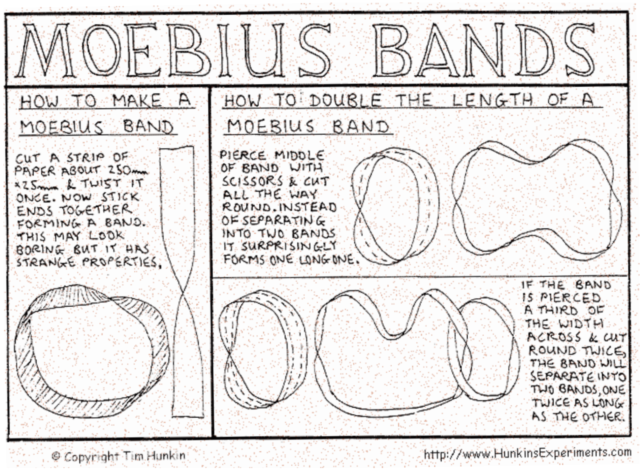
A mathematician named Klein
thought the Möbius band was divine.

Said he: “if you glue
the edges of two,
you will get a weird bottle like mine”.

Un matemático susurró
Que la banda de Möbius tiene una sola cara,
Y que tú reirás mucho
Si la cortas por la mitad.
Pues se queda de una pieza al dividirla.

Un matemático llamado Klein
Pensó que la banda de Möbius era divina.

Dijo él: “Si tu pegas
Los bordes de dos,
Obtendrías una extraña botella como la mía”.



Al realizar esta operación se pueden dar cuenta que siguen teniendo una única banda, más grande y más delgada. Lo que pasa es que esta banda ya no es una banda de Möbius (es una banda *de Möbius* pero creada con dos giros) pues si lo comprueban esta banda tiene dos caras y dos bordes.

Si se repite la operación obtenemos dos bandas entrelazadas (ambas del mismo tipo que el anterior, es decir, dos caras y dos bordes).

Invitamos al lector a que experimente con el resto de tiras las diversas posibilidades, es decir, qué pasa con una banda con más giros, o haciendo más cortes.

Algunas aplicaciones de la banda de möbius

Realizamos ahora un breve comentario sobre algunas de las aplicaciones prácticas, curiosas en su mayor parte, de la banda de Möbius.

En 1923, Lee De Forest obtuvo una patente norteamericana referente a una película cerrada en forma de banda de Möbius sobre la cual podía grabarse el sonido por ambas caras, o mejor dicho, por su única cara. Más recientemente, la misma idea ha sido aplicada a cintas magnetofónicas, con lo que la cinta retorcida puede funcionar el doble de tiempo que lo que duraría otra normal.

Se han otorgado también diversas patentes para cintas transportadoras diseñadas en forma de banda de Möbius, a fin de que sufran igual desgaste por ambos lados. En ese sentido, la B.F. Goodrich Company, de Estados Unidos, patenta en 1957 su idea de una cinta transportadora de caucho que se usa para sustancias calientes o abrasivas. Dándole media vuelta en la forma de banda de Möbius, esta cinta se desgasta por igual por su único lado.

En 1963, Richard L. Davis, físico de Sandia Corporation de Alburquerque, inventó una resistencia desprovista de reactancia, fundada en la banda de Möbius. Adosando finas tiras metálicas a las dos caras de la cinta aislante y formando con ellas una banda de Möbius de triple capa, Davis descubrió que, al fluir impulsos eléctricos en ambos sentidos en torno a la banda, ésta adquiría todo tipo de propiedades eléctricas deseables (revista *Time* del 25 de septiembre de 1964, y Electronic Illustrated, noviembre de 1969, pp. 76 y siguientes).

Los artistas gráficos también se han valido de esta banda tanto para fines publicitarios como artísticos. La banda de Mobius ha tenido también un papel destacado en numerosos cuentos de ciencia ficción (veáse Rick Grant, 1949).

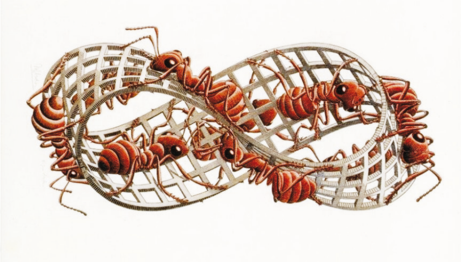
También se sabe de mecanógrafos muy rápidos que encontrando fastidioso tener que detenerse a meter en la máquina hojas nuevas en blanco, han optado por utilizar papel en rollo. Si hubieran usado un largo bucle de retorcido habrían podido además escribir por ambos lados del papel.

Woldor R. Tobler sugirió en cierta ocasión realizar un mapamundi sobre una banda de Möbius, de forma que el borde coincidiera con los polos y los paralelos y meridianos quedaran uniformemente separados. De trazarse adecuadamente se podría pinchar el mapa por un punto cualquiera y al asomar la punta por el otro lado señalaría el antípoda esférico.

La banda de Möbius es también utilizada en las correas de transmisión de los coches, como por ejemplo, en la correa del ventilador. Con una correa ordinaria sólo se desgastaría la parte en contacto con las ruedas (la interior), por lo que ésta se estropearía antes que la parte exterior. Como la banda de Möbius tiene una sola cara, su recubrimiento dura más y los desgarros en la correa son menos frecuentes haciendo que dure más.

Sin embargo, una de las aplicaciones más curiosas de esta superficie es la denominada *Casa Möbius*, un proyecto de vivienda que representa ciertos aspectos característicos de la arquitectura de finales del siglo XX. Las notas que siguen están sacadas principalmente de un ensayo sobre la arquitectura contemporánea, titulado *(Dis)continuidad*, de los arquitectos argentinos Gabriel Baril y Ludmila Crippa, publicado en Julio de 2004 (véase Baril y Crippa).

La denominada *casa Möbius* es un proyecto de Ben Van Berkel y Caroline Bos, arquitectos que empezaron a trabajar juntos en 1988, fundando un estudio 10 años después, llamado UN Studio de Arquitectura (véase Massad y Yeste, 1998). La casa fue realizada entre los años 1993 y 1995, y se encuentra ubicada en Het Gooi, zona residencial privilegiada situada a las afueras de Amsterdam (Holanda), lugar en el que predominan extensas parcelas de terreno en medio de bosques, colinas y praderas. El nombre de la casa y su diseño corresponden a la banda Möbius. Ya en el año 1963, Maurits Cornelius Escher (genial autor holandés de dibujos y diseños sobre temas matemáticos, 1898–1972) representaba esta superficie en uno de sus dibujos, titulado Cinta de Möbius II, mediante una cadena de hormigas, marchando una tras otra, sin principio ni fin (el dibujo de la figura, junto a otros similares, pueden extraerse del enlace web primero).



Los clientes que realizaron a Van Berkel y Bos el encargo de construir esa casa eran una pareja casada que deseaba vivir y trabajar en la casa en forma separada. Ellos querían habitar el mismo recinto, pero tener asignadas superficies diferentes e incluso moverse por rutas distintas por el interior de la casa, de forma que coincidiesen sólo en ciertos puntos. Su intención, además, no era sólo tener un alojamiento diferente, sino que el propio edificio planteara una arquitectura innovadora. Todos estos hechos generaron la necesidad de diseñar una vivienda con dos espacios de trabajo bien diferenciados y que además rompiese moldes previamente establecidos.

Para construir la casa, Van Berkel comienza por hacer abstracción de estos datos y generar un diagrama transformando a cada habitante en una línea que representa el recorrido de cada uno de ellos dentro de la vivienda, en un ciclo de 24 horas de trabajo y de vida. Estas dos líneas se mueven de forma fluida e independiente y por momentos se cruzan. Ésta fue la principal razón que llevó a los arquitectos a trabajar primero con dos materiales básicos: el hormigón y el vidrio, y después a adoptar el concepto de la banda de Möbius como representación del despliegue del tiempo y el movimiento continuo.

No obstante, para ser fieles a la verdad hay que indicar que esta idea de asignarle la forma y las propiedades de un cuerpo geométrico a una construcción arquitectónica no es original de los dos autores anteriormente mencionados. Ya mucho tiempo antes esta idea se había plasmado en realidad. Como ejemplos de ello pueden ser citados, entre otros, el arquitecto alemán Ludwig Mies van der Rohe (1886–1969), que construyó la casa Farnsworth en 1950, en Plano (Illinois, USA), junto al río Fox, que se ha convertido en una de las residencias más estudiadas (y también más criticadas) de la arquitectura del pasado siglo XX; el arquitecto Frank Lloyd Wright (1869–1939), autor de la denominada casa de la Cascada, construida entre 1936 y 1939 en Bear Pun (Pennsylvania) y el arquitecto suizo Le Corbusier (1887–1965), autor de la muy conocida Ville Savoye.

En la página siguiente mostramos diferentes fotos de la casa de Möbius.

Como aplicaciones finales, y a modo de comentario, indicar que también la banda de Möbius es utilizada en la moda. Pueden destacarse al respecto las prendas en forma de esta banda que lucen orgullosas la mujeres de las imágenes.

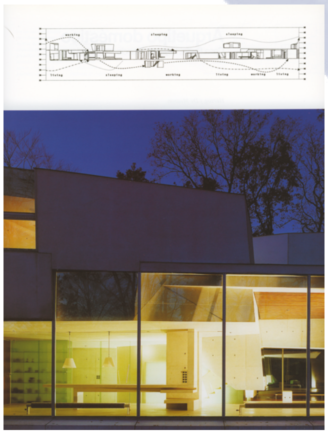
Biografía de August F. Möbius

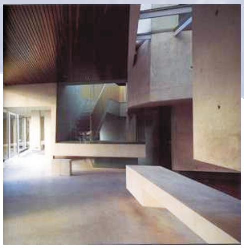
Para atender finalmente uno de los objetivos parciales que nos fijamos a la hora de escribir este artículo, damos a continuación unas breves notas sobre la biografía de Möbius, extraídas en su mayor parte del enlace web primero.

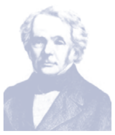
August Ferdinand Möbius (de ahora en adelante Möbius) nació en Schulpforta (Sajonia, actual Alemania) casi al principio de la última década del siglo XVIII, exactamente el día 17 de Noviembre de 1790. August fue el único hijo del matrimonio, ya que su padre murió muy poco tiempo después, a los tres años de su nacimiento.

Möbius fue educado en su propia casa hasta la edad de 13 años, no asistiendo a la escuela hasta 1803, año en el que ingresó en un colegio de su ciudad, comenzando posteriormente sus estudios universitarios en la Universidad de Leipzig en 1809.

Los dos materiales de obra esenciales, el hormigón y el vidrio, intercambian papeles y se emplean para realizar el mobiliario y los tabiques, respectivamente.







August Ferdinand Möbius

En 1813 Möbius viajó a Göttingen donde estudió astronomía bajo la dirección de Karl Friedrich Gauss (1777–1855). Posteriormente, se trasladó desde Göttingen a Halle, donde fue dirigido por Johann Pfaff (1765–1825), antiguo profesor de Gauss. Al respecto, permítasenos referir aquí una anécdota sobre Gauss y Pfaff, que ilustra convenientemente el prestigio que ambos matemáticos han llegado a alcanzar:

> En cierta ocasión, al insigne matemático francés Pierre Simón de Laplace (1749–1827) le fue preguntado quién era en su opinión el mejor matemático alemán del cual él había tenido referencias. Cuando Laplace contestó que era Pfaff, el interlocutor le preguntó, extrañado: —¿Pfaff?, pero, ¿y Gauss? Y Laplace contestó sin vacilar: no, Gauss no. Gauss es el mejor matemático del mundo.

En 1844 Möbius consiguió una plaza de Profesor de Astronomía a tiempo completo en la Universidad de Leipzig, ciudad en la que había estado trabajando en la reconstrucción del Observatorio, desde 1818 hasta 1821, supervisando todo el proyecto. Previamente, en 1820, Möbius se había casado con Margret, con la que tuvo una hija y dos hijos, aunque ella murió muy joven, cuando sólo tenía 40 años. En 1848 llegó a ser el Director del Observatorio.

Con referencia a sus descubrimientos científicos, Möbius publicó trabajos muy importantes en Matemáticas y Astronomía, casi todos ellos en el *Crelle's Journal*, por aquel entonces la primera revista dedicada exclusivamente a artículos matemáticos. Antes de la aparición en el universo matemático del *problema de los cuatro colores*, propuesto por primera vez por Francis Guthrie a su hermano Frederich en 1852, ya Möbius había propuesto en 1840 el siguiente, algo más elemental:

> Había un rey con 5 hijos. En su testamento establecía que a su muerte su reino debía ser dividido por sus hijos en 5 regiones de forma que cada una debía tener frontera común con cada una de las otras cuatro. ¿Podían satisfacerse todos los términos de su testamento?

La respuesta es negativa y fácil de demostrar. En una memoria presentada a la Academia y sólo descubierta después de su muerte, Möbius discutía las propiedades de las superficies de una sola cara, incluyendo entre ellas a la "Banda de Möbius", que él había descubierto en 1858. No obstante, parece ser que Möbius no fue el primero en describir esa figura u objeto matemático que hoy en día conocemos como la banda de Möbius, dado que no existe ningún criterio, fecha de publicación o de descubrimiento que preceda al obtenido previamente por el matemático inglés Johann Benedict Listing (1808–1882).

Möbius murió el 26 de Septiembre de 1868, a la edad de 78 años, en Leipzig. El historiador alemán Moritz Cantor dice de él que todos los días, antes de salir a pasear, repetía el acrónimo que el propio Möbius llamaba (en alemán) *3S und Gut*, formado por las iniciales de todos aquellos objetos que él no deseaba olvidar: *Schlüssel* (llaves), *Schirm* (paraguas), *Sacktuch* (pañuelo), *Geld* (dinero), *Uhr* (reloj) y *Taschenbuch* (cuaderno de notas). ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGUILERA,C. M.; FERNÁNDEZ, I.; MACÍAS, M. J.; MONTAÑO, A.; NÚÑEZ, J.; PÉREZ, S.; RIVERO, I.; ROMERO, M. J.; SÁNCHEZ, J. I. y SERRATO, A. M. (2001): "Exposición de curvas y superficies: una experiencia extra-académica universitaria", *SUMA* n.º 36 (2001), 77–84.

BARIL, G. y CRIPPA, L. (2004): *(Dis)continuidad (ensayo sobre la Arquitectura contemporánea)*, Cátedra Arq. Mele. Web: http://www.arquimaster.com

GARDNER, M. (1984): *Festival Mágico-Matemático*, Alianza Editorial, Madrid.

GRANT, R. (1999): *No-died profesor*, The wall of darkness.

MASSAD, F. y YESTE, A. G. (1998): "En tiempos de la hipermodernidad. Entrevista con Ben Van Berkel", SUMMA 31, Ed. DONN S.A., Buenos Aires, Argentina.

Enlaces web:

http://www.mathcurve.com/surfaces/mobius/mobius.shtml (sobre la banda de Möbius en general).

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/BiogIndex.html (sobre la biografía de A. F. Möbius).

http://www.HunkinsExperiments.com (sobre cortes en la banda de Möbius).

SUMA 54
Febrero 2007, pp. 23-29

Incursión en el ámbito de las dos variables: Optimización usando argumentos gráficos

Cuando enseñamos a los alumnos a resolver problemas, solemos abusar de la utilización de algoritmos encaminados a encontrar la solución óptima, evitando las dificultades que puede suponer la introducción de reglas más o menos complejas en el diseño de dicho algoritmo. Pero resolver un problema es mucho más que aplicar un algoritmo de forma mecánica, supone encontrar una respuesta coherente a una serie de datos relacionados dentro de un contexto. Es por esto que presentamos esta práctica, donde la utilización de un algoritmo para resolver un problema nos lleva a encontrar soluciones que descartaremos como útiles.

When we are teaching students to solve a maths problem and we want them to find the best solution, we are used to using algorithms too much avoiding the difficulties, which arise with the use of more or less complex rules when designing this algorithm. But solving problems is more than simply applying an algorithm mechanically, it means finding coherent answer for a series of data related with a context. For this reason to solve a problem leads us to the discovery of some solutions that we will rule out as useful.

Las matemáticas han sido desde siempre fundamentalmente procedimentales. Por eso, su contribución a los objetivos generales de bachillerato se centra en su papel de instrumento para una comprensión, adecuada a la edad del alumno, del entorno. En consecuencia, es necesario que los alumnos se convenzan de este papel de las matemáticas que constatan en la práctica la potencia de los modelos matemáticos para interpretar la información y tomar decisiones y, al mismo tiempo, que conozcan las limitaciones de los procedimientos y mantengan una actitud vigilante ante los posibles errores que se puedan presentar.

Muchas veces los resultados teóricos obtenidos después de una optimización llevada a cabo para dar respuesta a un problema matemático, pueden distar de las soluciones prácticas utilizadas en la vida real. Es por esto que presentamos la siguiente práctica y sus sucesivas resoluciones hasta encontrar la óptima aplicada al entorno inmediato.

La práctica consiste en calcular las dimensiones mínimas que ha de tener un ortoedro para que pueda albergar un litro de volumen. Para encontrar la solución utilizaremos el programa informático *Derive*, al mismo tiempo que introduciremos el concepto de curva de nivel para resolver el problema de una forma digamos un tanto alejada del método estándar. La primera solución nos ofrece un resultado óptimo pero diferente de la realidad, por ello reformularemos el problema, teniendo en cuenta la forma en que se construye y comercializa un tipo determinado de envase en forma de brick. Nos daremos cuenta que el resultado final no es el que esperábamos y, otra vez, tendremos que replantearnos nuestra hipótesis de partida para resolver el problema. Introduciendo la relación áurea entre las caras del ortoedro llegaremos a la solución digamos *comercial*.

Esta práctica puede ser desarrollada en 2.º de bachillerato[i] y puede ayudar a conseguir algunos de los objetivos generales de las matemáticas de bachillerato, como pueden ser:

1.- Buscar diversos procedimientos para la resolución de problemas, tendiendo a la optimización de los procesos.
2.- Usar la calculadora y el ordenador de forma habitual y con soltura, para hacer todas aquellas tareas que los medios tecnológicos realizan mejor o de forma más rápida y segura, y tener constancia y control de sus limitaciones.

Jesús Ríos Garcés
IES de La Sénia. Tarragona
Universidad Jaume I. Castellón
Francisco José Monserrat Delpalillo
Universidad Jaume I. Castellón

Para ello vamos a necesitar una serie de conocimientos previos como el concepto de función y de su gráfica, estar familiarizados con los problemas de optimización de una variable y, también, con los lugares geométricos definidos por ecuaciones implícitas (recta, plano, circunferencia...). Además será necesaria la utilización del programa informático Derive, ya que nos servirá para intuir gráficamente las soluciones que posteriormente tendremos que descartar como soluciones *útiles*.

A partir de estos conocimientos y esta práctica, se pretende:

1.- Mostrar cómo la matemática ya conocida por el alumno puede aplicarse a aspectos inmediatamente identificables como útiles y próximos.
2.- Reforzar los conceptos de función, gráfica y lugar geométrico.
3.- Desarrollar la visión espacial.
4.- Introducir al alumno en problemas de optimización de dos variables, sin necesidad de más herramientas que una pequeña extensión de ciertos conocimientos previos.
5.- Introducir el concepto de curvas de nivel y su utilidad para resolver ciertos problemas de matemáticas.
6.- Familiarizarse con el programa informático Derive

El problema sobre el que va a girar todo este artículo es el siguiente:

PROBLEMA

Calcular las dimensiones de un envase en forma de *brick*, de 1 litro de volumen, realizado con la menor cantidad de cartón posible.

Este problema se puede enunciar en términos matemáticos de la siguiente forma:

Enunciado 1
Calcular las dimensiones de un ortoedro de 1 litro de volumen y con superficie mínima.

A partir de aquí definimos la función superficie

$$a(x, y, z) = 2\,(xy + xz + yz)$$

con la condición $z = 1/xy$, es decir volumen igual a 1.

Teniendo en cuenta que $z = 1/xy$, obtenemos que la función objetivo sería:

$$f(x,y) = a(x,y,\frac{1}{xy}) = \frac{2(x^2y^2 + x + y)}{xy}$$

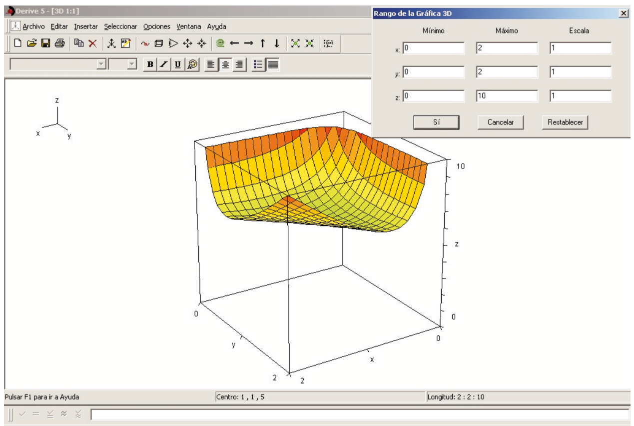
Utilizando el programa Derive, introducimos las expresiones anteriores tal y como se muestran a continuación:

$$\#1:\quad a(x,\ y,\ z) := 2\cdot(x\cdot y + x\cdot z + y\cdot z)$$

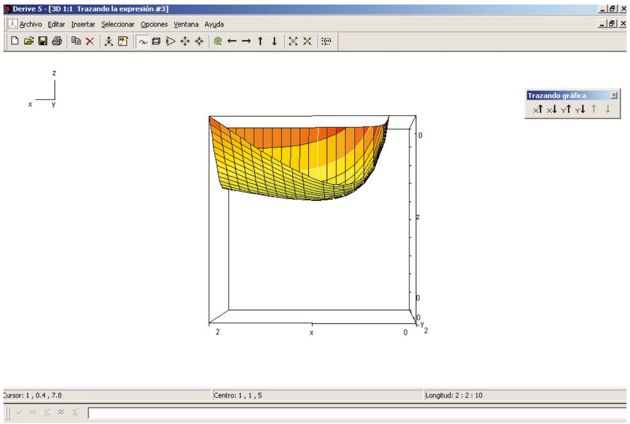
$$\#2:\quad f(x,\ y) := a\left(x,\ y,\ \frac{1}{x\cdot y}\right)$$

$$\#3:\quad \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2 + x + y)}{x\cdot y}$$

Si dibujamos la superficie definida por la expresión #3 obtenemos:

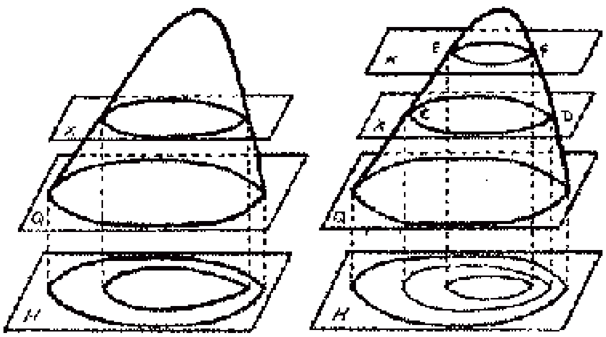


Teniendo en cuenta las capacidades gráficas de Derive para efectuar rotaciones de la superficie anterior, podremos intuir cual será la solución:



Ésta parecería ser $x = 1$dm, $y = 1$ dm, $z = 1$ dm y, con ello la superficie mínima será de 6 dm2. Pero, claro está, no es la única manera de encontrar la solución y en absoluto la más rigurosa, de todas formas sólo queremos intuirla para ver que no nos va a ser *útil*.

Otra manera de constatar gráficamente el resultado es mediante la utilización de curvas de nivel:

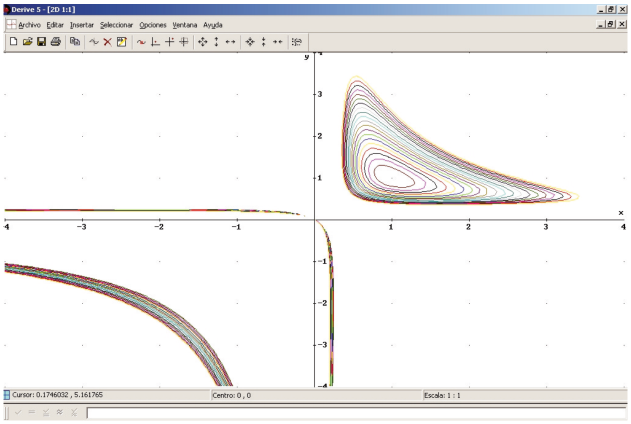


Recordemos que las curvas de nivel correspondientes a la gráfica de una función *f(x,y)* se obtienen representando en el plano *XY* las curvas dadas por las funciones implícitas de la forma *f(x,y) = k*, siendo *k* un número real que forma parte del recorrido de la función *f*.

A continuación buscamos, con la ayuda de Derive, todas las curvas de nivel para valores de *k* desde 6 hasta 8 de 0,1 en 0,1.

El resultado es el que se muestra en la parte inferior de esta página, *#4* y *#5*.

Si ahora representamos las curvas de nivel anteriores, obtenemos el gráfico siguiente:



Observando detenidamente las curvas de nivel, parece ser que la solución la encontramos en $x = 1$, $y = 1$. Para asegurarnos, calculamos con la ayuda de Derive, las curvas de nivel con una amplitud menor, es decir, las curvas de nivel para valores de *k* desde 6 hasta 6,01 de 0,001 en 0,001 (ver *#6* y *#7* en la parte superior de la página siguiente).

#4: VECTOR(f(x, y) = k, k, 6, 8, 0.1)

#5:

$$\left[\frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=6,\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{61}{10},\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{31}{5},\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{63}{10},\right.$$

$$\frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{32}{5},\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{13}{2},\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{33}{5},\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{67}{10},$$

$$\frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{34}{5},\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{69}{10},\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=7,\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{71}{10},$$

$$\frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{36}{5},\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{73}{10},\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{37}{5},\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{15}{2},$$

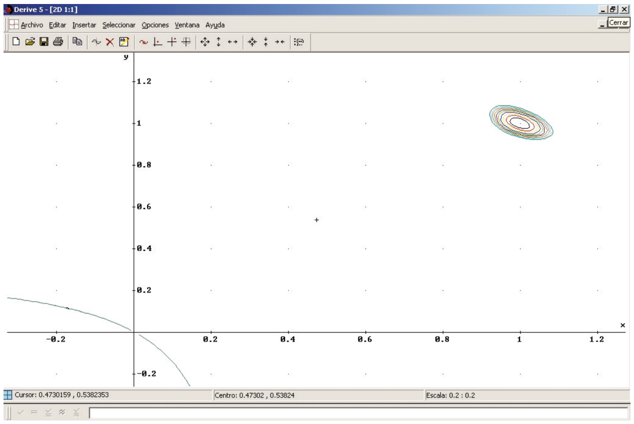
$$\frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{38}{5},\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{77}{10},\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{39}{5},\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{79}{10},$$

$$\left.\frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=8\right]$$

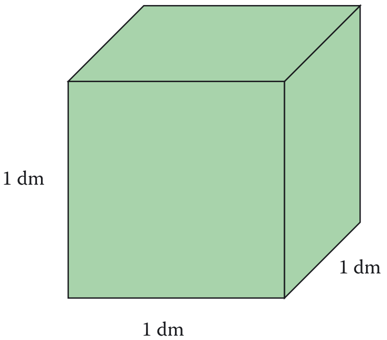
$$\#6:\quad \text{VECTOR}(f(x, y) = k, k, 6, 6.01, 0.001)$$

$$\#7:\quad \left[\frac{2\cdot(x^2\cdot y^2 + x + y)}{x\cdot y} = 6, \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2 + x + y)}{x\cdot y} = \frac{6001}{1000}, \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2 + x + y)}{x\cdot y} = \frac{3001}{500}, \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2 + x + y)}{x\cdot y} = \frac{6003}{1000}, \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2 + x + y)}{x\cdot y} = \frac{1501}{250}, \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2 + x + y)}{x\cdot y} = \frac{1201}{200}, \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2 + x + y)}{x\cdot y} = \frac{3003}{500}, \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2 + x + y)}{x\cdot y} = \frac{6007}{1000}, \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2 + x + y)}{x\cdot y} = \frac{751}{125}, \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2 + x + y)}{x\cdot y} = \frac{6009}{1000}, \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2 + x + y)}{x\cdot y} = \frac{601}{100}\right]$$

la representación gráfica sería:



Gráficamente obtenemos que, como se intuía, la solución es x =1, y =1 y la solución al problema sería el siguiente cubo.

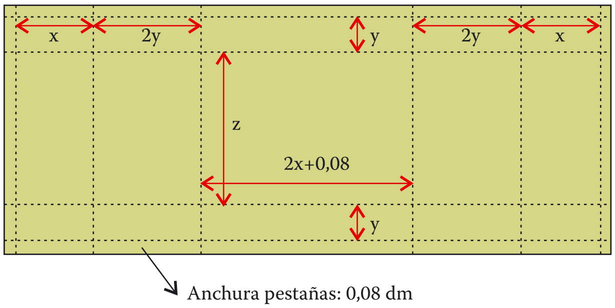


Pero esta solución dista bastante de los envases de 1 litro que se utilizan normalmente para la fabricación y distribución de productos como zumos, leches...

Es por ello que vamos a plantear este mismo problema en términos, digamos, más realistas.

Enunciado 2

Calcular las dimensiones de un ortoedro de 1 litro de volumen y con superficie mínima, teniendo en cuenta la forma en la que realmente se construye un envase en forma de brick: mediante el plegado de un rectángulo.



Con lo que el brick que tendríamos que calcular tendría las siguientes dimensiones

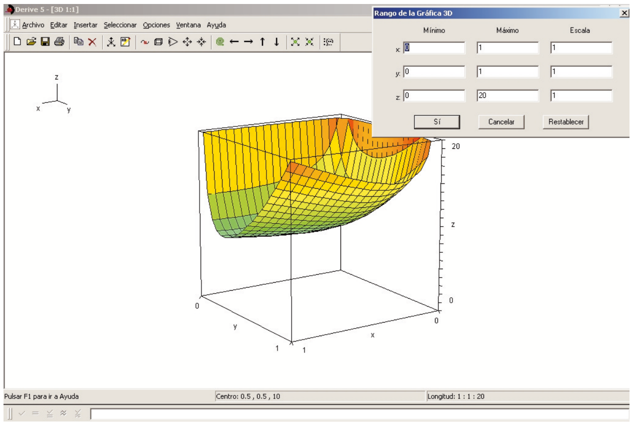
A continuación, procedemos de manera análoga a la del primer enunciado, utilizando Derive y las funciones *a(x, y, z)* y *f(x, y)*.

$$\#1:\quad a(x, y, z) := (2\cdot y + z + 2\cdot 0.08)\cdot(4\cdot x + 4\cdot y + 3\cdot 0.08)$$

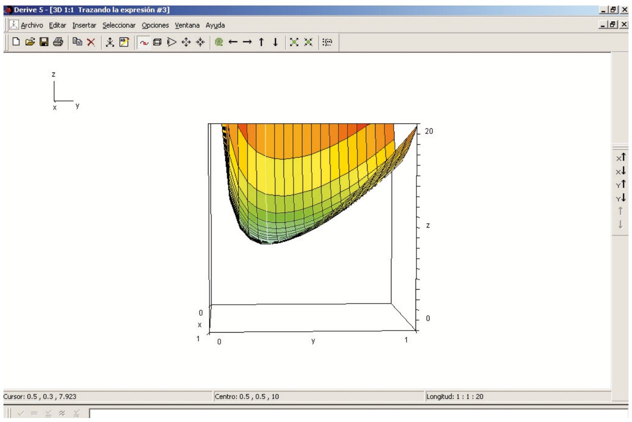
$$\#2:\quad f(x, y) := a\left(x, y, \frac{1}{4\cdot x\cdot y + 0.16\cdot y}\right)$$

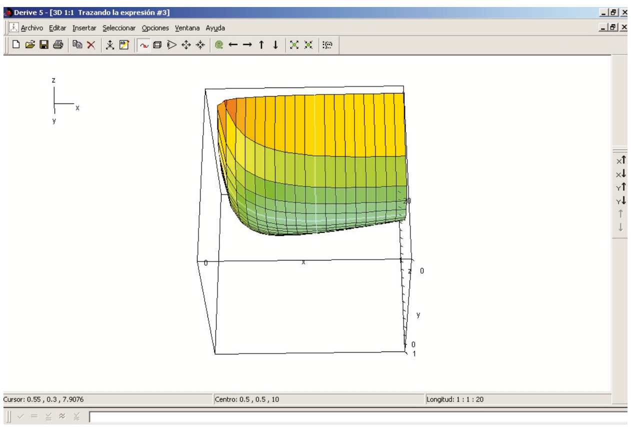
$$\#3:\quad \frac{(50\cdot x + 50\cdot y + 3)\cdot(200\cdot x\cdot y\cdot(25\cdot y + 2) + 200\cdot y^2 + 16\cdot y + 625)}{1250\cdot y\cdot(25\cdot x + 1)}$$

Dibujamos la superficie que viene dada por la expresión *#3* anterior.



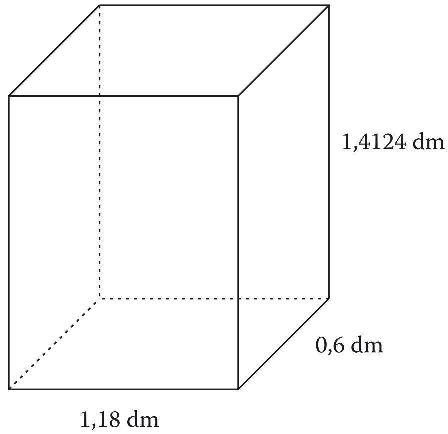
Y tratamos de intuir mediante diversas rotaciones de la gráfica anterior cual sería la solución:





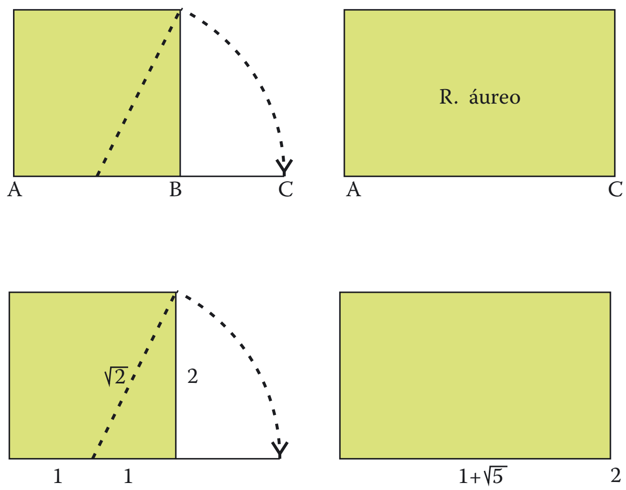
La solución parecería ser x = 0,55 dm, y = 0,3 dm y a partir de aquí obtenemos que f(0'55, 0'3) = 7,9076 dm y que z=1,4124 dm.

El ortoedro solución sería:



Solución, que por otra parte tampoco se adapta a la realidad.

Es por ello, que el tercer enunciado del problema viene a resolver este problema, ya que en los dos enunciados anteriores se pasaba por alto el hecho de que una de las caras del brick es un rectángulo áureo. Recordemos que la construcción de un rectángulo áureo puede ser explicada con el gráfico siguiente:



Enunciado 3

Calcular las dimensiones de un brick de 1 litro de volumen de manera que una de sus caras es un rectángulo áureo y la superficie del rectángulo obtenido al *desplegarlo* sea mínima.

Veamos si la solución obtenida se aproxima más a la solución *estandar*. Para ello procedemos exactamente igual que en las soluciones de los dos enunciados precedentes, utilizando Derive:

#1: $a(x, y, z) := (2 \cdot y + z + 2 \cdot 0.08) \cdot (4 \cdot x + 4 \cdot y + 3 \cdot 0.08)$

#2: $$z = \frac{1}{4 \cdot x \cdot y + 0.16 \cdot y}$$

#3: $$r := \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

#4: $$\frac{z}{2 \cdot x + 0.08} = r$$

#5: $$\mathrm{SOLVE}\left(\left[z = \frac{1}{4 \cdot x \cdot y + 0.16 \cdot y}, \frac{z}{2 \cdot x + 0.08} = r\right], [y, z]\right)$$

#6: $$\left[y = \frac{625 \cdot (\sqrt{5} - 1)}{16 \cdot (25 \cdot x + 1)^2} \wedge z = \frac{(\sqrt{5} + 1) \cdot (25 \cdot x + 1)}{25} \wedge y \cdot (25 \cdot x + 1) \neq 0\right]$$

#7: $$g(x) := a\left(x, \frac{625 \cdot (\sqrt{5} - 1)}{16 \cdot (25 \cdot x + 1)^2}, \frac{(\sqrt{5} + 1) \cdot (25 \cdot x + 1)}{25}\right)$$

#8: $$\frac{\sqrt{5} \cdot (250000 \cdot x^3 + 35000 \cdot x^2 + 1600 \cdot x + 15625 \cdot \sqrt{5} - 15601) \cdot (25000 \cdot \sqrt{5} \cdot x^3 \cdot (\sqrt{5} + 1) + 1000 \cdot \sqrt{5} \cdot x^2 \cdot (3 \cdot \sqrt{5} + 7) + 40 \cdot \sqrt{5} \cdot x \cdot (3 \cdot \sqrt{5} + 11) - 3117 \cdot \sqrt{5} + 15633)}{20000 \cdot (25 \cdot x + 1)^4}$$

#9: $$\frac{d}{dx} \frac{\sqrt{5} \cdot (250000 \cdot x^3 + 35000 \cdot x^2 + 1600 \cdot x + 15625 \cdot \sqrt{5} - 15601) \cdot (25000 \cdot \sqrt{5} \cdot x^3 \cdot (\sqrt{5} + 1) + 1000 \cdot \sqrt{5} \cdot x^2 \cdot (3 \cdot \sqrt{5} + 7) + 40 \cdot \sqrt{5} \cdot x \cdot (3 \cdot \sqrt{5} + 11) - 3117 \cdot \sqrt{5} + 15633)}{20000 \cdot (25 \cdot x + 1)^4}$$

#10: $$\frac{7812500000 \cdot x^6 \cdot (\sqrt{5} + 1) + 78125000 \cdot x^5 \cdot (25 \cdot \sqrt{5} + 33) + 15625000 \cdot x^4 \cdot (13 \cdot \sqrt{5} + 21) - 156250 \cdot x^3 \cdot (3053 \cdot \sqrt{5} + 2989) + 12500 \cdot \sqrt{5} \cdot x^2 \cdot (637 \cdot \sqrt{5} - 12472) + 50 \cdot x \cdot (109651 - 203009 \cdot \sqrt{5}) + 243953165 \cdot \sqrt{5} - 732296771}{100 \cdot (25 \cdot x + 1)^5}$$

#11: $$\frac{7812500000 \cdot x^6 \cdot (\sqrt{5} + 1) + 78125000 \cdot x^5 \cdot (25 \cdot \sqrt{5} + 33) + 15625000 \cdot x^4 \cdot (13 \cdot \sqrt{5} + 21) - 156250 \cdot x^3 \cdot (3053 \cdot \sqrt{5} + 2989) + 12500 \cdot \sqrt{5} \cdot x^2 \cdot (637 \cdot \sqrt{5} - 12472) + 50 \cdot x \cdot (109651 - 203009 \cdot \sqrt{5}) + 243953165 \cdot \sqrt{5} - 732296771}{100 \cdot (25 \cdot x + 1)^5} = 0$$

#12: $$\mathrm{NSOLVE}\left(\frac{7812500000 \cdot x^6 \cdot (\sqrt{5} + 1) + 78125000 \cdot x^5 \cdot (25 \cdot \sqrt{5} + 33) + 15625000 \cdot x^4 \cdot (13 \cdot \sqrt{5} + 21) - 156250 \cdot x^3 \cdot (3053 \cdot \sqrt{5} + 2989) + 12500 \cdot \sqrt{5} \cdot x^2 \cdot (637 \cdot \sqrt{5} - 12472) + 50 \cdot x \cdot (109651 - 203009 \cdot \sqrt{5}) + 243953165 \cdot \sqrt{5} - 732296771}{100 \cdot (25 \cdot x + 1)^5} = 0, x, \mathrm{Real}\right)$$

#13: $x = 0.4577420435$

#14: $$y = \frac{625 \cdot (\sqrt{5} - 1)}{16 \cdot (25 \cdot x + 1)^2}$$

#15: $y = 0.3118270023$

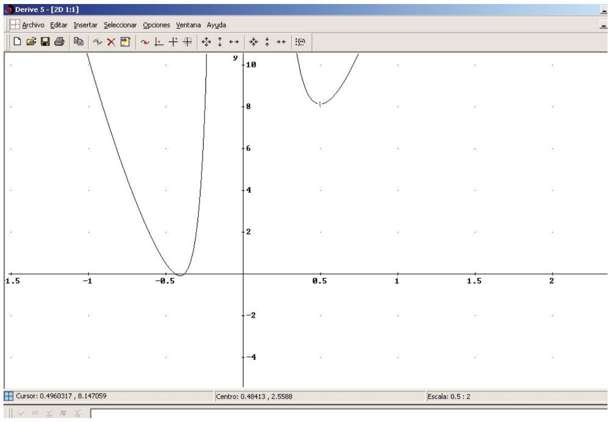
#16: $$z = \frac{(\sqrt{5} + 1) \cdot (25 \cdot x + 1)}{25}$$

#17: $z = 1.610727088$

#18: $g(0.4577420435)$

#19: 7.945217754

Gráficamente podríamos visualizar la solución, representando la expresión *#8* y obtendríamos:

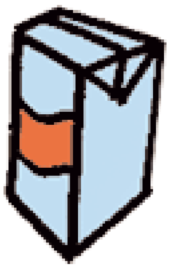


Por lo tanto la solución sería x = 0,4577 dm, y = 0,3118 dm, z=1,6107 dm.

El resultado obtenido es el que más se asemeja al utilizado en la fabricación de los primeros envases de bricks caracterizados por la proporción áurea en sus caras.

NOTAS

i En el problema propuesto se utilizan funciones de dos variables, las cuales no son el prototipo de las funciones que se manejan en matemáticas de 2º de bachillerato. Sin embargo, sí aparecen en física o química, o en ampliación de matemáticas de 2º de bachillerato.



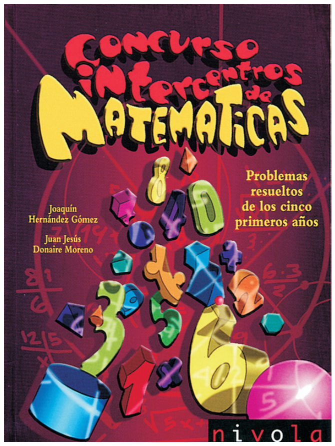
¿Qué es? El tetra-brick *está compuesto por un emparedado de láminas muy finas de materiales:*

** Plástico (polietileno)*
** Cartón*
** Plástico (polietileno)*
** Aluminio*
** Plástico (polietileno)*

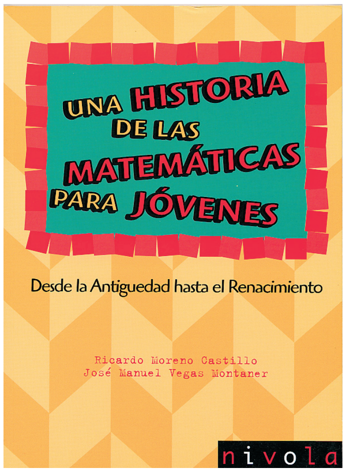
La unión de todos ellos hace de este envase un buen colaborador a la hora de conservar sustancias delicadas.

Libros recibidos

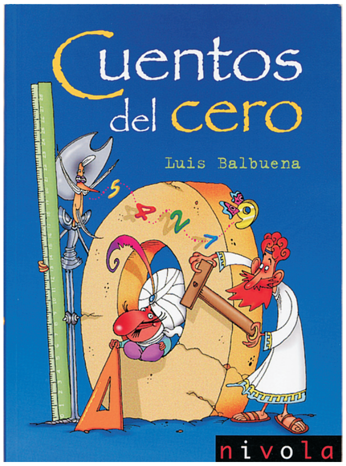
MATEMAGIA. LOS MEJORES TRUCOS PARA ENTENDER LOS NÚMEROS
F. Blasco
Temas de hoy
Madrid, 2007
ISBN: 978-84-8460-611-6
278 páginas



CONCURSO INTERCENTROS DE MATEMÁTICAS. PROBLEMAS RESUELTOS DE LOS CINCO PRIMEROS AÑOS
J. Hernández y
J.J. Donaire
Nivola, 2006
ISBN: 84-96566-22-6
175 páginas



UNA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS PARA JÓVENES. DESDE LA ANTIGÜEDAD HASTA EL RENACIMIENTO
R. Moreno Castillo
J.M. Vegas Montaner
Nivola
Madrid, 2006
ISBN: 84-96566-17-X
218 páginas



CUENTOS DEL CERO
L. Balbuena
Nivola
Madrid, 2006
ISBN: 84-96566-18-8
93 páginas

SUMA 54
Febrero 2007, pp. 31-42

Matemáticas, mitología y poesía. Aritmética en la *Antología palatina* (II)

Continuación de la antología de epigramas aritméticos griegos, publicados en el número 53 de SUMA (Noviembre 2006, pp. 19-26) hasta completar los 45 que están contenidos en la Antología Palatina.

This is the continuation of the Palatine Anthology's Spanish translation with arithmetic epigrams published in Suma last November (SUMA 53, pages 19-26). We complete here, the 45 epigrams corresponding to this Greek Anthology.

Problema 11: La corona

En la Antología Palatina es el 49.

Una corona me harás,
de oro y de bronce,
de estaño y de resistente hierro.
Sesenta minas el peso ha de ser.
El oro y el bronce los dos tercios deben hacer;
el estaño con el oro, las tres cuartas partes deben ser;
Y el oro con el hierro tres quintas harán.
Dime entonces cuánto oro y cuánto bronce aleados pondrás.
Di también con cuánto estaño,
y con cuanto hierro mi corona acabarás.

Contexto histórico y mitológico

Las aleaciones para cambiar las propiedades de los metales son usadas desde la edad del bronce. En la época clásica griega ya es general el uso del hierro, que precisamente hace su primera aparición en Anatolia en el segundo milenio antes de nuestra era.

Las aleaciones para joyas también eran corrientes, en especial el oro necesita endurecerse. ¿Pero donde acaba la necesidad y empieza el fraude?

El problema de conocer la composición una vez aleados los metales era complejo. Su resolución nos lleva a una de las más celebres anécdotas de la historia de la ciencia: Arquímedes corriendo desnudo gritando eureka (¡lo encontré ¡). El principal sabio de la antigüedad encontró la respuesta bañándose al ver como se derramaba el agua.

Solución: El peso de oro será 61/2 minas, 19/2 minas de bronce, 29/2 de estaño y 11/2 minas de hierro.

Problema 12: La fundición

En la Antología Palatina es el 50.

Orfebre, después del tercio, pon también un cuarto de esta copa,
júntalos y añádeles la doceava,
Arrójalo todo a la retorta y sométela al fuego.
Una mina tiene el lingote.

Contexto histórico y mitológico

Como el anterior. Los productos de metal requerían dominio de técnicas que hacían de los herreros unas figuras significa-

Ángel Requena Fraile
IES Enrique Nieto
Melilla

tivas en el mundo antiguo. Prometeo roba el fuego de Zeus para los mortales. El herrero le sacará todo el partido.

Solución: La copa pesaba 3/2 minas.

Problema 13: Tres estatuas

En la Antología Palatina es el 51.

—Yo contengo al siguiente más un tercio del tercero.
—Yo valgo el siguiente más un tercio del primero.
—Diez minas más un tercio del segundo valgo Yo.

Contexto histórico y mitológico

Planteados como adivinanza eran populares para los retos y concursos.

Solución: El primero pesa 45 minas, el segundo 75/2, y el tercero 45/2 minas.

Problema 14: Las nueces

En la Antología Palatina es el 116 y en la colección de Metrodoro el 2.

¿Por qué pelearme madre por culpa de unas nueces?
Unas chicas muy bonitas se las han repartido todas.
Dos séptimos Melisa me ha cogido.
Un doceavo se llevo Titania...
Astioque y Filina (a las que tanto gusta jugar) un tercio y un sexto.
Tetis me ha robado veinte nueces, y Tisbe doce.
Glauca se reía de su gran fuerza por tener once en las manos.
¡Solo una me han dejado!

Contexto histórico y mitológico

Los nombres se corresponden con diosas menores como las nereidas (hijas de Nereo, dios del mar, y de Doris, hija de Océano). En particular, Tetis fue la madre de Aquiles.

Tisbe es una heroína de Babilonia que protagoniza con su enamorado Piramo una bella historia. Piramo que encuentra un velo manchado de sangre, piensa que Tisbe ha sido devorada y pone fin a su vida, y Tisbe al descubrirlo, también se mata. La trágica historia de los amantes servirá a Shakespeare casi de telón bufo a su mágica comedia *Sueño de una noche de verano*.

Solución: Tenía 336 nueces.

Problema 15: Las manzanas

En la Antología Palatina es el 117 y en la de Metrodoro es el 3.

Di, mi niño, ¿dónde están tus manzanas?
Ino el doble del sexto cogió. Y Sémele, un octavo.
Autonoé me ha quitado un cuarto.
De mi seno, Ágave tomó un quinto, y huyó.
Pude guardar diez manzanas para ti.
¡Por la querida Afrodita, que solo para mi
ha quedado una única!

Contexto histórico y mitológico

Las protagonistas son las hijas de Cadmo, el mitológico rey de Tebas. Sémele tiene hechizado con su belleza al siempre fácil Zeus y hasta logra verle el verdadero rostro, por lo que muere calcinada. Para que Dionisios, el hijo de Sémele y Zeus, sobreviva, el rey del Olimpo se tiene que hacer un útero en el muslo.

Solución: 120 manzanas.

Problema 16: Más reparto de manzanas

En la Antología Palatina es el 118 y en la de Metrodoro es el 4.

Un día Mirto fue a recoger manzanas,
y con sus amigas las repartió.
Ofreció primero una quinta parte a Crisis,
y un cuarto a Hero.
Más tarde, Famata recibió un diecinueveavo,
Cleopatra una parte sobre diez,
y Parténope hereda un veinteavo.
Doce manzanas recibe Evadne, y no más.
Ciento veinte del total para ella quedaron.

Contexto histórico y mitológico

Una vez más las protagonistas son diosas menores, las ninfas, abundantísimas, estaban asociadas a la fertilidad, las aguas, los bosques, el crecimiento, etc.

Solución: 380 manzanas.

Problema 17: Más chicas con manzanas

En la Antología Palatina es el 119 y en la de Metrodoro es el 6.

Ino y Sémele repartieron sus manzanas un día
con doce doncellas amigas que se lo pedían.
Sémele dio a unas un número par,
mientras a otras su hermana solo repartió impares.
Ino tenía más manzanas y entregó tres séptimos
de su lote a tres de sus compañeras, en tanto
otras dos recibieron un quinto entre ambas.
Astinomé le cogió once manzanas,
¡y después de eso se quedó solo con dos
para llevar a las hermanas pequeñas!
Sémele dió dos cuartos a cuatro doncellas;
una quinta un sexto consiguió;
Euricoré recibió cuatro manzanas,
y Sémele encantada quedó con otras cuatro.

Contexto histórico y mitológico

El mismo de los anteriores epigramas.

Solución: Ino tenía 35 manzanas y Sémele solo 24.

El enunciado farragoso puede inducir complejidad, pero son dos ejercicios distintos. El dato de par o impar es de mera verificación.

Problema 18: La noguera desposeída

En la Antología Palatina es el 120 y en la de Metrodoro es el 7.

Este nogal tiene pesada carga de nueces,
¡y qué pronto la ha perdido!
Escucha lo que el árbol cuenta:
Parténope me ha despojado de un quinto,
Filina cargó con un octavo de las nueces,
Aganipé un cuarto y Oritía está feliz con un séptimo.
Eurinomé ha recolectado el sexto de las nueces.
Las tres Gracias se han repartido ciento seis,
y las Musas nueve veces nueve lograron.
Siete en lejanas ramas me dejaron.

Contexto histórico y mitológico

Las Gracias, las Musas y las Ninfas nos vuelven a aparecer.

Solución: 1680 nueces tenía el nogal.

Problema 19: De Cádiz a Roma

En la Antología Palatina es el 121 y en la de Metrodoro es el 8.

Salimos de Gades hacia la ciudad con siete colinas.
Un sexto del trayecto nos llevó al borde del Betis
que mueve sus ondas. Otro quinto conduce al país Foceo
de Pilade en Taurica, la tierra de los bueyes,
de ahí el nombre. Desde allí a los abruptos
Pirineos un octavo más el doceavo de un décimo.
Entre los Pirineos y los Alpes de frente altiva
un cuarto hicimos. Un doceavo, y llegamos a Ausonia,
en el Eridan moteado de ámbar.
¡Alegría! He cubierto aun dos millares y cinco centenas
¡Tarpeya real, para verte!

Contexto histórico y mitológico

Las distancias no se corresponden porque se esta escribiendo desde el otro lado del Mediterráneo.

La primera etapa es el Guadalquivir (Betis), la segunda puede ser Ampurias (hija de Foceo), la tercera los Pirineos, la cuarta los Alpes, la quinta el río Po (Eridan es el Po, y Ausonia es Italia) y por fin la anhelada Roma.

El estadio mide entre 170 y 190 metros, y se corresponde con las medidas de los estadios.

Solución: La distancia Cádiz-Roma es 15000 estadios (unos 2700 Km). La distancia total no es muy desajustada, no son tan exactas las distintas etapas.

Portulano trazado por Guillaume Brouscon, 1543

Problema 20: Mala fortuna

En la Antología Palatina es el 122 y en la de Metrodoro es el 9.

Justicia de ojo claro, para solo mirarte,
tus santos velos he mancillado.
Todopoderoso es el oro, ¡y no me queda nada!
A mis amigos fueron cuatro decenas de talentos
que habían sido míos. ¡Perdidos!
¡La suerte me fue contraria!
La mitad, el sexto y el octavo de ese oro
ya los veo –¡ironía del destino!–
en manos de mi enemigo.

Contexto histórico y mitológico

No sabemos si la fortuna adversa es la rueda de la vida o el juego. Si es este último no deja de ser fuente inagotable para las matemáticas.

El talento equivale a 60 minas y se conserva como moneda durante la Edad Media.

Solución: El capital del desafortunado antes de su desgracia fue de 960 talentos. Su enemigo se ha quedado con 920.

Problema 21: Últimos deseos

En la Antología Palatina es el 123 y en la de Metrodoro es el 10.

Tu, hijo mío, cogerás el quinto de mis bienes;
tu, mi querida esposa, el doceavo.
Y vosotros, los cuatro niños de mi desaparecido hijo,
vosotros mis dos hermanos, tu mi tan afligida madre,
todos y cada uno tendréis un onceavo de herencia.
Primos, vosotros tomad doce talentos.
Y para mi amigo Euboleo, es mi deseo
que él posea cinco talentos.
A mis devotos esclavos doy recompensa y libertad;
los siguientes dones serán el precio de su fiel servicio:
Onesimos recibirá veinticinco minas, veinte Daos,
y cincuenta Siros, diez Sineté, y ocho Tibios.
Doy a Sinetos, hijo de Siros, siete minas.
Para mi tumba y funeral tomad treinta talentos,
y el divino Zeus recibirá un sacrificio.
Pondréis dos dobles talentos para la hoguera, harinas y vendas:
los honores vanos a rendir a mi cuerpo.

Contexto histórico y mitológico

Repartir herencias ha sido una actividad de cierta importancia para el sostenimiento de algunos matemáticos, como hacer horóscopos para otros. En especial los aritméticos musulmanes tienen tratados para el reparto de herencias según el Coran.

Este ejercicio tiene curiosidad sociológica: relaciones familiares y sociedad esclavista.

Es curioso que el amigo que hereda se llame Eubuleo, *el que da buenos consejos.*

Solución: Se reparten 660 talentos, recuérdese que un talento son 60 minas.

Problema 22: El hijo de la vida

En la Antología Palatina es el 124 y en la de Metrodoro es el 11.

La Luna, el Sol, los caprichosos Astros del Zodiaco,
los que giran en tu nacimiento,
te han hilado este destino: un sexto de tu tiempo,

huérfano vivirás cerca de una madre querida;
un octavo, servirás oprimido en casa del enemigo;
los dioses te concederán la libertad, una mujer, y pronto
un hijo bien amado, que llenarán un tercio de tus días.
Después las flechas escitas abatirán a tus seres queridos.
Tras haber vertido sobre ellos amargas lágrimas,
veras al cabo de veintisiete años la terminación de tu vida.

Contexto histórico y mitológico

La astrología occidental proviene de Mesopotamia, pasando por el filtro griego. Fue el propio Ptolomeo quien redacta el manual más usado, el Tetrabiblos. Durante buena parte de tiempo el término matemático y astrólogo han sido equivalentes. La celebre condena de San Agustín es en realidad un anatema contra la astrología.

Solución: Vivirá 72 años.

El río Aqueronte o Aquerón está situado en el Epiro, región noroccidental de Grecia

Problema 23: El Panteón

En la Antología Palatina es el 125 y en la de Metrodoro es el 12.

Soy el panteón que alberga a los hijos
tan echados de menos de Filina.
Aquí están los frutos que en vano
salieron de sus entrañas: un quinto son varones,
un tercio chicas, más tres jóvenes esposas
que Filina me ha confiado.
Y los otros cuatro cayeron en el Aqueronte
sin gozar del Sol y de la voz.

Contexto histórico y mitológico

Aqueronte fue hijo del Sol y de la Tierra. Como proporcionó agua a los titanes, Zeus le convierte en el río del Infierno (hades). Pasar el Aqueronte era perder la vida.

Solución: La tumba alberga 15 hijos.

Problema 24: La edad de Diofanto

En la Antología Palatina es el 126 y en la de Metrodoro es el 13.

Esta es la tumba que guarda
las cenizas de Diofanto.
Es verdaderamente maravillosa
porque, gracias a un artificio aritmético,
descubre toda su existencia.
Dios le permitió ser niño
durante un sexto de su vida;
luego de un doceavo la barba pobló sus mejillas;
después de un séptimo prendió en él
la llama del matrimonio, del que tuvo un hijo
a los cinco años; pero ese desgraciado niño,
apasionadamente amado, murió apenas llegaba
a la mitad de la existencia de su padre.
Cuatro años más vivió Diofanto
engañando su pena con investigaciones
sobre la ciencia de los números.

Contexto histórico y mitológico

El ejercicio más conocido de toda la antología. Quizás porque ofrece datos de un matemático enigmático. No podemos situarle, es un caso raro. Su obra recoge la tradición babilónica con metodología griega. La matemática árabe seguirá esa estela y Descartes cambiara definitivamente la jerarquía: la geometría pasara a segundo plano.

En los márgenes de la Aritmética de Diofanto escribió Fermat su conjetura, hoy teorema puesto que ya ha sido totalmente demostrado.

Solución: Diofanto según esta fantasía vivió 84 años.

Problema 25: La vida de Democares

En la Antología Palatina es el 127 y en la de Metrodoro es el 14.

Democares pasó niño
el primer cuarto de los años de su vida;
un quinto fue joven
y el tercio hecho hombre.
Y el pelo blanco pobló sus sienes
cuando le quedaban trece años de senectud.

Contexto histórico y mitológico

En el Asno de Oro de Apuleyo aparece un Democares, pero no hay nada relevante.

Solución: Democares vivió 60 años.

La ira de Polifemo,
Annibale Caracci.
Palacio Farnese

Problema 26: Hermano estafado

En la Antología Palatina es el 128 y en la de Metrodoro es el 15.

¡Cómo violó mis derechos este hermano desleal
al repartir los cinco talentos de nuestro padre!
Un quinto de los siete onceavos de su parte,
ese es mi lote. Por ello sufro.
¡Oh Zeus, qué bien duermes!

Contexto histórico y mitológico

Problema clásico de fracciones para el reparto de una herencia entre hermanos.

Solución: Tiene motivos para lamentarse. Su hermano se lleva 55/62 y el solo 7/62 de los cinco talentos.

Problema 27: La travesía

En la Antología Palatina es el 129 y en la de Metrodoro es el 16.

Sobre el navío que rompe la llanura Adriática,
pregunta el piloto: ¿Cuánto nos queda de navegar?
Marinero –contesta el hombre– entre el cabo Krio,
en Creta, y Pelarón, en Sicilia, hay seis mil estadios.
Debemos hacer dos veces los dos quintos
del camino ya recorrido para desembarcar en Sicilia.

Contexto histórico y mitológico

La cultura griega de la polis más desarrollada como Atenas tenia base comercial; la unificación macedonica y después romana mantuvieron una economía global de todo el Mediterráneo. La Odisea es la muestra más espectacular de la vocación marinera pero también de los peligros.

Los cabos son reales. El cabo Pelaron hoy se llama Faro.

Solución: Faltan 24000 estadios. Como el estadio son unos 180 m, el recorrido pendiente son 4320 Km.

Problema 28: Las cuatro fuentes

En la Antología Palatina es el 130 y en la de Metrodoro es el 17.

Cuatro fuentes alimentan el estanque.
Una en un día lo llena, otra en dos, otra en tres,
y la cuarta en cuatro días.
¿Cuánto les llevará a todas juntas?

Contexto histórico y mitológico

Clásico de grifos. Se inicia así toda una serie de ejercicios similares a este.

Solución: Las cuatro fuentes llenan el estanque en 12/25 de día.

Problema 29: La fuente caudalosa

En la Antología Palatina es el 131 y en la de Metrodoro es el 18.

Ábreme, lleno el estanque que aquí hay,
yo la caudalosa fuente, en cuatro horas.
Mi hermana derecha se retrasa
esas mismas horas sobre mí para colmarlo.
El tercer manantial se retrasa el doble.
Haz correr todas las corrientes
y verás qué delgada fracción del día nos bastará.

Contexto histórico y mitológico

Otro problema de grifos, y como en toda la serie hay que hacer uso de la proporcionalidad inversa.

Solución: Las tres fuentes completan en 2/11 de día.

Problema 30: Polifemo

En la Antología Palatina es el 132 y en la de Metrodoro es el 20.

Es un cíclope, sí, es Polifemo en bronce.
¡Qué bien se han ajustado su boca, su único ojo,
y su mano a tres conductos!
Realmente se diría que de allí manan.
Y se ve brotar la onda de su boca.
Todas esas fuentes tienen el caudal regulado:
si la mano mana sola, tres días necesita
para el estanque colmar; el ojo, un solo día,
y la boca tarda los dos quintos de un día.
Decid qué tiempo tomarán los tres chorros unidos.

Contexto histórico y mitológico

Los cíclopes son gigantes de un solo ojo. El más célebre fue Polifemo, hijo de Neptuno y una ninfa. Polifemo devoró a seis marineros de Ulises, antes de que Odiseo lo embriague y le ciegue. El ingenio de héroe de Itaca que se hace llamar Nadie le permite escapar (*Ha sido Nadie*)

Solución: Se necesitarán 6/23 de día para llenar.

Los borrachos o el triunfo de Baco. Velázquez.
Museo del Prado

Problema 31: Tres dioses río

En la Antología Palatina es el 133 y en la de Metrodoro es el 21.

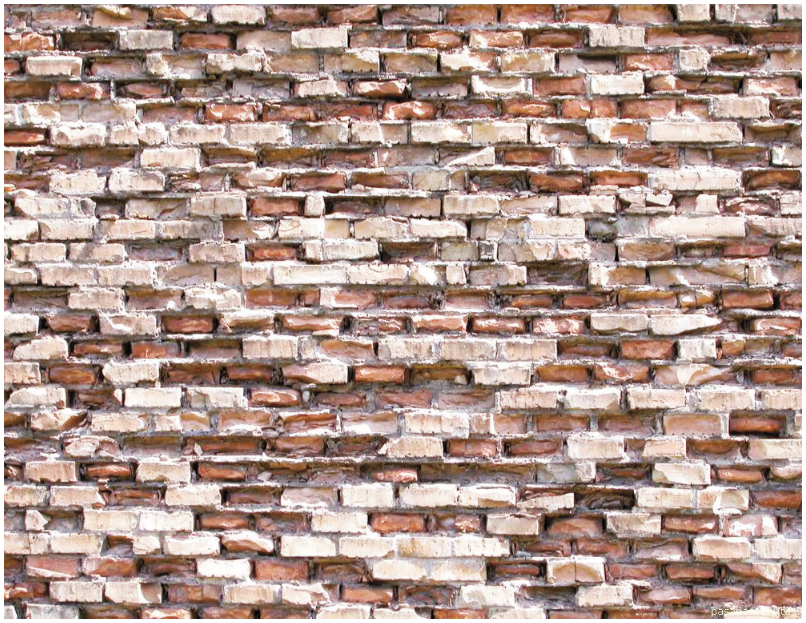
¡Oh mezcla exquisita la que tres dioses vierten
en este cráter: el bienhechor Bromio y sus dos ríos.
Pero el caudal de sus aguas no es igual.
Manando solo, el Nilo llena la sima en un día,
tan abundante emergen de sus senos los fluídos.
El Tirso de Baco en tres días lo llena
del vino que allí se produce.
Y Aqueloo, tu cuerno tarda dos días.
Pero si unís vuestros esfuerzos
en muy pocas horas lo colmaréis.

Contexto histórico y mitológico
Bromio es un sobrenombre de Baco, el Dionisios griego. No solo Baco es el dios del vino, si no que es la fuente vivificadora y fertilizadora. Para Eurípedes, Bromio es el dios del placer y el optimismo.

Aqueloo es el dios pluvial más importante del panteón griego. Hijo de Océano; luchó contra Hércules que le arranca un cuerno, y de allí manara el agua que fertiliza las tierras. Aqueloo es el padre de las sirenas.

Tirso es la rama con hiedra que hace de cetro a Baco. Las bacantes usaban el tirso.

Solución: El cráter lo llenan en 6/11 de día, es decir en 13+1/11 horas de las horas actuales, en el mundo grecorromano las horas eran cambiantes.



Estación de Canfranc. Foto propiedad de www.pasarlascanutas.com

Problema 32: El hilado

En la Antología Palatina es el 134 y en la de Metrodoro es el 22.

¡Mujer que olvidas tu miseria!
¡Está aquí, siempre amenazante, armada
del aguijón del trabajo!
Hilabas en un día ordinario una mina de lana;
y la mayor de tus hijas sacaba de su rueca
un tercio más que tú.
La más joven aportaba la mitad de una mina.
Y esta noche, aquí estas, preparando la cena
después de haber pesado una sola mina entre las tres.

Contexto histórico y mitológico
A los ejercicios de fuentes le sigue su equivalente: trabajos en solitario o en común. En este caso el hilado doméstico sugiere una producción para el mercado.

Solución: Solo han trabajado 2/5 de día.

Problema 33: Tres amores fuente

En la Antología Palatina es el 135 y en la de Metrodoro es el 23.

Somos tres amores, y aquí nos han colocado
para verter el agua requerida sobre la bonita bañera.
Yo a la derecha, con el extremo de mis alas
necesitaría el sexto de un día para rellenarla.
El de la izquierda, con su ánfora, en cuatro horas.
Y este del medio, con su arco, en una jornada
la medio completa.
Decid qué corto tiempo nos llevará
juntos arco, alas y ánfora.

Contexto histórico y mitológico
Los amores ya aparecieron en el tercer epigrama.

Solución: Llenarán en 2/19 de día.

Problema 34: Levantar una casa

En la Antología Palatina es el 136 y en la de Metrodoro es el 24.

Tengo prisa por ver esta casa en pie.
Hoy amaneció sin nubes
y no me faltan muchos ladrillos:
con trescientos más, todo lo necesario tendría.
Ladrillero, esa cifra la haces tú en un solo día;
tu hijo ha fabricado doscientos cuando la jornada termina,
y tu yerno hace el mismo número más cincuenta.
Si hago mi pedido a los tres. ¿Cuánto necesitaréis?

Contexto histórico y mitológico
Continúa la proporcionalidad inversa, en la que se usa el trabajo o el caudal por unidad de tiempo.

Solución: Tardaron 2/5 de día.

Problema 35: Banquete de trágico final

En la Antología Palatina es el 137 y en la de Metrodoro es el 25.

Algunas lagrimas de piedad, paseante,
por los desgraciados convidados de Antioco:
la casa nos mató al hundirse.
La sala de banquetes fue convertida
por el cielo en nuestras tumbas.
Allí dormíamos cuatro de Tegea,
doce de Mesenia y once venían de Argos.
Media mesa era de la misma Esparta,
más el anfitrión Antioco.
Uno sobre veinticinco era de Atenas,
y Corintio llora un único muerto, a ti Hilas.

Contexto histórico y mitológico
Los Antiocos más celebres son la dinastía seléucida fundada por uno de los generales de Alejandro y que gobernaron Siria hasta la conquista romana. Aunque tuvieron muertes trágicas no parece tratarse de alguno de ellos.

Solución: Los desgraciados que mueren en el derrumbamiento eran 50.

Problema 36: Las cinco amigas de Nicoreta

En la Antología Palatina es el 138 y en la de Metrodoro es el 26.

Nicoreta juega con cinco amigas:
de las nueces que posee da el tercio a Cleisa,
a Safo el cuarto, y el quinto a Aristodica.
También da el veinteavo a Teano,
más el doceavo. A Filina le ofrece
el veinticuatroavo. Y para sí
han quedado cincuenta nueces.

Contexto histórico y mitológico
De las jóvenes descritas, destaca el nombre de Safo, pues su homónima de Lesbos (siglo V a.C.) está en el origen (con Alfeo) de la poesía lírica griega.

Solución: Nicoreta poseía 1200 nueces.

Problema 37: Avance solar

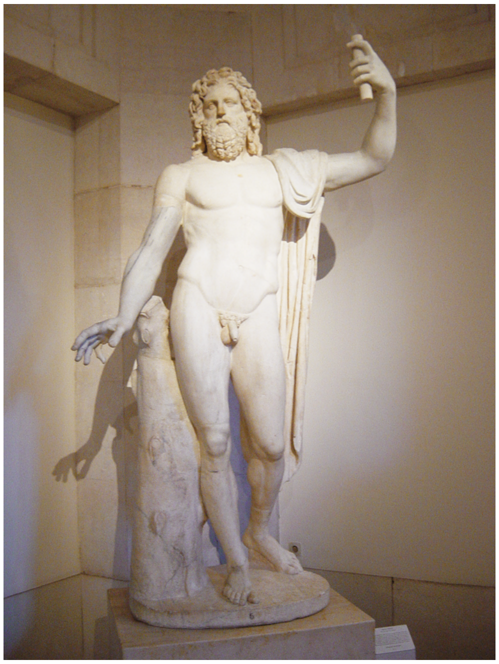
En la Antología Palatina es el 139 y en la de Metrodoro es el 27.

Dime Diodoro, tú, sabio de la gnómica,
la hora sobre el celeste orbe
a la que la rueda de oro del Sol
ha llegado, viniendo de oriente.
—Del trayecto hecho multiplica tres quintos
por cuatro: obtendrás lo que todavía
le queda por recorrer hasta el mar occidental.

Contexto histórico y mitológico
Gnómica o nomónica es el arte de construir relojes solares. El gnomón es el palo o lamina triangular cuya sombra marcará la hora.

Si Diodoro fuera un personaje real podría ser el citado por Pappus en su colección.

Solución: Ha transcurrido 5/17 de día.



Júpiter Tonante (equivalente romano de Zeus). Museo del Prado

Problema 38: Zeus nos roba la luz de Selene

En la Antología Palatina es el 140 y en la de Metrodoro es el 29.

Así, Zeus feliz, disfrutas con juegos
que son pasatiempo en Tesalia de las mujeres:
robar a los mortales la luz de Selene.
Lo he visto con ojos propios:
de la carrera de la noche, antes del despunte del alba,
quedaban dos veces los dos sextos y dos veces
el séptimo de lo que de noche fue pasada.

Contexto histórico y mitológico

Selene es la divinidad astral identificada con la Luna; el equivalente egipcio (Isis) compitió con fuerza con el cristianismo en sus primeros siglos.

La animadversión de Zeus por los mortales se remonta a la primera de las acciones de Prometeo, cuándo lo que ofrecieron a los dioses fueron los huesos de las reses en lugar de la carne.

Solución: Zeus ha robado 20/41 de Selene.

Detalle del techo de la sala del zodíaco del palacio Ducal de Mantua. Lorenzo Costa

Problema 39: Astrología

En la Antología Palatina es el 141 y en la de Metrodoro es el 30.

De las estrellas dime el curso,
y el de los planetas de ayer,
cuando mi esposa trajo nuestro hijo al mundo.
El día, hasta su ocaso, tenía seis veces todavía
los dos séptimos del camino recorrido desde el alba.

Contexto histórico y mitológico

Otro ejercicio astrológico.

Solución: Ha transcurrido 7/19 del día.

Las hilanderas o La fábula de Aracne. Velázquez.
Museo del Prado

Problema 40: Las hilanderas

En la Antología Palatina es el 142 y en la de Metrodoro es el 32.

¡Levantaos hilanderas que pasa el día!
Un quinto de los tres octavos del resto ya ha huido.

Contexto histórico y mitológico

Un trabalenguas, muy habitual en la enseñanza tradicional, donde lingüística, lógica y matemáticas ponían dificultades en problemas sencillos.

Solución: Ha huido 3/43 de día.

Problema 41: Hermano justo

En la Antología Palatina es el 143 y en la de Metrodoro es el 33.

La Sirte y su profunda sima han visto a mi padre morir.
Del viaje por mar mi hermano con cinco talentos volvió.

¡Hermano incomparable! Me ha dado el doble
de los dos tercios que para él guardó.
A mi madre ha donado dos octavos de nuestra parte:
¡la sagrada justicia no ha sido violada!

Contexto histórico y mitológico
Sirte es el golfo de Gabes, ubicado en la costa este de Túnez. La peligrosidad del mar y sus furias están presentes en los epigramas.

Solución: La madre se queda con un talento, el hermano justo con 1+5/7 y el narrador obtiene 2+2/7 talentos.

Problema 42: Atlantes

En la Antología Palatina es el 144 y en la de Metrodoro es el 36.

—Con el pedestal sobre el que reposo
juntos alcanzamos un peso respetable.
—Pues bien, mi base y yo alcanzamos
el mismo número de talentos.
—Yo peso, solo, dos veces más que tu pedestal.
—Y yo, solo también, tres veces tu pedestal.

Contexto histórico y mitológico
Otro diálogo en clave para averiguar el peso de dos estatuas y sus pedestales.

Solución: Sistema diofántico (homogéneo indeterminado). Cuatro incógnitas y solo tres condiciones. Las estatuas pesan 4 y 3 talentos, y sus respectivos pedestales 1 y 2. Los múltiplos de estos números son las infinitas soluciones.

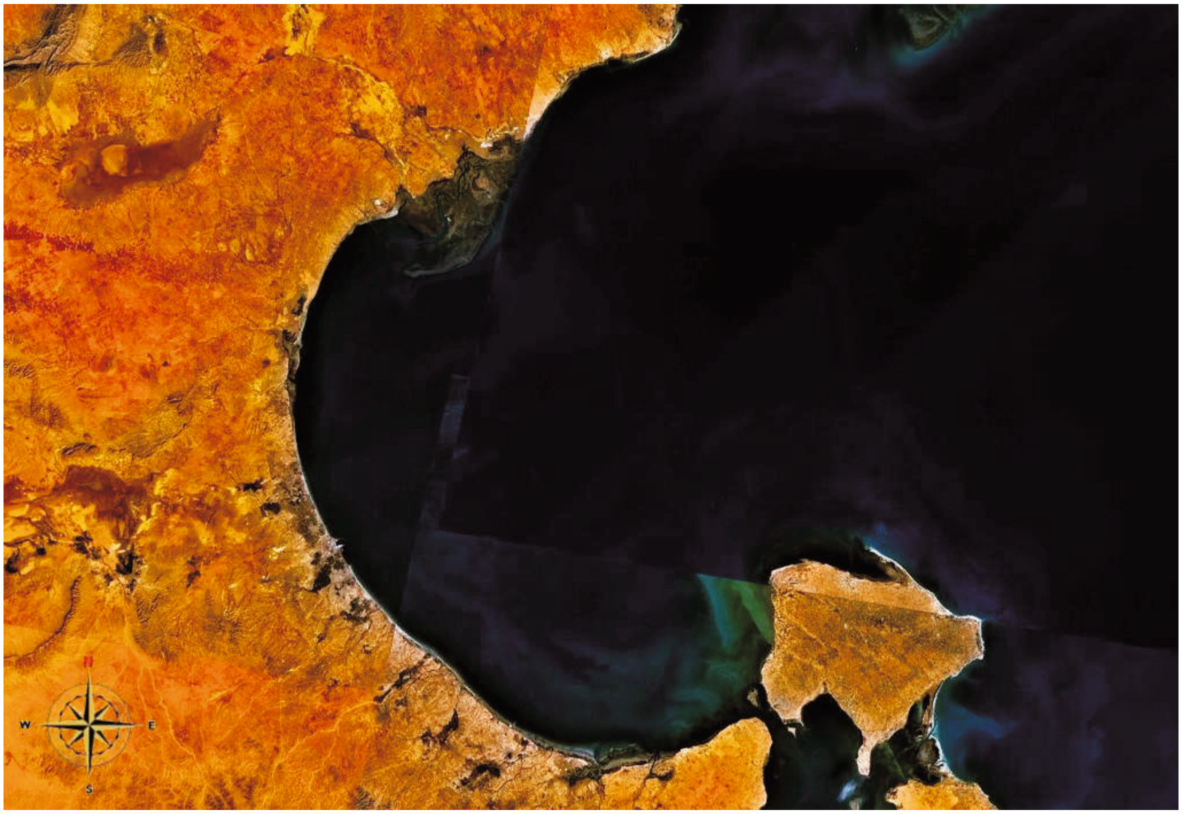
Problema 43: El intercambio

En la Antología Palatina es el 145 y en la de Metrodoro es el 38.

—Pásame entonces diez minas
y seré tres veces más pesado que tú.
—Pásame otro tanto
y yo seré hasta cinco como tú.

Contexto histórico y mitológico
Estos ejercicios con dos incógnitas son curiosos, como el de los pajarillos del cuento de *Las mil y una noches* que sirve a la esclava Simpatía para vencer a los sabios de Bagdad.

Solución: Uno 110/7 minas y el otro 130/7.



Golfo de Gabes. Túnez

Problema 44: Otro pásame

En la Antología Palatina es el 146 y en la de Metrodoro es el 39.

—Pásame entonces dos minas
y seré dos veces mas pesado que tú.
—Pásame otro tanto
y yo seré hasta cuatro como tú.

Contexto histórico y mitológico

Repetición de ejercicios anteriores.

Solución: Uno 26/7 minas y el otro 34/7.

Problema 45: En Troya

En la Antología Palatina es el 147 , único tomado de la Iliada.

Había siete hogueras ardiendo,
delante de cada una cincuenta parrillas
asando cincuenta piezas,
y nueve cientos aqueos en cada asado.

Contexto histórico y mitológico

Bonita imagen de Homero (u de otro bardo coautor de la Iliada) para expresar la importancia de la guerra que describe a través de la magnitud del ejercito que va a castigar a Troya.

Solución: 31500 aqueos participan en la conquista de Troya. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BUFFIÉRE, F (1970): *Anthologie Grecque**, Société Les belles lettres, Paris.

FERNÁNDEZ GALIANO, M. (1978): *Antología palatina*, Editorial Gredos, Madrid.

HESIODO (1982): *Obras y fragmentos*, Editorial Gredos, Madrid.

KRAITCHIK, M. (1946): *Matemáticas recreativas*, El Ateneo, Buenos Aires.

VERNANT, J. P. (2001): *El universo, los dioses, los hombres*, Círculo de lectores, Barcelona.

NOTAS

* La antología francesa en edición bilingüe griego-francés de Félix Buffiére contiene amplísimas notas. Las de carácter matemático hacen referencia a los estudios de matemática griega y de Diofanto de Paul Tannery, historiador pionero de la matemática.

Índice de epigramas:

SUMA 54
Febrero 2007, pp. 43-49

Las Matemáticas y la evolución de las escalas musicales

La asignatura de Matemáticas y su Didáctica que se imparte en la titulación de Maestro en Educación Musical presenta una problemática muy específica, especialmente ligada a aspectos de motivación, que requiere tratamientos didácticos específicos de cara a evitar barreras en el aprendizaje de la materia. Existen interesantes relaciones entre música y matemáticas, cuyo uso en la programación permite introducir cambios innovadores que pueden conducir a una verdadera y deseada implicación del estudiante en la construcción del conocimiento didáctico-matemático escolar.

Mathematics and its Didactics is a subject taught as part of the degree of Teacher in Musical Education which has some problematic issues, especially those bound to motivation aspects. Such issues require specific didactic treatments that will avoid barriers in the learning process. There are valuable relationships between Music and Mathematics, whose use in the syllabus allows us to show innovating changes that can lead to a truthful and valued implication of the student in the construction of the knowledge scholastic didactic-mathematician.

En la programación de la materia Matemáticas y su Didáctica de la titulación de Maestro en Educación Musical de la Universidad de Jaén figura como objetivo global:

> Dotar a los estudiantes para maestros de esta titulación de una capacitación didáctico–matemática, de cara a la enseñanza de las Matemáticas en Educación Primaria.

Sin embargo, si se plantea siguiendo los descriptores de la materia, sin tener en cuenta la procedencia de estos alumnos, es posible que el estudiante no encuentre aspectos matemáticos para relacionar con su propia materia musical, lo cual puede conducirle a tener que considerar las Matemáticas como una asignatura demasiado atomizada y aislada del resto del currículo.

Teniendo en cuenta este fenómeno didáctico, el del aislamiento de la materia de Matemáticas y su Didáctica en el currículo de la formación del Maestro de Educación Musical, en la programación se introduce el siguiente objetivo general (correspondiente a las relaciones interdisciplinares):

> El estudiante debe conocer las relaciones entre las matemáticas y la música que le permitan dar significado, tanto a objetos de carácter musical como a objetos de tipo matemático, además de dotar de sentido a la evolución histórico–epistemológica de ambas ciencias.

Este objetivo general se descompone en varios objetivos específicos: Estudio, reflexión y discusión acerca de las relaciones existentes entre el desarrollo epistemológico musical y los conceptos matemáticos implicados, los sistemas de numeración matemáticos y las representaciones de las notas musicales según su duración y las sucesiones de números racionales y el valor de las notas musicales en las diversas escalas.

El trabajo que se desarrolla corresponde al primero de los objetivos específicos: estudio, reflexión y debate acerca de las relaciones existentes entre el desarrollo epistemológico musical y los conceptos matemáticos implicados. Además, dado que parece esencial acudir al contexto sociocultural como medio para poder explicar ciertos cambios y rupturas en la evolución musical, se efectuará un breve análisis de aquellos movimientos sociales que han podido tener repercusión en la historia de la música, lo cual, por otra parte, representa una interesante aportación interdisciplinar.

Ángel Contreras de la Fuente
María del Consuelo Díez Bedmar
Juan Pablo Pacheco Torres
Universidad de Jaén. Jaén

En este artículo, primeramente se desarrolla un estudio en el que se definen matemáticamente los conceptos de intervalo, escala y nota musical. En segundo lugar, basándose en los conceptos introducidos, se realiza un recorrido evolutivo de algunos de los sistemas musicales más importantes, desde la época griega hasta la actualidad. No se trata de ofrecer una propuesta didáctica concreta, sino facilitar la labor de enseñanza–aprendizaje a los profesores y estudiantes de educación musical por medio de unas orientaciones y herramientas didácticas que se consideran de utilidad.

El sonido está caracterizado, además de por su duración, por tres elementos: altura o frecuencia; intensidad o amplitud de la vibración sonora y timbre o forma de la vibración.

Intervalos, escalas y notas musicales

Teniendo en cuenta las aportaciones de Arenzana y Arenzana (1998) y Pascal y Tomas (2000), el sonido está caracterizado, además de por su duración, por tres elementos: altura o frecuencia; intensidad o amplitud de la vibración sonora y timbre o forma de la vibración. En este estudio nos centraremos en la altura del sonido.

El teorema de Fourier nos informa de que en realidad un sonido complejo de frecuencia f se produce por una vibración que es la suma de varias vibraciones de tipo sinusoidales o sonidos puros. Es decir, por el sonido fundamental de frecuencia f y los armónicos de frecuencias $2f$, $3f$…

Intervalos

Considerando el hercio como unidad de medida de las frecuencias, se puede establecer una relación binaria en $(\mathbb{R}^*_+)^2$ entre los pares de sonidos, a través de sus frecuencias. Es decir, en $(\mathbb{R}^*_+)^2$ se define la siguiente relación:

$$(f_1, f_2) \sim (f_3, f_4) \Leftrightarrow f_2/f_1 = f_4/f_3$$

Se trata de una relación de equivalencia y las clases módulo ~ se denominan intervalos.

Una propiedad interesante es:

Un intervalo admite un representante único del tipo $(1, k)$.

En efecto, llamando $f_2 / f_1 = k$, se tendrá:

$$(f_1, f_2) \sim (1, f_2/f_1) \sim (1, k) \sim (f, kf)$$

Esto nos permite definir el intervalo I_k como:

$$I_k = \{(f, kf), f \in \mathbb{R}^*_+\}$$

De esta forma, el conjunto de intervalos es:

$$I = \{I_k, k \in \mathbb{R}^*_+\}$$

Con esta notación, los intervalos más conocidos son:

I_1 es el unísono y corresponde al conjunto (f, f).
I_2 es el intervalo de octava, $(f, 2f)$.
$I_{3/2}$ es el intervalo de quinta, $(2f, 3f)$.
$I_{4/3}$ es el intervalo de cuarta, $(3f, 4f)$…

Por otra parte, si consideramos el intervalo I_k con (f, kf) y dado que, evidentemente, $kf = kf$, tomando logaritmos:

$$\log (kf) = \log (k) + \log (f)$$

Podemos convenir en tomar un segmento de medida proporcional al logaritmo de k y entonces lo anterior quedaría:

$$kf = f + I_k$$

Que representado en una recta sería:

De esta forma tendremos:

$$\text{Med } (I_k + I_{k'}) = \text{Med } (I_k) + \text{Med } (I_{k'})$$

En $\mathbb{R}^*_+$ vamos a definir una ley de composición interna + de intervalos por medio de la ley siguiente:

$$(\mathbb{R}^*_+)^2 \times (\mathbb{R}^*_+)^2 \rightarrow (\mathbb{R}^*_+)^2$$
$$(1, k) \times (1, k') \rightarrow (1, kk')$$

que es compatible con la relación de equivalencia ~:

$$(1, k) \sim (f, fk)$$
$$(1, k') \sim (f, fk')$$
$$(1, kk') \sim (f^2, f^2kk')$$

Esto nos permite sumar los intervalos de la forma:

$$I_k + I_{k'} = I_{kk'}$$

La aplicación de ($\mathbb{R}^*_+$, x) sobre (I, +) es, por tanto, un isomorfismo, lo cual nos permite hablar de intervalos como elementos de I o como elementos de $\mathbb{R}^*_+$.

Escalas

Se llamará escala musical a todo subgrupo propio de $\mathbb{R}^*_+$. Así, por ejemplo, se tendrán las escalas:

- Pitagórica, como un subgrupo multiplicativo engendrado por 2 y 3:
  $$<2,3> = \{2^n 3^m,\ n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z}\}$$
- Temperada, que corresponde a $<2^{1/12}>$.

En el periodo griego, las matemáticas y la música estaban fuertemente conectadas.

Notas

Teniendo en cuenta los sonidos de frecuencias: f, $2f$, … $2^n f$… ($n \in \mathbb{N}$) y $f/2$, $f/4$,… $f/2^p$ ($p \in \mathbb{Z}$), en $\mathbb{R}^*_+$, dadas dos frecuencias f_1 y f_2 se define la relación binaria:

$$f_1\ \mathfrak{R}\ f_2 \Leftrightarrow \exists\ n \in \mathbb{N},\ f_2 = 2^n f_1$$

Esta relación $\mathfrak{R}$ es de equivalencia y las clases módulo $\mathfrak{R}$,

$$\{2^n f,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

se les denomina notas musicales.

Veamos que toda nota admite un representante único perteneciente al intervalo $[f, 2f)$, $\forall\ f \in \mathbb{R}^*_+$.

En efecto, para cualquier nota de frecuencia f', se cumple que:

$$2^n \le f'/f < 2^{n+1} \Leftrightarrow 2^n f \le f' < 2^{n+1} f$$

Entre las notas puede establecerse una relación de orden del modo siguiente:

Sean f_1 y f_2 dos notas cualesquiera distintas y sean k_1 y k_2 sus representantes del intervalo $[f, 2f)$. Se define la relación:

$$f_1 < f_2 \Leftrightarrow k_1 < k_2$$

Por convenio la nota más pequeña es la DO y se les ha dado el nombre a las otras notas de RE, MI, FA, SOL, LA, SI, DO, estableciéndose la relación:

$$\text{DO} < \text{RE} < \text{MI} < \text{FA} < \text{SOL} < \text{LA} < \text{SI} < \text{DO},$$

que constituyen el conjunto de las notas musicales naturales.

La música griega

En el periodo griego, las matemáticas y la música estaban fuertemente conectadas. La música se consideraba como una estricta disciplina matemática, donde se manejaban relaciones de números, razones y proporciones.

Según Pitágoras, todas las escalas e intervalos musicales tienen un fundamento matemático basados sobretodo, en las relaciones matemáticas del monocordio. La comprobación de que cuerdas con longitudes de razones 1/2, 2/3 y 3/4, producían sonidos armónicos, condujo a Pitágoras a construir la *escala diatónica* o de las quintas.

Entre estas razones de longitudes se establecen unas relaciones matemáticas interesantes:

$$\frac{3}{4} = \frac{1+\frac{1}{2}}{2}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{1+\frac{1}{\frac{1}{2}}}$$

Es decir, la media aritmética de 1 y 1/2 , y la media armónica de 1 y 1/2.

Por otra parte, la relación de frecuencias era: 2, 3/2 y 4/3, que corresponden a la octava, quinta y cuarta.

Dentro de la quinta, un sonido agradable es la tercera, un triplete en el que las frecuencias se relacionan como 4 : 5 : 6. Partiendo de la nota la, de frecuencia 440 hz., y multiplicando a la izquierda por 5/4 y a la derecha por 6/5 y reiterando el proceso, tendremos:

$$352 \xrightarrow{\text{x } 5/4} 440 \xrightarrow{\text{x } 6/5} 528 \xrightarrow{\text{x } 5/4} 660 \xrightarrow{\text{x } 6/5} 990 \xrightarrow{\text{x } 5/4} 1188$$

Si se pasan a una octava, multiplicando por 1/2 o por 1/4 cuando sea conveniente, tendremos:

264	297	330	352	396	440	495	528
do	re	mi	fa	sol	la	si	do

Esta escala recibe el nombre de *escala de la justa entonación* y se debe a Aristógenes. En esta escala, las relaciones entre las frecuencias de los sonidos van siguiendo los intervalos:

9/8	10/9	16/15	9/8	10/9	9/8	16/15

Pitágoras utilizó una escala parecida a ésta, puesto que los pitagóricos reconocían que para poder hacer música era necesario hacer correcciones a los intervalos puros, de aquí que se utilizaran los intervalos siguientes:

9/8	9/8	256/243	9/8	9/8	9/8	256/243

La diferencia entre las relaciones se debe al hecho de que doce quintas no equivalen exactamente a siete octavas, y la escala usual se obtiene repitiendo las quintas y octavas hasta que coincidan. Esta diferencia viene marcada por la coma pitagórica, cuyo valor corresponde a:

$$(3/2)^{12} : 2^7 = 1{,}0136\ldots$$

Este problema era bien conocido por los pitagóricos, quienes reconocieron que para hacer música era necesario hacer correcciones a los intervalos puros, de ahí que a la diferencia entre esos dos ciclos de 12 quintas y 7 octavas se le denominó como *pitagórica*. Su cálculo da motivo a introducir el concepto de logaritmo, que no sólo permite efectuar dicho cálculo sino que también es necesario para dar sentido a las *sumas* de sonidos.

Didácticamente, es un momento adecuado para destacar el concepto físico de frecuencia y los conceptos matemáticos de fracción y sucesión, como elementos físicos y matemáticos que modelizan los diferentes sonidos.

El barroco

En este periodo el nuevo lenguaje musical será la tonalidad, donde cada nota tiene una función y todas están jeraquizadas, siendo la tónica la nota principal. En la implantación de la tonalidad tiene mucho que ver la afinación temperada, donde, por ejemplo, el do sostenido es igual al re bemol.

El uso de la escala cromática supone utilizar 12 semitonos iguales con lo que se resolvió el problema de cambio de tonalidad sin reajuste de la afinación. Por tanto, la coma pitagórica ya no aparecía. Además, se eliminan las cuarta y quinta justas.

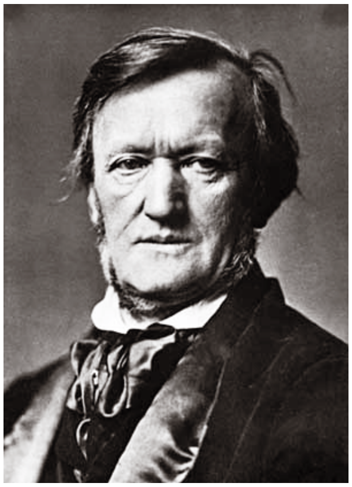
El valor del semitono es $\sqrt[12]{2} = 1{,}0594631$

Si llamamos a éste *f*, como la octava se divide en doce intervalos iguales, la razón de frecuencias será:

1	f	f^2	f^3	...	f^{11}	$f^{12}=2$

Los intervalos distan de ser perfectos. El principal avance en este campo se produce gracias a la afinación temperada, totalmente impuesta en este periodo, y según la cual todos los semitonos son casi iguales.

Fryderyk Franciszek Chopin (Zelazowa Wola, Polonia, 1 de marzo de 1810 — París, 17 de octubre de 1849) es considerado el más grande compositor polaco, y también uno de los más importantes pianistas de la historia. Su perfección técnica, su refinamiento estilístico y su elaboración armónica han sido comparadas históricamente con las de Johann Sebastian Bach y Wolfgang Amadeus Mozart por su perdurable influencia en la música de tiempos posteriores.



Wilhelm Richard Wagner (Leipzig, Alemania, 22 de mayo de 1813 — Venecia, Italia, 13 de febrero de 1883), compositor, director de orquesta, poeta y teórico musical alemán.

Para calcular las frecuencias asociadas, tendremos en cuenta la nota *la* con 440 hz:

$si \quad 466{,}16 \cdot \sqrt[12]{2} = 493{,}88$

$si_b \quad 440 \cdot \sqrt[12]{2} = 466{,}16$

$la \quad 440 = 440$

$la_b \quad 440 : \sqrt[12]{2} = 415{,}30$

...

$do \quad 440 : \left(\sqrt[12]{2}\right)^9 = 261{,}63$

El romanticismo

Los compositores románticos continúan haciendo cada vez más complejo el lenguje tonal, convirtiéndose a veces en tonalidad poco estable e incluso difusa. Un ejemplo de esta difusión tonal lo podemos ver en la bitonalidad, según la cual un fragmento musical puede ser escrito en dos tonalidades de manera simultánea.

Como se indica en www.anarkasis.com/pitagoras/061_modulo, Chopin, en su obra 24 preludios, dispuso las 24 tonalidades en un dodecágono, según las horas del reloj, siguiendo el ciclo de quintas (cada nueva tonalidad está 7 semitonos más arriba).

De esta forma se está estudiando la aritmética modular de congruencias módulo 12. Para una mayor operatividad, las notas se representan de la forma siguiente:

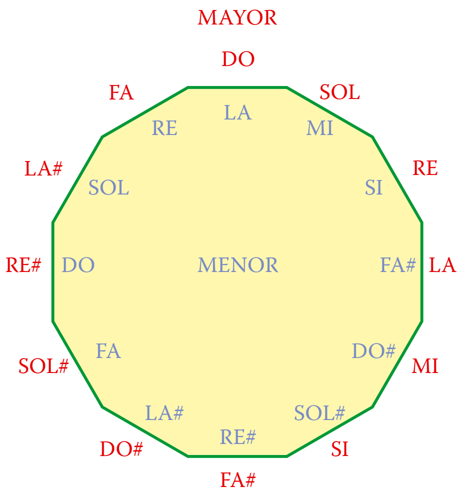
Si es el modo *mayor* (comienza por *do*):

do ≅ 0; do# ≅ 1; re ≅ 2; re# ≅ 3; mi ≅ 4; fa ≅ 5;
fa# ≅ 6; sol ≅ 7; sol# ≅ 8; la ≅ 9; la# ≅ 10; si ≅ 11

Si es el modo *menor* (comienza por *la*):

la ≅ 0; la# ≅ 1; si ≅ 2; do ≅ 3; do# ≅ 4; re ≅ 5;
re# ≅ 6; mi ≅ 7; fa ≅ 8; fa# ≅ 9; sol ≅ 10; sol# ≅ 11

Por tanto, la disposición en el dodecágono es:



Donde vemos que, partiendo de la nota 0, sumando 7 al ser ciclo de quintas, con respecto al módulo 12, tendremos:

$$0 \equiv 7 \equiv 2 \equiv 9 \equiv 4 \equiv 11 \equiv 6 \equiv 1 \equiv 8 \equiv 3 \equiv 10 \equiv 5.$$

La atonalidad

En este periodo de Wagner y Mahler, se vislumbran unos intentos reales de ruptura de la norma de la tonalidad en la que la aleatoriedad musical se va abriendo camino. Es decir, la ruptura con la tonalidad depende del uso de las relaciones matemáticas de modo no convencional. La música recurre, cada vez más, a las matemáticas no como modelización que explica la música de siempre, esto es como herramienta; sino

Gustav Mahler (Kaliste, República Checa, 7 de julio de 1860 — Viena, Austria, 18 de mayo de 1911), compositor de música clásica, fue conocido en vida como uno de los más importantes directores de orquesta y de ópera de su momento, pero después ha venido a ser reconocido como uno de los compositores post-románticos más importantes.

que, por el contrario, las matemáticas pasan a ser creadoras de música, constituyéndose en objeto de creación musical.

Un ejemplo lo tenemos en la obra de Bartók (www.anarkasis.com/pitagoras/menu.htm), *Música para instrumentos de cuerda, percusión y celeste*, en la que utiliza algunos términos de la serie de Fibonacci, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...

Otra creación musical interesante a partir de una sucesión matemática aparece en Jonson (2001). Es decir, como señala este compositor, partiendo de un objeto matemático se llega al objeto musical. Por ejemplo, con un simple automatismo como el siguiente:

$$n \longrightarrow n, n+1, n$$

Teniendo en cuenta que, por las codificaciones ya sabidas, podemos comenzar con do = 0 ..., se generan las siguientes sucesiones numéricas:

0
010
010 121 010
010121010 121232121 010121010
...

las cuales se corresponden con partituras musicales.

El dodecafonismo

Algunos compositores, al considerar que el atonismo era insuficiente para dar cabida a su creación artística, recurrieron a nuevos lenguajes musicales naciendo así un nuevo sistema (análogo, en cierto sentido, al tonal) que se adaptaba al cromatismo total: el sistema dodecafónico, el cual renuncia totalmente a la tonalidad y llega a ser un método para componer con 12 sonidos con la única condición de estar relacionados entre sí.

Veamos cómo se traducen los principios anteriores matemáticamente. Un compositor puede comenzar organizando una secuencia cualquiera de notas:

DO LA$_b$ LA SOL$_b$ FA SI SI$_b$ RE MI$_b$ RE$_b$ SOL MI

Esta sucesión original de notas constituye el material musical para toda la pieza. De dicha sucesión pueden derivarse otras, las cuales siguen unos determinados principios matemáticos. Las operaciones musicales que se pueden extraer son las de *transposición* —se respeta el orden de los intervalos de la sucesión inicial, aunque se trasladan las notas *n* semitonos hacia arriba (P_n)—; *inversión* —se invierte la dirección del intervalo— y, por último, *retrogradación* —la misma sucesión de notas pero tocadas desde el final hasta el comienzo—.

Hay que respetar las dos reglas más importantes de la composición dodecafónica:

– La sucesión original debe ser seguida con exactitud, y no puede ser repetida hasta que cada nota haya sido tocada.
– Debe evitarse cualquier combinación de notas que impliquen tonalidad.

Las sucesiones pueden presentarse linealmente (melódicamente) o en forma de acordes (armónicamente).

Para una mayor clarificación, modelicemos numéricamente las operaciones anteriores, para ello codificaremos la sucesión anterior (DO = 0; RE$_b$ = 1; RE = 2;...; SI$_b$ = 10 = t; SI = e = 11)

0 8 9 6 5 e t 2 3 1 7 4

la cual se denotará por P_0.

Apliquemos la transposición a la misma:

Si fijamos $n = 1$, para hallar P_n se tiene que efectuar la operación matemática siguiente:

$(n + i)$ mod 12, siendo i el número del orden posicional de la nota.

En el caso del ejemplo n se ha tomado 1. Luego, para hallar P_1, tendremos:

1 9 t 7 6 0 e 3 4 2 8 5

Apliquemos ahora la inversión:

Matemáticamente consiste en reemplazar cada intervalo por su complemento mod 12 según el valor de la inversión. En el caso de que fijemos I_1, se tendrá:

$$0 + 1 \sim 1 \text{ (mod 12)}$$

$$8 + 5 \sim 1 \text{ (mod 12)}$$

$$6 + 7 \sim 1 \text{ (mod 12)}$$

...

Por tanto, la sucesión numérica correspondiente a I_1, respecto de P_0, es:

1	5	4	7	8	2	3	e	t	0	6	9
RE$_b$	FA	MI	SOL	LA$_b$	RE	MI$_b$	SI	SI$_b$	DO	SOL$_b$	LA

Si aplicamos la retrogradación, que consiste en hacer reversible el orden de P_0, para R_1 (una unidad más), tendremos:

5	8	2	4	3	e	0	6	7	t	9	1
FA	LA$_b$	RE	MI	MI$_b$	SI	DO	SOL$_b$	SOL	SI$_b$	LA	RE$_b$

De cada una de éstas cuatro, salen 11 posibilidades más. Luego, hay en total 48 posibles versiones.

Conclusiones

Mediante un estudio epistemológico de la evolución musical, se establece la relación entre la música y las matemáticas a través de las dimensiones musical y matemática, que dotan de sentido e interés al estudio de la asignatura de *Matemáticas y su Didáctica* en tercer año de la titulación de Maestro en Educación Musical.

El concepto físico de frecuencia y los conceptos matemáticos de relación binaria, relación de equivalencia, relación de orden, grupo, subgrupo e isomorfismo entre otros, permiten la modelización matemática de los sonidos musicales.

El concepto físico de frecuencia y los conceptos matemáticos de relación binaria, relación de equivalencia, relación de orden, grupo, subgrupo e isomorfismo entre otros, permiten la modelización matemática de los sonidos musicales, lo cual permite al estudiante de educación musical encontrar unas relaciones significativas entre Matemáticas y Música muy importantes sobre todo para su formación matemática, aunque también para su formación musical.

En la descripción evolutiva de los distintos periodos musicales también se trabajan conceptos como el de fracción, número irracional, congruencias módulo m y sucesión, que se considera inciden positivamente en la motivación de cara a su formación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARENZANA, V. y ARENZANA, J. (1998): "Aproximación matemática a la música", *Números, Revista de didáctica de las matemáticas*, Vol. 35, pp. 17-31.

JOHNSON, T. (2001): *Found Mathematical Objects*, www.entre-temps.asso.fr/Seminaire, pp. 1-19.

PASCAL, C. y TOMAS, N. (2000): *Musique et Mathématiques*, TER, Université de la Méditerranée, pp. 1-41.

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Comisión Ejecutiva

Presidente: **Serapio García Cuesta**
Secretario General: **Josep Sales Rufí**
Vicepresidente: **Manuel Torralbo Rodríguez**
Tesorera: **Claudia Lázaro del Pozo**

Secretariados:
Prensa: **María Peñas Troyano**
Revista SUMA: **Francisco Martín Casalderrey/Inmaculada Fuentes Gil**
Relaciones internacionales: **Sixto Romero Sánchez**
Publicaciones: **Ricardo Luengo González**
Actividades y formación del profesorado: **Salvador Guerrero Hidalgo**
Actividades con alumnos: **Floreal Gracia Alcaine/Esther López Herrainz**

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidenta: Pili Royo Regueiro
Apdo. de Correos 835. 17080 Girona

Organización Española para la Coeducación Matemática *Ada Byron*
Presidenta: M.ª Carmen Rodríguez
Almagro, 28. 28010 Madrid

Sociedad Andaluza de Educación Matemática *Thales*
Presidente: Manuel Torralbo Rodríguez
Facultad Matemáticas. Apdo. de Correos 1160. 41080 Sevilla

Sociedad Aragonesa *Pedro Sánchez Ciruelo* de Profesores de Matemáticas
Presidenta: Ana Pola Gracia
ICE Universidad de Zaragoza. C/ Pedro Cerbuna, 12. 50009 Zaragoza

Sociedad Asturiana de Educación Matemática *Agustín de Pedrayes*
Presidente: José Joaquín Arrieta Gallastegui
Apdo. de Correos 830. 33400 Avilés (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas *Isaac Newton*
Presidenta: Lucía Henríquez Rodríguez
Apdo. de Correos 329. 38208 La Laguna (Tenerife)

Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática *Miguel de Guzmán*
Presidente: Antonio Arroyo
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Víllalar, s/n. 09006 Burgos

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García Cuesta
Avda. España, 14, 5ª planta. 02002 Albacete

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidente: Bienvenido Espinar Cepas
CPR Murcia II. Calle Reina Sofía n.º1. 30007 Murcia

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Manuel Rodríguez Mayo
Apdo. de Correos 103. Santiago de Compostela

Sociedad Extremeña de Educación Matemática *Ventura Reyes Prósper*
Presidente: Ricardo Luengo González
Apdo. de Correos 590. 06080 Badajoz

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo*
Presidente: Juan A. Martínez Calvete
C/ Limonero, 28. 28020 Madrid

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: Begoña Martínez Barrera
Avda. del Deporte s/n. 39012 Santander

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidente: Luis Serrano Romero
Facultad de Educación y Humanidades. Ctra. Alfonso XIII, s/n. 52005 Melilla

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas *Tornamira* Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea *Tornamira*
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática.
Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra. 31006 Pamplona

Sociedad *Puig Adam* de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Facultad de Educación. (Sec. Deptal. Álgebra). Despacho 3005.
C/ Rector Rollo Villanova, s/n. 28040 Madrid

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas *A prima*
Presidente: Javier Galarreta Espinosa
CPR. Avda. de la Paz, 9. 26004 Logroño

Sociedade Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)
Presidente: Manuel Díaz Regueiro
C/ García Abad, 3, 1ºB. 27004 Lugo

Societat d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana *Al-Khwarizmi*
Presidente: Luis Puig Espinosa
Departamento Didáctica de la Matemática. Apdo. 22045. 46071 Valencia

Societat Balear de Matemàtiques *Xeix*
Presidente: Albert Violant i Holz
C/ Martí Rubí 37/alts. 07141 Sa Cabaneta (Marratxí). Islas Baleares

SUMA 54
Febrero 2007, pp. 51-53

Modelling in Science Education and Learning

El objetivo de esta nota es presentar un nuevo proyecto de revista electrónica sobre modelización que también colaborará con SUMA

The purpose of this paper is to present a new online modelling jornal an occasonal contributor with SUMA in the future

Cuando se analiza el papel de las matemáticas como lenguaje universal de las ciencias, no siempre se hace referencia a como la adopción del lenguaje matemático ha modificado la forma en que, en dichas ciencias, se presentan los conceptos y los hechos fundamentales de las mismas. Esto tiene gran importancia cuando se reflexiona sobre la influencia que las matemáticas tienen en la forma en que se enseñan en el aula dichas ciencias. Posiblemente uno de los casos más estudiados sea el de la enseñanza de la Física. Sin embargo no parece que haya habido un proceso de retroalimentación en el sentido que haya cambiado también la forma en que tradicionalmente se enseñan las matemáticas, especialmente en un contexto aplicado.

Parece razonable pensar que, el carácter instrumental que las matemáticas tienen en estos contextos, debería abrir un proceso de reflexión que al menos nos hiciera plantearnos cuál debe ser la formación en matemáticas de científicos y tecnólogos y cuáles deberían ser las estrategias más adecuadas para garantizar una formación matemática en condiciones. Esta reflexión se podría enmarcar, dentro de un contexto más general, en el movimiento surgido dentro de la didáctica en cuanto a la atención a las diferencias (sociales, económicas, culturales, etc., (Jiménez, 2004 y Sánchez, 1999)) a la hora de determinar las estrategias educativas más adecuadas.

Dentro de las posibles estrategias, a la hora de abordar la enseñanza de las matemáticas para científicos y tecnólogos, la

Claudi Alsina i Català
Universitat Politècnica de Catalunya. Barcelona
L. M. García-Raffi
Universitat Politècnica de Valencia. Valencia
Joan Gómez Urgelles
Universitat Politècnica de Catalunya. Vilanova i la Geltrú
Sixto Romero Sánchez
Universidad de Huelva. La Rábida- Palos de la Frontera

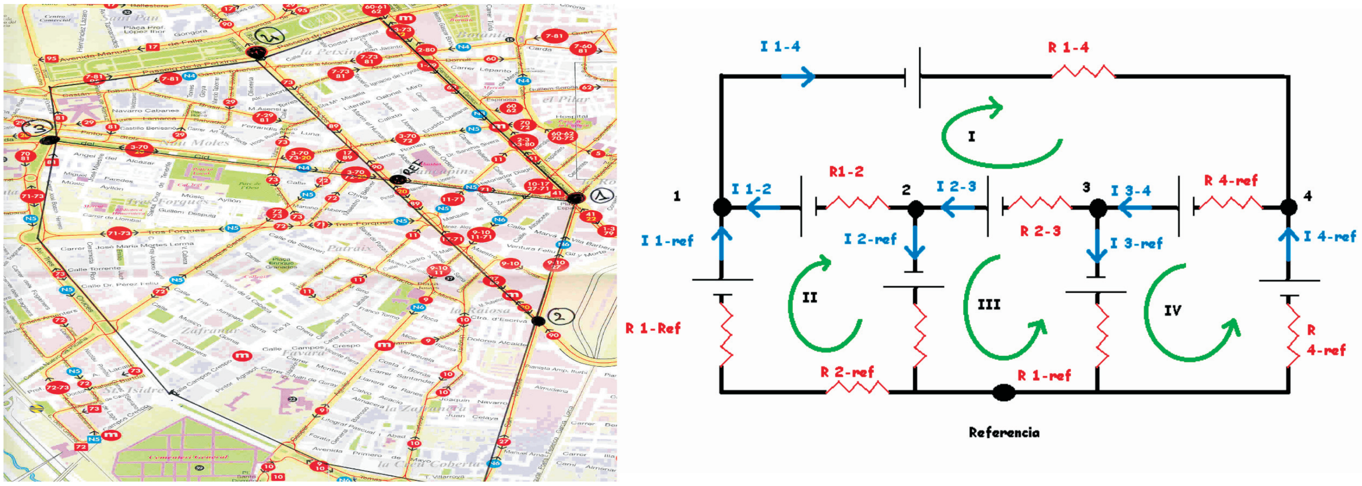
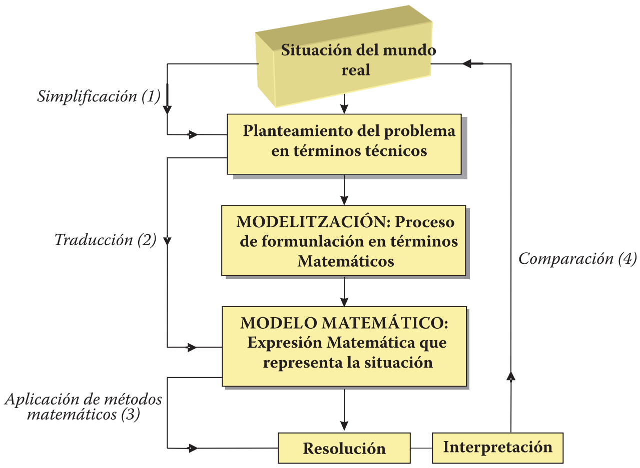


Fig1: Un ejemplo de modelado de la densidad del tráfico en una red viaria utilizando circuitos eléctricos

modelización matemática aparece como una metodología adecuada en dichos contextos. Se trata de emular en el aula los procesos mediante los cuales la ciencia establece teorías que tratan de dar una explicación a los hechos y establecer un corpus teórico sobre el cual construir su avance. La relación de las matemáticas con otras ciencias y muy especialmente con la ingeniería y su conexión con el mundo real va mucho más allá del carácter instrumental de las mismas, estableciendo un nexo muy importante entre matemáticas y realidad



Modelización como estrategia docente

La modelización matemática se enmarca también dentro de las corrientes que en didáctica tratan de introducir en el aula el trabajo cooperativo, la búsqueda de información, el uso de las nuevas tecnologías (el uso del PC como herramienta de cálculo y programación cada vez más potente, Internet...), en resumen, estrategias para la educación de los ciudadanos del siglo XXI. La modelización matemática ([Gómez, 2002; García-Raffi, 2004 y Sánchez, 1999]) se puede concretar en un esquema relativamente sencillo. Se parte de un problema real, que se plantea en términos de la ciencia y la ingeniería, se realiza un proceso de simplificación a la luz de las ciencias involucradas (Física, Química, Biología…) y ello conduce a un planteamiento del problema en términos matemáticos que culmina con la formulación del modelo (ecuaciones, formas geométricas, desigualdades…) que describe el problema. El siguiente paso es la resolución del problema matemático y, éste es el punto más importante, su interpretación a la luz del modelo y su comparación con la realidad para validar la capacidad predictiva del mismo.

Las bondades de este tipo de planteamiento básicamente se pueden resumir en dos puntos:

1. La modelización refuerza el conocimiento multidisciplinar a través de una actividad que involucra conceptos y métodos de diferentes ciencias. En ese sentido refuerza dicho conocimiento haciéndolo más significativo y duradero en el tiempo.
2. La modelización es una actividad creativa que implica el concurso de habilidades que normalmente no son evaluadas en las asignaturas tradicionales y que son fundamentales para la formación del científico y el ingeniero: Desarrollo del espíritu crítico, formulación de ideas en térmi-

nos científicos, trabajo en equipo, búsqueda de información, etc. ([Sánchez, 1999 y Montero, 2003]).

Uno de los principales problemas con los que se ha enfrentado este tipo de planteamientos es la escasa flexibilidad que para este tipo de actividades existe dentro del currículum de las escuelas y de la propia organización de la docencia en los centros de enseñanza básica, enseñanzas medias, así como en los departamentos universitarios donde en general las asignaturas son compartimentos estancos con escasa o nula interrelación. Además se producen situaciones como la carencia de locales adecuados para el trabajo en grupo o, a veces, la simple necesidad de poder acceder a una sala con ordenadores y conexión a Internet en horarios que no corresponden a la asignatura en la que se realizan las actividades de modelización. Otra de las carencias importantes es la no disponibilidad de foros adecuados en donde presentar las nuevas ideas, especialmente aquel material destinado a la enseñanza cuya difusión en condiciones permitiría a muchos profesores poner en práctica en el aula estas estrategias de aprendizaje. El objetivo de este artículo es dar a conocer a la comunidad educativa una iniciativa que trata de paliar esto último. Son muchas las revistas que existen en la actualidad dedicadas a la didáctica de las ciencias pero ninguna específicamente dedicada a la modelización. Esto hace difícil la publicación de material relacionado con la modelización matemática, tanto aquel que trata de exponer experiencias llevadas a cabo dentro del aula y el análisis de los resultados que sobre el aprendizaje tienen, como aquellas que simplemente pretenden poner a disposición de los profesores material adecuado para la enseñanza de temas concretos a través de prácticas de modelización o cualquier otro tipo de actividad.

El nuevo proyecto

Desde este artículo pretendemos presentar una nueva revista en formato electrónico que estará a disposición a partir del año 2007. Quizá uno de los aspectos más importantes y que también determina la vocación con la que nace la revista y su voluntad de ubicarse de lleno dentro de los foros donde tradicionalmente se han publicado este tipo de trabajos es que la revista pretende contar con una sección dentro de la Revista Suma donde se publicarán aquellos trabajos que el comité editorial considere más relevantes o de especial interés para la comunidad. El título de la revista es *Modelling in Science Education and Learning* y trata así de poner de manifiesto el carácter internacional de este tipo de iniciativas avalado en los diferentes congresos (CERME4, ICME, ICTMA12,…).

La revista aceptará trabajos dedicados a la modelización matemática en cualquiera de los segmentos educativos (primaria, enseñanzas medias y universidad) y en cualquier área científica. Es importante destacar que el hecho de tratarse de una revista electrónica abre muchas posibilidades al tipo de material que puede ser publicado. Ello quiere decir que, junto a los artículos tradicionales, la revista aceptará software de producción propia, pequeños videos y en general cualquier tipo de material audiovisual que se considere relevante por parte de los editores. Es nuestra voluntad hacer de esta revista un foro de debate y distribución de todo el material didáctico que se genere en torno a la modelización matemática para la enseñanza de las ciencias. Los detalles sobre dirección URL, ISSN, Comité Editorial y normas para la publicación de artículos serán puestos en conocimiento del público hacia principios del año que viene. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

JIMÉNEZ, J., FITZSIMONS, G.E., HAHN, C. (2004): *A challenge for Mathematics Education: To reconcile commonalities and differences. Proceedings of the CIEAEM54,* Vilanova I la Geltrú. Ed. Graó .

Gómez Urgellés, J., Fortuny,J.M. (2002): “Contribución al estudio de los procesos de modelización en la enseñanza de las matemáticas.” *Uno* 31, pp. 7-23.

ALSINA, C. (2005): “Problemes quotidians, models matemàtics i una mica de sentit comú.” Conferéncia plenaria. *Actas de la Primera Jornada de Modelització.* 22 Abril (2005) Vilanova i la Geltrú.

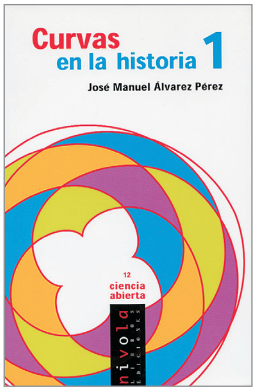
ROMERO, S. (2001): “Reflexiones sobre qué matemáticas enseñar en los estudios técnicos universitarios y su relación con el uso de las nuevas tecnologías.” *Matemáticas en Europa: diversas perspectivas*. pp 85-105. Ed. Grao. Barcelona

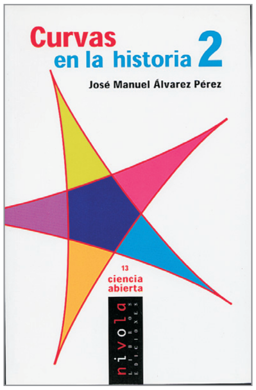
GARCÍA-RAFFI, L.M.(2004): “Mathematics, Technology and engineering education” en *A challenge for Mathematics Education: To reconcile commonalities and differences. Proceedings of The CIEAEM54.* Vilanova i la Geltrú. Ed. Graó.

SÁNCHEZ PÉREZ, E.A., GARCÍA-RAFFI, L.M. y SÁNCHEZ PÉREZ, J.V. (1999): “Introducción de las técnicas de modelización para el estudio de la física y de las matemáticas en los primeros cursos de las carreras técnicas.” *Enseñanza de las Ciencias* 17(1) (1999), pp. 119-129.

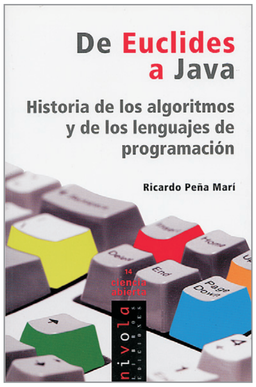
MONTERO, J.A., PAJARES, J., FERRER, GARCÍA, M.O., ESCUDERO, N., MORÁN, J.A. y MARTÍNEZ, E. (2003): “Aprender a utilizar conceptos algebraicos ante problemas ‘reales’ utilizando el aprendizaje cooperativo”, *III Jornada sobre Aprendizaje Cooperativo (JAC), Actas* CD ROM ISBN 84-688-2760-6, Barcelona.

Libros recibidos

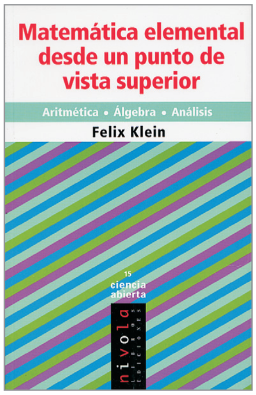




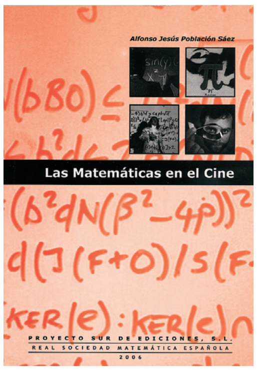
CURVAS EN LA HISTORIA 1 Y 2
J.M. Álvarez Pérez
Ciencia abierta 12 y 13
Nivola
Madrid, 2006
ISBN: 84-96566-12-9 y 84-96566-11-8
285 páginas y 319 páginas



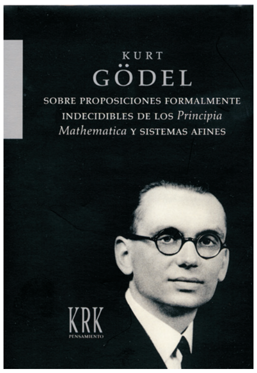
DE EUCLIDES A JAVA. HISTORIA DE LOS ALGORITMOS Y DE LOS LENGUAJES DE PROGRAMACIÓN
Ricardo Peña
Ciencia abierta 14
Nivola
Madrid, 2006
ISBN: 84-96566-14-5
254 páginas



MATEMÁTICA ELEMENTAL DESDE UN PUNTO DE VISTA SUPERIOR. ARTIMÉTICA. ÁLGEBRA. ANÁLISIS
Felix Klein
Ciencia abierta 15
Nivola
Madrid, 2006
ISBN: 84-96566-19-6
379 páginas

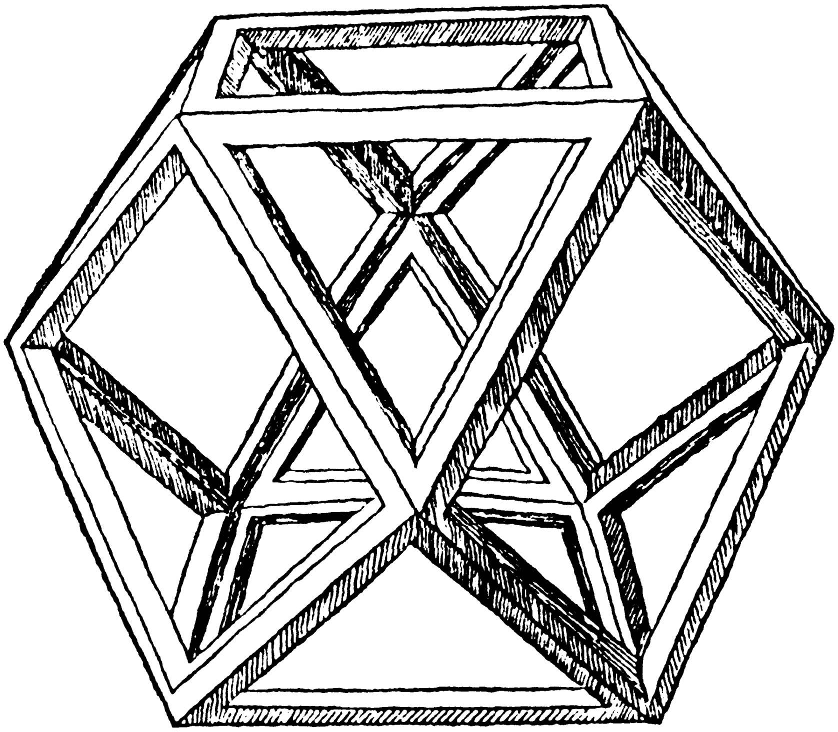


LAS MATEMÁTICAS EN EL CINE
A.J. Población
Proyecto Sur de Ediciones y RSME
Granada, 2006
ISBN: 84-8254-367-9
318 páginas



SOBRE PROPOSICIONES FORMALMENTE INDECIDIBLES DE LOS *PRINCIPIA MATHEMATICA* Y SISTEMAS AFINES.
K. Gödel
Traducción: M. Garrido, A. García y L.M. Valdés.
Oviedo, 2006
ISBN: 978-84-96476-95-0
155 páginas

SUMA



Dibujo de Leonardo da Vinci para *La divina proporción* de Luca Pacioli

poliedro

SUMA 54
Febrero 2007, pp. 57-66

En torno al Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pascal. El Método, contra el Método (y VII)

Desde hace algunos años, no pocos, venimos escuchando una persistente salmodia que loa sin cesar el denominado método científico como paradigma no sólo de investigación sino también de modelo educativo. Ni una sola voz discrepante. Se evocan sus bondades con la misma insistente pesadez y ritmo monocorde con que invoca el rosario las virtudes de la Virgen, recita el Islam los noventa y nueve nombres de Alá o susurra el mantra un hinduista. Sin criterio comparativo alguno ni necesidad de fundamentar los asertos se asume la obviedad de sus bondades y se adopta una postura monolítica de rechazo hacia cualquier otra forma de proceder alternativa.

Pero, puesto que es la historia la que guía nuestros pasos y Pascal nuestro lazarillo, no queremos terminar las referencias a él sin adentrarnos, con la cautela que nos sugiere nuestra ignorancia y el atrevimiento al que nos incitan nuestras convicciones[1], en el campo de la filosofía.

Cuando hablamos de *método* es difícil no desviar la mirada hacia Descartes (1596–1650). Su *Discurso del Método*, y el racionalismo con él, marcan un antes y un después en el pensamiento filosófico de Occidente que reconoce en la fecha de su publicación, 1637, el nacimiento de la filosofía moderna una vez superado el principio de autoridad, que es como decir la referencia constante a Aristóteles y Santo Tomás, la incapacidad del silogismo escolástico como generador de nuevas verdades y la sumisión de la razón a la fe como vía de búsqueda de la verdad[2]. Su aspiración a ser modelo único de proceder especulativo es innegable[3] aunque compita con las propuestas empiristas de Bacon como criterio de búsqueda contrapuesto.

Aún a riesgo de una simplificación excesiva podemos sintetizar *el método cartesiano* en cuatro reglas:

1. La evidencia, entendida en términos de claridad y distinción y, como consecuencia, en oposición a lo probable y a lo verosímil, se presenta como criterio de verdad y caracteriza el conocimiento científico.
2. Dividir cada una de las dificultades en tantas partes como fuera posible y en cuantas requiriese su mejor solución,

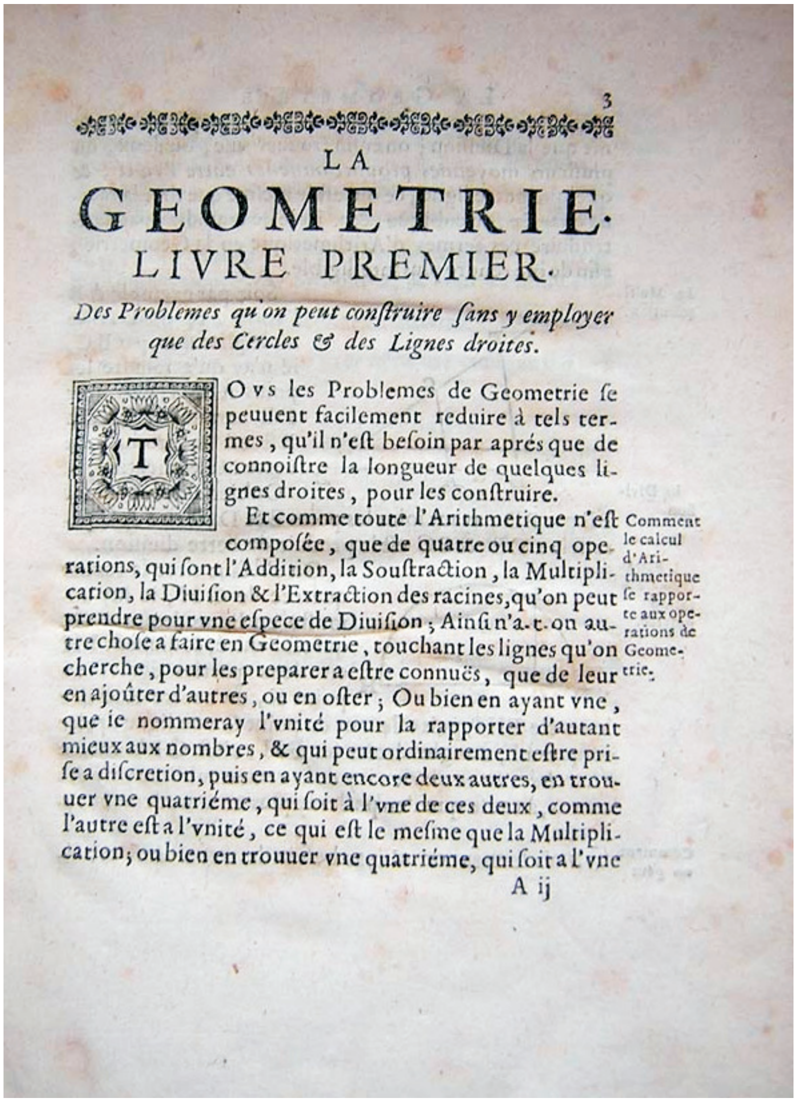
Carlos Usón Villalba
Ángel Ramírez Martínez
historia.suma@fespm.org

hasta alcanzar, gracias a la intuición, los principios más elementales que Descartes denominará *las naturalezas simples*.
3. La deducción como operación a través de la cual se infiere lo más complejo desde lo más simple.
4. Examen exhaustivo que nos asegure que no hemos omitido nada.

Desde esa perspectiva de revisión de los planteamientos cartesianos debemos interpretar los dos opúsculos que Pascal titula *El espíritu geométrico* y *El arte de persuadir*. Hoy son muchas las críticas que se levantan frente a la metafísica cartesiana. La primera, por tratar de demostrar, desde la perspectiva de una duda metódica que afecta al propio ser pensante, que las ideas racionalmente evidentes son verdaderas en base a un argumento que tiene como único valor de verdad ser racionalmente evidente. Desde ese mismo enfoque, Kant protagonizaría la segunda al poner en duda la evidencia del *Argumento Ontológico* de la existencia de Dios. La tercera incoherencia afecta a la aplicación científica del método filosófico. Las inconsistencias nacen de la aplicación de hipótesis y experimentos o de recurrir a justificaciones tan poco evidentes como la propia capacidad explicativa de las teorías que intenta justificar[4].

Método y Geometría

Descartes confiesa que se inspiró en el modelo euclidiano, todo hace pensar que para negarlo, a tenor de las diferencias que con él establece. Sabemos que estudió en profundidad los *Elementos*, y de hecho, una de las aportaciones más importantes de Descartes a las Matemáticas fue la superación del


3

LA
GEOMETRIE.
LIVRE PREMIER.

Des Problemes qu'on peut conſtruire ſans y employer que des Cercles & des Lignes droites.

TOvs les Problemes de Geometrie ſe peuuent facilement reduire à tels termes, qu'il n'eſt beſoin par aprés que de connoiſtre la longueur de quelques lignes droites, pour les conſtruire.

Et comme toute l'Arithmetique n'eſt compoſée, que de quatre ou cinq operations, qui ſont l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, la Diuiſion & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne eſpece de Diuiſion; Ainſi n'a-t-on autre choſe a faire en Geometrie, touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a eſtre connuës, que de leur en ajoûter d'autres, ou en oſter; Ou bien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement eſtre priſe a diſcretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatriéme, qui ſoit à l'vne de ces deux, comme l'autre eſt a l'vnité, ce qui eſt le meſme que la Multiplication; ou bien en trouuer vne quatriéme, qui ſoit a l'vne

Comment le calcul d'Arithmetique ſe rapporte aux operations de Geometrie.

A ij

Géométrie, de Descartes

> *Descartes reivindica la capacidad del espíritu humano para llenar con la intuición las deficiencias de la geometría clásica. Su* Géométrie *no contiene ninguna alusión a los* Elementos *a pesar de ser su referencia permanente.*

problema de homogeneidad en el cálculo de magnitudes. Una dificultad que bloqueó el avance de la aritmética griega, que trascendió la época árabe[5] y que sólo vio su final después de que el filósofo francés determinara el segmento –no la superficie– resultado del producto o cociente de otros dos[6].

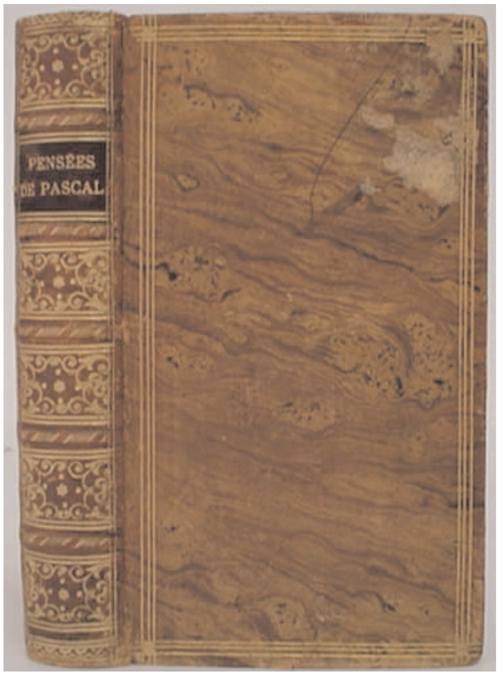
Descartes reivindica la capacidad del espíritu humano para llenar con la intuición las deficiencias de la geometría clásica. Su *Géométrie* no contiene ninguna alusión a los *Elementos* a pesar de ser su referencia permanente. Es cierto que es una obra parca en citas, pero las divergencias afectan a la presentación y al concepto mismo de demostración. No encontramos definiciones, postulados o axiomas, el rigor euclidiano está ausente por completo y los argumentos de convicción se sustentan en ejemplos. Ni siquiera la temática es coincidente. Descartes se empeña en incluir en su Geometría curvas y problemas, como el trazado de normales y tangentes o la construcción de ecuaciones, que están ausentes del texto de Euclides.

Esta conversión de la geometría al álgebra, iniciada ya por los árabes, daría como resultados más espectaculares la resolución y generalización del teorema de Pappus y la solución de dos problemas clásicos: la trisección del ángulo y la duplicación del cubo.

Merece la pena, por lo que afecta a la metodología, detenerse en la concreción que hace del *Método* al tratamiento de los problemas geométricos. Esa peculiar adaptación se traduce en cinco pasos que, según el propio Descartes, serían los siguientes:

1. Suponer que el problema ya está resuelto.
2. Nombrar a todas las líneas involucradas en el problema, conocidas o no.
3. Establecer una relación de dependencia entre líneas conocidas y desconocidas.
4. Constituir una ecuación que exprese esa relación de dos formas distintas.
5. Resolver la ecuación.

Esta conversión de la geometría al álgebra, iniciada ya por los árabes, daría como resultados más espectaculares la resolución y generalización del teorema de Pappus y la solución[7] de dos problemas clásicos: la trisección del ángulo y la duplicación del cubo. Había nacido la geometría analítica. El quehacer del artesano había dado paso a la automatización y a la producción en serie. Euclides, y los geómetras después de él, habían necesitado buscar una construcción diferente para resolver cada problema, para argumentar cada demostración. Descartes propone un método estandarizado de trabajo, una cadena de montaje, que dé una respuesta uniforme a todos ellos. La mecanización industrial tardaría un poco más. El desplazamiento de la geometría de las aulas y el sometimiento de la creatividad a la rutina algebraica también. El empirismo buscaba por su lado un sistema propio de producción automatizada, pero de ese *método* y de sus consecuencias didácticas hablaremos más adelante, antes analizaremos cómo afronta Pascal la búsqueda de la verdad.



El espíritu geométrico y *El arte de persuadir*[8].

Es muy probable que este primer opúsculo, *El espíritu geométrico*, estuviera destinado a servir de prólogo a una edición de los *Elementos de Geometría* que A. Arnauld pidiera a Pascal para las Petites Ecoles de Port-Royal[9]. El segundo se adentra de forma indiscutible en la propia condición humana y trata sobre las formas en que ésta acepta la verdad: por propia convicción, como fruto del razonamiento y por acuerdo[10]. Una modalidad, esta última, que califica de baja e indigna y que le obliga a entrar en el problema de las diferentes formas en que, a su juicio, el ser humano penetra en las verdades que tienen por sujeto a la naturaleza -y que por tanto se perciben a través de los sentidos- y aquellas otras que emanan de Dios y, como consecuencia, sólo son perceptibles por el espíritu. La vieja desconfianza platónica en los sentidos, compartida con Descartes e instalada en un creyente, que fía a la disciplina ascética el control de los apetitos, pero que sabe que lo inexplorado supera ampliamente a lo conocido, que las respuestas al conocimiento del universo no están en la Biblia y que la técnica debe estar en la base de ese descubrimiento.

Como en Montaigne, la preocupación principal de Pascal fue el estudio del ser humano y de su relación con Dios. Ese es el denominador común de estos dos opúsculos. El primero plantea el problema de llegar a la verdad que Pascal sintetiza en tres retos: descubrirla cuando se la busca, demostrarla cuando se la posee y discriminarla de lo falso cuando se la examina. En realidad se centra en los dos últimos hasta unificarlos e identificarlos con el método geométrico de demostración. Para él, equivalente a disponer las proposiciones en el mejor orden posible (metódico y completo) y argumentar cada una de ellas de forma sistemática y completa. No admite otra definición que la que sirva para nombrar una propiedad determinada o para designar lo que se nombra, nunca para mostrar su naturaleza. A partir de ahí, propone no hacer uso de ninguna afirmación que no haya sido previamente demostrada a excepción de los axiomas, verdades tan evidentes que no precisan demostración. Un prototipo argumental que, en oposición a Descartes, fundamenta en el modelo euclidiano de enunciado y demostración, pero que, al igual que él, pretende aplicar fuera de los límites de la propia geometría.

En El espíritu geométrico, *Pascal plantea el problema de llegar a la verdad que sintetiza en tres retos: descubrirla cuando se la busca, demostrarla cuando se la posee y discriminarla de lo falso cuando se la examina.*

Aceptada la imposibilidad de que la ciencia lo demuestre todo, concluye con aquella cita bíblica (Sap. XI, 21), tan habitual en los libros de almutazafes: *Dios hizo todo en peso, número y medida* que, como una verdad inmutable, parece perseguir a la ciencia desde sus orígenes y poner en evidencia las limitaciones humanas en esa búsqueda impenitente de la verdad fuera de los límites de la regularidad. El problema de lo indefinible acabará atrayendo su atención hacia el terreno del infinito y los indivisibles, sin que, desde esta perspectiva, se pueda decir que se adelantara con sus juicios a ese tratamiento de lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande que llevaría a las matemáticas al calculo infinitesimal e integral, y que sus preocupaciones metafísicas, finalmente más apremiantes que las científicas, le impidieron abordar en profundidad.

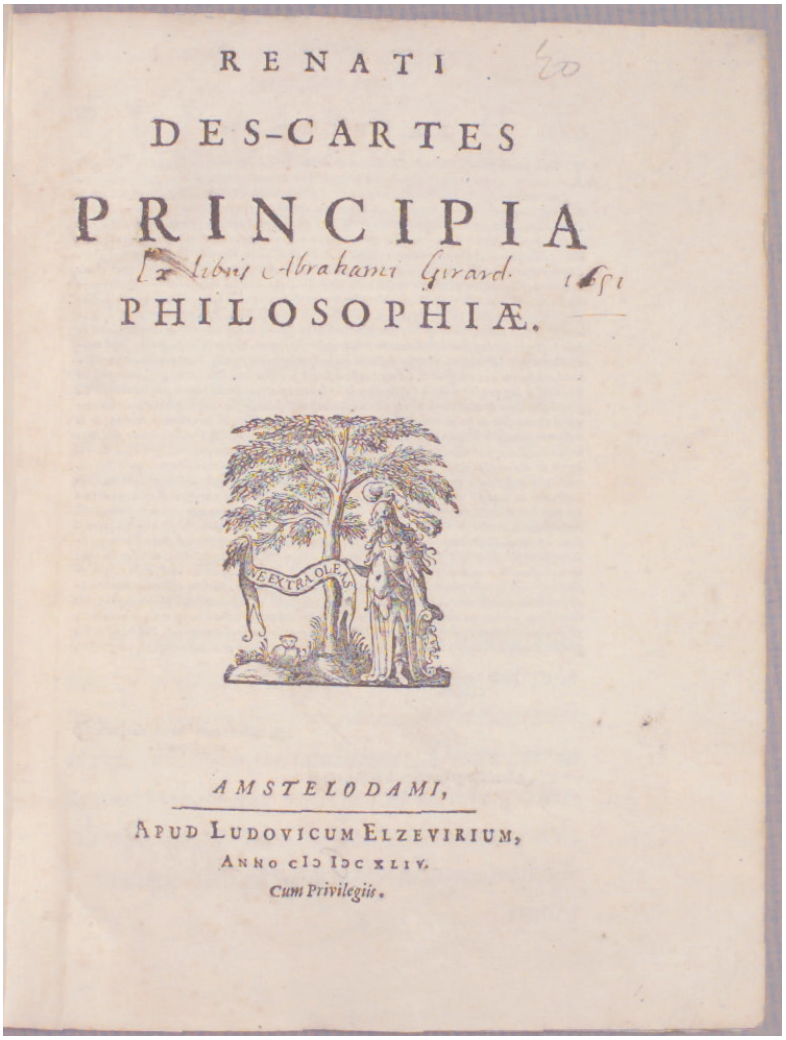
Contra *El Método*

... los primeros conocimientos que los antiguos nos han transmitido han servido de escalones para subir a los nuestros, [...], *en nosotros es donde se halla en verdad la antigüedad que en ellos honramos.* Y continúa *... conocían tanto como nosotros aquello que en la naturaleza les era posible observar* [...] *no conocían tantas cosas de ella, y nosotros vemos más que lo que veían ellos* [...] *sin contradecirles, podemos afirmar lo contrario de lo que ellos decían.*

Aquí Pascal apunta directamente a Descartes. No hay crítica a la autoridad o a la tradición sino que se incorpora a un nuevo concepto de “progreso” que vemos auspiciado por Bacon y más tarde por Leibniz. Como Bacon, separa el desarrollo de la ciencia, ligado a las artes técnicas, del de la filosofía entendida como especulación deductiva a partir de los primeros principios. Ahí radica la nueva y definitiva orientación del pensamiento científico. Hay en todos estos autores una concepción de la historia como progreso: El sujeto cognoscente no es el ser individual de Descartes aislado y enfrentado a su propia razón sino la humanidad entera que progresa con el tiempo.

Descartes en los *Principios de la filosofía* afirma que la verdad sólo se entiende de un modo y nada, sino la especulación racional que progresa deductivamente, puede captarla. Las artes técnicas son rechazadas en la medida en que no forman parte del entramado deductivo de la verdad, y por eso el progreso del saber requiere de unos nuevos principios filosóficos especulativos puesto que los de Aristóteles se han mostrado estériles. Frente a este ideal de saber exclusivamente deductivo, y por tanto fuera de los parámetros de tiempo, lugar y circunstancia, Bacon propugna un concepto de “verdad” fundado en unas artes técnicas que se perfeccionan en el tiempo *...autor de autores y el padre de la verdad.*

Todo ello forma parte de una nueva orientación epistemológica que ya no considera el acceso inmediato y simple de la razón a la verdad. La verdad no se define por esas notas de “claridad” y “distinción” que la convertían en el objeto perfecto para un entendimiento abstracto y deductivo. La verdad


RENATI
DES-CARTES
PRINCIPIA
Ex libris Abrahami Girard. 1651
PHILOSOPHIÆ.

AMSTELODAMI,
Apud Ludovicum Elzevirium,
Anno cIↃ IↃc XLIV.
Cum Privilegiis.

Principios de Filosofía, de Descartes

puede presentarse en forma "obscura" e "inconcebible" y en este caso habrá que seguir vías indirectas para poder afirmarla[11].

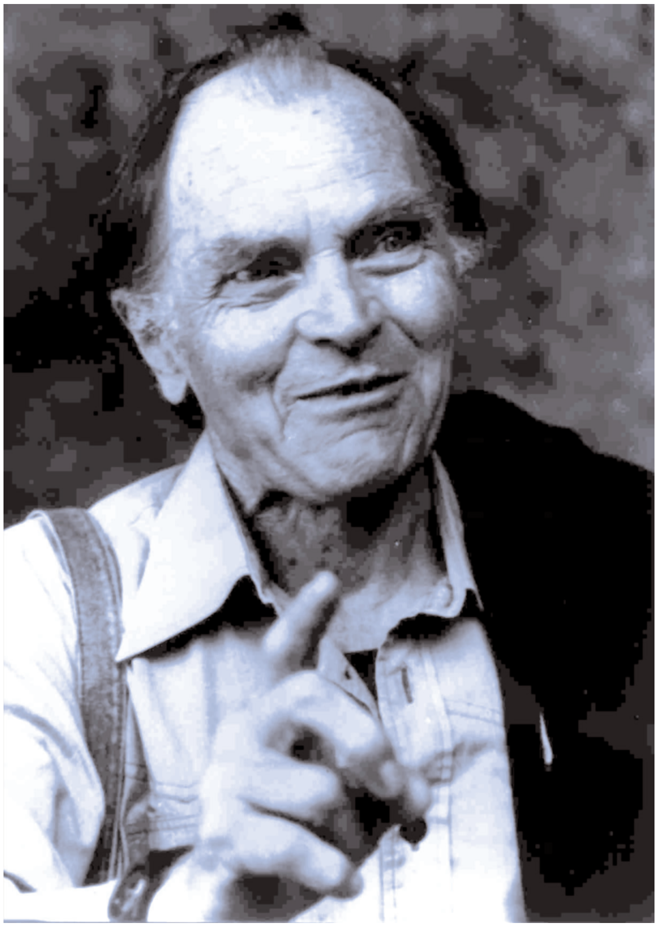
Ante una proposición que se nos presenta como inconcebible debemos suspender el juicio hasta que la proposición opuesta haya sido examinada; y lo que es más, si esta última resulta ser falsa, la primera debe ser entonces aceptada como verdadera. Pascal hará un uso muy hábil de esta tesis epistemológica cuando intente justificar sus propuestas sobre los infinitésimos y la infinita divisibilidad del espacio:

> No hay geómetra que no crea que el espacio es divisible hasta el infinito [...] Y sin embargo ninguno entiende una división infinita; y no se asegura de esta verdad más que por la única razón, que es ciertamente suficiente, de que se comprende perfectamente que es falso que dividiendo un espacio se pueda llegar a una parte indivisible, es decir, que no tenga ninguna extensión.

Este pragmatismo de aceptar como "verdadero" aquello que resulta "operativo" en la búsqueda del conocimiento está claramente en las antípodas del racionalismo cartesiano y sugiere incluso la posibilidad de acceder a una verdad incomprensible para nosotros. A partir de ese postulado, y a falta de una posible confirmación futura del contenido de la fe, por vía indirecta, resulta coherente concebirla como una "apuesta razonable". Su actitud ante la verdad revelada sigue un camino paralelo.

Feyerabend y "el otro método"

Desde hace algunos años acudimos a Congresos de Jóvenes Investigadores en sus diferentes versiones y a otros en los que las llamadas Ciencias Naturales son las protagonistas y donde las Matemáticas casi siempre se cuelan de rondón. Muchas veces como invitadas, otras como protagonistas, tras el enco-



Paul Feyerabend (1924-1994)

miable esfuerzo que, en los últimos años, está haciendo la Real Sociedad Matemática Española por sustraerlas del solipsismo en el que tan a gusto se mueven. Indefectiblemente, en todos esos encuentros hay un encendido elogio del método científico, no sólo como instrumento de investigación, también como modelo educativo. Siempre se nos atragantan las mismas preguntas, que no nos atrevemos a formular. Por un lado porque nos debemos a nuestros alumnos y alumnas allí presentes y poner en solfa una verdad tan unánimemente aceptada pone en riesgo sus opciones a premio, a las que les hacen acreedoras sus trabajos. Por otro, porque tal posibilidad es inviable en ese ámbito.

La duda hace referencia, por un lado, a la unicidad –en muchos casos univocidad–. Por otro, a qué se alude exactamente con la expresión "método científico". Al parecer es un compendio de seis etapas que enlaza con la tradición y que invoca filosóficamente a Bacon (1561-1626), Galileo (1564-1642) y Newton[12] (1643-1727). Ahora bien, quien señala a Galileo en el origen del método científico debería ser consecuente con tal afirmación o leer sus escritos. Si de algo es un ejemplo el pisano es de la falta de unicidad en el método a la hora de sustentar una teoría.

Sea como fuere, ese método único y científico de acercamiento a la verdad, pasaría por:

1. Contrastar bibliográficamente las aportaciones anteriores sobre el tema.
2. Observar y experimentar.
3. Formular las hipótesis.
4. Contrastar la hipótesis formulada.
5. Enunciar la ley que se sigue de todo lo anterior.
6. Enmarcarla en un conjunto más amplio de leyes hasta constituir una teoría.

Si recurrimos a Kuhn[13] en busca de respuestas parece difícil determinar el grado de actualidad del paradigma al que pretenden adscribirlo. Si acudimos a Lakatos[14], comienza por advertirnos que *en la filosofía contemporánea de la ciencia circulan varias metodologías; pero todas ellas se diferencian mucho de lo que usualmente se entendía por* metodología *en el siglo XVII e incluso en el XVIII. Entonces se esperaba de la metodología que proveyese a los científicos de un manual de reglas mecánicas para resolver problemas. En la actualidad tal esperanza ha sido abandonada: las metodologías modernas o* lógicas de descubrimiento *consisten simplemente en un conjunto de reglas* [...] *para la evaluación de teorías ya elaboradas.*

Desde esa perspectiva, y puesto que de formar investigadores debería tratarse, tampoco parece descabellado pedir que quien lo prodiga aclare si pretende adscribirse al inductivismo, neoinductivismo, convencionalismo, falsacionismo metodológico o promueve un programa de investigación científica al estilo de Lakatos. Para aclarar después si va a mantener la coherencia entre el modelo de investigación y el proceder didáctico dentro del aula que, por lo que parece traslucir la realidad, en el mejor de los casos, aparenta ser inductivista en su concepción, puesto que tiene a Kepler, Newton, Ampère y Lavoisier como referentes; convencionalista en su puesta en práctica, ya que resulta imposible su experimentación; amparada en la autoridad casi como recurso metafísico; usando en ocasiones resultados parciales (o al menos superados) para establecer la verdad; y falsacionista en sueños.

Es cierto que esta religión no es nueva, hace años que sabemos de tal liturgia metodológica, convertida en doctrina. El modelo, elevado a los altares del comportamiento único, limita el libre pensamiento y cercena el humanismo de la creación científica. Una vez que el ser humano queda fuera, el error es criterio absoluto de falsabilidad. Perfecto, el edificio erigido por el entendimiento para mayor gloria y boato de sí mismo, es sólido, bien definido y suntuoso… Pues bien, parafraseando a Hegel: *Cuanto más sólido, bien definido y espléndido sea, más imperioso es el deseo de la vida por escapar de él… hacia la libertad.* Nuestros alumnos, vuestras alumnas[15], necesitan esa libertad para ser ellos mismos, la ciencia la necesita para crecer más allá de lo obvio. Nuestra responsabilidad está en ofrecérsela, no en doblegar su espíritu para que sean dóciles soldados del ejército de la ciencia[16]. Más tarde, algunos pocos privilegiados, después de muchos años y de no pocos sinsabores, descubrirán que todo era mentira y que el método científico sólo es la caja en la que hay que meter con cuidado los resultados para que pasen por el estrecho torno de la censura. Porque, en palabras de Feyerabend:

> no hay una sola regla, por plausible que sea, ni por firmemente basada en la epistemología que esté, que no sea infringida en una ocasión u en otra. [...] dichas infracciones no ocurren accidentalmente, [ni] son fruto de un conocimiento insuficiente [...] son necesarias para el progreso.

Tampoco es posible argumentar a favor del método científico amparándose en la necesidad de que la teoría se ajuste a los hechos. Si atendemos a Hume: *las teorías no pueden derivarse de los hechos. Si admitiéramos solamente aquellas que son consistentes con ellos nos quedaríamos sin ninguna*. Del mismo modo que le resulta imposible al método separar observación de percepción y lenguaje, las creencias que las generaciones anteriores nos han trasmitido, conforman nuestros prejuicios, determinan nuestra mirada y prefiguran el léxico del mismo modo que los enunciados definen y prefiguran el concepto[17].

> *Tampoco es posible argumentar a favor del método científico amparándose en la necesidad de que la teoría se ajuste a los hechos. Según Hume:* las teorías no pueden derivarse de los hechos. Si admitiéramos solamente aquellas que son consistentes con ellos nos quedaríamos sin ninguna.

Consideradas como presupuestos a priori, cuando no como prejuicios, las *interpretaciones naturales* –como las llama Feyerabend– han tratado de ser separadas de cualquier construcción del pensamiento. La historia de la filosofía, y con ella la de la ciencia, está impregnada de esa lucha y, sin embargo esas interpretaciones naturales están indisolublemente unidas al investigador y son origen y fundamento de cualquier construcción científica. Argumentar de nuevo que el método científico garantiza *per sé* la pureza del análisis constituye una nueva falacia. *Eliminad todas las interpretaciones naturales y habréis eliminado la capacidad de pensar y percibir*, amenazaba Bacon. De donde se deduce inmediatamente que el intento de partir de cero resulta autodestructivo. Si una crítica se puede hacer al método científico es la de intentar separar al individuo de su producción intelectual. Otra cosa bien distinta es que debamos aprender a detectar los ingredientes ideológicos que determinan nuestras observaciones.

Aunque sea bien cierto que Galileo sustituyó una interpretación natural por otra menos natural (desde el punto de vista de la percepción del siglo XVII) e inconsistente con ella, no lo es menos que recurrió a la sicología en forma de demagogia publicitaria. De hecho, vendió la experiencia que no había realizado como justificación de su hipótesis. Podemos pensar en separar el contexto del descubrimiento del de la justificación y afirmar después que el primero no precisa método, que puede ser anárquico e, incluso, irracional pero sí el segundo. Con eso habríamos salvado las discrepancias y podríamos disculparlo todo: el método científico y el proceso educativo de adoctrinamiento en él. Sólo que esa distinción es imposible, como imposible resulta separar intuición de experiencia. Incluso después de admitir que utilizan diferentes campos de aplicación debemos asumir que se complementan. Así pues, si no podemos desprendernos metodológicamente ni siquiera de la intuición, porque negarla es negar la capacidad de avance, e incluso de crítica, puesto que limita la posibilidad de contraste de la teoría, no queda más que negar el método científico y, a través de él, cualquier argumentación no dialéctica.

Un falsacionismo estricto –ingenuo diría Lakatos– que acepta o rechaza una teoría tan pronto como es sometida a examen en función de los primeros análisis de prueba, unido a una exigencia de contrastabilidad máxima y a un principio de no hacer uso de hipótesis *ad hoc*, no sólo destruye la ciencia tal como la conocemos sino que no hubiera hecho posible su génesis. La idea de una ciencia regida por unas reglas fijas, y cuyo valor de verdad (racional) se mida en función de su fiel adscripción a esas reglas, es ilusoria porque obvia al ser humano: a su ingenio, a su realidad y a sus condicionamientos sociales pero es además inhumana en tanto en cuanto fortalece la profesionalidad estereotipando al individuo.

Feyerabend y la educación

Parafraseando a Feyerabend, una vez más, un racionalista amaestrado será obediente a la imagen mental de su amo, se conformará con los modelos de argumentación aprendidos, mostrará adhesión inquebrantable hacia ellos, independientemente de las dificultades que encuentre en su aplicación, y confundirá la "voz de la razón" con el eco de su entrenamiento. Esto sucede en nuestros institutos y universidades todos los días… ¿cuál es la diferencia entre estos métodos de alienación y los que usan los instructores en el adiestramiento militar?... ¿los gritos? ¡Vale!

Es más, para quienes soportan el pesado yugo de la repetición imitativa del modelo único habrá que recordarles que toda estabilidad prolongada es un signo inequívoco de fracaso en trascender una etapa accidental del conocimiento y, por ende, en acceder a un estadio más alto de consciencia y entendimiento. La razón fracasa mientras una categoría está bien asentada sin ser capaces de ponerla en solfa. Se nos podrá decir que cuantos más intentos de falsación naufragan más robusta es la teoría y más nos acercamos a la verdad[18], y eso es cierto, pero no lo es menos que el reto está en capacitar al estudiante para poner en tela de juicio las verdades más firmemente asentadas, y para saber que esa actitud vital es la que permite acelerar el proceso. Convertir a los estudiantes en obedientes acólitos del saber establecido, caer en la autocomplacencia a base de negar la duda, estimular seguridades vanas que les impidan cuestionarlo todo es hacerlos garantes del fracaso o, cuando menos, convertirlos en pesadas rémoras del avance científico en lugar de hacerlos protagonistas de él. Las creencias a las que concedemos mayor garantía no tienen mayor salvaguarda que sobrevivir al permanente intento por demostrar que carecen de sentido, dirá Feyerabend.

Las teorías llegan a ser claras y razonables sólo después de que partes incoherentes de ellas han sido utilizadas durante largo tiempo, concluirá Feyerabend parafraseando a Hegel.

Desde esta perspectiva, todo son preconceptos y el proceso de clarificación forma parte de la propia definición, del propio concepto. La curiosidad es el estímulo principal del conocimiento y ello exige tomar contacto directo con la realidad para dudar de ella, para conjeturar, para sentir la necesidad de constatar, dirá Wagensberg. Ese impulso apasionado generará un determinado modelo de conducta que permitirá crear condiciones específicas, moldeará las circunstancias y generará ideas que han de permitir el avance racional en la génesis del conocimiento. Será después el debate, la socialización del concepto, la que acabe de perfilar las hipótesis, insistirá Wagensberg. Las teorías llegan a ser claras y razonables sólo después de que partes incoherentes de ellas han sido utilizadas durante largo tiempo[19], concluirá Feyerabend parafraseando a Hegel. Y, por tanto, acercándonos a Marcuse y recalando definitivamente en la noción de pensamiento dialéctico: sin un mal empleo del lenguaje no puede haber ni descubrimiento ni progreso[20]. Pues bien, si el pensamiento científico requiere de todas esas licencias para crecer y no puede existir sin ellas, ¿por qué negarlas dentro del aula? ¿Por qué separar conceptos, procedimientos y actitudes? ¿En aras de qué pretendemos entronizar los primeros en el altar de lo acabado, lo infalible, lo incuestionable, lo irrefutable, lo irrebatible… convirtiéndolos en hechos inmutables?

La curiosidad es el estímulo principal del conocimiento y ello exige tomar contacto directo con la realidad para dudar de ella, para conjeturar, para sentir la necesidad de constatar, dirá Wagensberg.

Está claro –concluirá Feyerabend–, que la idea de un método científico único surge de una visión del ser humano y su entorno social demasiado ingenua y de no tomar en consideración el rico material que proporciona la historia, o de tratar de empobrecerlo para dar satisfacción a sus más bajos instintos y al deseo de seguridad intelectual que proporcionan, por ejemplo, la claridad y la precisión. *Sería absurdo formular una receta o regla general* […] *que sirva para todos los casos. Deberíamos usar nuestros propios cerebros y ser capaces de encontrar métodos propios de conducirnos en cada caso,* recomendará Lenin[21]. *Que la gente se emancipe por sí misma* y *que se instruyan a sí mismos por propia voluntad* dirá Bakunin. Dar a los alumnos esa posibilidad de independencia sólo es posible cuando la libertad de acción está asociada a un proceso de investigación y queda lejos del adiestramiento unificador el binomio comunicación-obediencia. Comodidad y libertad, como compromiso y parálisis, o coherencia y condescendencia han estado reñidas siempre.

Pero, ¿es que no es necesario preparar a los jóvenes para la vida, aprendiendo un conjunto particular de puntos de vista y excluyendo los demás?, ¿no habrá que relegar la imaginación al mundo del arte para evitar la escisión entre la odiada realidad y la amable fantasía?, se plantea Feyerabend para negar después esa dualidad entre lo individual y lo colectivo apostando por incorporar la fantasía al avance científico y social.

[...] percepción, juicio, capacidad diferenciadora, actividad mental e incluso preferencia moral se ejercen solamente cuando se hace una elección, responderá Mill.

Sobre las limitaciones humanas: las de ellos… las nuestras

Si hacemos caso a Marx[22], nuestros alumnos y alumnas, como el resto de la humanidad, sólo se plantean aquellas preguntas que son capaces de responder en cada momento. Si admitimos esa ley como criterio de evaluación del aprendizaje y de lo que son y se sienten capaces en cada instante, ¿cuál es la conclusión? Sencillo, quienes han conseguido seguridad en sí mismos y autonomía suficiente, cruzarán el río sin temor a su caudal. ¿Y el resto? ¿En qué consiste, bajo este criterio, el tratamiento de la diversidad? Si las preguntas que no se plantean son las que sugerimos nosotros y educar es sinónimo de ir más allá de las propias limitaciones, de demostrarles cada día que pueden conseguir mucho más de lo que imaginan, si esas preguntas que somos capaces de poner sobre la mesas son aquellas para las que nuestra la intuición matemática, educada en el formalismo burbakista, se considera competente de resolver y por tanto de suscitar, ¿estamos capacitados para transmitir otra cosa que nuestras propias limitaciones? Una respuesta en positivo supone correr el riesgo de plantear preguntas de las que no sabemos la respuesta, dejar que la la osadía guíe nuestras decisiones, admitir la intuición de los alumnos y alumnas, mezcla de comprobaciones particulares e instinto, como paso abreviado de una demostración y debatirse permanentemente ante la duda de cómo, en qué momento y en qué medida debemos forzar la exigencia de rigor.

Pero volvamos por un momento la mirada escrutadora hacia nosotros mismos: ¿qué preguntas nos atrevemos a plantear? ¿Y a plantearnos? Todos los miedos que rodean una didáctica de investigación basada en la resolución de problemas parecen pender de ese hilo que no es otro que el de nuestra propia inseguridad, el de nuestro propio temor al fracaso como investigadores que es como decir –aunque no nos educaran para admitirlo– como matemáticos.

Sigamos planteando preguntas: ¿qué es el método matemático? ¿tiene alguna relación con el científico?, desde un punto de vista didáctico ¿es, o debe ser, considerada la Matemática una ciencia natural? ¿participa el alumnado, aunque sea vagamente, de ese prototipo de estética universal e intemporal que se asocia a la creación matemática? ¿ese principio estético de sencillez y elegancia no es una rémora insalvable tanto para la formulación de la conjetura como para la prueba? ¿qué hacemos con esos alumnos y alumnas que dan una respuesta atípica? Las certezas matemáticas se suelen calificar de atemporales, inmortales, suficientes en sí mismas y universales ¿nos recreamos en este múltiple engaño para aislarnos del mundo y de la realidad?

> Desde los sabios que estudiaban las estrellas en Babilonia hasta los grandes artistas del Renacimiento, el ansia por explorar fue uno de los grandes impulsos vitales del hombre, y aun en los días de Goethe habría sido tan chocante que una persona educada dijera que no le interesaba la ciencia como que hubiera declarado que le aburría el arte. La acumulación creciente de conocimientos y la especialización de la investigación han hecho que este interés disminuyera paulatinamente y se convirtiera en monopolio de técnicos y especialistas. [...] Es una peculiaridad de la civilización actual que la mayoría de las personas educadas se sientan avergonzadas al reconocer que no comprenden una obra de arte cualquiera; y que, en cambio, un instante después proclame, no sin orgullo, su completa ignorancia de las leyes que rigen su enchufe eléctrico. (Koestler, 1973)

Como queja no está mal, a buen seguro que es compartida por todos los que tenemos una formación científica pero *[...] Nuestro sistema educativo* [y su férrea adscripción a los modelos únicos] *[...] promueve la indiferencia hacia las leyes de la naturaleza, deficiencia comparable a la miopía o al daltonismo*, concluirá Koestler [1973], para sentenciar después *[...] las personas que reglan su vida de acuerdo con los dictados de la razón, sólo parecen merecer desprecio y compasión*. ■

NOTAS

[1] *Uno debería escribir despiadadamente de lo que considera cierto o callarse* dirá A. Koestler [1973].

[2] Francis Bacon ya había publicado en 1620 su *Novum Organum* y disertado sobre la necesidad de superar la etapa anterior determinando un nuevo camino que condujera a descubrir la verdad.

[3] Por si su título: *Discours de la méthode pour bien conduire la raison et chercher la verité dans les sciences, plus la Dioptrique, les Météores et la Géometrie*, dejara algún lugar a dudas, en la regla III subraya Descartes que *Ningún camino está abierto a los hombres para el conocimiento cierto de la verdad fuera de la intuición evidente y la deducción necesaria*.

[4] Si atendemos por ejemplo a la crítica que de él hace José Marcos de Teresa en *El propósito metafísico de la geometría Cartesiana*.

[5] Aunque algunos autores como Abu Kamil obviaran el problema y plantearan enunciados como este: *Se busca la altura* x *de un triángulo equilátero en el que la suma de su área y altura da 10*.

[6] Para Vieta las operaciones algebraicas tienen carácter abstracto y formal. No son numéricas. Eso le permite eludir la no homogeneidad del resultado. Descartes da respuesta al problema y sustituye la *logistica speciosa* de Vieta por una *logistica numérica*.

[7] La imposibilidad de solución euclidea remite a la imposibilidad para resolver una ecuación de tercer grado con regla y compás.

[8] No es posible referenciar con detalle la evolución de Pascal respecto del espíritu geométrico. En *Pensées* diferencia entre el espíritu geométrico y el de finura y contrapone la torpeza del primero, incapaz de trascender un razonamiento deductivo, del segundo, competente para abarcar los infinitos matices de un problema de la vida diaria. Más tarde discrimina entre espíritu geométrico y de precisión. Pero, en este caso, es el primero el que está capacitado para comprender un gran número de principios sin confundirlos y el segundo el que únicamente alcanza a interpretar bien los principios cuando son pocos pero no a dilucidar sus consecuencias. La distancia entre una y otra posición es, a juicio de Brunschvicg [1923], la que separa el *Traité de l'Équilibre des Liqueurs*, al parecer casi un juego de niños, y el estudio de la *Roulette* y los *Indivisibles*.

[9] Razón de más para manifestar las discrepancias en base a un mismo argumento. Ver Brunschvicg [1923].

[10] Su posición no podía ser más beligerante con el racionalismo.

[11] *Es una enfermedad natural del ser humano creer que posee la verdad directamente; y de ahí viene que está siempre dispuesto a negar todo lo que le es incomprensible; por el contrario, no conoce naturalmente más que la mentira, y no debe considerar verdaderas más que las cosas cuyo contrario le parece falso.*

[12] Nos tememos que con la misma fe irracional con la que muchos siglos antes se recurría a Aristóteles y Santo Tomás

[13] Thomas S. Kuhn [1962].

[14] Imre Lakatos [1974].

[15] Y recíprocamente, por supuesto.

[16] Kuhn traduce perfectamente la parálisis que genera el miedo a la libertad en las familias de nuestros alumnos: *La adscripción a un determinado paradigma prepara al estudiante para entrar a formar parte como miembro de la comunidad científica particular con la que trabajará más tarde [...] su práctica subsiguiente [sometida a reglas y normas fijas para la praxis científica] raramente despertará desacuerdos sobre los fundamentos.*

[17] *En la práctica*, afirma con justicia Feyerabend, *los metodólogos repiten como esclavos las declaraciones más recientes de los que dirigen la física.*

[18] Esa convergencia es en probabilidad. Si asociamos una determinada probabilidad a una teoría, los diferentes intentos fracasados por negarla aumentarán esa función de probabilidad que nunca llegará a valer uno.

[19] El concepto de función puede servir de ejemplo.

[20] Del que, como demostrará Lakatos en *Pruebas y Refutaciones* también se benefician las Matemáticas

[21] El hilo del discurso sigue a Feyerabend que es quien cita a estos autores.

[22] *Contribución a la crítica de la economía política*.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Parece obligado incorporar a este largo listado bibliográfico que venimos confeccionando desde los primeros artículos algunos textos básicos de filosofía de la ciencia.

ÁLVAREZ, Carlos y MARTÍNEZ, Rafael (coordinadores), 2000. *Descartes y la Ciencia del siglo XVII*. Editorial Siglo XXI. México D.F.

BRUNSCHVICG, Léon, 1923. "Finesse et géométrie". *Revue de Paris*, p. 754-768

FEYERABEND, Paul K., 1974. *Contra el método*. Editorial Ariel. Barcelona. Traducción de Francisco Hernán.

LAKATOS, Imre, 1974. *Historia de la ciencia y sus reconstrucciones racionales*. Editorial Tecnos. Madrid.

KOESTLER, Arthur, 1973. *La flecha en el azul.* Alianza Editorial. Madrid.

KUHN, Thomas S.,1962. *La estructura de las revoluciones científicas.* Fondo de Cultura Económica de España S. L. Madrid.

NOTA: Este artículo es deudor de las discrepancias, puntualizaciones y aportaciones de Álvaro Gratal Cornejo con quien hemos tenido el placer de discutirlo a lo largo del extenso periodo de tiempo transcurrido desde que se gestó hasta hoy.

SUMA 54
Febrero 2007, pp. 67-73

Juegos con monedas

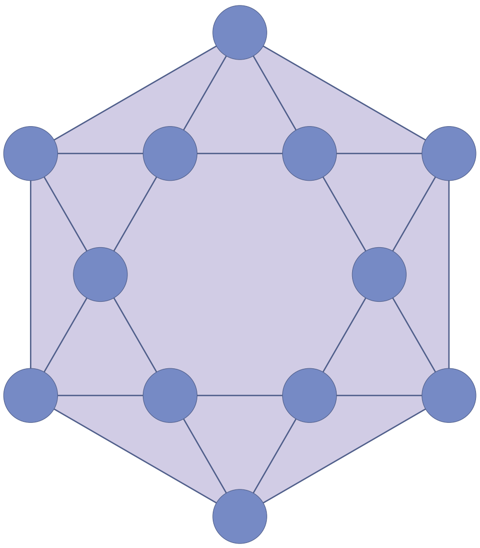
Cuando nos enfrascamos con nuestros alumnos en la resolución de problemas (no nos referimos a meros ejercicios repetitivos) debemos activar la capacidad de sorpresa y estar dispuestos a ser mejorados por ellos en las estrategias aplicadas para encontrar las soluciones de los mismos.

Para demostrar la anterior afirmación contamos lo que nos ocurrió en uno de los problemas planteados en el *Concurso de Ingenio* que desarrollamos en nuestro centro (concurso consistente en la resolución de un problema cada semana, a lo largo de 20 semanas del curso).

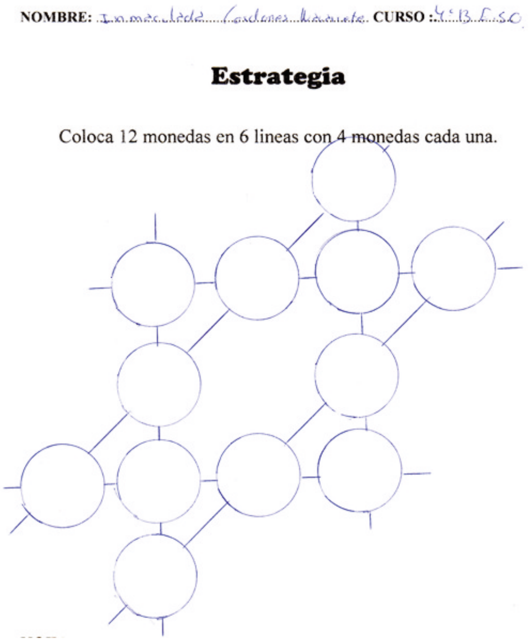
En cierta ocasión se le planteó a los participantes el siguiente problema:

Coloca 12 monedas en seis líneas con cuatro monedas en cada una.

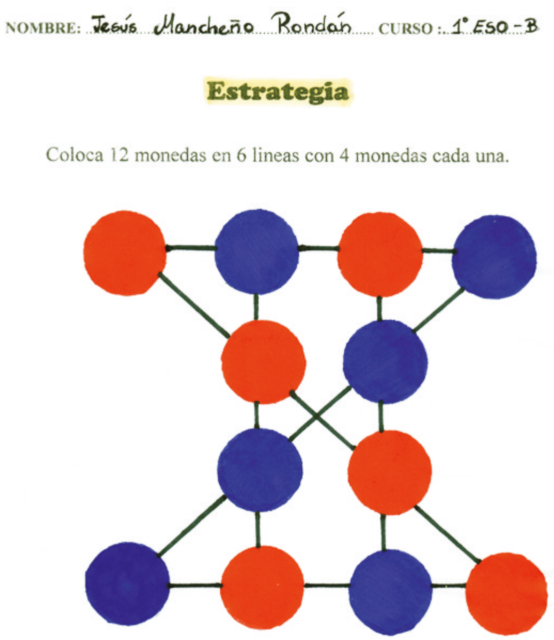
Cuando decidimos proponer este problema, esperábamos una solución única: la estrella de seis puntas formadas por dos triángulos equiláteros entrecruzados con las 12 monedas colocadas en los vértices e intersecciones entre los lados de los dos triángulos.

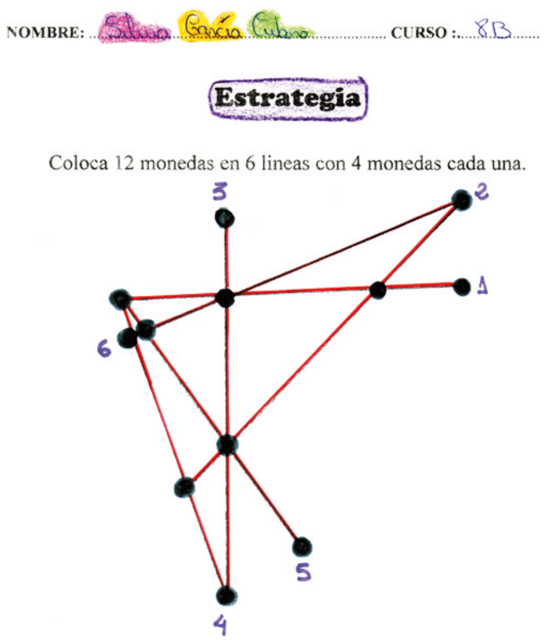


Al ver las respuestas dadas por los participantes la sorpresa fue mayúscula, pues fueron tan llamativas como las siguientes:



Grupo Alquerque de Sevilla
Constituido por:
Juan Antonio Hans Martín. *CC Santa María de los Reyes.*
José Muñoz Santonja. *IES Macarena.*
Antonio Fernández-Aliseda Redondo. *IES Camas.*
juegos.suma@fespm.org





Juegos de configuración

Son juegos de configuración aquellos en que hay que conseguir una determinada disposición con las piezas o fichas de que se dispone. Por la sencillez del material necesario se pueden desarrollar con nuestros alumnos de forma manipulativa, lo que permite a los estudiantes razonar mientras mueven físicamente las fichas.

En nuestro caso en concreto, dado un número determinado de monedas tendremos que conseguir una distribución de las monedas que cumpla unas condiciones determinadas.

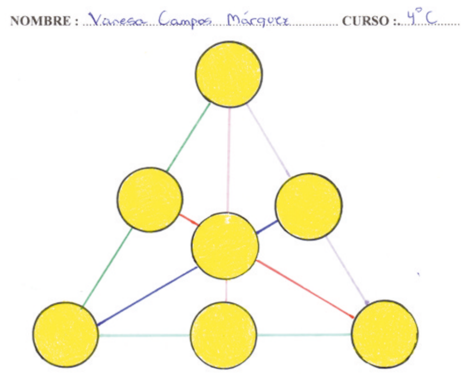
En este tipo de juegos hay que tener mucho cuidado con las condiciones que se plantean, pues intercambiar números, por ejemplo, puede dar más de un dolor de cabeza y una búsqueda imposible. Siempre nos acordaremos del error cometido en nuestra aportación en el calendario matemático que editan SM y la Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana *Al Khwarizmi* (estupenda publicación coordinada por nuestro amigo Floreal Gracia). Entre otros problemas propusimos el siguiente:

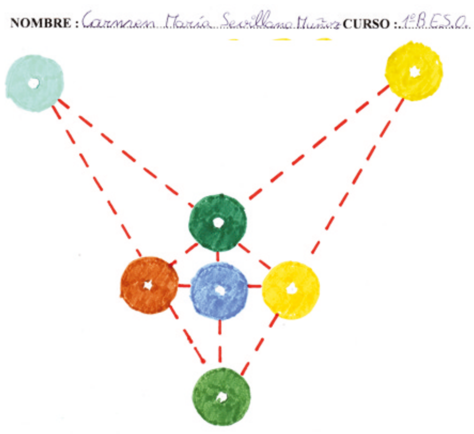
Coloca seis monedas en siete filas de tres monedas cada una.

Y nos quedamos tan *panchos*, sin darnos cuenta del error que cometíamos. Al poco tiempo nos llamó Juan Emilio García preguntándonos *¿Cuál es la solución del problema que tenéis planteado en el calendario?* Cuando revisamos nuestros datos dijimos *Tierra trágame*. El enunciado correcto era:

Coloca siete monedas en seis filas de tres monedas cada una.

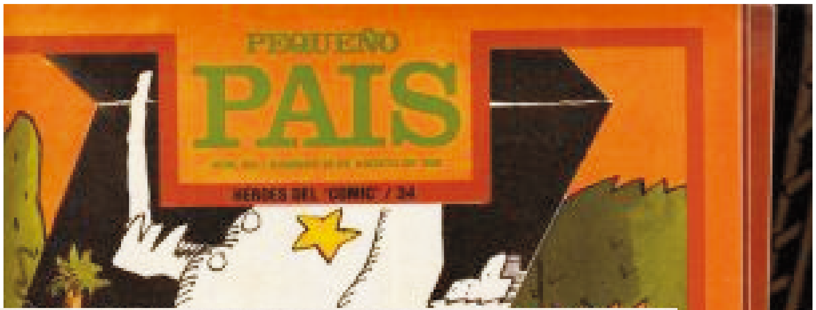
El primer planteamiento no tiene solución, el segundo puede dar distintas disposiciones:





Selección de problemas de configuración con monedas

Durante años hemos ido recopilando, diseñando y ampliando una gran cantidad de juegos con monedas que entran dentro de los juegos de configuración. Muchos de ellos pueden encontrarse en hojas de pasatiempos de todo tipo de publicaciones. A continuación se puede ver uno aparecido en el Pequeño País en 1989.



1 2 3 4 5
6 7 8 9 10

EN LÍNEA

Trata de formar, con estos 10 bombones que aparecen en el dibujo, cinco líneas con cuatro bombones en cada una. ¿Lo has logrado? Entonces mereces un premio. ¡Cómete tres bombones y trata de agrupar los siete restantes en seis líneas con tres bombones cada una. ¡Suerte!

Solución:

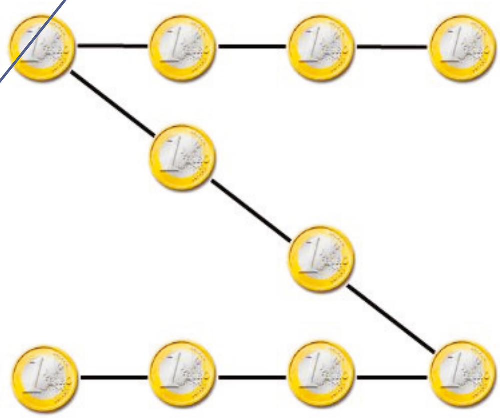
2º PLANTEAMIENTO
1er PLANTEAMIENTO

Pequeño País 1989

Dentro de este apartado de configuración podemos considerar dos grandes bloques:

En primer lugar tenemos las situaciones en que hay que colocar una serie de monedas en líneas con una determinada cantidad de monedas en cada línea.

A veces estos enunciados resultan paradójicos inicialmente; por ejemplo, nos pueden pedir que coloquemos diez monedas en cinco filas con cuatro monedas en cada una, pero también pueden plantearnos colocar las mismas diez monedas en tres filas de cuatro monedas cada una. En el dibujo anterior está la solución a la primera propuesta y a continuación la solución a la segunda.



Para que nuestros lectores puedan entretener sus *largas horas de ocio* les planteamos una serie de retos en esta misma línea.

Coloca seis monedas en:
- Tres líneas de tres monedas cada una.
- Cuatro líneas de tres monedas cada una.

Coloca siete monedas en:
- Cinco líneas de tres monedas cada una.
- Seis líneas de tres monedas cada una.

Coloca ocho monedas en cuatro líneas de tres monedas cada una.

Coloca nueve monedas en:
- Tres líneas de cuatro monedas cada una.
- Ocho líneas de tres monedas cada una. Esta disposición corresponde al tablero de un conocidísimo juego de estrategia, tal vez el más famoso y sencillo de todos.
- Nueve filas de tres monedas cada una. Con el mismo número de monedas se consigue en esta disposición un alineamiento más, esto hace que el juego que se basa en este tablero, el Tres en raya áureo o trihex, tenga más líneas de ocupación.
- Diez líneas de tres monedas cada una.

Coloca diez monedas en:
- Tres líneas de cuatro monedas cada una.
- Cinco líneas de tres monedas cada una.
- Cinco líneas de cuatro monedas cada una.

Cuando los alumnos trabajan estas situaciones es aconsejable que lo hagan con monedas o cualquier sustituto apropiado, ya que la manipulación, como hemos indicado en otras entregas de esta sección de *Juegos*, es fundamental para abordar y comprender correctamente las estrategias que debemos utilizar para resolver estas propuestas. Hay veces en que el número de monedas es tan grande que hay que invertir un capital en el juego o bien pasarse a las fichas del parchís, de las damas, tapones de botellas o directamente al lápiz y papel.

Aquí tienen algunos retos más complicados.

Coloca 12 monedas en:
- Tres líneas de cinco monedas cada una.
- Cuatro líneas de cuatro monedas cada una.
- Cinco líneas de cuatro monedas cada una.
- Seis líneas de tres monedas cada una.
- Seis líneas de cuatro monedas cada una.

Coloca 13 monedas en:
- Nueve líneas de tres monedas cada una.
- Doce líneas de tres monedas cada una.

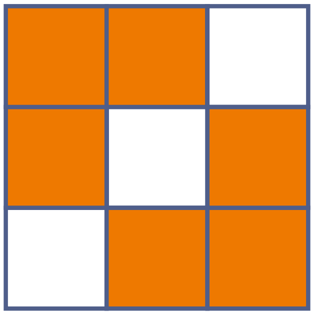
Coloca 14 monedas en:
- Cuatro líneas de cinco monedas cada una.
- Siete líneas de cuatro monedas cada una.

Colocar 15 monedas en 5 líneas de 4 monedas cada una (Se pueden encontrar propuestas de alineamiento con más de 15 monedas, pero para no aburrir vamos a poner aquí el tope).

Otro tipo de planteamiento, también dentro de juegos de configuración, consiste en trabajar con un tablero, en el que puede variar el número de casillas, y colocar las fichas de forma que cumplan una serie de restricciones. Entre ellos aquí tienen algunas posibilidades:

Prohibido tres en raya. Colocar todas las fichas que puedas sobre un tablero cuadrado, de forma que:
a. En cada casilla no haya más que una ficha.
b. No queden tres fichas alineadas.

En un tablero 3x3 se pueden poner 6 fichas, ¿y en un tablero 4x4? ¿Y si es de tamaño 5x5?



Colocar 16 fichas en un tablero de ajedrez, de manera que no haya tres fichas en línea recta.

Coloca sobre un tablero cuadriculado de tamaño 6x6, 12 monedas de manera que en cada línea horizontal, vertical y diagonal no haya más que dos y sólo dos monedas.

Coloca 18 monedas sobre el tablero cuadriculado de 6x6, una por casilla, de manera que cada fila y cada columna contenga exactamente tres monedas.

Pares. Coloca diez fichas en una cuadrícula 4x4 (como máximo uno en cada casilla) de manera que cada fila, cada columna y cada diagonal (principal o secundaria) tenga un número par de fichas.

Coloca ocho fichas (cuatro de un color y cuatro de otro) en una cuadrícula 4x4 de manera que no haya dos fichas de un mismo color en casillas que se encuentren en la misma fila, columna o diagonal.

Juegos de movimiento

En este tipo de rompecabezas se nos da una determinada disposición de las fichas o monedas y se nos pide que las recoloquemos en otra distinta. Para ello hemos que tener en cuenta una serie de restricciones:

- Haciendo un número determinado de movimientos.
- Haciendo un tipo determinado de movimientos, incluido giros de las monedas.
- Realizando el menor número de movimiento posibles.

Quizá el más conocido de este tipo de puzzles sea el de invertir un triángulo de monedas (este pasatiempo ha sido desarrollado exhaustivamente por José María Gairin y José María Muñoz en su artículo *Moviendo fichas hacia el pensamiento matemático*, publicado en SUMA 51 de febrero del 2006).

Invertir el triángulo

Forma un triángulo como el de la figura, compuesto por diez monedas. Moviendo solo tres monedas de lugar, es decir, cambiándolas de sitio, debe conseguirse el triángulo hacia arriba.

Cambia la figura a circunferencia

Coloca seis monedas de la forma que indica la figura anterior.

1. Convierte la figura en una circunferencia moviendo dos monedas.
2. Convierte la figura en una circunferencia moviendo tres monedas.

Mantener la cruz

Poner sobre la mesa diecisiete monedas, formando una cruz, como muestra la figura. Si contamos las monedas desde el pie de la cruz hasta cualquiera de los tres extremos de arriba, la suma de las monedas será siempre once.

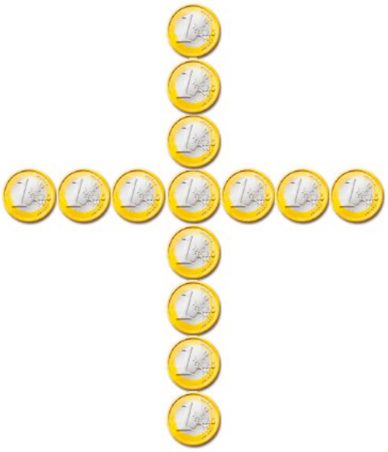
El problema consiste en retirar sólo dos monedas y mover las mínimas posibles para que la suma de las monedas, desde el pie de la cruz hasta cualquiera de los extremos siga sumando once monedas.

De ocho simples a cuatro dobles

Colocar ocho monedas en línea y, con tan sólo cuatro movimientos, obtener cuatro pilas de dos monedas cada una. La única condición es que cualquier moneda que tomemos debe saltar sobre otras dos (a la izquierda o a la derecha), estén apiladas o no, antes de depositarla sobre la siguiente moneda.

De la cruz a siete pilas

Situar sobre la mesa catorce monedas, configurando una cruz, como muestra la figura. Con siete movimientos iguales al problema anterior (es decir, que cada moneda que tomemos debe saltar en línea recta y sin cambiar de sentido sobre otras dos, antes de depositarla sobre la siguiente moneda) debemos construir siete pilas de dos monedas cada una.



Girar monedas

1. Partimos de cuatro monedas iguales y con las caras hacia arriba. ¿Cuántos movimientos se necesitan para que queden todas con la cruz hacia arriba si se giran tres cada vez? ¿Qué pasa si se tienen tres monedas y se da la vuelta a dos cada vez?

2. Ahora vamos a intercalar caras y cruces. Se colocan seis monedas en fila, las tres primeras con las caras hacia arriba y las otras tres con la cruz hacia arriba. Hay que conseguir, en el mínimo número de jugadas, cambiar esta disposición para que se alternen cara y cruz. En cada jugada se giran dos monedas.

3. También de giros va la siguiente situación. Se tienen nueve monedas distribuidas en un cuadrado, ocho caras y la del centro cruz. Un movimiento consiste en dar la vuelta a tres monedas a la vez que estén en la misma fila, columna o diagonal. ¿Cuántos movimientos se necesita para que queden todas las monedas con la cara hacia arriba?

Algunos de los problemas que se plantean tienen que resolverse aplicando una idea *creativa*, el pensamiento lateral, que difiere de lo que hacemos para resolver otros casos donde usamos el pensamiento lógico. Veamos algunos ejemplos:

Casi T

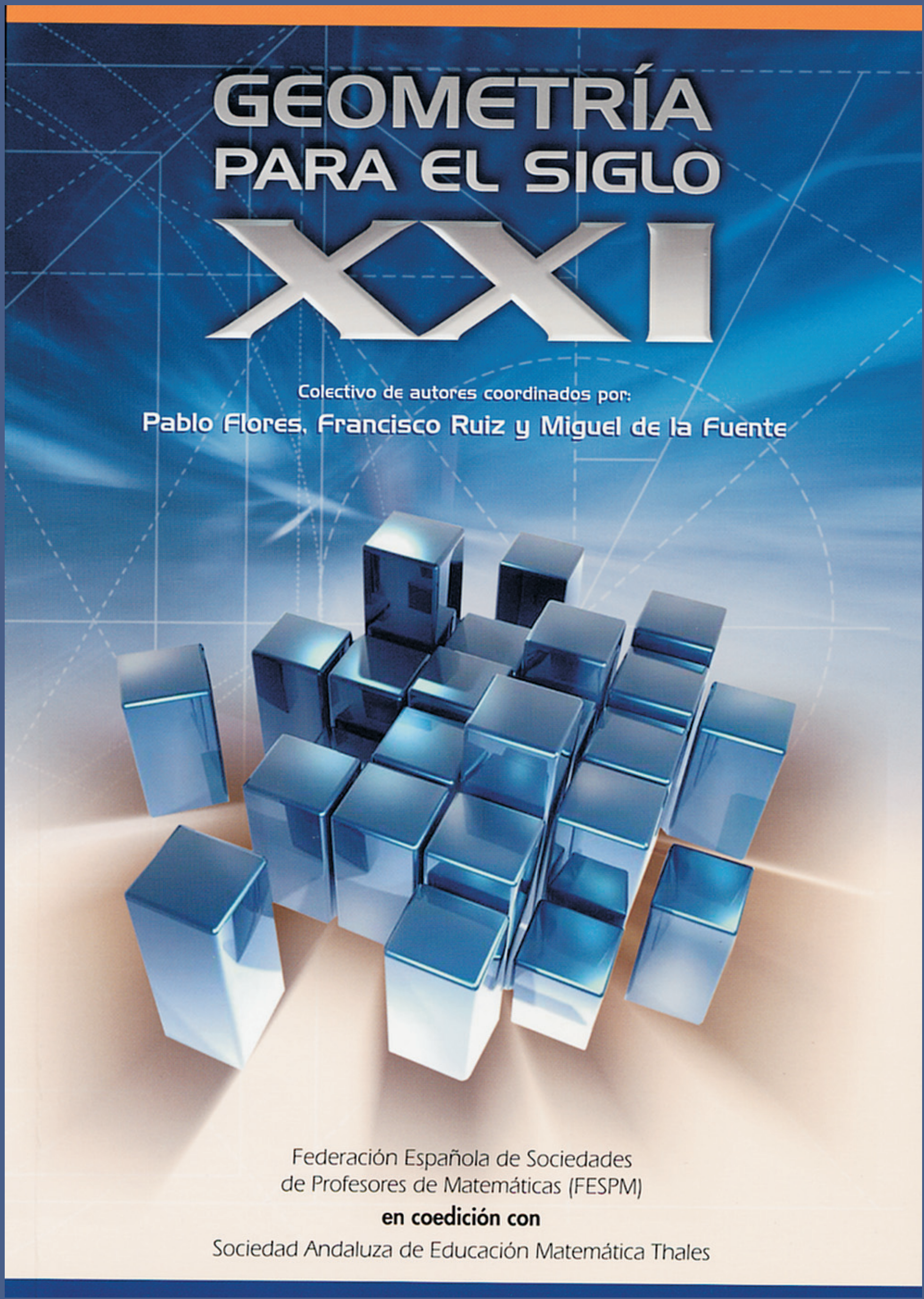
Partiendo de la siguiente distribución de monedas, ¿cómo podemos conseguir dos filas de cuatro monedas moviendo una sola moneda?

¿Y dos filas de cinco monedas moviendo solo dos?

Apuestas

Formar un cuadrado con ochos galletas no es nada dificil. Después de pensar un segundo, seguro que consigues una figura como la del dibujo, en la que cada lado del cuadrado tiene tres galletas. ¿Serías capaz de conseguir, con esas ocho galletas, un cuadrado que tenga cuatro de ellas en cada lado?

Pequeño País, 22 de noviembre de 1987



Servicio de Publicaciones de la FESPM
Apartado de Correos 590
06080 Badajoz
Información y pedidos: publicafespm@wanadoo.es

Geometría para el siglo XXI

Colectivo de autores coordinados por Pablo Flores, Francisco Ruiz y Miguel de la Fuente

Federacion Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) en coedición con la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales
Badajoz, 2006
ISBN 84-934488-3-4
248 páginas

SUMA 54
Febrero 2007, pp. 75-78

El número de oro es plano. ¡Pásalo!

El número de oro Φ=1,618… es al plano, lo que el número plástico *P*=1,2471… es al espacio. Ver esto es el objetivo final de este clip. Pero permitan primero una breve visita a la familia de los números metálicos en la cual destaca con luz propia el áureo.

El triplete oro-plata-bronce hace recordar a las medallas olímpicas (récords deportivos) o a los aniversarios de boda (récords de paciencia). Lo sorprendente es que dichos calificativos también vayan unidos a tres singulares números irracionales.

Números metálicos

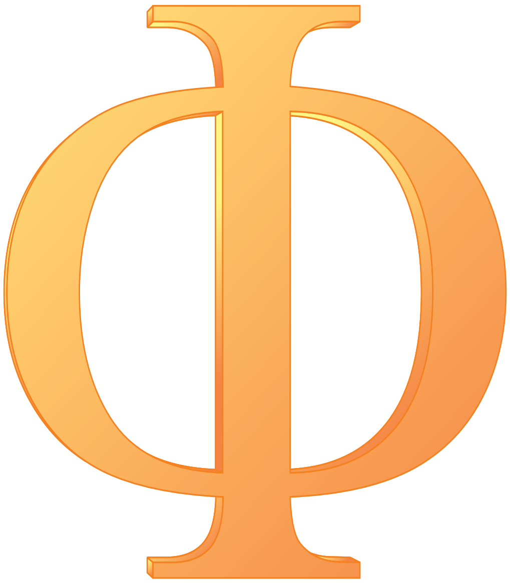
Todos surgen de una simple ecuación de segundo grado

$$x^2 = mx + n$$

donde los coeficientes m y n son números naturales. La solución positiva de la ecuación planteada es

$$x = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4n}}{2}.$$

Estas cantidades tan raras tienen una razón geométrica muy simple. Considere un natural m y un rectángulo de lados a, b de manera que $ma<b$ pero $b<(m+1)a$.



Claudi Alsina
elclip.suma@fespm.org

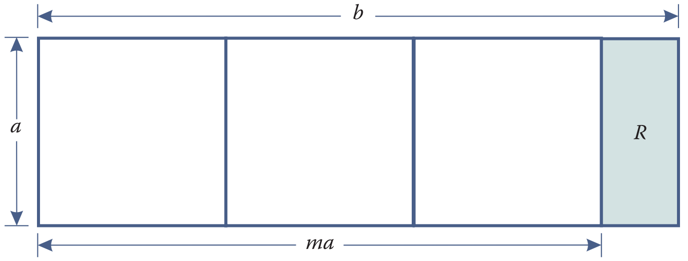


Figura 1

Entonces cabe preguntarse cuando al dividir el rectángulo dado en m cuadraditos de lado a y una pieza rectangular R tendremos la suerte (es un decir) de que la proporción entre el lado largo y el lado corto de R sea la misma que la de todo el rectángulo inicial de lados a y b (igual forma). Esto nos lleva a la condición:

$$\frac{a}{b-ma}=\frac{b}{a},$$

es decir $a^2 = b^2 - mab$ o dividiendo por a^2, reagrupando e introduciendo $x=b/a$

$$x^2 = mx+1,$$

que es la ecuación de los metálicos (para n=1).

Cuando m=n=1 resulta el número de oro Φ o divina proporción:

$$\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}61803...,$$

Cuando m=2 y n=1 resulta el número de plata

$$\sigma_{Ag}=1+\sqrt{2}=2{,}4142...$$

Finalmente, cuando m=3 y n=1 se obtiene el número de bronce

$$\sigma_{Br}=\frac{3+\sqrt{13}}{2}=3{,}3027...$$

Para otros valores de m y n se halla también el número de níquel, el de cobre, etc.

Estas joyas numéricas no son funciones sino números irracionales y presentan, matemáticamente, curiosas propiedades. Por ejemplo, fijados m y n considere una sucesión de números a_1, a_2, a_3,... donde los dos primeros términos son unos (a_1=a_2=1) y exista la relación de recurrencia

$$a_{k+2}=ma_{k+1}+na_k$$

es decir,

$$1,\ 1,\ m+n,\ m\cdot(m+1)+n\cdot 1...,$$

sucesión a partir de la cual puede calcular los cocientes de cada término por su anterior a_{k+2}/a_{k+1}Esta sucesión de razones tiende a un valor x y, gracias a la relación recurrente, vemos que

$$a_{k+2}/a_{k+1}=m+n\frac{a_k}{a_{k+1}}=m+n\frac{1}{a_{k+1}/a_k},$$

lo que fuerza a que $x=m+n/x$ es decir, $x^2 = mx + n$ y x es un número metálico.

Así para m=n tiene la famosa sucesión de Fibonacci

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,...

cuyos cocientes tienden al número de oro Φ. Para m=2 y n=1 tiene

1, 1, 3, 7, 17, 41, 99, 140,...

cuyos cocientes tienden al número de plata. Y si m=3 y n=1 tiene

1, 1, 4, 13, 43, 142,...

las razones entre los cuales le llevarán al número de bronce.

El número de oro es omnipresente en la Naturaleza y en el Arte, esencialmente por dos razones: porque muchos fenómenos de crecimiento natural presentan cantidades que siguen la sucesión de Fibonacci y por haberse mitificado la proporción áurea como la más bella visualmente. Usted tiene proporción áurea si divide su altura por la altura de su ombligo (cintura)... y lleva un rectángulo de oro si posee una tarjeta de crédito o un DNI.

Capilla Medicea, Miguel Ángel, Florencia

Según Vera Spinadel y Jay Kappraff el número de plata aparece en el sistema romano para determinar la proporción de determinadas edificaciones y Kim Williams lo ha localizado en el pavimento del baptisterio de San Giovanni en Florencia y en la capilla de los Médici de Miguel Ángel.

Vamos a observar ahora un caso de raíz cúbica de interés especial: *el número plástico.*

Hans van der Laan (1904-1991)

Descubierto por el arquitecto (que era monje benedictino en Holanda) Hans van der Laan (1904-1991) este numerito P llamado místico o plástico (en el sentido doble de plasticidad artística) resulta ser la solución positiva de la ecuación cúbica $x^3 = x+1$, es decir

$$P^3 = 1 + P,$$

siendo P=1,329… Según Padovan el estudiante G. Cordounier también se ocupó de P en la misma época. En la sección anterior, visitando los números metálicos hemos visto que el primoroso número de oro Φ verificaba $\Phi^2=\Phi + 1$. Pues bien, el número plástico, por verificar $P^3 = P+1$ representa en muchas situaciones del espacio de dimensión 3 lo que el número de oro representa en el plano de dimensión 2. Observe la figura adjunta donde la caja de aristas $c<b<a$ se ha repetido dos veces en la forma indicada.

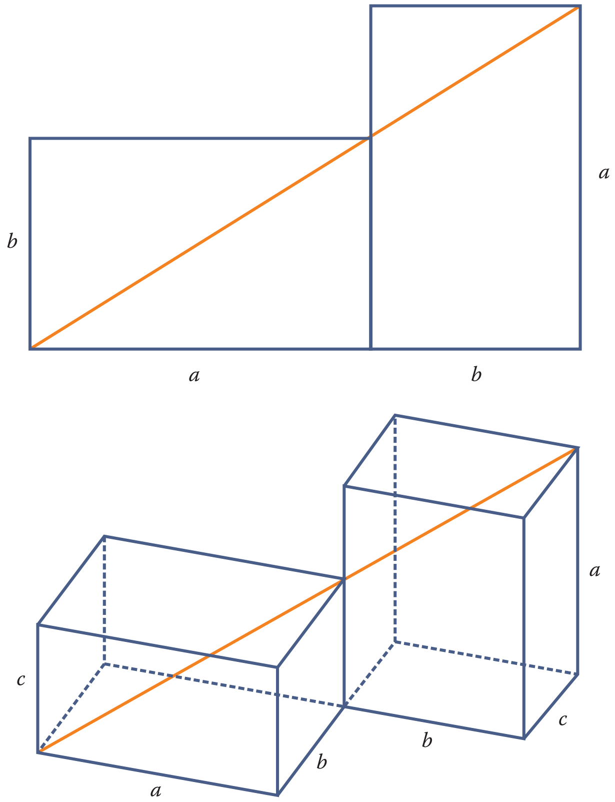


Figura 2

La propiedad de los rectángulos caracteriza Φ. En el espacio si la diagonal principal de la caja horizontal se prolonga y se impone que pase por el vértice superior correspondiente de la caja vertical entonces resulta que esto es posible sólo si $b=P\cdot c$, $a=P^2\cdot c$, con c arbitrario y P el número plástico.

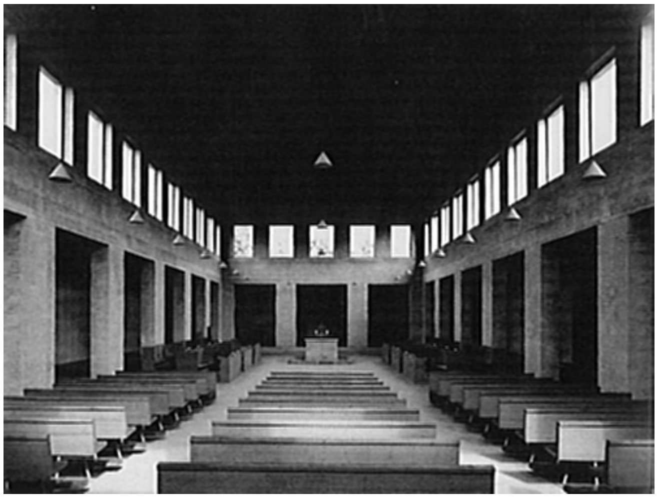


Figura 2

El padre van der Laan estudió proporciones de las iglesias románicas y descubrió que muchas de estas proporciones se correspondían con las correspondientes a los términos de la sucesión

1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9,...

Esta sucesión empieza por tres unos y cada término es igual a la suma de los dos antepenúltimos, resultando que los cocientes

$$\frac{1}{1},\frac{1}{1},\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{2}{2},\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\frac{7}{5},\frac{9}{7},\ldots$$

tienden precisamente al número plástico P (como van der Laan trabajó en sus obras la sucesión anterior en sus escritos sólo cita de pasada a P). Hace pocos años Ignacio Millán verificó, por ejemplo, que el claustro de la iglesia románica de Sant Pau del Camp de Barcelona, responde a este tipo de proporciones.

Para pensar un rato

Le proponemos tres cuestiones:

1. Sea C un punto de un segmento AB. Si el volumen del cubo de lado AC es igual al volumen del paralelepípedo de aristas AB, CB y $AB+AC$ entonces $AB:AC=P$.
2. Sea una corona obtenida por dos circunferencias de igual centro O y radios a, b con $a<b$. Considere la elipse de centro O y semiejes a y b. Demuestre que el área de la elipse es igual al área de la corona si y solo si $b/a=\Phi$. Pase ahora al espacio haciendo girar la corona y la elipse alrededor del eje mayor. Demuestre que el volumen del elipsoide es igual al volumen entre las dos esferas si y sólo si $b/a=P$ (número plástico).
3. En la primera figura hemos mostrado una característica geométrica de los rectángulos metálicos cuya proporción verifica $p^2=mp+1$. ¿Existe una propiedad geométrica característica de los rectángulos cuya proporción verifique $p^2=mp+1$ con m, n enteros positivos y $n>1$? ■

PARA SABER MÁS

SPINADEL, V.W. de (1998), *From the Golden Mean to Chaos*, Pub. Vicente López, Buenos Aires.

DAMÍAN, F. y FUENTE, Miguel de la (2001), *Matemáticas, Naturaleza y Arte*, Pub. Junta de Andalucía, Córdoba.

R. PADOVAN, R. (1994), *Dom Hans van der Laan*, Modern Primitive, Amsterdam.

LAAN, H. van der (1960), *Le Nombre Plastique; quinze Leçons sur l'ordonnance architectonique*, Brill, Leiden.

ALSINA, C. y GARCIA-ROIG, J.L. (2001), "On plastic numbers", *Journal of Mathematics & Design*, Vol. 1, nº 1, 13-19.

SUMA Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las MATEMÁTICAS

www.revistasuma.es
Apartado de Correos 19012
28080-MADRID (España)
Fax: (+34) 911 912 879
Dirección: *direccion@revistasuma.es*
Administración: *administracion@revistasuma.es*

Normas de publicación en página 143.
Boletín de suscripción en página 144.

SUMA 54
Febrero 2007, pp. 79-84

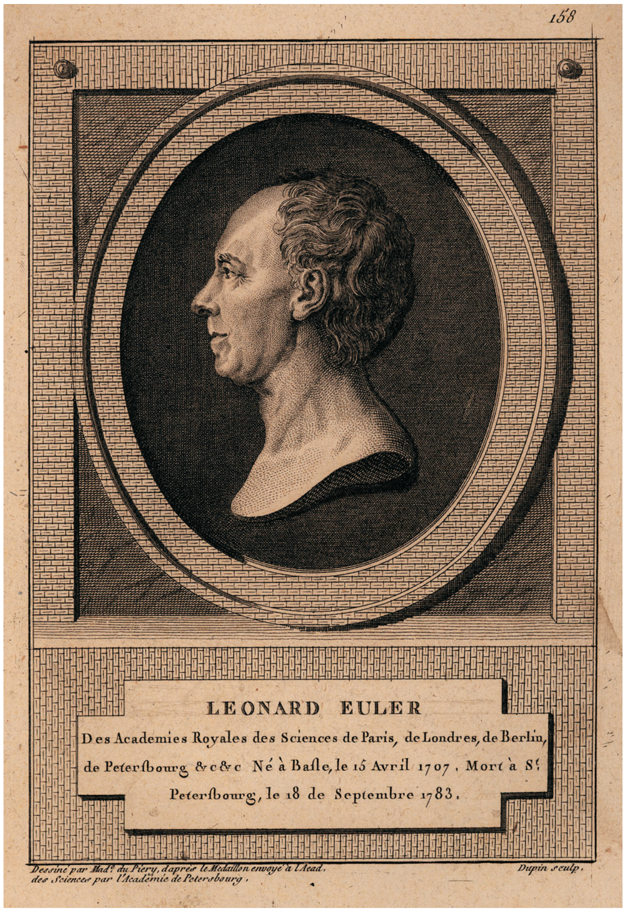
Euler: El maestro de todos los matemáticos

Hace por estas fechas 300 años, exactamente el 15 de abril de 1707, nacía Leonhard Euler, en la ciudad suiza de Basilea, cuya universidad había alcanzado un gran prestigio, impulsada por una sociedad vivamente interesada por entonces en la educación científica y artística.

El padre de Leonhard, Paul, Pastor calvinista, era un hombre de amplia cultura que había estudiado matemáticas con Jacob Bernoulli, lo que le permitió ayudar a su hijo a dar los primeros pasos en Matemáticas. La madre, Margarete, procedía de una antigua familia de eruditos. Así se comprende, en semejante ambiente familiar, la favorable disposición de Leonhard hacia el estudio en general, cualquiera que fuese la materia.

Leonhard fue un verdadero niño prodigio y no sólo para las matemáticas, pues tenía un don especial para los idiomas y destacaba en todos los estudios que realizaba.

Leonhard fue un verdadero niño prodigio y no sólo para las matemáticas, pues tenía un don especial para los idiomas y destacaba en todos los estudios que realizaba. Su prodigiosa memoria y su capacidad mental para el cálculo le permitían realizar complicados cálculos aritméticos sin necesidad de utilizar para ello papel y lápiz.

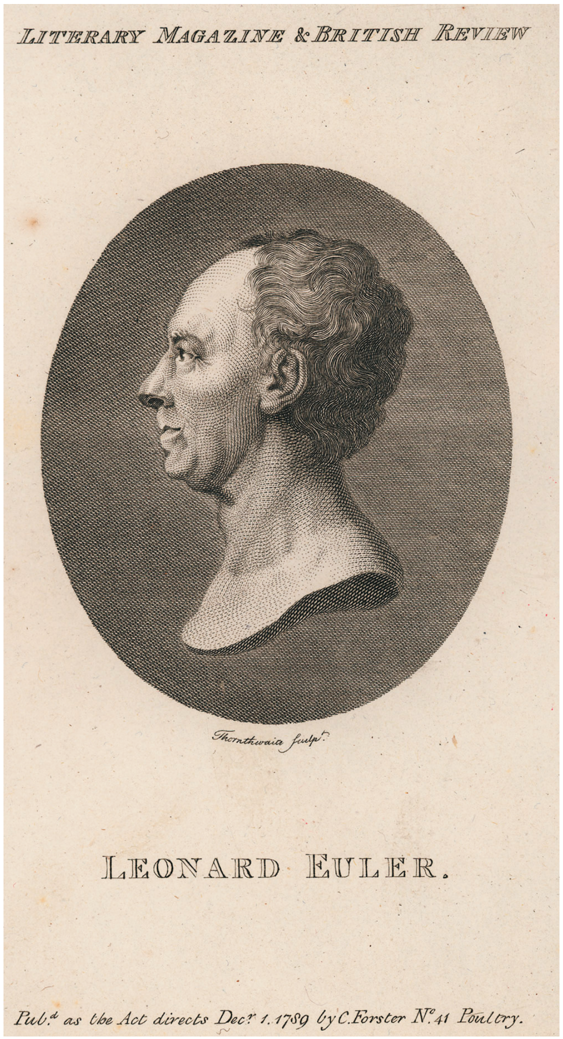


Grabado de Dupin

Santiago Gutiérrez
hace.suma@fespm.org

Su padre le orientó hacia los estudios de Filosofía y Teología, con la idea de seguir los pasos paternos y hacerse Pastor de la iglesia calvinista. A tal efecto, con tan solo trece años, matriculó a su hijo en la Facultad de Filosofía y más tarde en la de Teología. Mientras tanto, había establecido relación, al entrar en la Universidad, con Johann Bernoulli, que iba a convertirse para el joven Leonhard, más que en un maestro, en un auténtico tutor, un guía, que le proponía lecturas matemáticas y discutía con él, posteriormente, las dificultades que iba encontrando. Como recordaba el propio Euler:

> Tenía autorización para visitar con toda libertad (a Johann Bernoulli) los sábados por la tarde; él amablemente me explicaba todo aquello que yo no podía entender.



Grabado de J. Thornthwaite, n.1840

Al parecer Johann daba clases a Leonhard junto a sus hijos Niklaus y Daniel, con los que Euler acabó estableciendo una gran amistad. Con el transcurso de los años, los avances de Euler en el análisis eran tan grandes que el propio Johann Bernoulli llegó a escribirle:

> Yo represento el análisis superior como si estuviera en su infancia, pero tú lo estás llevando a su estado adulto.

Al estudio de las matemáticas, la filosofía y la teología añadía Euler el de la medicina, la astronomía, la física y las lenguas orientales. Esta gran amplitud de conocimientos le favorecía a la hora de intentar acceder a una gran diversidad de cátedras en cualquier Universidad. Así, con 19 años, se presentó a una cátedra de Física en la Universidad de Basilea, con una disertación sobre la naturaleza del sonido, siendo rechazado por la única razón de su extremada juventud.

El primer periodo ruso

En 1727, enterado de que la Academia de San Petesburgo convocaba una plaza de Medicina, se dirigió a Rusia a reunirse con su amigo Daniel Bernoulli, que había acudido a San Petesburgo junto con su hermano Niklaus, dos años antes, para ejercer ambos como profesores de la Academia, con la desgracia de que el joven Niklaus se había muerto un año después, víctima de los rigores del clima. Al llegar a San Petesburgo, se encontró Euler con que le habían cambiado su destino, afortunadamente para él, y en lugar de Fisiología iba a enseñar Física.

En 1733, su amigo Daniel, en cuya casa había residido los primeros años de su estancia en Rusia, con el que había mantenido amplias discusiones de física y matemáticas, regresó a su ciudad natal para ocupar la cátedra de Matemáticas de la Universidad de Basilea. Esto produjo un gran vacío en la vida de Euler, pero por otro lado tuvo la ventaja de dejar vacante la plaza de Matemáticas que no tardaría en ser ocupada por el propio Euler.

Ese mismo año de 1733 se casaba Euler con Katharina Gsell, hija de un pintor suizo que había ido a San Petesburgo contratado por la Academia y que en aquel momento ostentaba el cargo de director. De su matrimonio tuvo Euler trece hijos de los cuales solo cinco alcanzaron la adolescencia, tres niños y dos niñas, y de estos solo tres sobrevivieron a sus padres.

Durante su estancia en San Petesburgo, Euler debía atender a sus tareas en la Academia y a los requerimientos como asesor del gobierno ruso, que le había nombrado director del Departamento de Geografía y comisario de pesas y medidas, y le había pedido que escribiera textos escolares para ser usados por los estudiantes de secundaria de las escuelas rusas. Para entonces ya había publicado más de ochenta trabajos en la revista de investigación de la Academia *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*. Precisamente su exceso de trabajo, además era cartógrafo de las vastas extensiones rusas, le llevó a contraer una enfermedad en la vista, a los 33 años, que acabó ocasionándole la pérdida de la visión de un ojo. La ceguera parcial no le impidió seguir trabajando con la misma intensidad. La pluma de Euler era tan activa y tan rápida que en cierta ocasión el científico francés F. Arago dijo de él que:

... su exceso de trabajo, también era cartógrafo de las vastas extensiones rusas, le llevó a contraer una enfermedad en la vista, a los 33 años, que acabó ocasionándole la pérdida de visión de un ojo.

A estas portentosas cualidades añadía una capacidad de concentración tal que era capaz de escribir sus memorias matemáticas incluso mientras sus hijos jugueteaban con él, subiéndosele por encima.

Grabado de Samuel Kuetner (1747-1828), dibujo de Joseph-Friedrich-Augus Darbes (1747-1810)

> podía hacer matemáticas sin ningún esfuerzo, exactamente igual que los hombres respiran y que las águilas se mantienen en el aire.

A estas portentosas cualidades añadía una capacidad de concentración tal que era capaz de escribir sus memorias matemáticas incluso mientras sus hijos jugueteaban con él, subiéndosele por encima. El propio Euler decía que su lápiz parecía sobrepasarlo en inteligencia, dada la facilidad con que salían de él sus escritos. Durante este periodo, en 1736, publicó su tratado de *Mecánica*, famoso por ser el primero que basaba sus demostraciones en el nuevo análisis, ahorrándose así el recurso a las intrincadas demostraciones de los tratados anteriores.

En 1735, había logrado resolver el llamado *problema de Basilea*, que consistía en determinar el valor de la serie

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{k^2}+\ldots$$

Este problema había sido planteado por P. Mengoli en 1644, y desde entonces fue pasando por diversos matemáticos, llegando intacto, sin solución, hasta incluso Jacob Bernoulli que decidió plantarlo a su vez a la comunidad matemática en 1689.

El primer intento de Euler fue atacarlo mediante las aproximaciones sucesivas de las sumas parciales, pero así logró tan solo una aproximación al valor de la serie, y no el valor exacto.

Se le ocurrió entonces abordarlo integrando de dos formas diferentes (1731) la expresión

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}}-\frac{\ln(1-t)}{t}dt$$

La respuesta obtenida, tras un laborioso cálculo y de formulación bastante compleja, seguía dando una nueva aproximación, solo correcta en sus seis primeros decimales.

Billete de 10 francos suizos con la efigie de Euler

En 1735 da finalmente con la solución:

> Sin embargo, he encontrado ahora y contra todo pronóstico una expresión elegante para la suma de la serie
>
> $$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+etc$$
>
> que depende de la cuadratura del círculo... He encontrado que seis veces la suma de esta serie es igual al cuadrado de la longitud de la circunferencia de un círculo cuyo diámetro es 1.

Es decir:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

El periodo alemán

La muerte de la emperatriz Ana en 1740 produjo en Rusia un cierto periodo de inseguridad a la cual no era ajena la Academia. Quizá por esto y temiendo que ello perjudicara sus condiciones de trabajo, en 1741 decidió aceptar la invitación del rey de Prusia, Federico II el Grande, para incorporarse a la Academia de Berlin, fundada en 1700 por Leibniz y presidida en aquel entonces por el francés P.L.M. de Maupertuis, e impulsada por el propio rey, que deseaba convertirla en un importante centro de Ciencia y de Cultura. Debido a las múltiples ausencias de Maupertuis, de hecho, era Euler quien dirigía todo el trabajo de la Academia. El rey le encomendaba a Euler tareas muy variadas, como la nivelación del canal Finow, la instalación de juegos de agua en Sanssouci (que

> *... podía hacer matemáticas sin ningún esfuerzo* “exactamente igual que los hombres respiran y que las águilas se mantienen en el aire”.

nunca llegaron a funcionar), la dirección de las minas de sal de Schönebeck, la creación de montepíos de viudedad, los juegos de lotería... Para los trabajos de investigación, sin embargo, el rey no mostró interés alguno. A decir verdad, las relaciones de Federico II con Euler fueron muy frías, hasta el punto de que, muerto Maupertuis, no fue capaz de promoverle al cargo de director de la Academia.

Euler continuó sus investigaciones con la misma intensidad que en la época rusa, realizando aportaciones esenciales a casi todas las ramas de las Matemáticas existentes hasta ese momento, y no solo a través de monografías o artículos en revistas, sino a través de extensos tratados. Por otra parte y durante este periodo de su estancia en Berlin no dejó de enviar numerosas memorias tanto a la Academia de Prusia como a la de San Petesburgo, de la cual continuaba recibiendo una pensión.

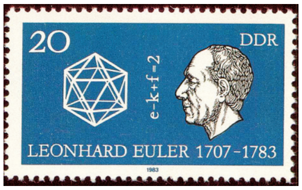
> *El número* **e** *lo utiliza por primera vez en una carta dirigida a Goldbach, en 1731, para designar* “el número cuyo logaritmo hiperbólico es igual a uno.”

Además de sus *Cartas a una princesa de Alemania*, que recopila las lecciones impartidas a la princesa de Anhalt-Dessau, sobrina del rey de Prusia, obra de divulgación que mereció ser traducida a varios idiomas, Euler publicó trabajos de mucha importancia durante este periodo:

- En 1744, su *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, el primer estudio general sobre el Cálculo de Variaciones, según los conocimientos de entonces.
- En 1748, aparece la *Introductio in analysis infinitorum*, en dos volúmenes, una introducción al análisis de las magnitudes infinitamente pequeñas. Es la más famosa de sus obras, y en ella se encuentran las célebres fórmulas que relacionan las funciones trigonométricas y la exponencial, expresiones del seno y el coseno como productos infinitos, la geometría analítica en tres dimensiones, teoremas relativos a las curvas algebraicas, etc. Por otra parte, es aquí donde Euler define el concepto de función como el de una

expresión analítica formada por variables y constantes, y según la naturaleza de esa expresión llamó a la función algebraica o transcendente. Así mismo efectuó la clasificación de las funciones en uniformes y multiformes, pares e impares, explícitas e implícitas, algebraicas racionales y algebraicas irracionales.

- En 1755 las *Instituciones calculi differentialis*. En esta obra adopta el principio de Leibniz de despreciar las cantidades infinitamente pequeñas en la idea de que una cualquiera de ellas es menor que las precedentes y por tanto no puede especificarse su valor que es cero.



- En 1761 publica los *Teoremas sobre los residuos obtenidos por la división de las potencias*, donde aparece demostrado el llamado pequeño teorema de Fermat (si p es primo, a^p-p es divisible por p), en que aborda problemas sobre teoría de números utilizando el método de Inducción.

- Es sabido la importancia que tiene la notación simbólica para el mejor y más rápido desarrollo de las matemáticas. Pues a Euler se debe la introducción de algunos de los símbolos que usamos aun hoy. Así, el número **e** que utiliza por primera vez en una carta dirigida a Goldbach, en 1731, para designar *el número cuyo logaritmo hiperbólico es igual a uno*. En cuanto a la letra **π**, para representar la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, si bien había sido utilizada ya en 1706 por William Jones en su *Sinopsis Palmariorum Matheseos* (Nueva introducción a la Matemática), es la adopción que Euler hace de ella lo que consigue extender definitivamente su uso entre los matemáticos. La letra **i**, en principio la empleaba Euler como símbolo de un *número infinito*, pero la adoptó en 1777, ya al final de su vida, para designar la raíz cuadrada de –1, si bien no apareció publicada hasta 1794, y su difusión definitiva no se logró hasta su utilización por Gauss en las *Disquisitiones arithmeticae*, de 1801. Debemos a Euler también la designación de los lados de un triángulo mediante las letras minúsculas *a*, *b* y *c*, y la de los ángulos opuestos mediante las mayúsculas *A*, *B* y *C*, respectivamente, así como el uso de las letras *r*, *R* y *s* para designar, respectivamente, los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita, y el semiperímetro de un triángulo. Otros símbolos suyos son: L*x* para el logaritmo natural de *x*, el símbolo ∑ para el sumatorio, el símbolo *f*(*x*) para una función, y las abreviaturas *sen, cos*, *tg*, *cotg*, *sec* y *cosec* para las funciones trigonométricas.

Debemos a Euler también la designación de los lados de un triángulo mediante las letras minúsculas a, b *y* c, *y la de los ángulos opuestos mediante las mayúsculas* A, B *y* C, *respectivamente.*

- En sus investigaciones sobre los números complejos llegó a la conocida hoy como identidad de Euler:

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta$$

De ella dedujo, haciendo $\theta=\pi$, la célebre relación entre las famosas tres constantes de la matemática:

$$e^{i\pi}=-1$$

Segundo periodo ruso

En 1766, Euler recibe la invitación de Catalina II de Rusia para volver a la Academia de San Petesburgo, poniendo a su disposición una casa bien amueblada (todavía viven sus trece hijos), dándole toda clase de facilidades y los honores de gran personalidad. A poco de llegar de nuevo a Rusia, su visión se deterioró hasta el punto de tener que utilizar una pizarra para escribir y realizar sus cálculos. Prácticamente permanecería ciego el resto de su vida. No obstante la ceguera, su producción siguió siendo tan fecunda como en los periodos anteriores.

Entre 1768 y 1770 aparecieron las *Instituciones calculi integralis*, en tres tomos, que completaban sus trabajos de análisis con el cálculo integral. Esta obra, junto a las *Instituciones cal-*

culi differentialis, además de recoger todos los trabajos acumulados sobre el tema hasta la fecha, introduce numerosas aportaciones personales, como las formas habituales de las integrales elípticas, una teoría de las funciones beta y gamma fundada en las integrales eulerianas, un desarrollo del cálculo con diferencias finitas, y métodos sistemáticos de resolución de ecuaciones diferenciales de orden superior de coeficientes constantes.

En 1770, redactó un manual de Álgebra en lengua alemana, que se publicó bajo el título de *Tratado completo de Álgebra*. Como quiera que ya había perdido la visión de ambos ojos, este libro lo dictó a uno de sus colaboradores, un ex-sastre, y, por cierto, modificaba el texto una y otra vez hasta quedar convencido de que su escribano podía entenderlo.

Algunos otros trabajos contienen auténticas *joyitas* como el teorema de Euler sobre los poliedros, o la *Theoria motuum planetarum et cometarum* (Teoría de los movimientos de los planetas y los cometas, 1744), que sirvió para los cálculos astronómicos hasta bien entrado el siglo XIX.

Grabado de Benjamin Holl (1808-1884), de un dibujo de A. Lorgna

En 1771, el fuego destruyó totalmente su casa, salvándose él del fuego gracias a su servidor Pierre Grimmon que lo sacó a hombros del incendio. Afortunadamente pudieron salvarse todos sus manuscritos y una vez más la actuación de la emperatriz Catalina remedió la situación.
En 1773, Euler perdió a su mujer Catherina, volviendo a casarse al año siguiente con Salomé Abigail Gsell, hermanastra de la difunta, que le proporcionó las atenciones necesarias hasta su muerte.

En todas las ramas de las matemáticas podemos encontrar el nombre de Euler junto a sus importantes contribuciones. Sus obras completas, se hallaban en proceso de publicación en el último cuarto del siglo pasado. Se calculaba que ocuparían unos 75 volúmenes, en los que se reunirían cerca de 900 trabajos, memorias y libros pertenecientes al dominio científico, lo que equivaldría a una producción anual de unas 800 páginas, a lo largo de su vida profesional. Euler iluminó el siglo XVIII con sus trabajos y su sabiduría. En los comienzos del siglo, morían Leibniz y Newton, y en el final Gauss y Lobachevskiy eran casi unos niños. Se entiende lo que Laplace solía decir a sus discípulos: *Leed a Euler, leed a Euler...*

En 1783, el día 18 de septiembre de nuestro calendario, después de haber jugado un rato con sus nietos, de haber trabajado sobre el vuelo de los globos (era un tema de interés, dado el reciente ascenso en globo de los hermanos Montgolfier), tras una breve comida y haber hecho unos cálculos sobre la órbita del planeta Urano, a media tarde, Euler, ese gran matemático y excelente persona, fue víctima de una hemorragia masiva que le provocó la muerte casi instantánea. En su elogio fúnebre, el marqués de Condorcet, tras señalar que Euler *dejó de calcular y vivir*, afirmó que *todos los matemáticos... son sus discípulos.* ■

SUMA 54
Febrero 2007, pp. 85-94

Máquinas y maquinaciones

El próximo mes de junio cerraré, al menos por el momento, esta sección y me gustaría despedirme con el relato de una historia muy especial. A lo largo de casi treinta años de profesión he ido guardado en un arcón, como los piratas de antaño, un montón de joyas encontradas en mis travesías matemáticas, logrando acumular un botín bastante suculento. Una de mis piezas favoritas es esta historia, una historia que ojalá me hubiesen contado cuando me enseñaron por primera vez los rudimentos del álgebra lineal. De hecho, si hoy tuviese que impartir clase de álgebra lineal en bachillerato o en un primer curso de cualquier carrera científica o técnica y se me permitiese hacerlo a mi manera, articularía mis clases en torno a esta historia. Sus distintos episodios, todos ellos verídicos, me han ido llegando a través de los años de la mano del matemático Mario Fernández Barberá, del escultor José Luis Alexanco y del poeta Ramón Mayrata.

Capi Corrales Rodrigáñez
enuncuadrado.suma@fespm.org

Edificio IBM, en la Castellana de Madrid
Miguel Fisac, 1967. Contruido el mismo año que el Centro de Cálculo. Los paneles de los bajos son de J.L. Alexanco

Parece que el anhelo por compartir el poder con los dioses siendo capaces de crear seres animados, o al menos construir máquinas que trabajen por nosotros, ha latido en el corazón humano desde nuestros inicios como especie.

> En el principio era el hierro. Bueno, o la madera, o, mejor aún el barro. Porque al igual que el hombre real (de carne y hueso), el hombre artificial, el autómata (de ruedas y hierro), comenzó siendo una simple muñeca de barro cocido, terracota articulada en brazos y piernas[1].
>
> Y luego, ya, toda una serie de seres animados artificialmente por métodos hidráulicos, por ingeniosos sistemas de utilización de la dilatación del aire al calentarse, por pesos y poleas movidos por la arena que cae (o al estilo del reloj de arena), por engranajes, después, maquinarias de relojería de increíble precisión y, anteayer, por la electricidad, robots electrónicos ayer, por la cibernética hoy, por la ingeniería bioquímica mañana… el hombre artificial.
>
> La infinita (inacabada e inacabable) progresión técnica puesta al servicio de su más ilusionante y casi inconfesable sueño: convertirse, por obra y gracia de la creación de seres animados, en dioses.
>
> Juan Tamariz, Autómatas, prólogo a Mayrata, 1990, pág. 7

Métodos hidráulicos, ingeniosos sistemas de utilización de la dilatación del aire al calentarse, pesos y poleas movidos por arena que cae, engranajes, electricidad… La manera de comunicarse con la máquina, de hacerle obedecer nuestras órdenes, ha ido evolucionando con nuestro conocimiento técnico y tecnológico, nos cuenta Juan Tamariz –que, no conviene olvidar, hizo la carrera de Ciencias Físicas en la Universidad Complutense de Madrid antes de convertirse en mago–. No es de sorprender que entre 1968 y 1973, un escultor, Jose Luis Alexanco, sustituyendo los ingenios por ingenio, fuese capaz de hacerse entender con un enorme ordenador mediante el álgebra lineal. Y me estoy refiriendo aquí al álgebra lineal que todos conocemos, el que se enseña hoy en los últimos cursos de bachillerato y en los primeros de las carreras técnicas y de ciencias. Un matemático, Fernández Barberá, logró que el escultor entendiese a la máquina y el escultor logró –aprendiendo tanto a programar como las matemáticas necesarias– que la máquina le entendiese a él. El resultado fueron unas espléndidas y pequeñas figuras de humanoides construidas en metacrilato, cuyo impresionante –y fascinante– árbol genealógico nos narra con brillo y encanto el poeta Ramón Mayrata en su libro *La sangre del turco*, 1990.

Antes de visitar a los ancestros de la máquina de Fernández Barberá y las esculturas de Alexanco, conozcámosles a ellos. A mediados de los años cincuenta del siglo pasado, Mario Fernández Barberá, –pieza única entre los matemáticos españoles de la época–, recién licenciado por la Facultad de Ciencias Matemáticas (entonces llamada Facultad de Ciencias Exactas) de la Universidad Complutense de Madrid, llegó a la Universidad Técnica de Aachen (Alemania) con una beca. A

los dos años consiguió un puesto en el Centro de Cálculo que IBM tenía en Berlín (en aquel momento había en toda Europa un total de siete ordenadores: tres en Alemania, dos en Francia, uno en Inglaterra y otro en Italia), y pocos años después se trasladó a Paris llegando a ser Director General de IBM en Europa. Un accidente de coche con una larga rehabilitación cambiaron la dirección de la trayectoria profesional de Fernández Barberá y en 1959 regresó a Madrid.
Ocurrió que en 1966 IBM-España y la Complutense llegaron a un acuerdo: la multinacional aportaría una máquina y un hombre, la Universidad un edificio y dos hombres, y, juntas, empresa privada e institución pública, fundarían un centro de cálculo. Todo un precedente en España y en el mundo. Y no era más que 1966. La máquina que prestó IBM era una *7090*, último grito en los ordenadores de entonces, y el hombre que acompañaba a la máquina era Mario Fernández Barberá. Además del edificio que albergaría el Centro, diseñado por Miguel Fisac y construido entre 1966 y 1967, la Universidad proporcionó un director, Florentino Briones y un subdirector, Ernesto García Camarero.

El nuevo Centro de Cálculo se creó con el objetivo concreto de incorporar las nuevas técnicas del cálculo automático –por aquel entonces escasamente presentes en nuestro país– a la investigación y la enseñanza. Sus servicios estaban abiertos a todos los centros españoles de educación e investigación, y desde el primer momento se ofrecieron tanto cursos en los que se enseñaba programación y análisis de sistemas, como asesoramiento para cualquier tipo de proyecto que involucrase el uso no rutinario de un ordenador. Aunque las autoridades no inauguraron oficialmente el Centro hasta marzo de 1969, los tres seminarios más importantes que se impartieron en aquella época en el Centro –el Seminario de Lingüística Matemática, el Seminario de Composición de Espacios Arquitectónicos y el seminario que forma parte de nuestra historia, el *Seminario de Generación Automática de Formas Plásticas*– empezaron a funcionar en 1968. Los tres se crearon para:

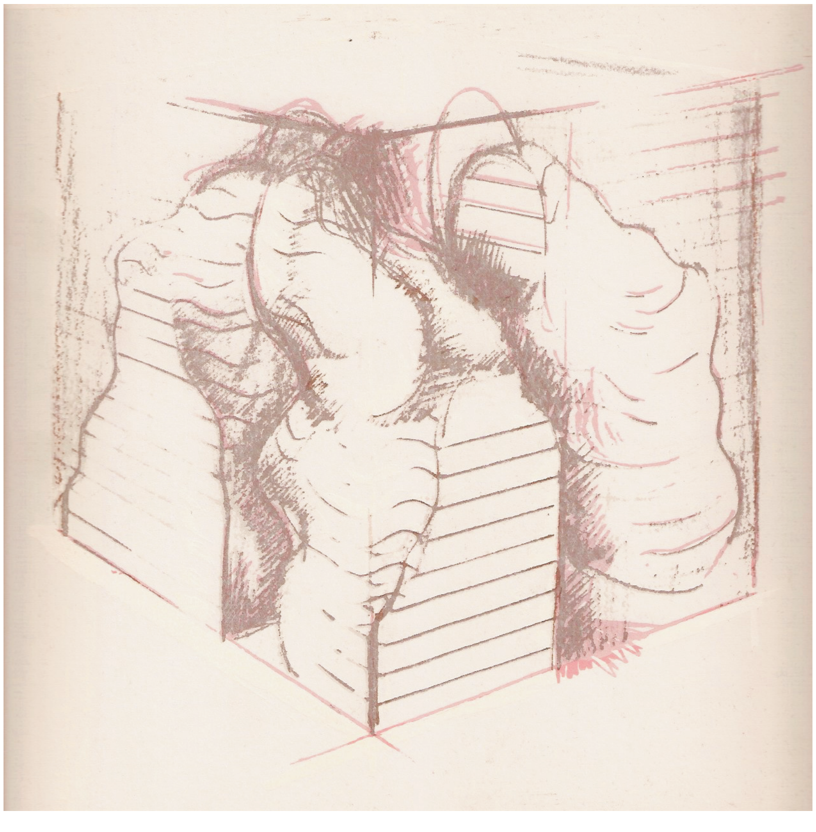
> [...] encontrar y dar a conocer campos de actividad del ordenador que no fueran sólo los que se desprendían de considerar a este nuevo instrumento como una máquina aritmética o matemática, heredera del ábaco chino, del aritmómetro de Pascal o de las calculadoras de Leibniz y Odhner. Importaba dejar patente que lo esencial del ordenador era la información como soporte de conocimiento, hacer ver que la máquina podía sustituir al hombre en los procesos de control y ahorrarle la fatiga del trabajo mental repetitivo y mecánico, colaborando también en las tareas de creatividad. Todas estas características de la máquina anunciaban un cambio esencial en la actividad humana, prefigurándose como su rasgo distintivo la creatividad, la inventiva, ya que para la ejecución de los procedimientos inventados se tenía al eficaz auxiliar que se encerraba en los nuevos templos que representaban los Centros de Cálculo. El impacto que el ordenador representa en la actividad humana no significa sólo la aparición de una potente herramienta, sino que también actúa sobre el método de abordar los problemas, originando una mutación intelectual sin precedentes, que va tomando nuevas formas, y denotándose con términos como inteligencia artificial, ingeniería del conocimiento, etc., haciendo surgir todo un nuevo sector de la actividad social humana que recibe el nombre de cuaternario. Habíamos percibido, pues, que estábamos ante un amplificador de la mente, y sentíamos la necesidad de entrar en el meollo de la informática, de llegar al límite de la terra ignota en el que se situaba una ciencia de tan reciente aparición, y nos animaba también a hacer ver que la actividad del informático no consistía en comportarse como un periférico del ordenador, con su cerebro programado para usar los programas y las máquinas que venían de fuera.
>
> García Camarero (1986), pp. 177-179

Como coordinador del Centro y puente entre IBM y la Universidad, Fernández Barberá fue desde el primer momento el espíritu detrás del proyecto y el verdadero motor de los seminarios. Él fue quien agrupó a los artistas, quien hizo de puente entre estos y los informáticos, quien supo establecer una vinculación entre los proyectos de investigación de IBM y la inquietud que había entonces en la Universidad. Según me comentó el arquitecto Javier Seguí de la Riva, uno de los responsables del Seminario de Composición de Espacios Arquitectónicos[2] y participante en el *Seminario de Generación Automática de Formas Plásticas* desde su primera reunión en diciembre de 1968[3]:

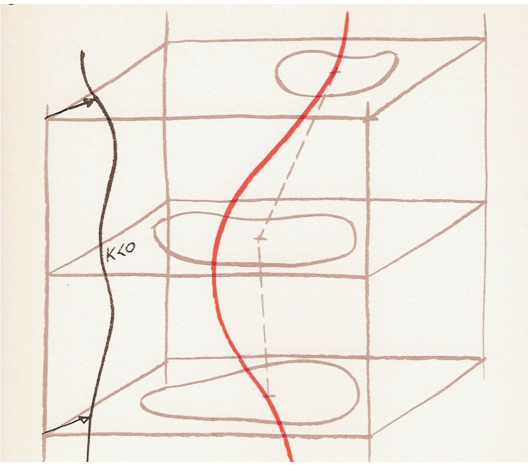
> Mario fue el gerente de una idea loca, el único espíritu con visión y capaz de enterarse donde los demás no sabíamos. Inventó los seminarios, las exposiciones... fue el alma mater y verdadero responsable de todo lo que ocurrió allí. Con el tiempo, el resto de los participantes fueron creciendo y aprendiendo por su cuenta, pero al principio sólo Mario entendía lo que estábamos haciendo. Él era quien daba el visto bueno a los proyectos, el que apoyaba o no, el que buscaba subvenciones, etc. Y todo era posible gracias a la infraestructura libre y deliciosa proporcionada por IBM gracias a Mario.

El otro responsable, junto con Fernández Barberá, de la creación del *Seminario de Generación Automática de Formas*, fue el escultor José Luis Alexanco[4]. Decidido a entender y a hacerse entender por aquella enorme máquina, Alexanco el fue único artista delos que pasaron por el Centro que aprendió a programar. Ayudado y animado por Fernández Barberá se metió en las tripas del ordenador, las estudió y consiguió que la máquina le generase esculturas (Alexanco, 1974 y 1982). El proceso que siguieron Alexanco y la máquina de Fernández Barberá –a la que a partir de ahora llamaremos por su nombre, *7090*– para producir formas, constaba de tres fases.

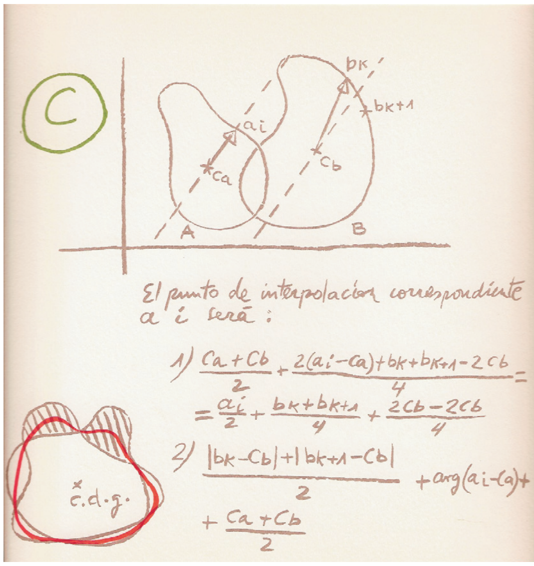
En la primera fase Alexanco construía lo que podría llamarse un *catálogo de formas elementales* a partir de unos dibujos iniciales de figuras humanas. En cada uno de estos dibujos seleccionaba los trazos, las características esenciales que lo distinguían de los otros, haciendo caso omiso de los demás aspectos. Un verdadero proceso de abstracción. De esta manera y, por así decirlo, fue puliendo los dibujos iniciales hasta llegar a sintetizarlos en un catálogo de formas elementales a partir de las cuales trabajar.

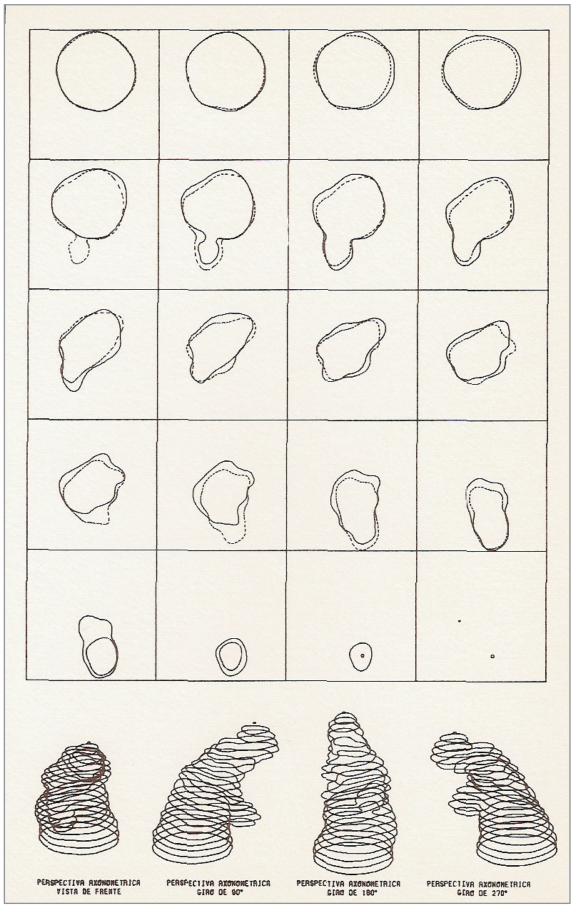


En la primera fase, Alexanco construía lo que podría llamarse un catálogo de formas elementales *a partir de unos dibujos iniciales de figuras humanas. En cada uno de estos dibujos seleccionaba los trazos, las características esenciales que lo distinguían de los otros, haciendo caso omiso de los demás aspectos. Un verdadero proceso de abstracción.*



En la segunda fase elegía una serie de transformaciones que llevar a cabo sobre las formas elementales: interpolaciones, giros, dilataciones, traslaciones y combinaciones de las cuatro anteriores.





En la tercera y última fase, 7090 iba sometiendo sucesiva e ininterrumpidamente las formas elementales catalogadas en la primera fase a las transformaciones seleccionadas en la segunda.

En la segunda fase, el escultor elegía una serie de transformaciones que llevar a cabo sobre las formas elementales. Las transformaciones seleccionadas por Alexanco fueron cinco: interpolaciones, giros, dilataciones, traslaciones y combinaciones de las cuatro anteriores.

En la tercera y última fase, el ordenador *IBM 7090* iba sometiendo sucesiva e ininterrumpidamente las formas elementales catalogadas por José Luis Alexanco en la primera fase a las transformaciones seleccionadas durante la segunda fase del proceso.

Tanto las formas elementales como las transformaciones involucradas podían (y pueden: os animo desde aquí a que os metáis, junto con vuestros alumnos, en el juego que Alexanco presenta (Alexanco (1974)) ser descritas utilizando herramientas básicas del álgebra lineal. Esto permitía, por un lado, que el escultor escribiese los datos e instrucciones en un lenguaje que *7090* podía entender y, por otro, que la máquina reprodujese el proceso sobre un modelo geométrico sencillo, ilustrando gráficamente el proceso según éste iba ocurriendo: la forma inicial aparece en pantalla (o sobre hojas impresas) como una figura que, al ir siendo transformada, se va moviendo.

Un juego que con frecuencia aparece en las revistas de pasatiempos consiste en ir uniendo con un trazo de color una serie de puntos que aparecen numerados sobre el papel. Al ir recorriendo en orden la sucesión de números comenzando por el 1, el trazo va delimitando una forma y el juego consiste en adivinar qué figura representa esta forma. Cuántos más puntos haya, más se aproximará la forma a la figura de la que hace abstracción y más fácil le resultará al lector identificar tal figura. Las representaciones que aparecen en este tipo de pasatiempos son siempre planas, pero un proceso parecido puede llevarse a cabo para reproducir figuras con volumen y es el que se sigue para dibujar mapas con montañas. La montaña se corta en secciones –en rebanadas o rodajas– y el contorno de cada una de estas secciones es lo que se llama una *curva de nivel*. Si nos dan varias curvas de nivel y nos dicen a qué altu-

ra se ha de poner cada una de ellas, siguiendo un proceso análogo al seguido con los números en el juego anterior podremos reproducir con bastante exactitud la forma de la montaña. Si la Tierra se viese sometida a transformaciones –como consecuencia de un terremoto, por ejemplo–, para describir los cambios experimentados por la montaña no tendríamos más que describir las transformaciones sufridas por cada una de las curvas de nivel.

Éste es precisamente el sistema que Alexanco utilizó para describir los cambios que sus formas elementales experimentaban al ser sometidas por *7090* a transformaciones: sobre cada una de esta formas tomó dieciséis curvas de nivel numeradas del 0 al 15 (comenzando por la curva de nivel 0, un punto situado en la coronilla de la forma, y terminando en la curva 15, un círculo colocado en la base sirviendo de pedestal). Este método de rebanar las figuras mediante curvas de nivel, no solo facilitaba la descripción del proceso, sino que permitía al escultor reproducir sus favoritas a partir de rodajas de metacrilato que luego pegaba[5].

Si estudiamos en libros y catálogos las piezas de Alexanco previas a 1968, encontramos en ellas un aislamiento progresivo de la figura humana, la repetición constante de determinadas posturas y una casi obsesión por el movimiento. Parece como si lo que llevó al escultor a acercarse al ordenador y, metiéndose dentro de él, aprender su lenguaje, fue la búsqueda de la clave del movimiento…

Un hombre, Alexanco, que utiliza una máquina para generar movimiento ininterrumpidamente. Otro hombre, Fernández Barberá, que se alquila con una máquina… Me viene a la cabeza la historia de Platón

Dos precursores de Jean Tinguely (extractos de una conversación dejada caer sobre cinta magnética):

D[6]: Me ibas a hablar sobre…

R[7]: PLATÓN

D: Eso es, PLATÓN.

R: PLATÓN, inventor de la máquina del movimiento perpetuo. Lo conocí en 1944, o quizás 45, o 43, 46 o 48. Yo iba a la escuela en Alès.

D: ¿Vivías en Alès?

R: Yo estaba en Nîmes –vengo de Sauve, que no está lejos de Nîmes–, pero en Nîmes me echaron de la escuela y me mandaron a Alès. En cualquier caso, todo el mundo allí conocía a Platón. Exhibía su máquina en el mercado local, justo frente a la escuela. Tenía una carretilla, y descendía –el vivía en lo alto, Alès es un pueblo minero– el vivía en lo alto…en una cabaña…y descendía y atravesaba todo el pueblo con su carretilla. Y sobre la carretilla echaba una gran lona para que no pudieses ver lo que había debajo. Bien, una vez llegaba al mercado elegía un lugar, y tal y como yo lo recuerdo, siempre cerca de la escuela.

D: Sí.

R: Y entonces quitaba la lona y levantaba la máquina… Era enorme… Y luego ponía un cartel. El cartel decía, en letras grandes: MÁQUINA A LA VENTA. Y debajo, en letras pequeñas: hombre a la venta. Entonces empezaba a gritar *Acérquense, vean la máquina del movimiento perpetuo*. ¡Y aquella máquina! Tenía una rueda grande y una rueda pequeña, lo recuerdo muy bien. Se sostenía con cinturones, cuerdas y alambre, y constantemente se desarmaba y rompía. Él empezaba a dar vueltas a una manivela… ya sabes, con gran entusiasmo… y …

D: ¿Y no pasaba nada?

R: Era una máquina del movimiento perpetuo, porque cuando él daba vueltas a la manivela la rueda pequeña giraba y…

D. Quiero decir que no hacía realmente nada.

R: Nada… nada más, eso es.

D: Sólo las ruedas.

R: Y otras cosas. Estaba montada de una manera bastante extraña, como te he dicho. Por ejemplo, el cinturón pasaba por encima, por debajo y alrededor. Y él decía: *Esta es la máquina del movimiento perpetuo*. Pero cuando había granjeros por allí, ya sabes, miraban la cosa aquella y decían: *Eso no es movimiento perpetuo… No deja de pararse... La cosa ni siquiera funciona. Bien*, entonces PLATÓN decía: *Por eso es por lo que el hombre está a la venta, también*.

D: Ah sí

R: *Estoy preparado y listo para moverla todo el tiempo*, contestaba.

D: Básicamente muy lógico

R: *Me vendo con la máquina*, les recordaba.

D: Y mientras él estuviese haciendo girar la manivela, la máquina funcionaba.

R: Sí, tenías que comprar ambos.

D: De esa manera sería movimiento perpetuo.

R: Correcto.

D: Porque él estaba perfectamente dispuesto a girar la manivela todo el tiempo.

R: Y aquello resultaba irrefutable.

Spoerri (1966)

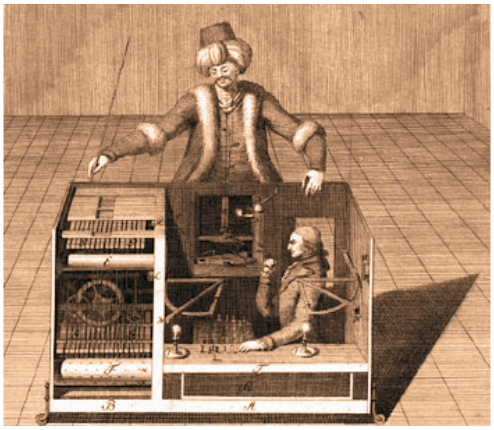
El siglo veinte supone, en casi todas las disciplinas del conocimiento, el salto a la abstracción. Se deja de prestar atención a la forma externa –y con ello a las características individuales de las cosas–, y se concentra la mirada en las estructuras de las cosas y en las relaciones entre estas estructuras. También en la búsqueda del hombre artificial se refleja este paso a la abstracción: ya no se busca una máquina que reproduzca el cuerpo humano, sino una máquina que cumpla de la mejor manera posible las funciones que nos interesan, tenga el aspecto que tenga. Las maquinas de Platón y Fernández Barberá (en cuyas tripas se metió Alexanco), construidas ambas en pleno siglo XX, son máquinas abstractas. La diferencia esencial entre ellas no está en su aspecto, sino en su funcionamiento. La máquina de Platón, como casi todos los autómatas construidos a lo largo de los tiempos, funcionaba con un mecanismo de artilugios y jeribeques. Por eso, como tantos otros de los autómatas mecánicos más o menos sofisticados cuya historia nos refiere Mayrata, con cierta frecuencia se rompía.

> A lo largo de su historia el autómata se ha sublevado, incontables veces, contra los dictados de los hombres, de sus creadores. ¿Cómo no agradecérselo? Aquel que puede dominar al autómata, puede, a través del autómata, dominar a los seres humanos.
>
> Mayrata, 1990, pág. 31

> Era un agua secreta que afluía a las entretelas de los autómatas desde fuentes escondidas, por conductos disimulados. Bastaba abrir los grifos ocultos y la presión de su corriente invisible animaba a las figuras secas de los autómatas. Estos juegos del agua, a veces se convertían en bromas del agua. Cuando se quebraba alguna cañería los espectadores contemplaban, extrañados, cómo Tritón o Hércules, Belerofonte o el Coloso de Rodas, se convertían en impasibles jardineros que regaban descuidadamente todo lo que encontraban alrededor.
>
> Entonces, entre estos autómatas acuáticos estallaba el chorro de la vida, ahogando los movimientos calculados, precisos y cortesanos, a los que sus creadores les habían condenado para siempre.
>
> Mayrata, 1990, pág. 41

La máquina de Fernández Barberá, sin embargo, escondía algo más que un mecanismo en su interior: escondía también la cabeza privilegiada de Alexanco. Un hombre inteligente que se mete en la máquina de un matemático… Otra historia me viene a la cabeza (Mayrata (1990): págs. 11 a 17 y 53 a 61). En 1772, en la San Petersburgo de Leonard Euler, Austria, Rusia y Prusia imponen un tratado a Polonia y se reparten sus territorios. Tres años más tarde, el matemático y constructor de ingenios mecánicos austríaco Von Kempelen, que simpatiza con la causa polaca, emprende un viaje por Rusia, y en casa de su amigo el doctor Osloff, notorio científico de Kiev, conoce al príncipe Vorusky, héroe de la resistencia polaca en Rusia al que todo el mundo daba por muerto. Con el cuerpo cosido a cicatrices y ambas piernas amputadas, Vorusky, excepcional jugador de ajedrez, se esconde en casa de Osloff a la espera de una ocasión para poder salir de Rusia. Von Kempelen decide ayudar a Vorusky a escapar y en el corto espacio de tres meses le construye un disfraz: un ajedrecista mecánico vestido de turco en cuyo interior el polaco puede abandonar la casa de Osloff sin ser visto. Hasta aquí ningún problema. Lo malo es que no se puede viajar por un país –y mucho menos por la Rusia del siglo XVIII– con un autómata que no funciona sin despertar sospechas, por lo que Von Kempelen no tuvo más remedio que dar sesiones públicas con su ajedrecista en las distintas poblaciones por las que iban pasando. Los éxitos del autómata llegaron a oídos de Catalina la Grande en San Petersburgo, y Von Kempelen fue requerido para actuar en la corte. El muñeco turco jugó con Catalina, la venció y la irritó. Esa noche la reina intentó descubrir el secreto del autómata, pero no sólo no logró hacerle funcionar, sino que tampoco pudo, por más que rebuscó en su interior, encontrar nada dentro de él que desvelase su misterio. La emperatriz Catalina se aburrió pronto del muñeco, pero no así su ministro de la guerra Orlov que, soñando con construir un ejército de hombres artificiales, inteligentes e inmunes al cansancio y la enfermedad, hubiese dado cualquier cosa por descubrir el secreto del funcionamiento del autómata.

La máquina construida por von Kempelen para que Vorusky se pudiese mover dentro de ella y conseguir así la libertad, es inmediatamente identificada por Orlov –del que, afortunadamente, los dos primeros lograron escapar con ayuda del embajador austriaco– como posible máquina de guerra. ¿Poder para el individuo o poder de un individuo sobre los demás? Cuando me viene a la cabeza von Newman utilizando su ordenador para orientar los misiles que el ejército estadounidense lanzaba contra Japón o recuerdo los reportajes que sobre las Guerras del Golfo recientemente nos proyectaban por televisión, me entra un vértigo enorme. Entonces evoco la historia de Fernández Barberá, dentro del edificio de Fisac, mostrando a Alexanco las entrañas de *7090*, para que el escultor pudiese libremente generar movimiento, repaso mis cuadernos de álgebra lineal, llevo a cabo un par de transformaciones aquí y allá y Orlov deja de darme miedo. ■



NOTAS

[1] Museo de Tarragona, siglo I a.C.

[2] Seguí de la Riva sigue investigando hoy en la generación automática de formas desde el Departamento de Ideación Gráfica Arquitectónica de la EST de Arquitectura en la Universidad Politécnica de Madrid. Algunas de las actividades llevadas a cabo por Seguí de la Riva y sus alumnos aparecen recogidas en *Oscuridad y sombra. Experiencias en dibujo y arquitectura.* Ediciones Instituto Juan de Herrera, Colección Dibujo y Arquitectura, Madrid 2003.

[3] El Seminario, que se organizó apenas un año después de la aparición en Estados Unidos de los primeros gráficos generados por ordenador con intención artística, y tan solo unos meses después de que la, ya histórica, exposición *Cybernetic Serendipity* de Londres consagrase internacionalmente la tendencia, es una de las aportaciones españolas más relevantes al panorama artístico internacional del siglo veinte.

[4] Entre Alexanco y Fernández Barberá convencieron al pintor Barbadillo, que a su vez, despertó el entusiasmo de Briones y García Camarero con una carta dirigida al primero de ellos (Castaños (2000), cap. 4-2).

[5] Agradecemos a Antonio Barragán que nos prestase generosamente su colección de esculturas de Alexanco, su cámara digital y su casa para llevar a cabo las fotografías que acompañan este texto.

[6] Daniel Spoerri, artista, miembro de *Fluxus*.

[7] Robert Filliou, artista, miembro de *Fluxus*.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALEXANCO J. L. (1974): *Trabajos sobre generación automática, edición de 100 ejemplares firmados por el artista incluyendo 68 serigrafías en color, 10 planchas de offset, texto y un listado de ordenador*. IBM Madrid.

ALEXANCO J. L. (1982): *Lectura en imágenes*, Ediciones Fernando Vijande, Madrid 1982.

CASTAÑOS ALÉS, E. (2000): *Los orígenes del arte cibernético en España*, tesis doctoral leída el 18 de febrero de 2000 en la Facultad de Filosofía y Letras de la Universidad de Málaga, *http://www.enriquecastanos.com*

MAYRATA, R. (1990): “La sangre del turco”, en La biblioteca encantada de Juan Tamariz, Editorial Frakson.

GARCÍA CAMARERO, E., (1986): *El ordenador y la creatividad en la Universidad de Madrid a finales de los sesenta*, en “Procesos”, Centro de Arte Reina Sofía - Ministerio de Cultura.

SPOERRI, D., (1966): *An anecdoted topography of chance* (Re-anecdoted versión), Something Else Press.

SUMA 54
Febrero 2007, pp. 95-99

El mejor tobogán... o el ingenio matemático de Johann Bernoulli

Foto Menchu Bas

En la sección *De cabeza* del número anterior de SUMA habíamos dejado a Galileo sumido en su sutil pero lamentable error de que la curva por la que una bola caería de un punto más alto a otro más bajo en el menor tiempo posible sería un arco de circunferencia que uniese ambos puntos.

Johann, el pequeño de los Bernoulli, ya sabía que Galileo estaba equivocado cuando lanzó en el verano de 1696, el reto público, pensando más en provocar a su hermano mayor Jacob que en otra cosa, de encontrar la auténtica curva braquistócrona, *la de tiempo más breve posible.*

Hubo que esperar más de un año para que apareciesen las cinco soluciones a uno de los retos más populares de la histo-

> *Indudablemente este premio no es de oro ni de plata, porque éstos sólo atraen a almas ruines y venales de las que no podemos esperar nada laudable ni útil para la ciencia.*
> Johann Bernoulli

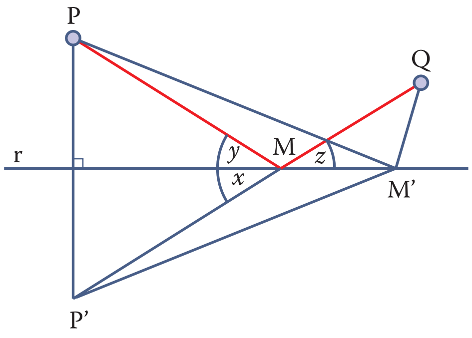
Antonio Pérez Sanz
decabezaz@fespm.org

ria de las matemáticas. Y el de más altura a tenor de los participantes: los dos Bernoulli, acompañados de L´Hôpital y de los mismísimos padres del cálculo: Newton y Leibniz. Seguramente la solución de Johann Bernoulli no sea la que más huella ha dejado en la historia, pero sin duda es con mucho la más ingeniosa, fruto de una brillante intuición.

Hágase la luz

Para aclarar el proceso seguido nada mejor que un poco de luz. Y Johann comienza su camino hacia la braquistócrona en la Grecia clásica, utilizando un viejo resultado sobre la naturaleza de la luz: *la luz no dobla las esquinas*... o dicho de otra forma, se propaga siempre en línea recta.

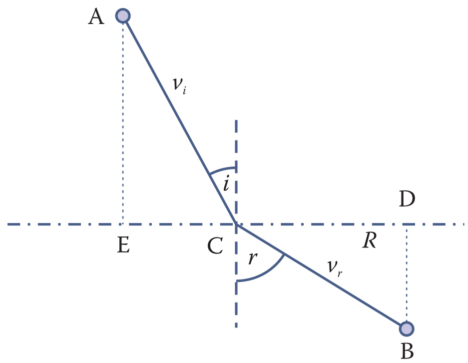
La luz elige siempre el camino más corto entre dos puntos. Gracias a esta simple observación, ya formulada por Euclídes, Herón de Alejandría, el mismo de la fórmula del área del triángulo, pudo explicar la ley de la reflexión de la luz: el ángulo incidente es igual al ángulo reflejado.



Supongamos que queremos ir de un punto P a un punto Q por el camino más corto, pero tocando en algún punto M a la recta r. ¿Cuál será ese punto M? Para encontrarlo basta con calcular el simétrico de P respecto de r, P' y unir mediante una recta P' con Q. El punto de corte de esta recta con la recta r será el punto M buscado. Y es evidente que los ángulos z e y son iguales al ser ambos iguales al ángulo x.

En el caso de la reflexión la luz no cambia de medio y su velocidad permanece constante. No ocurre lo mismo si el rayo luminoso pasa de un medio a otro. Todo el mundo lo ha podido comprobar al sumergir una varilla recta en un recipiente transparente de agua. Parece como si la varilla al entrar en contacto con el agua se quebrara, cambiando de dirección.

Ahora el rayo de luz para ir de un punto A a un punto B no sigue el camino más corto. Pero otro genio matemático nos da la clave, Fermat, afirma que en este caso la luz sigue respondiendo a un principio de mínimos: el camino que sigue es aquel en el que invierte el menor tiempo posible.



La velocidad del rayo AC en el medio superior es v_i , e incide con un ángulo i y al llegar a C pasa a un medio con densidad tal que su velocidad se convierte en v_r siendo el ángulo de refracción r. La velocidad de la luz en cada medio es inversamente proporcional a la densidad, n, de dicho medio.

De acuerdo con el principio de Fermat el trayecto del rayo será la poligonal ACB, donde el punto C estará ubicado de modo tal que el tiempo de recorrido sea el más corto posible.

A través de múltiples experimentos el holandés Snell en 1621, había descubierto la relación

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \text{cte.}$$

Esta constante depende en exclusiva de la relación entre las densidades de los dos medios.

En 1637, Descartes en su *Dioptrica* la formula, sin demostrarla, de una manera más clara:

$$\frac{\text{sen } i}{v_i} = \frac{\text{sen } r}{v_r}$$

Pero es Fermat el que proporciona la demostración definitiva. El 1 de enero de 1662 (una buena forma de empezar el año), en una carta a De la Chambre le escribe:

> Ya os dije en mi primera carta, que M. Descartes no ha demostrado jamás su principio, pues además de que las comparaciones no sirven apenas para fundamentar las demostraciones, emplea la suya a contra-sentido y supone que la luz atraviesa los cuerpos espesos más rápido que los cuerpos livianos, lo que es aparentemente falso...
>
> Para salir de este error e intentar encontrar la verdadera razón de la refracción, os indicaba en mi carta que empleando en esta investigación ese principio, tan común y tan comprobado, de que la naturaleza elige siempre las vías más cortas, podremos encontrar nuestro resultado.

Fermat demuestra la fórmula utilizando el método de máximos y mínimos. Si llamamos x a la longitud EC, podemos expresar el tiempo de recorrido desde el punto A hasta el punto B como una función de la variable x

$$t(x) = \frac{\sqrt{AE^2 + x^2}}{v_i} + \frac{\sqrt{DB^2 + (ED - x)^2}}{v_r}$$

Buscamos los valores de x para los que $t'(x)=0$,

$$t'(x) = \frac{x}{v_i\sqrt{AE^2 + x^2}} - \frac{ED - x}{v_r\sqrt{DB^2 + (ED - x)^2}} = 0$$

y es fácil obtener la relación

$$\frac{\text{sen}\, i}{v_i} = \frac{\text{sen}\, r}{v_r}$$

La luz acabará rodando

Perfecto. La luz sigue sus caminos y sus leyes, pero, ¿qué tiene que ver todo esto con el problema de la braquistócrona?

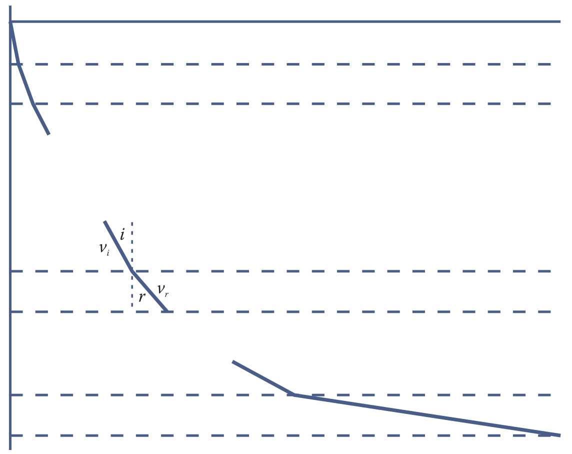
En apariencia nada, pero aquí surge el genio del pequeño de los Bernoulli. Imagina una esfera cayendo por la acción de la gravedad en un medio no homogéneo, es decir, la esfera pasa de un medio a otro con densidades distintas. En este tipo de situaciones también se cumple que el trayecto más corto no es el más rápido.

Johann Bernoulli se imagina el espacio dividido en láminas de densidad distinta. Dentro de cada una la velocidad de caída de la esfera es constante, pero la densidad sufre un cambio brusco de una lámina a la siguiente y por tanto la velocidad también. En cada capa la trayectoria será un segmento rectilíneo y la trayectoria global sería una poligonal como la de la figura.

Como el tiempo del recorrido ha de ser mínimo, se ha de cumplir el principio de Fermat, es decir:

$$\frac{\text{sen}\, i}{v_i} = \frac{\text{sen}\, r}{v_r}$$

Imaginemos, como Johann, que las láminas se hacen cada vez más finas y su número aumenta sin parar. La poligonal se irá aproximando a una curva: ¡a la curva buscada!



En un punto cualquiera de esta curva, la recta tangente se puede identificar con el segmento correspondiente de la poligonal. Y por tanto, el ángulo u que forma la tangente con la vertical en cada punto y la velocidad v en dicho punto verificarán:

$$\frac{\text{sen}\, u}{v} = cte.$$

Pero la velocidad de caída en cada punto es una función de la altura y:

$$v = \sqrt{2gy}$$

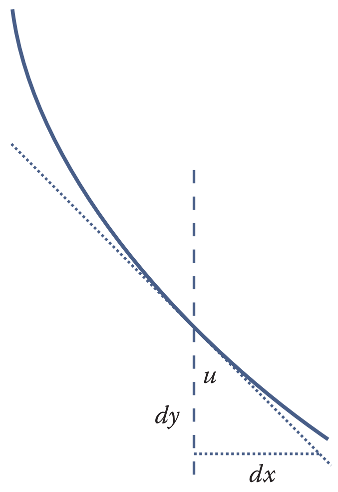
Por tanto, obtenemos que:

$$\frac{\operatorname{sen} u}{\sqrt{2g \cdot y}} = cte.$$

pero g es la constante de la gravedad, es decir:

$$\frac{\operatorname{sen} u}{\sqrt{y}} = k$$

Para y = 0, sen u =0 y la tangente es vertical.



Pero, observando la figura es fácil expresar sen u, en función de dy y dx:

$$\operatorname{sen} u = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

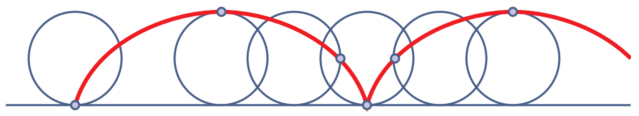
Y sustituyendo arriba, obtenemos:

$$\frac{dx}{\sqrt{y}\sqrt{dx^2 + dy^2}} = k$$

Invirtiendo el cociente y elevando al cuadrado obtenemos la ecuación:

$$y\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) = \frac{1}{k^2} = C$$

Y como muy bien presumía Johann, al lanzar su reto, no es difícil identificar esta curva con una muy popular en la época, ya investigada por Galileo, Pascal y Huygens: *la cicloide*.



La cicloide... la vieja conocida. Huygens ya había descubierto en 1673 otra maravillosa propiedad de esta curva tan especial: si dejamos caer una esfera desde un punto de una cicloide, el tiempo en alcanzar su punto más bajo no depende del punto inicial desde donde se suelta la esfera. O dicho de otra forma: la cicloide es la curva tautócrona: el tiempo en alcanzar el punto más bajo es el mismo para cualquier punto de la cicloide.

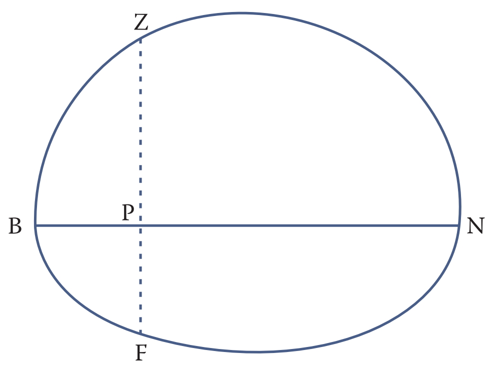
Amor de hermanos

A la solución de Johann Bernoulli publicada en mayo de 1697 en las *Acta Eruditorum*, le acompañaron las de Newton, que además en una carta dirigida a Montague en enero de 1697 proporciona un método para construir la cicloide que pasa por dos puntos dados A y B, la de Leibniz, elaborada en el otoño de 1696, la de L´Hôpital y sobre todo, la más elaborada y la que sin duda más rabia debió producir a Johann, la de su hermano Jacob mucho más general que la suya, publicada en un trabajo titulado *Resolución del problema de mi hermano, a quien yo a mi vez planteo otro*.

Jacob, como muestra de su gran amor fraterno, además de denunciar lo particular del método de su hermano, le propone otros retos relacionados con la cicloide, el primero:

> Dada una línea vertical, encontrar entre todas las cicloides que comienzan en un mismo punto y tienen la misma base horizontal, aquella en la que una esfera llega antes a la línea vertical.

Johann no tuvo demasiadas dificultades en encontrar la respuesta. Pero Jacob tenía un as en la manga, en forma de un segundo problema, por el que se permitió el lujo de ofrecer a su hermano una recompensa de 50 ducados si lo resolvía en un plazo de tres meses. Es un problema isoperimétrico:



De entre todas las figuras de igual perímetro sobre la base común *BN*, determínese la curva *BFN* que aunque ella misma no contenga la máxima área, en cambio haga que sí la tenga otra curva *BZN* cuya ordenada *PZ* es proporcional a una potencia o raíz del segmento *PF* o del arco *BF*.

Y como es injusto no compensar a una persona por un trabajo que emprenda en beneficio de otro con menoscabo de su propio tiempo y en detrimento de sus propios asuntos, por esto deseo garantizar a un hombre por quien yo salgo fiador, mi hermano, si resolviese el problema –aparte del elogio al cual se hace acreedor– una gratificación de cincuenta ducados con la condición de que en el plazo de tres meses a partir de esta publicación prometa intentarlo y presente antes del final del año la solución por cuadraturas, lo cual es posible.

Johann presumió de que no necesitaría tres meses, que le bastaba con tres minutos. Pero este problema le trajo **DE CABEZA...** Los avatares y el desenlace de este nuevo reto colocaría a cada uno de los dos hermanos en su lugar, incluso más allá de la muerte... Pero esa es otra historia. ■

REFERENCIAS BIBLIOGÁFICAS

ÁLVAREZ PÉREZ, J.M. (2006), *Curvas en la historia*, Ed. Nivola

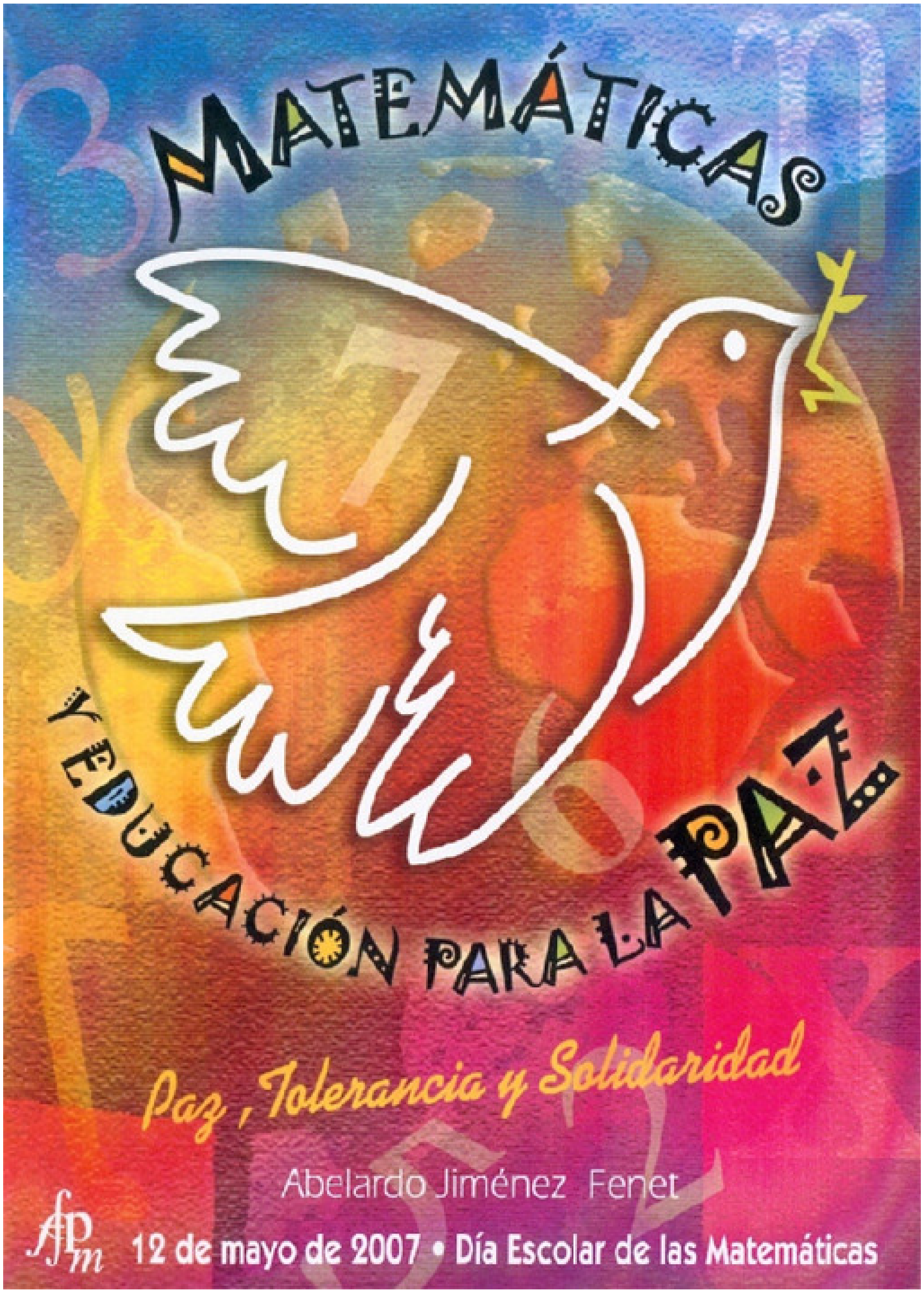
CHABERT J.L. (1993), *Le problème brachistochrone*, Histoire de problèmes, histoire des mathématiques. Ed. Comisión Inter.-IREM

SÁNCHEZ C. Y VALDÉS C. (2001), *Los Bernoulli. Geómetras y viajeros,* Ed. Nivola

SÁNCHEZ C. Y VALDÉS C.(2003), *De los Bernoulli a los Bourbaki*, Ed. Nivola

www.mathcurve.com

www.divulgamat.net/weborriak/historia/MateOspetsuak/JhBernoulli.asp



Día Escolar de las Matemáticas
12 de mayo de 2007
Matemáticas y educación para la Paz

SUMA 54
Febrero 2007, pp. 101-108

En las ciudades invisibles Ib

Hace ya tiempo que salimos de *Diomira*, *Isidora*, *Dorotea*, *Zaira* y *Anastasia*, pero no las hemos olvidado. Y si la memoria no logra recuperar las formas, sonidos y luces de sus calles podemos recurrir al registro documental del pensamiento, la escritura.

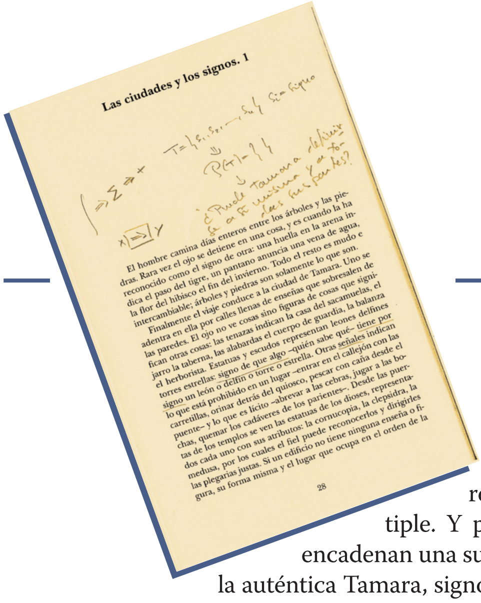
Además de registro, el libro de Calvino es una guía de viaje, aunque, como le recriminará Kublai a Marco, en él no se documentan los detalles que más necesita un emperador. Marco se interesa más por los aspectos sociales. Incluso, como veremos más adelante, de algo tan fundamental en el comercio como es el intercambio no le importan ni precios ni cuantías, sino las relaciones que esa actividad genera entre los participantes. Marco quiere saber cómo es la gente, cómo vive y el modo en que las formas de las ciudades reflejan o afectan el carácter de quienes las habitan.

Como guía que es, uno debe adentrarse por calles, mercados y parques de las ***Ciudades Invisibles*** sosteniendo en una mano ese volumen que dirige sus pasos y del que esta sección sólo destaca aquello que a su autor más le impresionó. Pero el auténtico viajero sólo se deja guiar a medias. Sabe que las experiencias más valiosas de un viaje están detrás de una esquina que no figura en ningún plano, en el error de enfilar una calle en el sentido equivocado, en la sorpresa inesperada, en la incomodidad vivida que el tiempo y el regreso transformarán en alegría. El viajero no quiere guías exhaustivas, sólo indicios, sugerencias, frases deshilachadas con las que tejer y dar forma a su propio viaje haciendo de la ciudad que miles han pateado antes una ciudad única, suya.

Insisto pues en destacar del texto original solamente aquello que mi itinerario particular recorre. Te animo, querido lector, a que entre la obra de Calvino y los fragmentos que aquí encuentres halles una forma nueva de pasear por las ciudades que vamos a visitar a continuación y que cierran el primer capítulo: *Tamara*, *Zora*, *Despina*, *Zirma* e *Isaura*. ¡Buen viaje! ■

Diseño y maquetación FMC

Miquel Albertí Palmer
ciudadesinvisibles@revistasuma.es



Las ciudades y los signos. 1

¿Puede Tamara definirse a sí misma y a todas sus partes?

El hombre camina días enteros entre los árboles y las piedras. Rara vez el ojo se detiene en una cosa, y es cuando la ha reconocido como el signo de otra: una huella en la arena indica el paso del tigre, un pantano anuncia una vena de agua, la flor del hibisco el fin del invierno. Todo el resto es mudo e intercambiable; árboles y piedras son solamente lo que son. Finalmente el viaje conduce a la ciudad de Tamara. Uno se adentra en ella por calles llenas de enseñas que sobresalen de las paredes. El ojo no ve cosas sino figuras de cosas que significan otras cosas: las tenazas indican la casa del sacamuelas, el jarro la taberna, las alabardas el cuerpo de guardia, la balanza el herborista. Estatuas y escudos representan leones delfines torres estrellas: signo de que algo –quién sabe qué– tiene por signo un león o delfín o torre o estrella. Otras señales indican lo que está prohibido en un lugar –entrar en el callejón con las carretillas, orinar detrás del quiosco, pescar con caña desde el puente– y lo que es lícito –abrevar a las cebras, jugar a las bochas, quemar los cadáveres de los parientes–. Desde las puertas de los templos se ven las estatuas de los dioses, representados cada uno con sus atributos: la cornucopia, la clepsidra, la medusa, por los cuales el fiel puede reconocerlos y dirigirles las plegarias justas. Si un edificio no tiene ninguna enseña o figura, su forma misma y el lugar que ocupa en el orden de la

28

Tamara

Tamara

Los signos dirigen los pensamientos de quienes los interpretan. Nada es solamente lo que parece, todo es de forma doble o triple, incluso múltiple. Y puesto que cada cosa remite a otra, los signos encadenan una sucesión de remisiones simbólicas de donde surge la auténtica Tamara, signo de signos y signo de sí misma: $\int$, Σ, $+$, $\in$, $\cup$, $\exists$.

> *El ojo no ve cosas, sino figuras de cosas que significan otras cosas:...*
> *La ciudad dice todo lo que debes pensar...*

Podría haber sido un museo, una galería de Arte, un Conservatorio, una academia militar, pero Calvino reserva un lugar destacado a una escuela en la que el número ilumina y orienta los fundamentos del conocimiento.

> *... la escuela pitagórica...*

La función significado S, de raíces socio culturales, asigna a un objeto x un significado $S(x)$. La función precio P asigna al objeto x el dinero $P(x)$ que cuesta. Se crea un triángulo de relaciones entre objetos, atributos y precios que todas las sociedades y culturas cierran con otra función social que valora los atributos a partir de los objetos que las significan:

> *...las mercancías... valen no por sí mismas sino como signo de otras cosas: la banda bordada para la frente quiere decir elegancia...*

$$\begin{tikzcd}
\{Objetos\} \arrow[rr, "S"] \arrow[dr, "P"'] & & \{Atributos\} \arrow[dl, shift left, "PoS^{-1}"] \\
& \{Precios\} \arrow[ur, shift left, "SoP^{-1}"] &
\end{tikzcd}$$

PoS^{-1} cuantifica cada atributo asignándole un precio. Cuanto mayor es éste, de mayor grado es el atributo que significa. Una jerarquía de objetos y atributos de la que se desprende otra entre las personas que los ostentan, generándose así las clases sociales y sus signos.

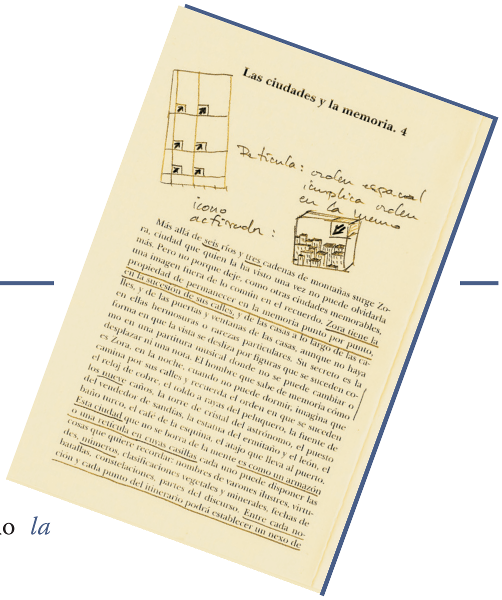
Cuanto más cara sea la banda bordada para la frente mayor será la elegancia.

De un conjunto de n elementos pueden hacerse $P(n)=2^n$ partes. Si, como ocurre en Tamara, cada uno de los n elementos del conjunto es símbolo de algo, son necesarios 2^n símbolos para auto definirse *a sí misma y a todas sus partes*.

> *... no haces sino registrar los nombres con los cuales se define a sí misma y a todas sus partes.*

Puesto que $\forall n>0$ es $2^n>n$, la tarea es imposible. ■

***Tamara**: autodefiniéndose constantemente.*


Las ciudades y la memoria. 4

Retícula: orden espacial implica orden en la memo

icono activado:

Más allá de seis ríos y tres cadenas de montañas surge Zora, ciudad que quien la ha visto una vez no puede olvidarla más. Pero no porque deje, como otras ciudades memorables, una imagen fuera de lo común en el recuerdo. Zora tiene la propiedad de permanecer en la memoria punto por punto, en la sucesión de sus calles, y de las casas a lo largo de las calles, y de las puertas y ventanas de las casas, aunque no haya en ellas hermosuras o rarezas particulares. Su secreto es la forma en que la vista se desliza por figuras que se suceden como en una partitura musical donde no se puede cambiar o desplazar ni una nota. El hombre que sabe de memoria cómo es Zora, en la noche, cuando no puede dormir, imagina que camina por sus calles y recuerda el orden en que se suceden el reloj de cobre, el toldo a rayas del peluquero, la fuente de los nueve caños, la torre de cristal del astrónomo, el puesto del vendedor de sandías, la estatua del ermitaño y el león, el baño turco, el café de la esquina, el atajo que lleva al puerto. Esta ciudad que no se borra de la mente es como un armazón o una retícula en cuyas casillas cada uno puede disponer las cosas que quiere recordar: nombres de varones ilustres, virtudes, números, clasificaciones vegetales y minerales, fechas de batallas, constelaciones, partes del discurso. Entre cada noción y cada punto del itinerario podrá establecer un nexo de

Zora

Zora

Zora tiene la propiedad de permanecer en la memoria punto por punto...

Es corriente en el lenguaje matemático caracterizar las cosas señalando la propiedad que cumplen. Así se define Zora, como si de un conjunto matemático se tratase, poseyendo *la propiedad de...*

Puesto que el registro de Zora en la mente se realiza *punto por punto*, tenemos una aplicación *inyectiva* de la ciudad en la memoria del viajero. Al recordar la ciudad, o sea, al reconstruirla mediante la inversa de esa aplicación, se corre el riesgo de confundir tantos y detallados recuerdos y reproducir una Zora distinta de la que se visitó. Suerte que Zora no se borra de la mente y se instala en ella con orden y rigor.

Esta ciudad (...) es como un armazón o una retícula en cuyas casillas cada uno puede disponer las cosas que quiere recordar.

Esa idea no es tan gratuita como parece. La esencia de una retícula está, aunque las haya de otro tipo, en el paralelismo y perpendicularidad de sus líneas. Y precisamente eso es lo que más abunda en cualquier ciudad extendida sobre la llanura. Con perpendicularidad se cruzan muchas calles, se levantan edificios, se abren puertas y ventanas, se embaldosan salones y aceras, crecen árboledas en las avenidas y camina la gente por la calle. La configuración reticular ortogonal emana de lo que el ojo percibe en Zora. Sus celdas activándose como si de archivos en el escritorio de un monitor se tratase:

Entre cada noción y cada punto del itinerario podrá establecer un nexo de afinidad o de contraste que sirva de llamada instantánea a la memoria.

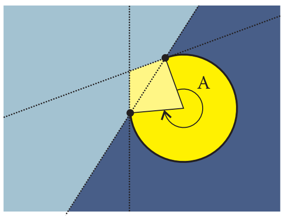
El recuerdo de Zora permanece oculto, a la espera, hasta que un día tus pensamientos vuelven a ella y se sitúan encima de una celda de la retícula. Un pequeño esfuerzo mental y... ¡clic! La memoria ha sido activada, los recuerdos recuperados, la ciudad se hace visible, estás otra vez en Zora.

***Zora** se graba en la memoria con rigor reticular icónico.*

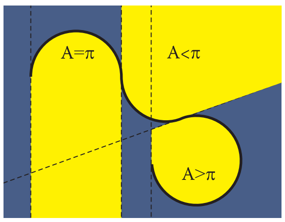
Despina

Los arcos circulares y los casquetes esféricos son como Despina, cóncavos o convexos según el lugar desde donde se contemplan. Las tangentes en los extremos de un arco circular de amplitud A dividen el plano en dos zonas, una cóncava –desde la que se percibe sólo su concavidad (interior del arco)–, y otra convexa –desde la que se percibe sólo su convexidad (exterior del arco). Si A≤π, la zona cóncava es infinita; si A>π, es finita. Además de esas dos regiones exclusivamente cóncavas o convexas, existen otras mixtas desde cuyos puntos se perciben fragmentos cóncavos y convexos del arco.

La ciudad es diferente para el que viene por tierra y para el que viene del mar.



En una curva formada por enlaces suaves (tangentes comunes en los extremos) de varios arcos circulares, las zonas exclusivamente cóncavas no se solapan.

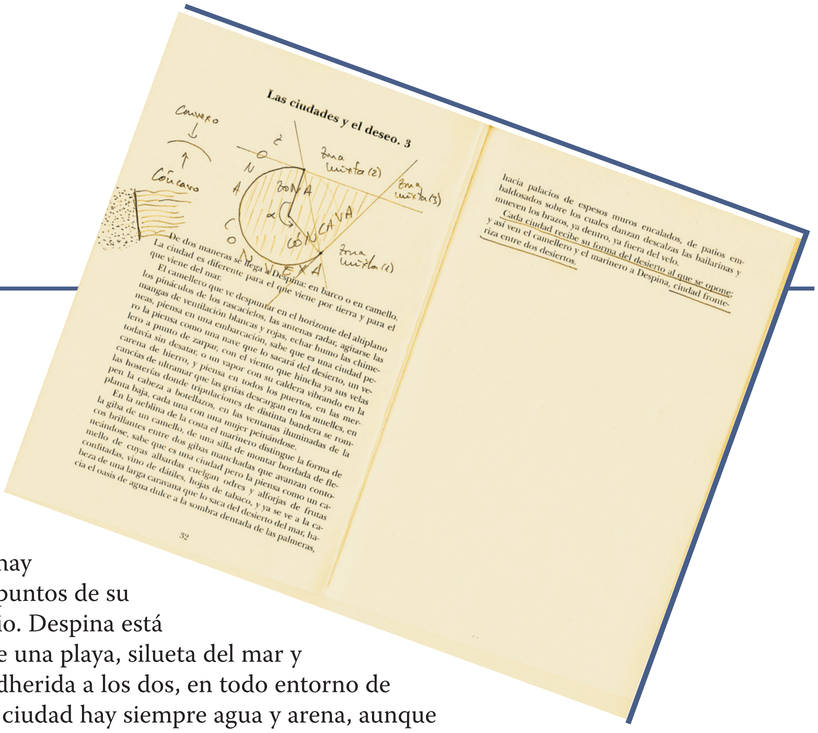


La concavidad acoge; la convexidad, rechaza; lo rectilíneo es indiferente. El marinero desembarca en la ensenada del puerto (concavidad de tierra), el camellero desmonta su dromedario en el faro del cabo (concavidad de agua).

Pero, ¿cómo son esos desiertos? Que la frontera Fr(A) de un conjunto A esté o no incluida en él determina que sea cerrado o abierto. La frontera es la silueta del conjunto y también la de su complementario. Una circunferencia es la frontera del círculo abierto que rodea y también la de la región ilimitada que se extiende fuera de ese círculo. Un círculo desprovisto de su silueta (circunferencia) es abierto; un círculo con su circunferencia, cerrado.

Cada ciudad recibe el nombre del desierto al que se opone; ... Despina, ciudad fronteriza entre dos desiertos.

Despina



Las ciudades y el deseo. 3

De dos maneras se llega a Despina: en barco o en camello. La ciudad es diferente para el que viene por tierra y para el que viene del mar.

El camellero que ve despuntar en el horizonte del altiplano los pináculos de los rascacielos, las antenas radar, agitarse las mangas de ventilación blancas y rojas, echar humo las chimeneas, piensa en una embarcación, sabe que es una ciudad pero la piensa como una nave que lo sacará del desierto, un velero a punto de zarpar, con el viento que hincha ya sus velas todavía sin desatar, o un vapor con su caldera vibrando en la carena de hierro, y piensa en todos los puertos, en las mercancías de ultramar que las grúas descargan en los muelles, en las hosterías donde tripulaciones de distinta bandera se rompen la cabeza a botellazos, en las ventanas iluminadas de la planta baja, cada una con una mujer peinándose.

En la neblina de la costa el marinero distingue la forma de la giba de un camello, de una silla de montar bordada de flecos brillantes entre dos gibas manchadas que avanzan contoneándose, sabe que es una ciudad pero la piensa como un camello de cuyas albardas cuelgan odres y alforjas de frutas confitadas, vino de dátiles, hojas de tabaco, y ya se ve a la cabeza de una larga caravana que lo saca del desierto del mar, hacia el oasis de agua dulce a la sombra dentada de las palmeras,

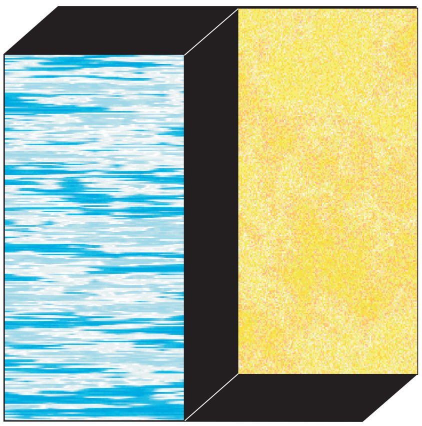
32

hacia palacios de espesos muros encalados, de patios embaldosados sobre los cuales danzan descalzas las bailarinas y mueven los brazos, ya dentro, ya fuera del velo.

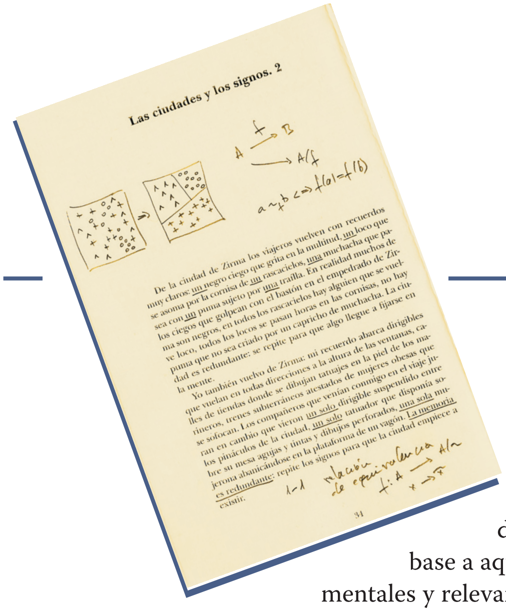
Cada ciudad recibe su forma del desierto al que se opone; y así ven el camellero y el marinero a Despina, ciudad fronteriza entre dos desiertos.

En todo círculo que rodea un punto de Fr(A) siempre hay puntos de A y puntos de su complementario. Despina está levantada sobre una playa, silueta del mar y del desierto. Adherida a los dos, en todo entorno de un punto de la ciudad hay siempre agua y arena, aunque ella misma no es ni mar ni desierto. Y precisamente por no serlo, la ciudad hace del mar y del desierto recintos abiertos. No es desierto la arena húmeda en la que dejas tus huellas. No es mar la espuma blanca que lame tus tobillos. Si en algún sitio hay que buscar la ciudad es en la arena mojada de la playa, cada uno de sus puntos rodeado de un entorno conteniendo parte de mar y parte de desierto.

La ciudad también es frontera de otras cosas. En ella lo continuo (el mar) y lo discreto (el desierto) se encuentran intercambiando sus papeles. La arena, apelmazada en una tabla lisa; el agua, rota en incontables salpicones. Pero lo mejor es dejar que el recién llegado vea la ciudad como la anhela, como un barco si viene del desierto o como un camello si viene del mar. ■



Despina: frontera entre lo continuo y lo discreto.


Las ciudades y los signos. 2

$A \xrightarrow{f} B$

$\longrightarrow A/f$

$a \sim_f b \iff f(a)=f(b)$

De la ciudad de Zirma los viajeros vuelven con recuerdos muy claros: un negro ciego que grita en la multitud, un loco que se asoma por la cornisa de un rascacielos, una muchacha que pasea con un puma sujeto por una traílla. En realidad muchos de los ciegos que golpean con el bastón en el empedrado de Zirma son negros, en todos los rascacielos hay alguien que se vuelve loco, todos los locos se pasan horas en las cornisas, no hay puma que no sea criado por un capricho de muchacha. La ciudad es redundante: se repite para que algo llegue a fijarse en la mente.

Yo también vuelvo de Zirma: mi recuerdo abarca dirigibles que vuelan en todas direcciones a la altura de las ventanas, calles de tiendas donde se dibujan tatuajes en la piel de los marineros, trenes subterráneos atestados de mujeres obesas que se sofocan. Los compañeros que venían conmigo en el viaje juran en cambio que vieron un solo dirigible suspendido entre los pináculos de la ciudad, un solo tatuador que disponía sobre su mesa agujas y tintas y dibujos perforados, una sola mujerona abanicándose en la plataforma de un vagón. La memoria es redundante: repite los signos para que la ciudad empiece a existir.

1-1 relación de equivalencia $f: A \longrightarrow A/\sim$, $x \longmapsto \bar{x}$

34

Zirma

Zirma

Con el artículo indeterminado el viajero clasifica diferencias y semejanzas. Al no poder recordar todos y cada uno de sus detalles interpreta los elementos de Zirma en base a aquellas características que él toma por fundamentales y relevantes. Sólo así asimila las reiteraciones que le ofrece la ciudad.

... un negro... un loco... un rascacielos... una muchacha... un puma... una traílla...

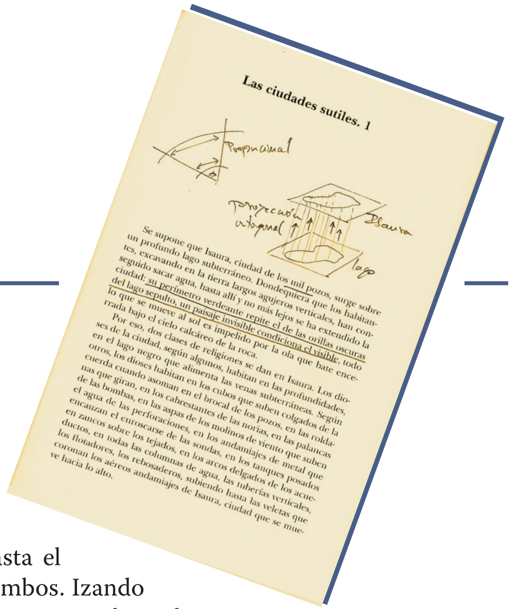
Lo que abunda y se repite, destaca. Pero no hace falta recordarlo todo, basta quedarse con un representante de cada tipo, el prototipo que aglutina los rasgos característicos de su clase. La redundancia de la ciudad ayuda a esa forja de clases que más tarde la memoria repetirá evocando un único modelo representativo de cada clase del que se desprenderán los demás. El artículo indeterminado se hace determinado: el dirigible, el tatuador, la mujerona ...

La ciudad es redundante, se repite para que algo llegue a fijarse en la mente. ... un solo dirigible ...un solo tatuador ...una sola mujerona...

La repetición fija. Lo que la memoria evoque volverá a existir. La ciudad no se desvanecerá en cuanto el viajero la abandone. Cada vez que los signos accionen su memoria reanimarán las clases de aquella relación de equivalencia que se forjó y mediante la que la ciudad revive en su mente. Una relación de equivalencia que generó una partición de Zirma, aunque no será la única. Habrá tantas como visitantes. Todas esas zirmas compartirán rasgos comunes de los que será posible elaborar una Zirma sublime. Será ésa Zirma definitiva la que posibilitará el entendimiento y la conciencia de que distintos viajeros han estado en la misma ciudad. ■

La memoria es redundante: repite los signos para que la ciudad empiece a existir.

***Zirma:** elogio de la relación de equivalencia.*


Las ciudades sutiles. 1

Proporcional

Proyección ortogonal

Isaura

lago

Se supone que Isaura, ciudad de los mil pozos, surge sobre un profundo lago subterráneo. Dondequiera que los habitantes, excavando en la tierra largos agujeros verticales, han conseguido sacar agua, hasta allí y no más lejos se ha extendido la ciudad: su perímetro verdeante repite el de las orillas oscuras del lago sepulto, un paisaje invisible condiciona el visible, todo lo que se mueve al sol es impelido por la ola que bate encerrada bajo el cielo calcáreo de la roca.

Por eso, dos clases de religiones se dan en Isaura. Los dioses de la ciudad, según algunos, habitan en las profundidades, en el lago negro que alimenta las venas subterráneas. Según otros, los dioses habitan en los cubos que suben colgados de la cuerda cuando asoman en el brocal de los pozos, en las roldanas que giran, en los cabrestantes de las norias, en las palancas de las bombas, en las aspas de los molinos de viento que suben el agua de las perforaciones, en los andamiajes de metal que encauzan el enroscarse de las sondas, en los tanques posados en zancos sobre los tejados, en los arcos delgados de los acueductos, en todas las columnas de agua, las tuberías verticales, los flotadores, los rebosaderos, subiendo hasta las veletas que coronan los aéreos andamiajes de Isaura, ciudad que se mueve hacia lo alto.

Isaura

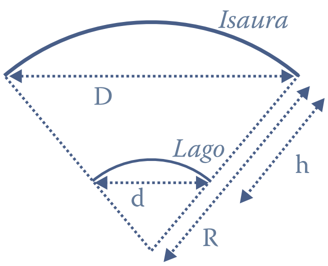
... ciudad de los mil pozos...

... su perímetro verdeante repite el de las orillas oscuras del lago sepulto, un paisaje invisible condiciona el visible...

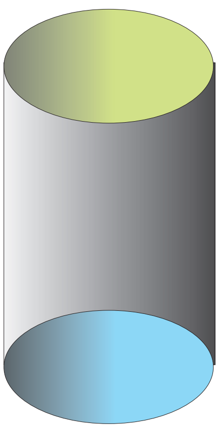
Mil, 1000, 10^3, sinónimo de gran e imprecisa cantidad.

Localmente, tanto el lago como el suelo de Isaura son llanos. Los pozos perforados hasta el lago sumergido explicitan la relación entre ambos. Izando los cubos llenos de agua los habitantes de Isaura tensan las mil verticales de una proyección ortogonal inversa, contraria a la fuerza de gravedad, y por medio de la cual la ciudad reproduce la forma del aljibe subterráneo.

Considerando la curvatura del suelo, ni el origen (el lago) ni su imagen (la ciudad) de dicha correspondencia son llanos, sino que se extienden sobre esferas de distinto radio. La proyección del primero sobre la segunda se amplía en una homotecia de proporción cuantificable. Llamando d a la cuerda mayor del lago, h a la profundidad del pozo excavado, D a la cuerda mayor de Isaura y R al radio de la Tierra, podemos averiguar en qué medida replica Isaura las dimensiones del lago *sepulto*.



$$\frac{d}{D}=\frac{R-h}{R}\Rightarrow D=\frac{Rd}{R-h}$$ ■



***Isaura**: proyección ortogonal anti gravitatoria.*

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

Un *logogrifo* consiste en adivinar, a partir de una palabra dada, otras formadas con todas o algunas de sus letras. Las posibles palabras, con o sin sentido, que pueden formarse recomponiendo todas o algunas de las letras del término *ciudad* son:

...las figuras evocadas por los logogrifos del veneciano.

N.º de letras	Número de letras d en la palabra			Total
	0	1	2	
1	4	1	-	*5*
2	$4\cdot3$	$2\cdot4$	1	*21*
3	$4\cdot3\cdot2$	$\binom{3}{1}\cdot4\cdot3$	$\binom{3}{2}\cdot4$	*72*
4	$\binom{4}{0}\cdot4!$	$\binom{4}{1}\cdot4\cdot3\cdot2$	$\binom{4}{2}\cdot4\cdot3$	*192*
5	-	$\binom{5}{1}\cdot4!$	$\binom{5}{2}\cdot4\cdot3\cdot2$	*360*
6	-	-	$\binom{6}{2}\cdot4!=\frac{6!}{2!}$	*360*
				1010

Algunas tienen sentido: *cuidad*, *acudid*, *duda*. Con el término *ciudades*, además de incluir los de *ciudad*, tenemos más posibilidades, algunas sugerentes: *suciedad*, *descuida*, *seducida*, *sucedida*, *cedidas*, *sacudid*, *acudes*, *escudad*, *ideas*.

Cada emblema representa una parte del imperio. Conocerlos a todos y dominar las partes que representan transformará a Kublai Jan en representante único del imperio que domina. No es que Kublai sea meta-emblema de emblemas, sino emblema del nuevo todo, del nuevo conjunto de conjuntos, que él mismo crea reuniendo las partes P_k (k=1, ..., n) que conforman su imperio I:

$$I = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$$

El día que conozca todos los emblemas –preguntó a Marco– *¿conseguiré al fin poseer mi imperio?*
Y el veneciano:
–Sire, no lo creas: ese día serás tú mismo emblema entre los emblemas.

Y aunque no sea emblema de emblemas, como emblema que es, pertenece al conjunto de los emblemas. Kublai es un *emblema entre los emblemas*. ■

SUMA 54
Febrero 2007, pp. 109-122

Mi biblioteca particular

Santiago Fernández Fernández
Asesor de matemáticas del Berritzegune de Abando-Bilbao

Cuando acepté el compromiso de escribir sobre los libros, escritos, lecturas... que más me han influenciado no era muy consciente de la dificultad que ello conllevaba. Hay que elegir unos libros, descartar otros, pero así es la vida.

La historia del primer libro es más o menos la que a continuación paso a detallar. En mi pueblo existía, y aún funciona, una única papelería con un gran escaparate que yo siempre miraba con atención. Uno de los días el librero puso a la venta un pequeño libro titulado *Matemáticas* (1969) de la editorial Time-Life. Por aquel entonces, tenía 15 años y ya me rondaba por la cabeza el interés y la pasión por las matemáticas. Inmediatamente me metí en la tienda y tomé el libro en mis manos.

Su título anunciaba contenidos matemáticos, que para mí se ceñían a situaciones referidas a la geometría, aritmética y álgebra, pero al abrirlo –oh, sorpresa– me encontré con multitud de figuras, fotos, dibujos y un índice desconcertante:

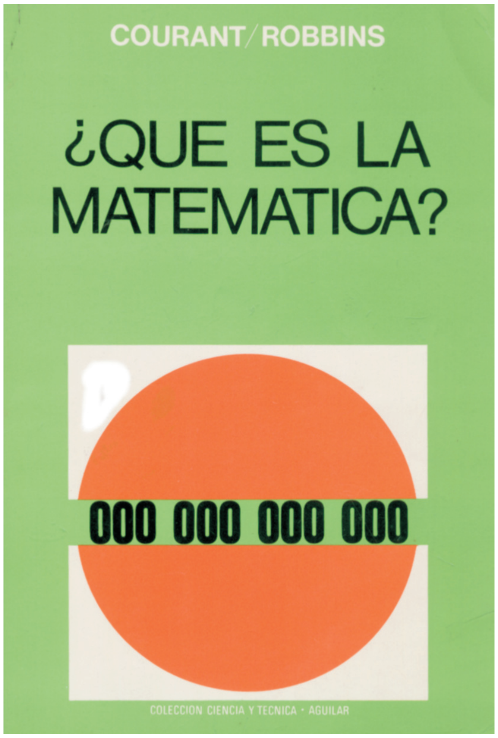
1. Los números: un largo recorrido desde uno hasta cero
2. El modélico pensamiento de los antiguos griegos
3. Un alfabeto para descifrar lo desconocido
4. Un enlace feliz entre curvas y cantidades

Fernando Corbalán (coordinador de la sección)
medios.suma@fespm.org

5. El dominio de los misterios del movimiento
6. El cálculo de las posibilidades en un mundo inseguro
7. Un paso lógico en el abrupto y azulado horizonte
8. Las matemáticas en la actualidad: hechos, dudas, sueños

Lo compré sin dudarlo y la verdad es que fue un gran acierto porque su visión me abrió los ojos a una ciencia desconocida.

En esencia el libro trata de realizar un recorrido histórico por las matemáticas, haciendo especial hincapié en las personas que participaron en su creación. Describe el ascenso de las matemáticas desde el simple sistema de contar hasta estudios más abstractos como la topología y los números transfinitos. Es un libro muy bien desarrollado e increíblemente cautivador. En su día algunas cosas me resultaban fuera de lugar, mientras que en estos momentos me parecen magistrales, por ejemplo el dibujo correspondiente a sacarse un chaleco sin tener que quitarse la chaqueta. Ahora sé que es un asunto que tiene que ver con la topología.



¿Qué es la matemática?, Aguilar (1979), R. Courant y H. Robbins

Este libro tiene un lugar preferente en mi biblioteca; está bastante deteriorado, casi descuadernado, con muchas hojas sueltas… pero le tengo un gran cariño. Aunque su autor, David Bergamini, sigue siendo para mí un personaje desconocido, siempre le estaré agradecido por la elección de los temas desarrollados y por el tratamiento de los mismos. Hace unos días me he enterado que todo el libro se puede descargar en la siguiente dirección de Internet:

http://fisicarecreativa.net/matematicalife/capitulo01.html

El segundo libro importante en mi formación intelectual fue el titulado *¿Qué es la matemática*?, de la editorial Aguilar (1979), escrito por R. Courant y H. Robbins.

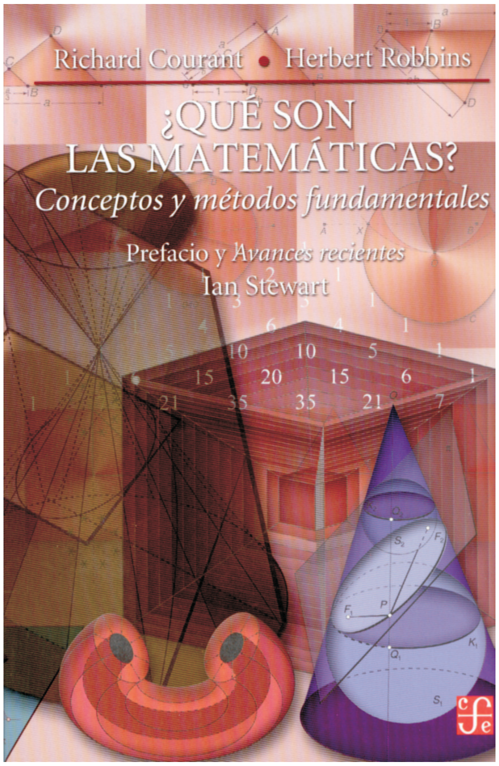
Me encontré con este libro por casualidad. Lo que me cautivó quizás fue el título. Creo recordar que en la misma librería leí trozos de la introducción y me percaté de que estaba ante un libro singular, diferente y desde luego muy prometedor. En muchos momentos –y también ahora– me he preguntado qué son las matemáticas. Quería tener una visión de conjunto de los métodos y temas que abarcaban, entender el porqué de las definiciones y hacia dónde caminaban los desarrollos formales, cuáles eran los grandes núcleos de las matemáticas, quienes eran los grandes personajes de su historia….

En la introducción ya enuncia, de manera muy precisa, la respuesta a la pregunta que se hace en el título.

> La matemática, como una expresión de la mente humana, refleja la voluntad activa, la razón contemplativa y el deseo de perfección estética. Sus elementos básicos son: lógica e intuición, análisis y construcción, generalidad y particularidad. Aunque diversas tradiciones han destacado aspectos diferentes, es únicamente el juego de estas fuerzas opuestas y la lucha por su síntesis lo que constituye la vida, la utilidad y el supremo valor de la ciencia matemática.

Este párrafo hace referencia a aspectos de las matemáticas que desgraciadamente se encuentran, en muchas ocasiones, fuera de nuestras aulas, como son la belleza, la lógica, la intuición, etc. El libro no es únicamente un tratado de carácter epistemológico sino que también tiene unas recomendaciones muy jugosas desde el punto de vista pedagógico. En este sentido, uno de sus autores, el célebre matemático polaco Richard Courant, reflexiona respecto a la orientación que deben tener las matemáticas y se lamenta de que estén per-

Parte de la responsabilidad [del lugar actual de las matemáticas]*recae en la enseñanza [...] que ha degenerado hacia el adiestramiento en técnicas de cálculo que no conducen a la comprensión de los conceptos ni ayudan a una mayor independencia intelectual.*



También a una investigación muy especializada, abstracta y carente de conexiones con otros campos del saber y con las aplicaciones.

¿Qué son las matemáticas?
R. Courant y H. Robbins,
con prefacio y avances recientes de Ian Stewart,
Fondo de Cultura Económica, 2002

diendo su lugar dentro de la formación de las personas cultas. Cuando analiza las causas comenta lo siguiente:

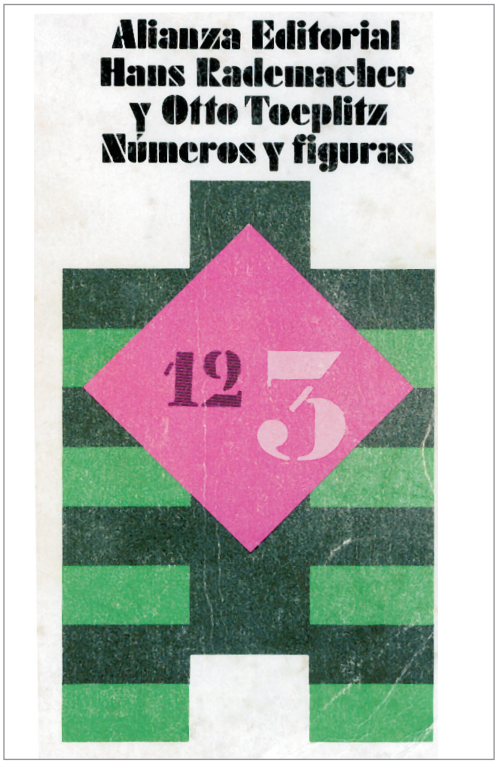
> Parte de la responsabilidad recae en la enseñanza de las matemáticas que ha degenerado hacia el adiestramiento en técnicas de cálculo que no conducen a la comprensión de los conceptos ni ayudan a una mayor independencia intelectual. También a una investigación muy especializada, abstracta y carente de conexiones con otros campos del saber y con las aplicaciones.

Es notable la actualidad que tienen estos comentarios; parece como si los hubiese redactado un matemático de nuestros días, a pesar de que el libro fue escrito hace más de sesenta años.

Todos los capítulos evitan hacer una exposición fría y descontextualizada de los contenidos matemáticos. El punto de partida siempre es un problema y a través de su análisis y de la búsqueda de soluciones se llega a la formulación precisa de definiciones o a los procedimientos generales de resolución. Los autores hacen siempre referencia a los personajes que históricamente se enfrentaron a la situación y de esta manera los teoremas matemáticos adquieren un rostro, aspecto este, que muchas veces se echa en falta en nuestras clases de matemáticas.

Hace pocos años ha tenido lugar una nueva reedición del libro a cargo del ilustre profesor norteamericano lan Stewart, quién acomete la puesta al día de la obra incluyendo un nuevo capítulo: *Desarrollos recientes*. Este contiene los comentarios que actualizan los temas tratados en *¿Qué es la matemática?* En esta línea no podían faltar las demostraciones recientes del teorema de los cuatro colores, el último teorema de Fermat, los fractales, la hipótesis del continuo, cuestiones de análisis no estandar… y un jugoso apéndice con problemas y ejercicios suplementarios. Como apostilla el matemático norteamericano I. Stewart en su prólogo, estamos ante una obra única. No dejen de leerla.

Mi tercera lectura importante, en relación con las matemáticas, fue un pequeño libro titulado *Números y Figuras,* firmado por Otto Toepliz y Hans Rademacher. Es, sin duda, uno de los mejores libros que he leído sobre aspectos matemáticos. Una auténtica joya de la divulgación científica. Con pocos conocimientos matemáticos el lector puede disfrutar de pequeños ensayos que versan sobre temas matemáticos escogidos y muy sugerentes. Por ejemplo: la serie de números primos, problemas de máximos, los números irracionales, el triángulo órtico, la teoría de conjuntos, el problema de los



Números y Figuras,
Otto Toeplitz y Hans Rademacher,
Alianza Editorial, 1970

cuatro colores, los poliedros regulares, los números pitagóricos y el teorema de Fermat, números perfectos, fracciones decimales periódicas, curvas de anchura constante, y muchos más.

Las ideas centrales de la geometría, el álgebra y la aritmética son expuestas, de manera magistral, combinando el rigor y la amenidad; a través de problemas de todo tipo, los lectores preparan el camino hacia estudios matemáticos posteriores. Lo he leído en multitud de ocasiones y siempre me ha impresionado la facilidad y profundidad en el tratamiento de los temas elegidos. Les animo a que lo lean.

En otro orden de lecturas, uno de los libros que más me ha impresionado y cautivado, tanto por su contenido como por su estilo, conciso y certero, es el titulado *La oveja negra (y demás fábulas)* de 1969, del escritor guatemalteco Augusto Monterroso. En sus fábulas todo está condensado y medido. Hay un fino uso del humor y la ironía. Tiene la rara virtud de sintetizar los pensamientos a la mínima expresión, consigue dar con la palabra adecuada en cada frase; el célebre escritor americano Isaac Asimov escribió a propósito de *La oveja negra:*

> Estos pequeños textos, en apariencia inofensivos, muerden si uno se acerca a ellos sin la debida cautela y dejan cicatrices, y precisamente por eso son provechosos. Después de leer *El mono que quería ser escritor satírico*, jamás volveré a ser el mismo.

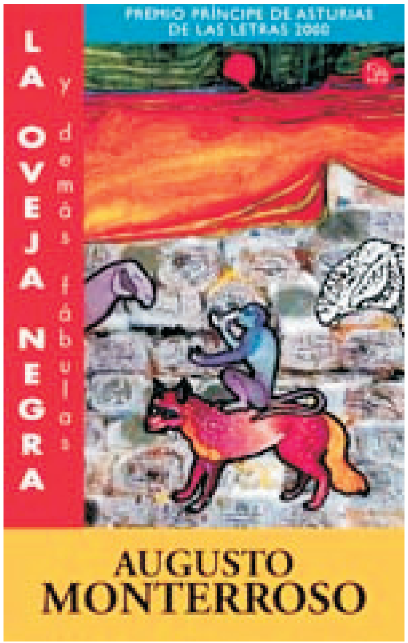
En la primera edición de las fábulas, el escritor colombiano García Márquez advertía en la solapa del libro: *Este libro hay que leerlo manos arriba: su peligrosidad se funda en la sabiduría solapada y la belleza mortífera de la falta de seriedad.*

Una pequeña muestra de las pequeñas narraciones y fábulas incluidas en el libro *la Oveja Negra* es la siguiente:

Aquiles y la tortuga

> Por fin, según el cable, la semana pasada la Tortuga llegó a la meta. En rueda de prensa declaró modestamente que siempre temió perder, pues su contrincante le pisó todo el tiempo los talones. En efecto, una diezmiltrillonésima de segundo después, como una flecha y maldiciendo a Zenón de Elea, llegó Aquiles.

¿Quién de nosotros no ha pensado alguna vez en *La tortuga* y *Aquiles*? Monterroso hace una recreación de la célebre aporía del infinito de Zenón de Elea, donde la tortuga, animal muy lento, vence a Aquiles el de los pies veloces. Aquí la fábula se torna en una burla consecuencia inmediata de la parodia. Dado que Aquiles le pisa los talones a la tortuga y no viceversa, el tiempo por el que es vencido Aquiles es escandalosamente irrisorio.



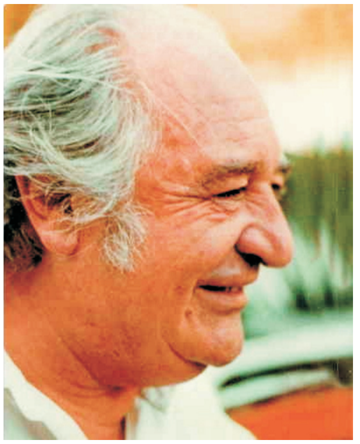
La Oveja negra y demás fábulas
Augusto Monterroso
Editorial Alfaguara bolsillo, 1998

El Rayo que cayó dos veces en el mismo sitio

> Hubo una vez un Rayo que cayó dos veces en el mismo sitio; pero encontró que ya la primera había hecho suficiente daño, que ya no era necesario, y se deprimió mucho.

He empleado estos textos en numerosas ocasiones y en todas ellas ha resultado que las personas desconocedoras de la obra de Monterroso han quedado maravilladas por la claridad y profundidad de sus fábulas. Para finalizar, no me resisto no a incluir en estas páginas un pensamiento suyo:

> La vida no es un ensayo, aunque tratemos muchas cosas; no es un cuento, aunque inventemos muchas cosas; no es un poema, aunque soñemos muchas cosas. El ensayo del cuento del poema de la vida es un movimiento perpetuo; eso es, un movimiento perpetuo.



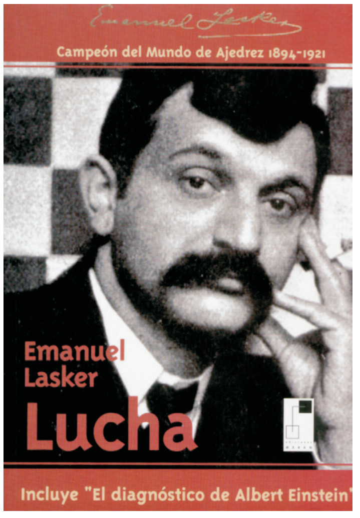
Gabriel Celaya, 1911-1991

Desde siempre me han interesado más las lecturas cortas que las largas. Quizás por este motivo he sido un lector de poesías. La poesía es una pequeña sinfonía de palabras que nos moviliza rápidamente los sentimientos. El poeta vasco Gabriel Celaya , sin duda mi preferido, ha sido capaz de expresar bellas ideas mediante magníficas poesías, que van más allá de la métrica, ¿quién no se emociona ante tan magnífica poesía? ¡Cuánta verdad tiene esa poesía!

Educar

Educar es lo mismo
que poner motor a una barca...
hay que medir, pesar, equilibrar...
... y poner todo en marcha.
Para eso,
uno tiene que llevar en el alma
un poco de marino...
un poco de pirata...
un poco de poeta...
y un kilo y medio de paciencia
concentrada.
Pero es consolador soñar
mientras uno trabaja,
que ese barco, ese niño
irá muy lejos por el agua.
Soñar que ese navío
llevará nuestra carga de palabras
hacia puertos distantes,
hacia islas lejanas.
Soñar que cuando un día
esté durmiendo nuestra propia barca,
en barcos nuevos seguirá
nuestra bandera
enarbolada.

Grabriel Celaya

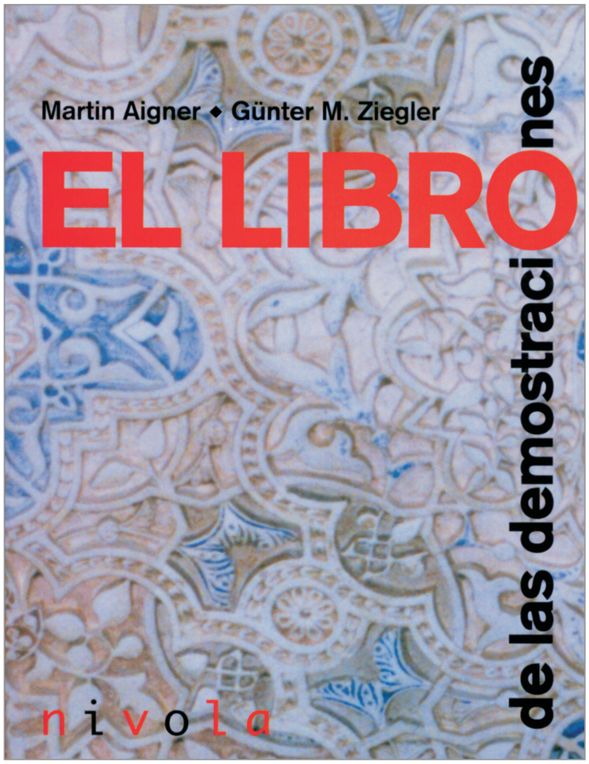


Lucha,
Emanuel Lasker,
Ediciones Merán, 2003

Además de las matemáticas y la poesía me ha interesado mucho el ajedrez y todos los aspectos relacionados con él. Entre los variados libros de ajedrez que han caído en mis manos hay uno muy singular y seguramente desconocido para la mayoría de las personas, sean o no ajedrecistas. Su autor es el campeón mundial E. Lasker, que además de escribir sobre tan bello deporte obtuvo un doctorado en matemáticas, escribió una obra de teatro e incluso ejerció como filósofo en una obra titulada *Lucha.* Es una obra que reflexiona sobre la vida y su lucha permanente. Para Lasker la teoría del combate (la lucha) contornea el verde árbol de la vida. El libro saca a la luz algunos de los descubrimientos que el célebre ajedrecista realizó tras más de quince años de arduo trabajo. Son principios básicos de orden estratégico y llenos de significado.

En *Lucha* expresa un pensamiento profundo y que seguramente interesará a personas preocupadas por la innovación. Dice Lasker *las palabras viajan en el cerebro a través de cauces fijos, así quien quiera expresar nuevas ideas se ve obligado a acuñar nuevos vocablos.*

De acuerdo a esta afirmación Lasker inventa unos neologismos, que necesariamente hemos de familiarizarnos, en los que va apoyándose para transladarnos un enorme caudal de ideas.



El Libro de las demostraciones,
Martin Aigner y Günter M. Ziegler,
Editorial Nivola, 2005

En estos momentos estoy leyendo un magnífico libro titulado *El libro de las demostraciones* de la Editorial Nivola (2005). Detrás hay una historia muy singular. Se cuenta que cuando el prolífico y genial matemático húngaro Paul Erdös (1913-1996) encontraba una demostración bonita, expresaba que ella debía figurar en *El Libro* en el que Dios recopilaba las demostraciones perfectas de los teoremas matemáticos. Durante varios años persiguió la idea de escribir tal *Libro* con las demostraciones que a él le habían gustado más. De hecho, estaba previsto que se publicara en marzo de 1998, año en el que Erdös cumpliría ochenta y cinco años, pero su inesperada muerte en el verano de 1996 truncó su magnífico proyecto.

Los profesores alemanes Martin Aigner y Günter M. Ziegler pertenecientes a las Universidades de Freie Universität Berlin y Technische Universität Berlín, respectivamente, tuvieron la osadía de recoger el reto lanzado por Erdös y desarrollarlo, incluyendo muchos de los resultados que el mismo Erdös ya había seleccionado.

A lo largo del libro se ofrece una colección de magníficos ejemplos seleccionados con la esperanza de compartir con los lectores el entusiasmo y la pasión por las matemáticas. En general son ideas brillantes y maneras geniales de acercarse a un problema, o bonitas y precisas observaciones.

La selección de los temas está muy influida por Paul Erdös. Una buena parte de los temas fueron sugeridos por él mismo, y además muchas de las demostraciones llevan su firma; otras fueron iniciadas gracias a su suprema cualidad para formular la pregunta precisa o dar con la conjetura adecuada. De modo que, en gran parte, este libro refleja su punto de vista respecto a lo que debería ser una demostración de *El Libro*.

El escrito está dividido en cinco secciones: Teoría de números, Geometría, Análisis, Combinatoria y Teoría de Grafos.

Cada una de las secciones presenta una serie de temas que son verdaderas joyas, tanto por la temática como por el tratamiento dado. Algunos de los treinta y cinco temas seleccionados son los siguientes: seis demostraciones de la infinidad de los números primos, el postulado de Bertrand, representación de enteros como suma de dos cuadrados, algunos números irracionales, el tercer problema de Hilbert, la conjetura de Borsuk, tres aplicaciones de la fórmula de Euler, el teorema de rigidez de Cauchy, la aguja de Bufón, la hipótesis del continuo, maravillosas desigualdades, un teorema de Pòlya sobre polinomios, la cotangente y el truco de Herglotz, el principio del palomar, barajando el mazo, la fórmula de Cayley, el problema de Dinitz, el teorema de Turán, comunicar sin errores, la probabilidad...

Sin duda este libro se convertirá en un clásico de la divulgación matemática. El texto es ágil pero al mismo tiempo profundo. Su contenido puede ser leído como una serie de ensayos independientes y sin embargo, no hay duda de que existe un hilo conductor que le da una gran unidad y coherencia.

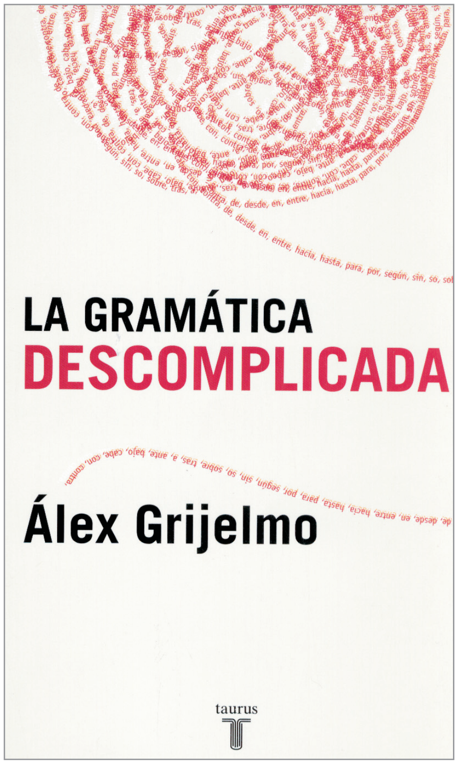
El último libro que he empezado a leer no tiene nada que ver con las matemáticas; es un libro de gramática, pero no es una gramática al uso. Como dice su autor, el periodista Alex Grijelmo, el libro está destinado a pensar con la gramática, más que a memorizarla. Comenta Alex:

> El lenguaje es el pensamiento, y conocer la estructura de nuestro lenguaje equivale a conocer cómo se han estructurado nuestras razones. La gramática enseña a razonar y a exponer mejor las ideas, pero sobre todo a generarlas. Y ello nos hace más capaces de convencer a los demás.

Su título, *La gramática descomplicada*, ofrece un nuevo estilo de explicar esa rama de la lingüística que tiene por objeto el estudio de la forma y composición de las palabras, así como de su interrelación dentro de la oración o de la frase. Es un libro muy ameno y de fácil lectura. Hace un repaso general de la gramática y de sus normas, pero con estilo desenfadado e inteligente. Un libro muy recomendable.

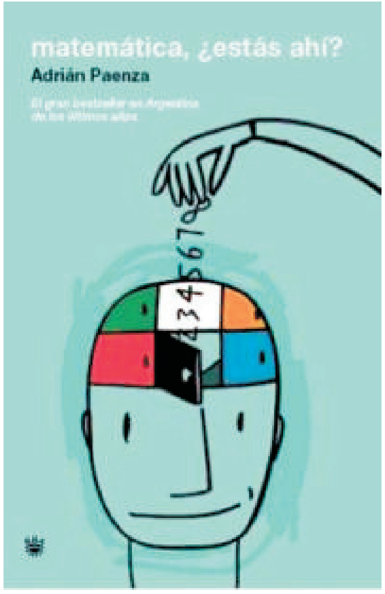
Es un libro muy ameno y de fácil lectura. Hace un repaso general de la gramática y de sus normas, pero con estilo desenfadado e inteligente. Un libro muy recomendable.

Curiosamente las matemáticas formales son como la ortografía y la gramática; tienen mucho que ver con la aplicación correcta de unos símbolos y unas reglas. Pero no hay que olvidar que las mejores matemáticas deberían ser como la literatura: la historia narrada ha de tener vida y hacernos partícipes de ella, tanto intelectual como emocionalmente.



La gramática descomplicada,
Alex Grijelmo,
Editorial Taurus, 2006

Escaparate:
1 matemática, ¿estás ahí?



MATEMÁTICA, ¿ESTÁS AHÍ?
Adrián Paenza,
RBA, Barcelona, 2006
ISBN: 84-7871791-9

En la portada de este libro, bajo el título y el nombre del autor, figura el comentario *el gran bestseller en Argentina de los últimos años*. Como es un dato real (más de 100.000 ejemplares vendidos en un año y 50 semanas entre los libros de no ficción más vendidos), antes de felicitar al autor por su éxito de ventas, debemos felicitar a los argentinos por su demostración de interés o de cultura científica por la Matemática. Que un libro de contenido matemático, no novelado, entre en las listas de *bestsellers* es un éxito del autor, pero también un signo de interés cultural y científico de la sociedad que lo compra y lo lee. Algunos lo vemos con sana envidia, aunque sea con modestia, aquí también parecemos querer imitar a los porteños, ya que en tres meses, de octubre a diciembre de 2006, ya lleva dos ediciones.

Adrián Paenza es doctor en Matemática por la universidad de Buenos Aires y, además de ejercer de profesor de Matemáticas, es periodista deportivo y político, lo cual es reconocible en algunos pasajes del libro. Cabe citar que el libro es el primero que escribe el autor (pero ya en Argentina tiene una continuación: *matemática, ¿estás ahí? Episodio 2*. Y es una persona con ideas claras. A pesar de su extensión, no me resisto a adjuntar su respuesta a *¿Cómo debiera ser el abordaje de la enseñanza en el campo de las matemáticas en la escuela?,* en una entrevista periodística:

> La escuela, como tal, debe ser repensada y actualizada a las condiciones del siglo XXI. Con todo, y en esto lamento repetir lo que digo sistemáticamente, la matemática no puede ser disfrutada por los alumnos, sencillamente porque quienes la difundimos terminamos dando respuestas a preguntas que la gente no se hizo. Y eso es, inexorablemente, muy aburrido. Estar sentado frente a una persona que responde a lo que yo no me pregunté es, cuanto menos, un sufrimiento. Y encima, existe el poder que tiene el docente que no le permite al alumno que se levante y se

Fernando Fouz

> retire. Por eso creo que deberíamos empezar por reformular qué queremos enseñar, por qué lo queremos enseñar, qué problemas intentamos resolver y cuáles son las curiosidades de los chicos que vamos a ayudar a evacuar. La vida es al revés: uno primero tiene problemas, luego trata de resolverlos, y finalmente, cuando advierte que ciertos patrones se repiten, formula una teoría. Si el proceso frente al estudiante es al revés, o sea, primero le explicamos la teoría y después le fabricamos artificialmente un problema que él no tiene, es posible que no le interese. Ahora, el día en que comprendamos que la verdadera tarea de un docente es generar preguntas y saber descubrir las curiosidades que tiene un chico, entonces habremos dado un salto cualitativo muy importante para vencer la barrera docente-alumno (en matemáticas al menos).

Se percibe un cierto eco de Puig Adam.

Haciendo un repaso de los contenidos, distribuidos en seis capítulos, el último de los cuales son las soluciones a los problemas que plantea en los cinco primeros, encontramos entre otros los siguientes temas: números, probabilidades, personajes con sus trabajos y anécdotas, problemas de diversos tipos, pasando por curiosidades sobre temas variados del entorno matemático. Los contenidos resultan conocidos para la mayoría de las personas que se mueven en el mundo de las Matemáticas, especialmente de la docencia, ya que muchos de los problemas aparecen en materiales de semanarios o talleres de Matemáticas. Sin embargo, estos contenidos están muy bien elegidos y explicados, quizás por su experiencia en los medios, lo que permite que puedan ser comprendidos por un público *menos matemático* y tal vez en ello radique el éxito del libro.

El día en que comprendamos que la verdadera tarea de un docente es generar preguntas y saber descubrir las curiosidades que tiene un chico, entonces habremos dado un salto cualitativo muy importante.

El primer capítulo, dedicado a los *Números*, lo inicia presentándonos ejemplos de números muy grandes como: números de átomos del universo, equivalencias de la unidad año luz, etc., tipos de números: irracionales, trascendentes (e), números primos y sus características o tipos (gemelos), para terminar hablando del infinito y de uno de sus estudiosos: el matemático, ruso de nacimiento, Cantor. Es quizás las reflexiones sobre el infinito lo que hace especialmente interesante este capítulo.

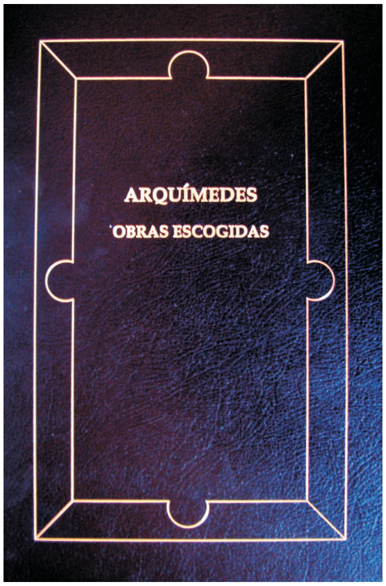
Es en el segundo capítulo, dedicado a *Personajes*, donde presenta a personas relacionadas con las Matemáticas, citando diversas anécdotas. Me parece interesante resaltar la que relaciona a Fleming con Winston Churchill. Según parece, siendo un niño Fleming, su padre salvó de morir ahogado en un pantano a un muchacho que resultó ser Churchill. El padre de Churchill, en muestra de agradecimiento, le recompensó pagándole la misma educación escolar que recibió su hijo. Sin saberlo había hecho una inversión que salvaría de nuevo la vida de su hijo ya que, pasados los años, Churchill enfermó por causa de una neumonía que fue curada gracias a la penicilina, descubierta y sintetizada por Fleming. Llama la atención que esta anécdota, que implica a dos personajes importantes del siglo XX, no sea más conocida. De hecho he comprobado que era desconocida por todos los compañeros a los que se la he contado. Otros personajes que aparecen son Bertrand Russell, con sus conocidas paradojas de conjuntos, Pitágoras y su teorema, Gauss y su famosa anécdota en la escuela referida a la suma de los cien primeros números naturales, Golbach y su conjetura de descomposición de números pares en suma de dos primos y Ramanujan con su extraordinaria capacidad para los cálculos numéricos.

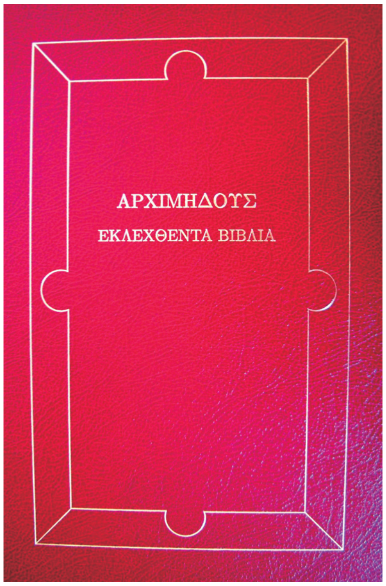
El capítulo dedicado a *Probabilidad y Estimaciones* presenta diversas experiencias relacionadas con la combinatoria y cálculo de probabilidades. Me parecen interesantes los apartados dedicados a la *estimación de peces en una laguna* y *el principio del palomar*, muy didácticos para un público general, no necesariamente matemático. En el capítulo hay otros apartados interesantes como el cálculo de las matrículas de coches, *patentes* en la terminología argentina, coincidencia de cumpleaños o estimación del volumen que ocuparía la sangre de todos los habitantes de la tierra. Este problema me recordó que una vez me propusieron un problema parecido, pero de manera más macabra, ya que se trataba de estimar, si todas las personas de la tierra muriésemos, que volumen ocuparían todos nuestros cadáveres.

En el capítulo de problemas se señalan algunos conocidos en la comunidad matemática. Quizás cabe citar alguno de ellos como el de la *paradoja aparente* de que en vez de crecer la población mundial, matemáticamente, está disminuyendo ya que si seguimos la línea ascendente tenemos dos progenitores, 4 abuelos, 8 tatarabuelos y así sucesivamente... Llegado este punto me gustaría señalar que, en todo divertido y jovial, el escritor español Max Aub escribió algo parecido en 1968, como felicitación para sus amigos. En el número 11 de la revista *Sigma* (enero de 1992), se publicó una reseña del periodista bilbaíno Luciano Rincón, en la que aparece la citada felicitación con sus comentarios y cálculos correspondientes.

En el último capítulo, referido a *Reflexiones y Curiosidades,* creo que se debe destacar y reflexionar sobre el caso titulado *Votaciones: ¿Son realmente la manera más justa de decidir?* En él se presenta cómo una votación democrática puede dar lugar a distintos resultados según como se realice el sistema de votación. Es realmente interesante su análisis. Se acaba el capítulo con una serie de observaciones que nos invitan a reflexionar. En definitiva, tenemos un excelente libro de lectura. ■

Escaparate:
2 Arquímedes. Obras escogidas





Arquimedes. Obras escogidas
Edición con facsímile del Manuscrito X-I-14 de la Biblioteca de El Escorial
Editor, Antonio J. Durán
Traducción, Paloma Ortiz y Susana Mimbrera
Notas a la traducción, P. M. González Urbaneja,
Estudios preliminares de Carlos García Gual,
Antonio J. Durán y Pedro M. González Urbaneja,
Diseño y maquetación, Juan Luis Varona,
Real Sociedad Matemática Española, International,
Congress of Mathematicians (ICM06),
Patrimonio Nacional
Madrid, 2006
ISBN, 84-923818-2-5

Arquímedes es uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos, tanto por la magnitud de su contribución al patrimonio matemático de la humanidad como por la genialidad de sus métodos. Ya que el *método mecánico* de investigación de *El Método* de Arquímedes apunta históricamente hacia los indivisibles e infinitesimales de las técnicas de cuadratura del siglo XVII que condujeron al descubrimiento del Cálculo Infinitesimal por Newton y Leibniz, mientras que el *método demostrativo de exhaución* apunta hacia las técnicas aritméticas de los límites que fundamentan el Análisis moderno en el siglo XIX, la conjunción de ambos métodos, uno heurístico y empírico y otro riguroso y apodíctico, sitúan a Arquímedes en las raíces históricas del Cálculo Integral. El más relevante encuentro de miembros de la comunidad matemática mundial, *el Congreso Internacional de matemáticos* de Madrid (ICM-06), ha querido homenajear a uno de sus más ilustres miembros a lo largo de la historia, Arquímedes, con una cuidada edición crítica con facsímile de algunas de sus obras imperecederas, realizada a partir de unos manuscritos de la Biblioteca de El Escorial.

Pedro Miguel González Urbaneja

En 1906, hace ahora cien años, el brillante helenista e historiador científico J.L.Heiberg, con gran perspicacia y sagacidad, descubre en Constantinopla, en novelescas circunstancias, y exhuma, tras una formidable labor de arqueología matemática, un palimpsesto que contenía la obra perdida de Arquímedes *El Método relativo a los teoremas mecánicos* (*El Método*), un tratado singular en el que el científico de Siracusa revela a la comunidad matemática alejandrina, en carta dirigida a Eratóstenes, el método mecánico de investigación que utilizaba en sus descubrimientos y que había omitido en todos los restantes escritos científicos. Al contener la vía heurística de la investigación geométrica de Arquímedes, previa a la demostración por exhaución, el hallazgo de Heiberg ha sido, quizá, el suceso más importante de los últimos tiempos para el conocimiento de la Geometría griega [González Urbaneja, 2006: 715].

Arquímedes es el científico griego más citado a lo largo de la historia. Una copiosa tradición legendaria, inmortalizada por la imaginación épica de los más egregios literatos greco-latinos y en parte reivindicada por numerosos escritores y científicos a partir del Renacimiento, elevó la figura de Arquímedes hasta la más alta cima del genio e ingenio humanos, entre el mito y la realidad, magnificados aún más, si cabe, en todos los tiempos, por un generoso despliegue de iconografía arquimediana, que ha embellecido al personaje hasta cotas casi hagiográficas.

Entre todos los trabajos que se refieren a las disciplinas matemáticas, parece que el primer lugar puede ser reivindicado por los descubrimientos de Arquímedes, que confunden a las almas por el milagro de su sutilidad.

Torricelli, *Op. geometrica, Florencia, 1644*

No obstante, el retrato que más interesa es el del pensamiento de Arquímedes, plasmado en el sello inmarcesible de sus escritos geométricos, algo que sobrevivirá mientras haya mentes que sigan abriéndose paso hacia el descubrimiento de la verdad matemática persiguiendo encontrar la demostración de la propia verdad. Pero allende el romanticismo que la Literatura ha impregnado a la figura de Arquímedes, interesa sobremanera a la Historia de la Ciencia y sobre todo a la Historia de la Matemática, su ingente contribución a la magnificación del acervo matemático de su época, en una triple vertiente: a) la propia ampliación de los conocimientos euclídeos, b) la consolidación del procedimiento demostrativo y c) la aplicación de una eficiente metodología nueva en el descubrimiento matemático. Al aunar el rigor intelectual con la orientación natural de la intuición sensorial, Arquímedes trasciende los esquemas del idealismo platónico-euclídeo que desdeñaba las aplicaciones prácticas de la Matemática, vincula la investigación teórica de la especulación abstracta con las realizaciones técnicas nacidas de la necesidad de resolver problemas concretos y desarrolla una concepción matemático-experimental que inaugura una tradición científica que retomada por Leonardo y Galileo asienta los cimientos de la Revolución científica del siglo XVII, y más allá de ésta, crea la base primigenia de la esencia de la ciencia moderna como núcleo incipiente de nuestra civilización tecnológica. Arquímedes es uno de los egregios titanes sobre cuyo espíritu fecundo se alzaron otros gigantes para vislumbrar la senda que conduciría hacia el extraordinario progreso de nuestra época.

No debe extrañar por tanto que Arquímedes haya sido uno de los protagonistas estelares en el Congreso *Internacional de matemáticos*, celebrado en Madrid en agosto de 2006. Y lo ha sido, porque la ocasión histórica lo merecía, a través de una nueva e impresionante edición crítica, en idioma castellano, de algunas de las obras del sabio siracusano (los dos libros de *Sobre la esfera y el cilindro*, *La medida del círculo* y *La cuadratura de la parábola*) presentes en ciertos manuscritos griegos de la Biblioteca del Monasterio de El Escorial, emprendida por la Real Sociedad Matemática Española, el propio *International Congress of Mathematicians* (ICM-06) y el Patrimonio Nacional (custodio del original que se ha reproducido en facsímile). Un ejemplar de esta edición especial ha sido el regalo institucional de protocolo que la Organización del Congreso Mundial ha entregado a los conferenciantes plenarios e invitados del evento.

Según el coordinador y editor de la publicación A.Durán (2006, pág. 319):

> El criterio general para la realización de la edición en castellano de esta selección de obras de Arquímedes ha sido dotarla de capacidad para evocar la dimensión y la textura histórica de la época. [...] Se pensó que lo más adecuado a la hora de escoger la obra a partir de la cual realizar la edición facsímile era utilizar un manuscrito griego con obras de Arquímedes. Mas que reproducir las obras de Arquímedes de la edición, todavía hoy canónica, de Heiberg (1910/1915), era más acorde al espíritu [del criterio adoptado] buscar un manuscrito griego apropiado, esto es, que garantizara la fidelidad a la obra arquimediana, al menos de la misma manera que queda garantizada en la edición de Heiberg. Por fortuna disponemos en España [en El Escorial] de uno de estos manuscritos.

Las obras de Arquímedes son conocidas a través de sucesivas copias de manuscritos. El más antiguo conservado es el que descubrió Heiberg en 1906, que data del siglo IX o X, y contenía *El Método*. La otra rama de la familia de manuscritos griegos de Arquímedes procede de un arquetipo desaparecido que también debe ser del siglo IX. De ella derivan numerosas copias que permitieron conocer en griego gran parte de la obra de Arquímedes –creada por el sabio casi dos mil años antes– a los matemáticos a partir del Renacimiento. La más antigua de esas copias es de finales del siglo XV, se conserva hoy en la Biblioteca Marciana de Venecia y tiene como signatura el número CCCV. De ella procede, a su vez, el manuscrito X-I-14 de la Biblioteca del Monasterio de El Escorial del que se han tomado las obras de Arquímedes reproducidas en el facsímile.

> *Es imposible encontrar en toda la Geometría cuestiones más difíciles y más importantes explicadas con términos más sencillos y más comprensibles que los teoremas de la inteligencia sobrehumana de Arquímedes.*
>
> PLUTARCO. *Vidas paralelas*

El manuscrito X-I-14 pertenece al fondo griego de Diego Hurtado de Mendoza –político, diplomático y humanista, amigo de Tartaglia y autor de una traducción al castellano de la Mecánica de Aristóteles– quien lo mando copiar del manuscrito CCCV de la Biblioteca Marciana, mientras ejercía como embajador en Venecia del emperador Carlos V, entre 1539 y 1547. El manuscrito X-I-14 garantiza por su carácter la requerida fidelidad al texto arquimediano y tiene más capacidad que ningún texto impreso para evocar la cultura y matemática griegas [Durán, 2006: 320]. El estado de perfecta conservación del manuscrito, la excelente calidad de la reproducción en cuatricromía y sus dimensiones –333 mm × 230 mm– ha permitido obtener un facsímile impresionante.

Pero junto a la cualidad para evocar la obra de Arquímedes en su contexto científico y cultural, esta edición debía tener la capacidad de ser asequible al lector actual con interés en aprender directamente de los clásicos, conservando todo su sentido histórico. Y ello sin requerir los conocimientos imprescindibles de Historia de las Matemáticas para asimilar la dimensión histórica de la obra, ni los suficientes rudimentos de griego que permitan leerla en la lengua original de Arquímedes. El segundo tomo con una edición crítica intenta paliar una u otra circunstancia. Consta de dos partes: unos estudios preliminares y la traducción anotada.

Los estudios preliminares son cuatro artículos cuya finalidad es la descripción del contexto histórico, filosófico, cultural, científico y biográfico de Arquímedes y su obra. Son los siguientes:

A. Ciencia griega. Los preludios y los caminos de un saber crítico

Carlos García Gual –tal vez en la actualidad el más eximio estudioso español de la cultura clásica griega y latina– con su conocida maestría escribe una introducción histórico-cultural que cubre los tres siglos que separan la emergencia de la Filosofía y Matemática griega (siglo VI a.C.) de la época helenística (siglo III a.C) en la que vive el genio y piensa el ingenio de Arquímedes. Los puntos tratados son:

1. Ideas y creencias. Del saber del mythos a los progresos del logos
2. Los maestros de la verdad. Tras los poetas, los sabios cívicos y los filósofos
3. La teoría del conocimiento y los avances de la dialéctica, más allá de la física
4. La medicina hipocrática como ciencia práctica
5. La invención de la historia
6. Platón y la Academia
7. Aristóteles y el Liceo
8. El Museo de Alejandría y las ciencias en la época helenística.

> *Tuvo más ingenio Arquímedes al imitar las órbitas de la Esfera, que la naturaleza al concebirlas.*
>
> CICERÓN. *De re publica, I.14*

B. La recuperación de la obra arquimediana. Arquímedes y sus manuscritos

Con su habitual amenidad y brillante erudición, el editor y coordinador de la obra, Antonio J. Durán, narra con todo lujo de detalles y curiosidades, la fascinante historia secular –y hasta milenaria– de los manuscritos –y en particular los de El Escorial– que nos han permitido recuperar y conocer –a los grandes científicos y a nosotros– la magnífica obra de Arquímedes. Pero no sólo los manuscritos sino también las diversas traducciones y obras impresas. Los puntos tratados son:

1. Introducción a los manuscritos de Arquímedes
2. Arquímedes por tres veces
3. De Arquímedes a León el geómetra: 1000 años de soledad
4. El códice A o códice de Valla y sus descendientes
5. El códice B y la traducción latina de Moerbecke
6. El códice C o códice de Heiberg

7. Ediciones impresas de las obras de Arquímedes
8. Los manuscritos de Arquímedes en El Escorial

C. Arquímedes, un sabio de leyenda

El firmante de este artículo, Pedro Miguel González Urbaneja, autor de diversos estudios sobre Arquímedes y en particular, junto con el catedrático de griego Joan Vaqué Jordi, autor de dos ediciones críticas, una en castellano (1993) y otra en catalán (1997), de *El Método* de Arquímedes, realiza un estudio biográfico del sabio, que incluye una amplia tradición legendaria, embellecida hasta la épica mitológica por la imaginación popular, sobre los episodios más o menos inverosímiles de la vida y la obra del sobrehumano Arquímedes, en relación con su brillante actividad científica y técnica, siendo las fuentes utilizadas las de grandes historiadores y literatos grecolatinos, en especial los relatores de las Guerras Púnicas, pero también la visión sobre Arquímedes de grandes escritores y científicos a partir del Renacimiento. Los puntos tratados son:

> *La imaginación no actúa menos en un geómetra que crea que en un poeta que inventa. [...] De todos los grandes hombres de la antigüedad, es acaso Arquímedes el que más merece figurar al lado de Homero.*
>
> D'ALEMBERT, *Discurso preliminar de la Enciclopedia*

1. Arquímedes, científico, ingeniero y sabio
2. Ciencia y experiencia. Genio e ingenio al servicio de la técnica
3. La defensa de Siracusa
4. La épica muerte de Arquímedes
5. El primer epitafio científico de la historia
6. La iconografía arquimediana

D. La obra matemática de Arquímedes

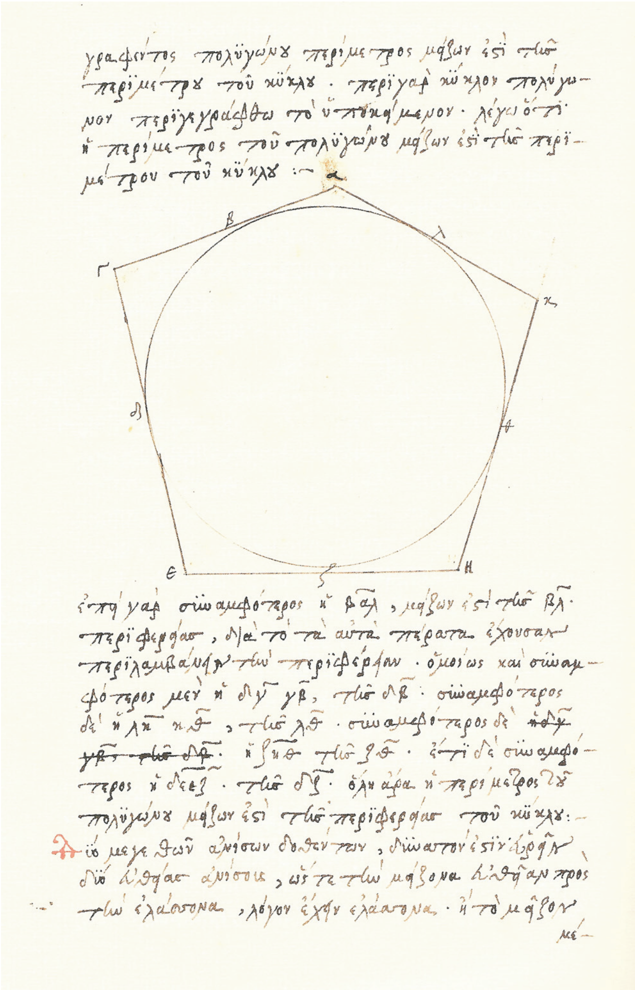
El autor de este artículo realiza también un estudio del pensamiento arquimediano a través del análisis de sus obras, su importancia y su decisiva influencia histórica en los orígenes y desarrollo del Cálculo Integral al aunar la heurística del método *mecánico de descubrimiento* con la apodíctica del *método de demostración por exhaución*. Los puntos tratados son:

1. El pensamiento matemático de Arquímedes. Euclidiano pero no platónico
2. Las obras fundamentales de Arquímedes
3. La personalidad matemática de Arquímedes: descubrimiento y demostración
4. El método de demostración por exhaución
5. El método mecánico de descubrimiento
6. La influencia de Arquímedes en la génesis del Cálculo Integral

En cuanto a la traducción, digamos que para *Sobre la esfera y el cilindro* y *La medida del círculo* se ha utilizado la realizada por Paloma Ortiz para la edición de las obras de Arquímedes de la Biblioteca Clásica Gredos –dirigida por Carlos García Gual– de la que ya ha aparecido en 2005 un primer volumen, mientras que la traducción de *La cuadratura de la parábola*, así como la adaptación de la traducción de las tres obras que editamos al manuscrito X-I-14 de El Escorial se ha encargado Susana Mimbrera.

Por la estructura y naturaleza de la Geometría griega, pero en especial la de Arquímedes por la parquedad de sus explica-

ciones, los dibujos geométricos son parte consustancial de los razonamientos matemáticos, por tanto son un componente esencial de la obra arquimediana, es más, como dice Durán (2006 pág. 323): *los dibujos son una especie de mapa que guía las demostraciones*. La filosofía seguida para la reproducción de cerca de 120 diagramas geométricos ha sido la fidelidad al manuscrito pero corrigiendo lo que parecían ser errores de la impericia del copista. Han sido realizados por Juan Luís Varona que también se ha encargado de la maquetación del volumen con la traducción, las notas y los estudios preliminares. En esta labor ha sido ayudado por Renato Álvarez Nodarse.



Finalmente respecto a la anotación digamos que efectúa un análisis multidisciplinar de las obras de Arquímedes. Hay tres clases de anotación, una de tipo filológico relativa a la traducción, realizada por las traductoras Paloma Ortiz y Susana Mimbrera; otra referente a las figuras –cuyo autor es Antonio J. Durán– que puntualiza aspectos de los esquemas geométricos reproducidos en relación con los originales del manuscrito; y finalmente otra más extensa de tipo histórico, filosófico y matemático. Esta tercera anotación de gran abundancia y amplitud –realizada por el autor de este artículo– constituye un diversificado aparato crítico que pretende reflejar –con la ayuda de argumentos de numerosos comentaristas y estudiosos de Arquímedes– la trascendental significación e influencia histórica de las definiciones, demostraciones, ideas, técnicas, métodos, teoremas, problemas y resultados matemáticos de las obras arquimedianas. Salvo en ocasiones excepcionales no se ha pretendido actualizar los razonamientos geométricos de Arquímedes mediante una adaptación al lenguaje moderno de la Geometría Analítica y el Cálculo Infinitesimal –este trabajo ya está magistralmente realizado por ilustres matemáticos y profesores–, sino que se ha pretendido penetrar en el mundo puramente geométrico de la imaginación arquimediana, eso sí, desentrañando todas y cada una de las proposiciones de Euclides –que Arquímedes aplica sin mencionar de forma explícita, como dando por sabido que son el abc de toda incursión geométrica–, facilitando la comprensión de la metodología de la investigación geométrica arquimediana, en particular los procesos heurísticos del análisis y la síntesis y las cuestiones sobre *diorismos* en torno a condiciones necesarias y suficientes, en un increíble desarrollo matemático que desplegado por Arquímedes, conjuga a la perfección la intuición del descubrimiento con el virtuosismo de la demostración ofreciendo para cada problema geométrico un nuevo y apasionante reto intelectual. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DURÁN, A. (2006): “Arquímedes: una pasión griega”, *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, Vol. 9.2, pp. 317-326.

GONZÁLEZ URBANEJA, P.M. y VAQUÉ, J. (1993): *El método relativo a los teoremas mecánicos de Arquímedes*, Edición con facsímile, Universitat Autónoma de Barcelona, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona.

GONZÁLEZ URBANEJA, P.M. y VAQUÉ, J. (1997): *Mètode d'Arquimedes sobre els teoremes mecànics dedicat a Eratòstenes*, Edición con facsímile, Fundació Bernat Metge, Barcelona.

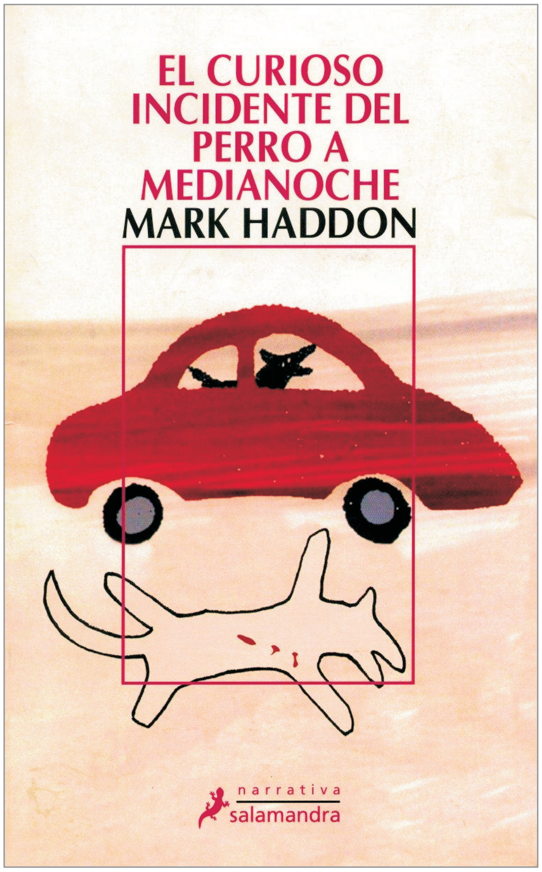
GONZÁLEZ URBANEJA, P.M. (1992): *Las raíces del Cálculo Infinitesimal en el siglo XVII*, Alianza Universidad. Madrid, Cap. 1, 2, 8.

GONZÁLEZ URBANEJA, P.M. (1995): *Las Técnicas del Cálculo (en De Arquímedes a Leibniz, tras los pasos del infinito matemático, teológico, físico y cosmológico)*, 405-438, Seminario Orotava de Historia de la Ciencia, Santa Cruz de Tenerife.

GONZÁLEZ URBANEJA, P.M. (2006): “A un siglo del descubrimiento de El Método de Arquímedes por Heiberg”, *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, Vol. 9.3, pp. 715-744.

SUMA 54
Febrero 2007, pp. 123-130

Matemáticas a medianoche



El curioso incidente del perro a medianoche
(The curious incident of the dog in the nigth-time)
Mark Haddon
Ediciones B, Tiempos Modernos
Publicaciones y Ediciones Salamandra S. A. Barcelona.
Barcelona, Septiembre de 2004 (1ª Edición en español)
ISBN: 84-7888-910-8.
270 páginas

Sobre este mismo libro ver SUMA 51, pp. 112-113 y SUMA 53 pp. 13-18 [N. de la R.]

Toca el turno en este número a un libro singular, que sorprende al lector desde la primera de sus páginas hasta la última.

En la contraportada del libro se hace su presentación:

> El curioso incidente del perro a medianoche es una novela que no se parece a ninguna otra. Elogiada con entusiasmo por autores consagrados como Oliver Sacks e Ian McEwan, ha merecido la aprobación masiva de los lectores en todos los países donde se ha publicado, además de galardones como el Premio Whitbread y el Premio de la Commonwealth al Mejor Primer Libro. Su protagonista, Christopher Boone, es uno de los más originales que han surgido en el panorama de la narrativa internacional en los últimos años y está destinado a convertirse en un héroe literario universal de la talla de Oliver Twist y Holden Caufield.
>
> A sus quince años, Christopher conoce las capitales de todos los países del mundo, puede explicar la teoría de la relatividad y recitar los números primos hasta el 7507, pero le cuesta relacionarse con otros seres humanos. Le gustan

Constantino de la Fuente Martínez
literatura@revistasuma.es

las listas, los esquemas y la verdad, pero odia el amarillo, el marrón y el contacto físico. Si bien nunca ha ido solo más allá de la tienda de la esquina, la noche que el perro de una vecina aparece atravesado por un horcón, Christopher decide iniciar la búsqueda del culpable. Emulando a su admirado Sherlock Holmes -el modelo de detective obsesionado con el análisis de los hechos-, sus pesquisas lo llevarán a cuestionar el sentido común de los adultos que lo rodean y a desvelar algunos secretos familiares que pondrán patas arriba su ordenado y seguro mundo.

El autor, Mark Haddon, nació en Northampton, Inglaterra, en 1963. Ilustrador, pintor, poeta y profesor de escritura creativa, es autor de quince libros para niños. Tras licenciarse en Literatura Inglesa por la Universidad de Oxford, trabajó durante un tiempo con personas que padecían deficiencias físicas y mentales. Ha trabajado así mismo como guionista para la televisión, medio en el que ha ganado dos de los prestigiosos premios BAFTA. Impulsado por un creciente proceso de boca a boca, *El curioso incidente del perro a medianoch*e se ha convertido en un éxito sin precedentes en todos los países donde se ha publicado –los derechos se han vendido en 35 idiomas–, superando holgadamente el millón y medio de ejemplares.

Nuestro comentario

Como decíamos al principio, posiblemente nos encontramos ante una de las obras más sorprendentes del panorama de la literatura actual (no lo afirmamos categóricamente por no ser expertos en el tema). La verdad es que desde la primera hasta la última de sus páginas, los lectores confirman sentirse enganchados a los personajes, a sus circunstancias y a la trama en general. Esto es seguramente una mezcla de aspectos: por una parte, los personajes, sobre Christopher el protagonista, dan a la historia unos perfiles claros de realismo y veracidad, y por otra, M. Haddon, el autor, consigue un resultado final magnífico, lleno de sencillez, profundidad y ternura.

Lo más sorprendente, sin duda, es el quinceañero personaje principal, Christopher, con el que el autor logra un retrato magistral de una personalidad compleja: de sus aspectos internos y de la proyección hacia los demás. Si a esto le añadimos el hecho de que la obra está concebida como una narración de este personaje en primera persona, tenemos que el lector se transforma, desde las primeras líneas, en confidente de sus palabras, acompañante cercano en sus vicisitudes y espectador directo, de primera fila, de sus circunstancias.

Toda la obra tiene, entre otros objetivos, el de que lleguemos a descubrir poco a poco el pensamiento, la psicología y las emociones de un adolescente con síndrome de Asperger, que intenta comprenderse a sí mismo y a los demás, en el *maremagnum* que supone el vivir cada día en el mundo actual. En una sociedad que nos envuelve y nos zarandea, que no comprende ni tolera las singularidades personales, de quien no se ajusta al patrón de pensamiento y comportamiento impuesto desde muchas instancias (civiles, religiosas, políticas, militares, económicas, etc). Y da lo mismo que "el diferente" lo sea por deseos propios o por características personales.

En cualquier caso, es muy enriquecedor a nivel personal tener la posibilidad de reflexionar sobre algunas cuestiones que, por su cotidianeidad, se nos pasan desapercibidas: reacciones en el trato con los demás (de nuestra familia o extraños) o en la resolución de situaciones comprometidas (escolares o extraescolares), estrategias para sobrellevarlas, creencias personales sobre diferentes temas, etc. Todo un mosaico no periódico de vivencias que rellena el plano (o suelo) de nuestra vida, y en el que podemos descubrir, por paradójico que nos parezca, huecos y solapamientos. Éstos forman parte de las contradicciones personales que nos acompañan constantemente y nos sirven para tomar conciencia de la complejidad que conlleva el hecho de vivir.

En este verosímil retrato de la vida de unas personas comunes, aparecen las matemáticas en muchas de sus páginas. Y es que Christopher Boone tiene una gran facilidad para la comprensión de las ideas matemáticas: cálculo mental, números primos, resolución de ecuaciones, ternas pitagóricas, azar, probabilidades, teoría del caos y algunos otros que, aunque tratados con menos extensión, no gozan por ello de un interés menor: la naturaleza de las matemáticas, algunos aspectos de la resolución de problemas, juegos matemáticos, etc.

Por último destacaremos el carácter didáctico de la narración y de todas las explicaciones de tipo científico que Christopher nos va transmitiendo. Un logro muy conseguido por el autor y que es muy aprovechable para el contexto escolar. Tanto es así que, independientemente de otras recomendaciones, este libro puede ser, y de hecho lo es, un ejemplo inmejorable para llevar a cabo una lectura obligatoria, por todos los alumnos y alumnas de algún curso de ESO o bachillerato, en la asignatura de matemáticas. Como puede observarse en el extenso guión de trabajo de la propuesta para el aula, son muchas las ideas aprovechables y los temas que se pueden tratar, y constituyen una ocasión inmejorable para el enriquecimiento y disfrute personal de nuestros alumnos y alumnas con las matemáticas.

Una propuesta de trabajo en el aula

Como decíamos anteriormente, este libro es una buena recomendación para llevar a cabo una lectura obligatoria, que se puede complementar con un trabajo de contenidos matemáticos, objeto de esta sección, pero que no descarta otro tipo de tareas más relacionadas con los denominados temas transversales.

Por lo que a nosotros respecta, la propuesta que presentamos en este número va dirigida a niveles de secundaria obligatoria, aunque puede que algunas cuestiones no sean convenientes para todo el alumnado. Como siempre, es el profesor, con su experiencia y según el contexto concreto, el que decide.

Pasamos a presentar la propuesta.

Un vistazo general a algunos temas matemáticos

Vamos a comenzar echando un vistazo general al libro, fijándonos en los temas matemáticos que van apareciendo en sus páginas. Para ello solamente debes anotar, al lado de cada tema, la página o páginas del libro donde aparece mencionado.

Tema Matemático	Páginas
Formas de rellenar o embaldosar el plano	
Direcciones y vectores en el espacio	
La búsqueda y situación de un lugar en el plano	
Magnitudes inversamente proporcionales	
El volumen de un cubo	
La población de animales y el descubrimiento de Robert May ...	
Terna pitagóricas	
Números primos	
El juego de *Los soldados de Conway*	
Fórmula logarítmica para la obtención de números primos	
Poblaciones y el problema de Monty Hall	
Probabilidades y el origen de la vida	
Potencias de 2	
Ecuaciones de segundo grado	

Las Matemáticas también tienen normas

> ...la gente se salta las normas constantemente. Por ejemplo, Padre conduce muchas veces a mas de 30 millas por hora en una zona limitada a 30 millas por hora, y otras conduce después de haber bebido, y con frecuencia no se pone el cinturón de seguridad. Y la Biblia dice No matarás pero hubo unas cruzadas y dos guerras mundiales y la guerra del golfo y en todas ellas hubo cristianos que mataban gente. (pág. 46).

Aunque el párrafo anterior daría mucho de sí, no vamos a entrar en él. Nos vamos a ceñir a algunas normas que hay que tener en cuenta cuando estamos trabajando en matemáticas. Por ejemplo, cuando trabajamos con números hay que tener en cuenta lo que denominamos jerarquía de operaciones.

A. ¿En qué consiste la jerarquía de operaciones? Pon ejemplos.
Te mostramos a continuación las operaciones incorrectas efectuadas por algunos alumnos:
$3+5\cdot 4=8\cdot 4=32$ $\quad$ $(3+4)2=32+42$ $\quad$ $3^2+4^2=7^2=49$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{5} \qquad \frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{6} \qquad \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

B. Analiza los pasos dados, averigua los errores cometidos y efectúa correctamente las operaciones.
Ahora te presentamos una demostración de que 1= 2. Sí, sí, has leído bien, vamos a demostrar que 1=2.

Suponemos que a, b son números no nulos y que $a = b$.
Multiplicando por a tenemos:

$$a^2 = a \cdot b$$

Restando b^2 en los dos miembros obtenemos: $a^2-b^2= a \cdot b-b^2$
Descomponiendo en factores y sacando factor común queda:

$$(a+b)\cdot(a-b) = b\cdot(a-b)$$

Simplificando en los dos miembros el factor $(a-b)$ nos queda:

$$a+b = b$$

Como $a=b$, podemos sustituir a por b y queda:

$$2b=b$$

Como b es cualquier número no nulo, hacemos por ejemplo $b=1$, y queda

$$2=1$$

como queríamos demostrar.

¿2=1?

Fíjate que si hacemos $b=7$, obtenemos $14=7$ y así con otros ejemplos que tú quieras poner.

C. Repasa la demostración y encuentra el fallo, porque sin duda tiene que haber algo de lo que hemos hecho que, en matemáticas, no está permitido. ¿Qué es?
D. Busca alguna "demostración" parecida que contenga algún fallo y que sorprenda por su resultado final.

Razonamientos encadenados

> Y cuando cruzaba la calle tuve un momento de inspiración sobre quién podía haber matado a Wellington. Articulé una Concatenación de Razonamientos en mi mente que era como sigue:... (pág. 61).

En nuestra vida cotidiana estamos haciendo continuamente razonamientos encadenados. Por ejemplo, una compañera de tu clase dice las siguientes frases:

1. *En este trimestre he sacado en matemáticas un 6, un 8 y un 4.*
2. *Por tanto aprobaré.*
3. *Además creo que el profesor me pondrá un 6 como nota en la evaluación.*

Suponiendo que las tres notas cuenten lo mismo, y que no se tienen en cuenta más cosas para la calificación final de la evaluación, demuestra que:

A. La frase 2 es cierta.
B. La frase 3 es cierta.
Para hacer la media de las notas anteriores, unos alumnos hacen los siguientes cálculos:

a) $\dfrac{6+8+4}{3}=6$

b) $\dfrac{6+8}{2}=7;\quad \dfrac{7+4}{2}=5{,}5$

c) $\dfrac{8+4}{2}=6;\quad \dfrac{6+6}{2}=6$

C. Explica si estos métodos de calcular la media son correctos o incorrectos y comenta sus causas.
Si ahora suponemos que la tercera nota cuenta el triple que las otras dos, demuestra que:
D. La frase 2 es cierta.
E. La frase 3 no es cierta. ¿Cuál es entonces la nota de la evaluación?
Para que suspendiera la evaluación, de las siguientes alternativas ¿cuál debería ocurrir?:
F. La nota 4 cuenta el cuádruplo que las otras.
G. La nota 4 cuenta más del cuádruplo que las otras.
H. La nota 6 cuenta la mitad que las otras.

La navaja de Occam en matemáticas

> ... la navaja de Occam no es una navaja con la que los hombres se afeitan sino una ley, y dice:
> Entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem
> Que es latín y significa:
> No ha de presumirse la existencia de más cosas que las absolutamente necesarias. (pág. 120)

Esta frase se debe a un monje franciscano llamado Guillermo de Occam.

A. Recoge los principales datos biográficos de este monje y filósofo.

En matemáticas podríamos enunciar la navaja de Occam así:

> Nunca han de suponerse más cosas que las absolutamente necesarias.

Por ejemplo, si un alumno, ante la situación de la cuestión anterior dice: "Sí, las tres notas cuentan lo mismo, pero como tú tienes el cuaderno muy mal, el profesor te va a suspender".

A. Analiza este razonamiento, teniendo en cuenta toda la información que se daba en la cuestión 4, y explica porqué es falso.
Para acabar estas preguntas, te proponemos analizar un chiste. Sí, sí, pero sin reírte demasiado.
B. Lee el chiste del economista, el lógico y el matemático, de las páginas 177-178, y relaciónalo con la navaja de Occam.

George Pólya (1887-1985)

Miguel de Guzmán (1936-2004)

George Pólya (1887-1985)

Es muy bueno tener un Plan...

> Y entonces Formulé un Plan. Y eso me hizo sentir mejor porque había algo en mi cabeza que tenía un orden y unas pautas y tan solo tenía que seguir las instrucciones una detrás de otra. (pág. 166).

Aunque hayas pensado inicialmente en otro tipo de plan... por la cita puedes entender que vamos a hablar de un plan relacionado con la resolución de situaciones problemáticas.

Para resolver un problema, en matemáticas pasa como en la vida cuando estamos ante una situación complicada, o si tenemos que tomar una decisión: uno debe plantearse un plan con unos pasos que nos permitan llegar a la solución.

A. Resuelve el siguiente problema y luego escribe los pasos del Plan que has llevado a cabo:
   ¿Cuántos cuadrados se pueden dibujar en un tablero de ajedrez, de manera que sus lados sean líneas del tablero?
   A lo largo del siglo XX varios matemáticos han investigado el proceso de resolución de problemas. Uno de ellos ha sido George Polya. Él decía que cuando uno resuelve problemas de matemáticas atraviesa por cuatro fases o etapas:
   - Comprensión del enunciado.
   - Elaboración de un plan.
   - Puesta en práctica o ejecución del plan.
   - Visión retrospectiva o vuelta atrás.
B. Haz un comentario sobre cada una de esas etapas. ¿En qué te parece que pueden consistir?
C. Recoge los principales datos biográficos de G. Polya.
   También en España ha habido un matemático que ha hecho importantes aportaciones a este tema en el siglo XX; se llamaba Miguel de Guzmán Ozámiz y ha sido el matemático español más importante del siglo XX.
   Te vamos a proponer unas actividades relacionadas con él para que lo conozcas un poco. Para ello puedes acudir a la red o a su página web.
D. Recopila los principales datos de su biografía.
E. Escoge un problema de alguno de sus libros y resuélvelo.

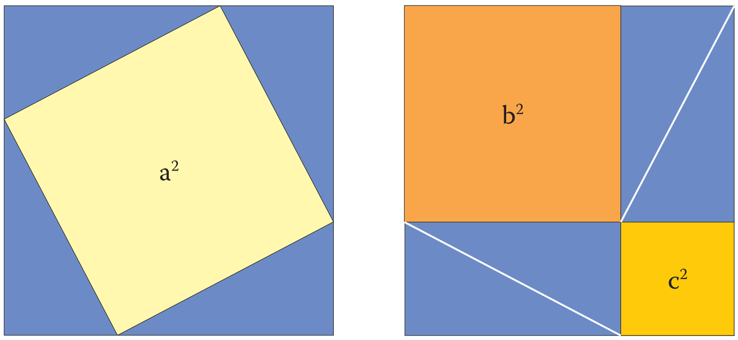
Desde las ternas pitagóricas...

> Y ésta era mi pregunta favorita
> Demuestra el siguiente resultado:
> *Un triángulo cuyos lados pueden escribirse en la forma* n^2+1, n^2-1 *y* $2n$ *(donde* n *es mayor que* 1*) es rectángulo.*
> Demuestra, mediante un ejemplo opuesto, que el caso inverso es falso. (pág. 257)

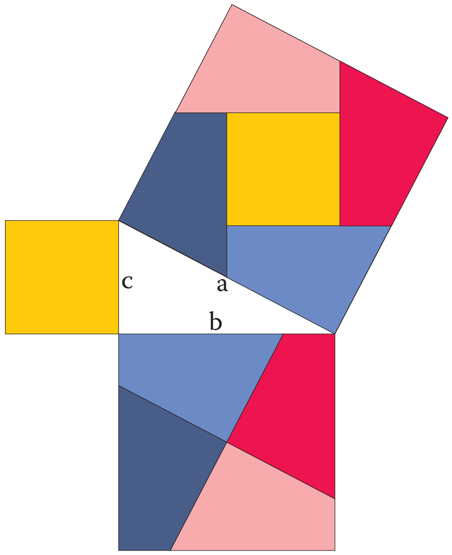
En esta pregunta del examen de Christopher se habla de números y de triángulos rectángulos. Eso está relacionado con una idea que te vamos a explicar:

Una terna pitagórica son tres números enteros *a*, *b*, *c* que cumplen el teorema de Pitágoras, es decir: $a^2+b^2=c^2$. O lo que es equivalente, *a*, *b* y *c* pueden ser las longitudes de los tres lados de un triángulo rectángulo. En la figura puedes observar la Tablilla Plimpton, de la cultura mesopotámica, cuyo origen se sitúa alrededor del año 1800 antes de Cristo, en la que ya aparecen unas ternas pitagóricas.

A. Investiga y averigua qué ternas pitagóricas aparecen en esas tablillas.
   En la página 265 del libro aparece la demostración de la pregunta de la cita anterior.
B. Demuestra tú también que n^2+1, n^2-1 y $2n$ forman una terna pitagórica. Después da ejemplos de triángulos rectángulos concretos cuyos lados tengan las expresiones anteriores.
   El enunciado inverso del de la pregunta del examen es: *Si un triángulo es rectángulo, entonces sus lados pueden escribirse en la forma* n^2+1, n^2-1 *y* 2n *(donde* n *es mayor que* 1*)*.
   En matemáticas en cuanto un enunciado admite un ejemplo en el que no se cumple, entonces el enunciado es falso.
C. Demuestra que el enunciado inverso anterior es falso mediante un ejemplo diferente al que propone Christopher en la página 267.
   Las expresiones anteriores, n^2+1, n^2-1 y $2n$ son un caso particular de las expresiones n^2+p^2, n^2-p^2 y $2np$ (cuando $p=1$).
D. Demuestra que estas tres expresiones también forman un terna pitagórica.
E. investiga y encuentra las expresiones de otras ternas pitagóricas.



$a^2+b^2=c^2$



... hasta el Teorema de Pitágoras

Hemos hablado anteriormente de uno de los teoremas más famosos de la historia: el teorema de Pitágoras.

A. ¿Cuál es su enunciado? ¿Cuál es su significado geométrico?
   A lo largo de la historia de las matemáticas se ha demostrado el teorema de Pitágoras de muchas formas.
B. Estudia las figuras siguientes y explícalas, porque son dos demostraciones gráficas del teorema.

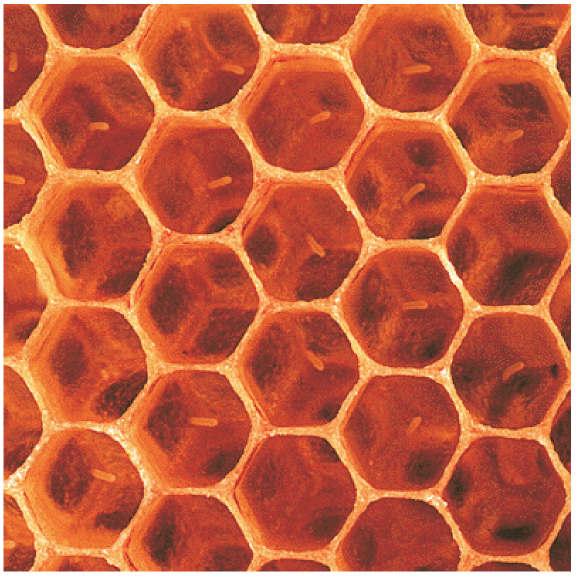
Los triángulos rectángulos tiene unas propiedades muy interesantes. Una de ellas representa, en cierto modo, una generalización del teorema de Pitágoras. La podríamos enunciar de la siguiente forma:

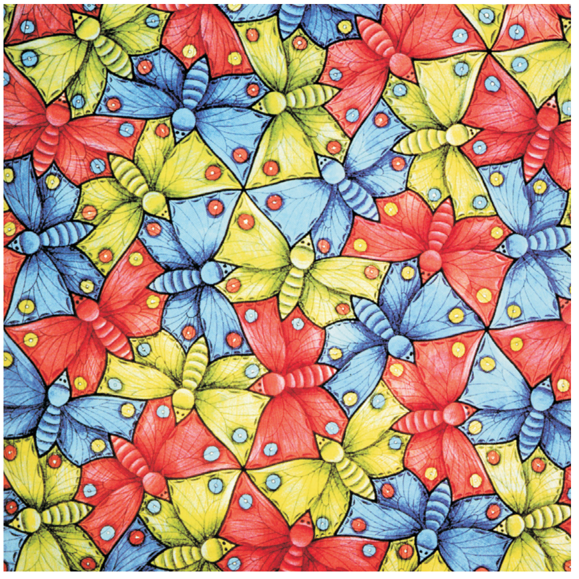
> Si sobre los tres lados de un triángulo rectángulo construimos figuras geométricas semejantes entre sí, se cumple que la suma de las áreas de las figuras construidas sobre los catetos es igual al área de la figura construida sobre la hipotenusa.

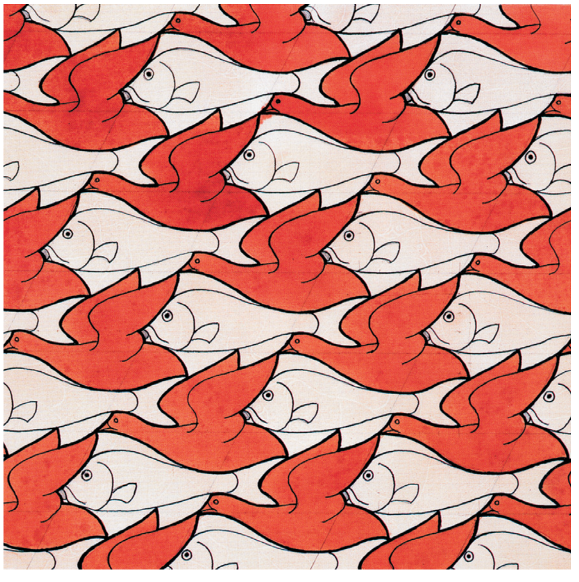
Según la propiedad anterior, el teorema de Pitágoras sería un caso particular, correspondiente a cuando dibujemos sobre cada lado un cuadrado.

C. Demuestra que se cumple la propiedad anterior si construimos sobre cada lado triángulos equiláteros.
D. ¿Y si son exágonos regulares? Demuéstralo para un polígono regular de cualquier número de lados.
E. Haz lo mismo para cuando sean semicírculos cuyo diámetro sea igual a cada uno de los lados.

Rellenando el plano sin dejar huecos ni solapamientos







En la página 246 podemos ver un embaldosado del plano hecho con cruces. Aquí te presentamos otros mosaicos curiosos.

Como puedes observar, el primero es real y en cualquier colmena lo podemos ver. Los otros dos corresponden a diseños realizados por un artista holandés del siglo XX llamado M. C. Escher.

Aunque nunca te hayan hablado de ello, es fácil que comprendas lo que entendemos en matemáticas por un mosaico: es cualquier forma de rellenar el plano con figuras, sin dejar huecos sin rellenar ni solapar (montar) unas con otras; debe quedar como los que te presentado más arriba.

Las Matemáticas también se han ocupado de averiguar qué tipos de figuras sirven para conseguir cubrir el plano con esas condiciones y otras que se quiera añadir. En la cultura árabe hay muchísimos buenos ejemplos de mosaicos. En Granada, en la Alhambra podemos ver ejemplos magníficos.

Volviendo a los ejemplos que aquí mostramos, podemos ver que el mosaico de las abejas está hecho con un polígono regular.

A. ¿De qué polígono estamos hablando?
B. ¿Con qué otros polígonos regulares es posible hacer mosaicos? Los mosaicos construidos de esta forma se llaman mosaicos regulares. ¿Se puede conseguir mosacios con todos los tipos de polígonos regulares?
C. Analiza la posibilidad de que cualquier cuadrilátero pueda rellenar el plano y formar, por tanto, un mosaico.
D. Investiga qué es un mosaico semirregular y averigua los que hay.
E. Estudia otras formas de rellenar el plano usando polígonos u otras figuras, como por ejemplo las de Escher.

Los números primos

> Yo creo que los números primos son como la vida. Son muy lógicos pero no hay manera de averiguar como funcionan, ni siquiera aunque pasaras todo el tiempo pensando en ellos. (pág. 23)

Vamos a dedicar un rato a pensar en los números primos para conocer algunas de sus peculiaridades. Ánimo y verás como acabas satisfecho; los primos nunca defraudan...

Uno de los primeros matemáticos que estudiaron los números primos fue Eratóstenes, aunque también es conocido por otros logros en matemáticas.

A. Explica cómo se hace la criba de Eratóstenes. Hazla para obtener los números primos entre los 100 primeros números naturales.
B. Este matemático calculó con mucha exactitud una magnitud del planeta Tierra. ¿Cuál es, cómo lo hizo y cuál fue el valor encontrado?
Otro matemático importante, Euclides, demostró que hay infinitos números primos.
C. Averigua cómo lo hizo y exponlo aquí.
Euclides escribió unos cuantos libros, que son los más famosos de la historia de las matemáticas.
D. Averigua el título, cuántos libros fueron y explica su contenido.

Avancemos en el tiempo unos cuantos siglos y situémonos en Suiza. Un profesor de matemáticas de este país, llamado Cristian Goldbach, mantenía correspondencia con Euler, un famoso matemático de la misma nacionalidad. En una de las cartas, Goldbach le confía a Euler un posible resultado sobre números primos, que él creía cierto, pero que no era capaz de demostrar. Euler tampoco consiguió hacerlo y lo denominó Conjetura de Goldbach.

E. ¿En qué consiste esta conjetura? Prueba con casos particulares sencillos, a ver si se cumple.
F. ¿Por qué se le llama conjetura en vez de teorema?

Si quieres saber más sobre esta conjetura, puedes comenzar leyendo otra novela interesante *El tío Petros y la Conjetura de Goldbach*, de la que también tenemos un guión para trabajar las matemáticas con su lectura.

Por último, ya en el siglo XX, vamos a comentarte una aplicación nueva de los números primos: los usan los servicios secretos de los países a la hora de crear claves para elaborar mensajes secretos, que no los puedan descifrar los espías de otros gobiernos, o los enemigos, en caso de conflictos o de guerra. Esto forma parte de lo que se denomina Criptografía o "escritura escondida". Es una parte muy compleja de las matemáticas.

Nos gustaría plantearte algo sencillo relacionado con la Criptografía en sus inicios. Para ello vamos a escribir de tres formas distintas, en clave, la frase EL CURIOSO INCIDENTE.

G. Tienes que averiguar, en cada caso, cómo lo hemos hecho:
1: LEUCOIROSNIICNEDET
2: LEOSOIRUCETNEDICNI
3: ETNEDICNIOSOIRUCLE

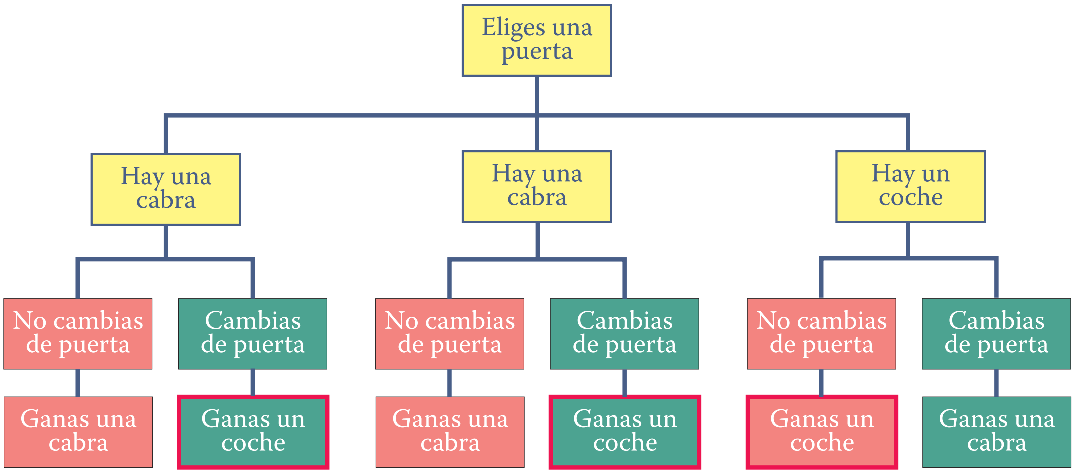
Aprovecha para explicar algún otro método de cifrar mensajes que conozcas o que te hayan contado.

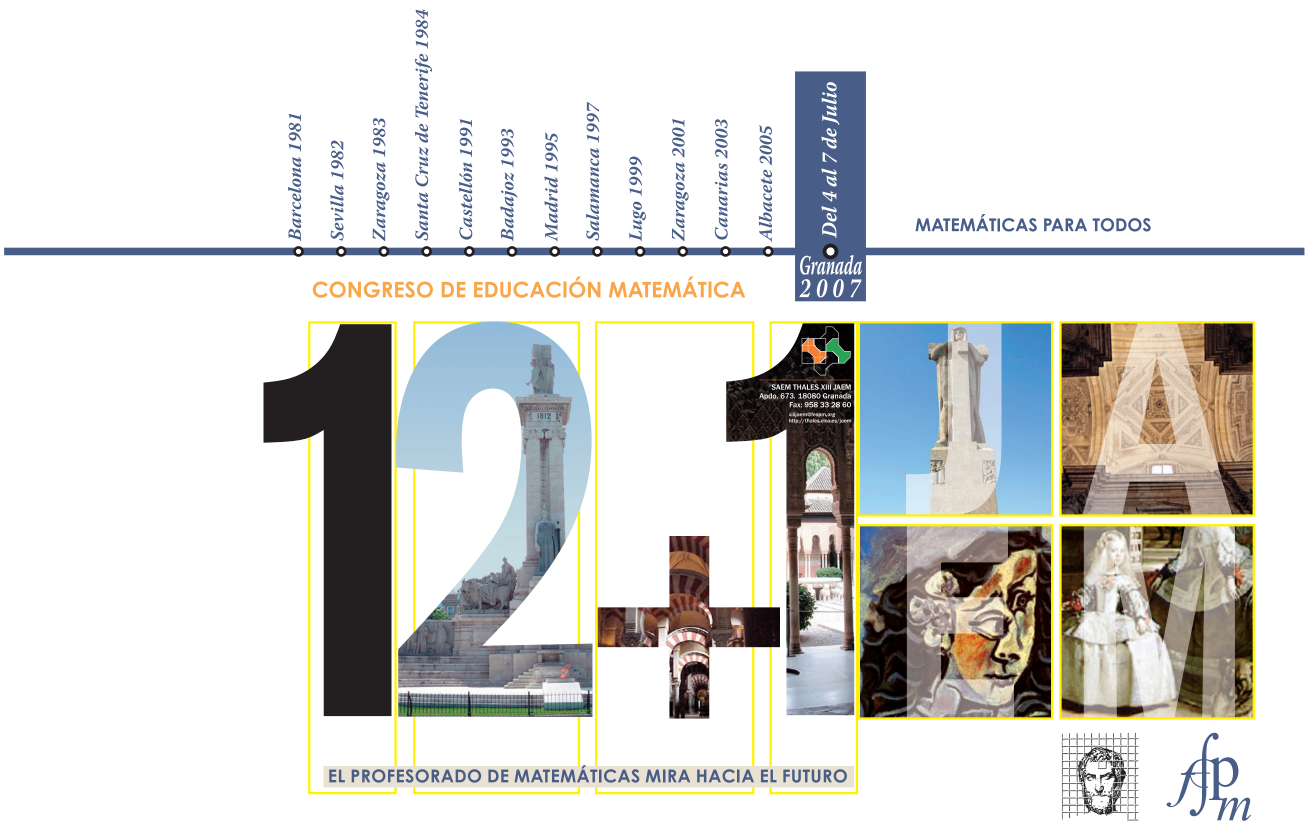
El cálculo de probabilidades a veces tiene... *cabra encerrada*

> ... los números son a veces muy complicados y en absoluto sencillos. (pág. 90)

Vuelve a leerte el capítulo 101, porque vamos a centrar nuestra mirada en él. Como sabes ahí está la increíble, pero verídica, historia del problema de Monty Hall. Con toda la información puedes contestar a las siguientes preguntas:

A. Cuenta el desarrollo del concurso.
B. Explica una de las dos formas de resolverlo que aparecen en el libro. ¿Se entienden las dos o una es más sencilla que la otra? Puede ayudarte del esquema gráfico siguiente, que propone el libro.
C. ¿Qué te parecen las cartas enviadas a la revista por matemáticos con mucha experiencia? Haz algún comentario de alguna de ellas.
D. Comenta el primer párrafo de la página 90 sobre lo engañosa que puede ser la intuición.





XIII Jornadas sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas

Granada, del 4 al 7 de julio de 2007

Segundo anuncio

Con el lema El profesorado de matemáticas mira hacia el futuro *la Sociedad Andaluza de Educación Matemática* Thales *afronta el reto de la organización de una nueva edición de las JAEM, convocadas por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, que tendrán lugar en Granada durante los próximos 4 al 7 de julio de 2007.*

No sólo queremos mirar hacia el futuro sino que deseamos que estas jornadas constituyan un lugar de encuentro para el profesorado de todos los niveles educativos que permita aunar esfuerzos para abrir nuevos horizontes a las matemáticas y en especial a los aspectos relacionados con su enseñanza y aprendizaje.

Tanto por parte del Comité de Programas como por parte del Comité Local se realizará el mayor esfuerzo para que la estancia en Granada de todos los que deseéis participar sea lo más agradable posible y, sobre todo, que las distintas conferencias, ponencias y grupos de debate sean de interés y utilidad. Además, esperamos que vuestra participación sea activa a través de los distintos canales que ofrecemos, como son las comunicaciones, talleres y zocos. Deseamos contar con vuestras experiencias que, sin duda, enriquecerán el contenido de esta nueva edición de las JAEM.

Para visitar Granada no es necesaria ninguna razón, pero, en este caso, no tenemos excusa si no aprovechamos para pasar unos días en esta bonita ciudad. Participad en estas JAEM y colaborad para mirar hacia el futuro de las matemáticas.

El Comité Organizador

PRESENTACIÓN

XIII Jornadas sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas

Del 4 al 7 de julio de 2007

Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada
Campus de Fuentenueva
Calle Severo Ochoa
Granada

Desde sus inicios, las Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (JAEM) se han concebido como un lugar de encuentro para el profesorado de Matemáticas de los distintos niveles educativos de nuestro país, destinado a potenciar el intercambio de experiencias, la innovación educativa y la reflexión sobre la problemática que afecta a la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en cada momento. Hoy día, nadie duda de la importancia que estos singulares encuentros tienen para la actualización profesional del profesorado de nuestra área.

La SAEM Thales, consciente de su transcendencia, ha apoyado la celebración de estas jornadas desde sus inicios en 1981, haciéndose cargo de su organización ya en su 2ª edición, que se celebró en 1982 en Sevilla. En la actualidad, pensamos que podíamos estar en un momento interesante y apropiado para retomar el reto ilusionante de la organización de las JAEM, justamente en este tiempo en el que se están viviendo cambios tan significativos en la sociedad, que están transformando nuestros modelos familiares y sociales, y que hacen necesarios cambios significativos en los modelos de enseñanza-aprendizaje.

Tras reflexionar sobre ello en el seno de nuestra Junta Directiva regional, un nutrido grupo de profesores y profesoras de nuestra delegación de Granada con demostrada experiencia en la organización de encuentros provinciales y regionales del profesorado, se ofreció a liderar la organización de las XIII JAEM, contando con el apoyo incondicional de toda nuestra sociedad, representada a través de su junta directiva. Esta iniciativa se vio a su vez reforzada por el apoyo del resto de sociedades de la FESPM, que a través de su junta de gobierno, propuso en julio de 2005 oficialmente a la SAEM Thales la organización de las XIII JAEM, anunciándose como ya es tradicional, en las pasadas JAEM de Albacete, la celebración de las XIII JAEM del 4 al 7 de julio de 2007 en Granada.

Iniciamos pues esta apasionante aventura, mirando hacia el futuro y convencidos de la importancia que tiene para nuestros ciudadanos y ciudadanas contar con una formación matemática fundamentada en su desarrollo humano integral y orientada hacia la comprensión del mundo que les rodea.

Esperamos contar con vuestra presencia en Granada y os deseamos unos provechosos y felices días entre nosotros.

Manuel Torralbo Rodríguez
Presidente de la SAEM Thales

Comité de Programa

El Comité de Programa es el responsable del desarrollo del programa científico de las JAEM.

Sus miembros son:

Pablo Flores, SAEM Thales, (Presidente)
Serapio García, Presidente de la FESPM
Josep Sales, Secretario General de la FESPM
Inmaculada Fuentes, Codirectora revista SUMA
Sílvia Margelí, FEEMCAT
María José González, SMP de Cantabria.
Luis Berenguer Cruz, SAEM *Thales*,
(Coordinador General de las XIII JAEM)

Comité Organizador local

El Comité Organizador es el responsable de organizar las JAEM, poniendo los medios necesarios para el desarrollo del programa científico propuesto por el Comité de Programa.

Inicialmente, el Comité Organizador para estas XIII JAEM está compuesto por:

Pablo Flores, Olalla Romero, Maria Peñas, María Luisa Martín, Manuel Toquero, Juani Navas, Francisco Ruiz, Francisca Izquierdo, Benito López, Belén Cobo, Antonio Moreno, José Luis Lupiáñez, Raquel Pozuelo. Rafael Ramírez, Mª José Jiménez, Miguel Ángel Fresno, Mª Isabel Berenguer, Agustín Carrillo de Albornoz, Carlos Luque, Luis Berenguer

Conferencias Plenarias

Están dirigidas a todos los asistentes a las XIII JAEM y no coinciden en el horario con ninguna otra actividad. Las conferencias plenarias serán desarrolladas por:

Luis Rico Romero, Universidad de Granada.
Antonio Pérez Sanz. IES Salvador Dalí. Madrid.
Abraham Arcavi, Weizmann Institute. Israel.
Rafael Pérez Gómez. Universidad de Granada.

Núcleos temáticos

1. El profesorado de Matemáticas, profesionales imprescindibles

> *No olvidéis que es tan fácil quitarle a un maestro la batuta, como difícil dirigir con ella la Quinta Sinfonía de Beethoven.* Antonio Machado

DESCRIPCIÓN: Características del profesor de matemáticas, formación y desarrollo profesional.
PONENTES: Montserrat Torra, CEIP Renaixeça, Manresa (Barcelona), Girona. Ana Rodríguez, Centro de Profesorado, Sevilla. Salvador Llinares, Univ. Alicante. Luis Balbuena, Canarias.

2. Ahí empieza todo: matemáticas en educación infantil y primaria

> *Hacer matemáticas en la escuela es abrir a los niños la puerta de un nuevo mundo, en el que pasan cosas a veces inesperadas, que es el mundo fascinante de los números y sus leyes.* Maria Antonia Canals

DESCRIPCIÓN: Educación matemática temprana.
PONENTES: Asunción Cueli, CP Virgen de Valencia, Renedo de Piélagos (Cantabria). Cristóbal Macias, CEIP Alfonso X el Sabio, Arcos de la Frontera (Cádiz). Carme Aymerich, CEIP Rocafonda, Mataró, (Barcelona). Lorenzo J. Blanco, Univ. Extremadura, Badajoz.

3. Iguales pero diferentes. La diversidad en la clase de matemáticas

> *Donde todos piensan igual, ninguno piensa mucho.* Walter Lippmann

> *Hay niños, de los que ahora juegan en la calle, que pueden resolver algunos de mis problemas de física más complejos, pues tienen modos de percepción sensorial que yo perdí hace mucho tiempo.* Oppenheimer

DESCRIPCIÓN: El problema de enseñar teniendo en cuenta las *diversidades* de alumnos que tenemos en las aulas: Diferentes niveles de aprendizaje. Aulas cada día más multiculturales.
PONENTES: Xavier Vilella, IES Vilatzara, Vilassar de Mar (Barcelona). Antonio Caravaca, Centro de Profesorado, Cádiz. Xaro Nomdedeu, IES Alvaro Falomir, Almassora (Castellón). Paloma Gavilán, IES Luis de Lucena, Guadalajara.

4. De las cuentas a los cuentos. Números y álgebra

> *Para resolver un problema referente a números o relaciones abstractas de cantidades, basta con traducir dicho problema del inglés u otra lengua al idioma algebraico.* I. Newton

Descripción: Número, sentido numérico, operaciones, estimación, tipos de números, pensamiento algebraico, regularidades.
Ponentes: José María Gairín, Univ. Zaragoza. Joan Jareño, IES Alella (Barcelona). Pili Royo, IES Montilivi, Girona. Martín Socas, Univ. La Laguna, Tenerife.

5. Relacionar y representar para resolver problemas. Funciones y gráficas

> *La meta de la investigación es descubrir las ecuaciones que subyacen en las manifestaciones de los fenómenos.* Ernst Mach

Descripción: Enseñanza y aprendizaje del análisis matemático. De la caracterización al estudio local de las funciones y a la modelización.
Ponentes: Antonia Redondo, IES Bachiller Sabuco, Albacete. Vicent Font, Univ. Barcelona. Francisco Fernández, IES Padre Manjón, Granada. Sonsoles Blázquez, IES Eulogio Florentino Sanz, Arévalo (Ávila).

6. Entender y modelizar el espacio

> *La geometría es el arte de razonar correctamente sobre figuras incorrectas.* Polya

Descripción: Relación con el espacio: Observación, identificación, caracterización, definición, clasificación, demostración, medida y resolución de problemas en el plano y el espacio. Visión espacial.
Ponentes: Julio A. Rodríguez, CPI Dos Dices, Rois (A Coruña). Miquel Albertí, IES Vallès, Sabadell (Barcelona). Ángel Gutiérrez, Univ. Valencia. Agustín Carrillo de Albornoz, IES Jándula, Andújar (Jaén).

7. Para interpretar y decidir. Estadística y probabilidad

> *La estadística es la única herramienta adecuada para afrontar las enormes dificultades que llenan el camino de las ciencias del hombre.* Galton

Descripción: Tratamiento del azar, estrategias y técnicas para crear actitudes adecuadas hacia los fenómenos no deterministas.
Ponentes: Carmen Batanero, Univ. Granada. Antonio Moreno, IES Los Cahorros, Monachil (Granada). Carmen Da Veiga, IES La Estrella, Madrid. Tomás Queralt, CEFIRE de Torrent (Valencia).

8. Matemáticas para todo y para todos. Popularización y divulgación

> *Un matemático que no es también algo de poeta nunca será un matemático completo.*
> Karl Weierstrass

Descripción: Matemáticas, cultura y sociedad, etnomatemática. Divulgación matemática. Recursos y materiales para la enseñanza de las matemáticas
Ponentes:
José Muñoz, IES Macarena, Sevilla. Constantino de la Fuente, IES Cardenal López de Mendoza, Burgos. Mª Teresa Otero, IES Antonio Fraguas, Santiago de Compostela. Francisco España, Centro de Profesorado. Córdoba.

9. Ordenadores: una tecnología más en el aula de Matemáticas

> *¿Por qué esta magnífica tecnología científica, que ahorra trabajo y nos hace la vida tan fácil, nos aporta tan poca felicidad? La respuesta es ésta, simplemente: Porque aún no hemos aprendido a usarla con tino.* Albert Einstein

Descripción: Diseño y gestión de entornos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas basados en el uso de tecnología. Nuevos recursos educativos. Modos de uso efectivos e influencia en el aprendizaje. Utilización actual en las aulas de matemáticas y perspectivas de futuro.
Ponentes: José Antonio Mora, IES San Blas, Alicante. Mariano Real, CPR de Zafra, Badajoz. Julio Ruiz. IES Torre del Prado, Málaga. Pedro Cobo, IES Pius Font i Quer, Manresa (Barcelona).

Grupos de Debate

1. La enseñanza de las Matemáticas en la universidad. Conexión con otros niveles educativos.

Coordinador:Tomás Recio. Univ. Cantabria

2. Implicaciones en el currículo de matemáticas de los últimos estudios y directrices educativas (LOE, evaluaciones externas, etc.)

Coordinador: Antonio Pérez. Univ. Sevilla

3. Formación de profesores de Matemáticas

Coordinador: Pilar Azcárate. Univ. Cádiz

Talleres

Son cursos de una o dos horas en los que el objetivo principal es la manipulación interactiva de materiales, software, la exposición de actividades concretas, etc.

Comunicaciones

Consisten en intervenciones breves en las que se podrá exponer y compartir, transmitiendo a otros compañeros puntos de vista sobre educación matemática, experiencias de aula, etc.

Zoco Matemático

El Zoco Matemático pretende ser una oferta que se hace a todos aquellos asistentes que deseen disponer de un espacio físico y horario en el que puedan presentar materiales didácticos, recursos, programas informáticos, pósteres, etc. Se trata, junto con las Comunicaciones y Talleres, de un canal ideal para tomar parte activa en las XIII JAEM.

Cuotas de inscripción

Cuotas de Incripción	Hasta el 15-05-2007	Desde el 15-05-2007
Socios de la FESPM o de las Sociedades que han firmado convenio con ella	100 €	130 €
No socios	160 €	200 €

Inscripciones

CÓMO FORMALIZAR LA INSCRIPCIÓN:

1. Abonar la cuota de inscripción mediante una transferencia bancaria, indicando con claridad el nombre y apellidos, a:

   SAEM THALES-XIII JAEM
   Caja Granada
   c/c núm.: 2031 0074 15 0115809202

   También puedes hacerlo mediante un talón nominativo a favor de SAEM THALES-XIII JAEM

2. Rellenar el boletín de inscripción y enviarlo, junto con la copia del justificante de pago de la cuota o el talón nominativo

   SAEM THALES (XIII JAEM)
   Apdo. de correos: 673
   18080 Granada

También puede realizarse rellenando el boletín a través de la página web de las XIII JAEM,

http://thales.cica.es/jaem

Ésta es la opción recomendada.

ANULACIONES:
Sólo serán atendidas aquellas solicitudes de reembolso de la cuota de inscripción que se realicen antes del 15 de mayo de 2007.

Homologación

Se ha solicitado que las XIII JAEM sean homologadas por la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía, lo que supondrá su reconocimiento estatal a efectos de sexenios, concursos, etc. Se homologarán 22 horas. También han sido reconocidas por la Universidad de Granada con dos créditos de libre configuración.

Alojamiento

La agencia oficial para el congreso XIII JAEM es

VIAJES JABALCUZ

A través de ella se pueden gestionar tanto el viaje como el alojamiento. La información de su oferta está disponible en la página de las jornadas

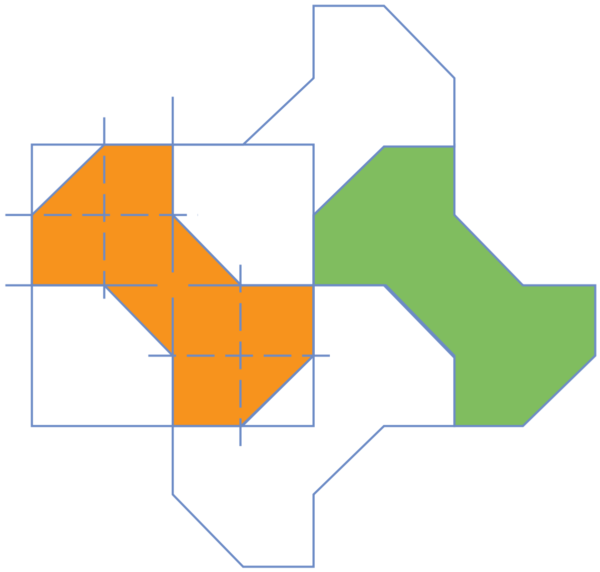
http://thales.cica.es/jaem

XIII
Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas

Granada
del 4 al 7 de julio de 2007

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matematicas

SAEM *Thales*



Normas para la presentación de Talleres

Son cursos de una o dos horas en los que el objetivo principal es la manipulación interactiva de materiales, software, la exposición de actividades concretas, etc.

1. Los participantes a las XIII JAEM pueden presentar propuestas de realización de Talleres durante las mismas.
2. Quienes quieran presentar propuestas, deberán enviar una descripción del Taller, indicando de la manera más detallada posible, el material que ha de poner a su disposición el Comité Organizador de las XIII JAEM.
3. El plazo de admisión de propuestas finaliza el día 1 de abril de 2007. A continuación, se confirmará a los autores si su propuesta ha sido aceptada por el Comité de Programa y si existe algún problema con el material que ha sido solicitado al Comité Organizador .
4. La descripción de los Talleres aceptados y realizados se publicará en las actas de las XIII JAEM. Para preparar este documento, seguir las normas para la publicación establecidas en este anuncio.
6. Se ofertan dos posibilidades de tiempo. La que se elija debe especificarse en la descripción del Taller: Taller de una hora, Taller de dos horas.

Normas para la presentación de comunicaciones

1. Las Comunicaciones deben estar referidas a la enseñanza o el aprendizaje de las Matemáticas en cualquiera de los niveles educativos.
2. Han de encuadrarse en los Núcleos Temáticos propuestos aunque también se ofrece la posibilidad de hacerlas sobre cualquier otro tema.
3. Deben ser inéditas, no habiéndose publicado con anterioridad.
4. Si es de varios autores, al menos uno ha de estar inscrito. El certificado en este caso, será colectivo.
5. La admisión de los trabajos quedará supeditada a la decisión del Comité de Programa.
6. El plazo de admisión finaliza el día 1 de abril de 2007.
7. Deberá expresarse con claridad qué tipo de material de apoyo necesita para su exposición (retroproyector para transparencias o de opacos, proyector de diapositivas, video, cañón, ordenador, ordenadores en red, software, etc.). Todas las presentaciones informáticas deben venir en formato Power-Point. En otros supuestos, consultar con la Organización.
8. Se dispondrá de 15 minutos para su exposición más 10 de coloquio con los asistentes.
9. Se publicarán en las Actas de las XIII JAEM, siempre que se adapten a las condiciones que se especifican en las normas para la publicación establecidas en este documento.

Normas de participación en el Zoco:

1. Quien desee hacer uso del Zoco deberá enviar una descripción de lo que presentará así como una relación detallada del material que lo compone: paneles, tamaño de las piezas que presenta, etc.
2. Ha de indicar con claridad qué desea que la organización ponga a su disposición: mesas, lugar para colocar posters, ordenador, etc.
3. El plazo de admisión de peticiones para el Zoco Matemático termina el 1 de abril de 2007. Posteriormente se le comunicará si se ha aceptado su participación y si existe algún problema con las peticiones efectuadas.
4. Se presentará una memoria que resuma el contenido de lo expuesto en el Zoco para publicarlo en las actas de las XIII JAEM, siempre que se adapta a las condiciones que se especifican en las normas para la publicación establecidas en el documento.
5. Los solicitantes se comprometen a montar y desmontar su material en el espacio que se le asigne y a estar presentes en el lugar en los momentos que se les indique para que los asistentes puedan dialogar con ellos sobre lo expuesto.
6. Para el transporte hasta la sede de las JAEM de los materiales a exponer en el Zoco, deben ponerse en contacto con el Comité Organizador para informarles sobre la forma de hacerlo y, en su caso, los trámites para solicitar alguna ayuda económica.

No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de una Comunicación, Taller o Zoco

Normas de publicación en las Actas

La publicación en las Actas de las XIII JAEM de Comunicaciones, Talleres y Zoco Matemático está sujeta a la aceptación y cumplimiento de las siguientes NORMAS:

Enviar dos copias en papel, formato DIN A4, a:

S.A.E.M. THALES (XIII JAEM)
Apdo. Correos 673
18080 Granada

Ocuparán como máximo 5 páginas DIN A4, incluyendo notas, referencias bibliográficas, fotografías, gráficos, etc.
Con el objetivo de facilitar la posterior elaboración de las Actas, enviar un archivo a la dirección de correo electrónico

xiiijaem@fespm.org

en formato MS-Word que se ajuste a las siguientes características:
Tipo: Times New Roman de 11 puntos. Espaciado e interlineado sencillo. Evitar el uso de características especiales como letra capital, viñetas, estilos, tabuladores, sangrías, columnas, encabezados, pies... No usar subrayados. En la primera página sólo aparecerá: el título de la comunicación en mayúsculas (Times 14 puntos, centrado), debajo autores (Times 12 puntos, centrado), debajo la filiación centro / departamento / universidad, si procede (Times 12 puntos), resumen / abstract (Times 10 puntos, justificado a ambos lados). Los márgenes de la página son: superior e inferior 2,5cm, laterales: 3cm. Los gráficos e imágenes se incluirán en el propio documento. Títulos de párrafos: 13 puntos, negrita. En el asunto del correo electrónico, escribir el título del trabajo y en el cuerpo del mensaje indicar estos datos:

- Nombre y apellidos de la persona o personas que presentan el documento.
- Nivel educativo del contenido del documento
- Dirección postal
- Teléfono de contacto
- Medios necesarios para su exposición
- Un resumen en castellano de 10 líneas como máximo ■

SUMA 54
Febrero 2007, pp. 137-141

Secretaría de Relaciones Internacionales de la FESPM

Este trabajo pretende dar a conocer a nuestros asociados, y lectores en general de la revista SUMA, las gestiones realizadas en el año 2006 por parte del responsable de la Secretaría de Relaciones con Iberoamérica que, desde marzo de 2006 asume, también la responsabilidad de la Secretaría de Relaciones con Europa.

Secretaría de Relaciones con Iberoméríca

La razón:
¡Ay quién alcanza la verdad!
El corazón:
Vanidad.
La verdad es esperanza.

A. Machado

En los últimos diez años, muchos países del ámbito iberoamericano han puesto, y están poniendo, en marcha reformas educativas con el objetivo principal de actualizar las estructuras educativas para poder afrontar los retos que se avecinan con la entrada en el tercer milenio.

En medio de esas situaciones de cambios, se encuentra una de las disciplinas consideradas más universales por cuanto que utiliza un mismo lenguaje en todos los lugares y los contenidos solo suelen variar en la situación que ocupan dentro del currículo pero, en general, coinciden. Se trata de las Matemáticas. Es indudable que el vertiginoso auge que van tomando las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación) está influyendo en los responsables de las áreas educativas para adaptarse a esta realidad. Y las Matemáticas constituyen una de las disciplinas que más requieren esa adaptación.

A finales de la década de los años setenta del siglo pasado, la calculadora empezó a irrumpir en las aulas de los centros educativos. Lo hizo de una forma gradual. En primer lugar porque los precios de las calculadoras eran excesivamente altos en esa etapa inicial. Pero cuando los precios se popularizaron, la estructura educativa tardó en adaptarse a los avances que producía la presencia de la calculadora en las aulas, especialmente en enseñanza secundaria y, además, se entablaron acalorados debates en torno a la conveniencia o no de admitir su uso como un instrumento de trabajo más. Pasados estos años, se ha llegado a un cierto consenso sobre la idea de la utiliza-

Sixto Romero Sánchez
Secretario de Relaciones Internacionales de la FESPM

ción en Secundaria, aunque no así en Primaria donde la polémica continúa, a pesar de que las últimas investigaciones apuntan un sin fin de efectos positivos cuando se la utiliza siguiendo determinados criterios (Martín Adrián, 2003).

Sin embargo, la irrupción de las TIC en los centros educativos está siendo mucho más rápida porque, entre otros factores, los gobiernos están apostando por la dotación del software con gran celeridad. No existe la misma celeridad en la necesaria formación del profesorado para adaptarlo a estos medios.

Ante esta situación de reformas más o menos generalizadas, es conveniente realizar encuentros que permitan el intercambio de experiencias y, sobre todo, la necesaria reflexión antes de tomar medidas que pudieran producir efectos negativos o irreversibles.

Relación con la Universidad Internacional de Andalucía

Con esta idea el proyecto presentado a la Junta de Gobierno de la FESPM consiste en la celebración de un encuentro entre las Sociedades Federadas en la FISEM con el título *La Educación Matemática en el ámbito Iberoamericano (Matemáticas en la Era del Conocimiento*, que se celebraría en el año 2007 en la Sede Iberoamericana de la Rábida en Huelva (España).

a) Tópicos

La propuesta de celebrar un encuentro internacional bajo el título citado ut-supra tendría como objetivo dar respuesta a las siguientes preguntas y tratar de unificar criterios sobre la elección de los currículos escolares tanto en enseñanza Primaria como en Secundaria.

Basándonos en los principios de planteamiento urgente de resolución de problemas educativos genéricos, en todos los países iberoamericanos, que se pudieran derivar de los siguientes tópicos:

- ¿Existe un proceso, en la actualidad, de reforma educativa en cada país iberoamericano? ¿qué temporalización tiene o ha tenido?
- ¿En qué fase de desarrollo se encuentra la reforma emprendida?
- ¿Cuál es la estructura de niveles educativos establecidos y qué edades corresponden?
- ¿Cuáles de esos niveles son gratuitos y obligatorios?
- ¿Cuáles son los objetivos que pretende conseguir la reforma en los distintos niveles del sistema?
- ¿Están definidos en la reforma los objetivos de las Matemáticas para los distintos niveles educativos?
- ¿Cuáles son los contenidos concretos con los que se desean cubrir los objetivos establecidos? ¿Existen estudios sobre la idoneidad de esos contenidos?
- ¿Qué papel se reserva a las TIC en la reforma emprendida?

La propuesta que queremos hacer desde la Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas es, partiendo de la premisa de la equidad en la **Educación Matemática**, incidir sobre todo en aquellas problemáticas del profesorado que pudiera contemplar sus verdaderas funciones de enseñantes, para lo que se necesita un

- Reconocimiento
- Apoyo y valoración de su gestión.

Los centros docentes a través de su participación, autonomía y gobierno deben contribuir a un mejor desarrollo en el establecimiento de líneas de investigación en la formación inicial y permanente del profesorado en Educación Matemática, participación en el funcionamiento y el gobierno de los centros para conseguir llevar a buen término ese propósito. Eso significaría que mejoraría la enseñanza de las Matemáticas en los diferentes países.

Actualmente existen o están en fase de aprobación, por los diferentes gobiernos, leyes que van a marcar el futuro de generaciones en materia de educación. Para la sociedad, la educación es el medio de transmitir y, al mismo tiempo, de renovar la cultura y el acervo de conocimientos y valores que la sustentan, de extraer las máximas posibilidades de sus fuentes de riqueza, de fomentar la convivencia democrática y el respeto a las diferencias individuales, de promover la solidaridad y evitar la discriminación, con el objetivo fundamental de lograr la necesaria cohesión social. Además, la educación es el medio más adecuado para garantizar el ejercicio de la ciudadanía democrática, responsable, libre y crítica, que resulta indispensable para la constitución de sociedades avanzadas, dinámicas y justas. Por ese motivo, una buena educación es la mayor riqueza y el principal recurso de un país y de sus ciudadanos. Es bueno tener en cuenta que en noviembre de 1990 se reunían en París los Ministros de Educación de los países de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico, con objeto de abordar cómo podía hacerse efectiva una educación y una formación de calidad para todos. El desafío era cada vez más apremiante y los responsables educativos de los países con mayor nivel de desarrollo se aprestaron a darle una respuesta satisfactoria.

Catorce años más tarde, en septiembre de 2004, los más de sesenta ministros reunidos en Ginebra, con ocasión de la 47ª Conferencia Internacional de Educación convocada por la UNESCO, demostraban la misma inquietud, poniendo así de manifiesto la vigencia del desafío planteado en la década precedente. Si en 1990 eran los responsables de los países más desarrollados quienes llamaban la atención acerca de la necesidad de combinar calidad con equidad en la oferta educativa, en 2004 eran los de un número mucho más amplio de Estados, de características y niveles de desarrollo muy diversos, quienes se planteaban la misma cuestión.

Y es aquí donde los países iberoamericanos se están poniendo manos a la obra. Por citar algunos, el gobierno de Perú ha elaborado un Programa Nacional de Emergencia Educativa para los próximos años, donde las mejoras de competencias en la comunicación como eje transversal y aprendizaje representan la clave como factor ético de cambio cultural y social para conseguir el tan ansiado concepto de *calidad*.

b) Propuesta

En estos términos la FESPM no es ajena ante tan imperiosa necesidad y, es por ello que la propuesta es realizar este seminario abierto a la comunidad educativa española en materia de Educación Matemática con los propósitos:

- Promover y apoyar la optimización de logros en los estudiantes y en la formación de docentes en educación matemática.
- Apoyar a los docentes en el desarrollo y profundización de sus conocimientos de Matemática y Didáctica de la Matemática.
- Conocer experiencias valiosas de docentes de los países iberoamericanos, y de estudios realizados para el mejoramiento de la calidad de la Educación Matemática.

c) Ponentes

Serían los presidentes de las Sociedades de las sociedades federadas en la FISEM

d) Directores del proyecto

- Sixto Romero, profesor de la Universidad de Huelva y vocal de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para las relaciones con Iberoamérica.
- Luis Balbuena, profesor de Educación Secundaria y Secretario de la Federación Iberoamericana de Educación Matemática (FISEM)
- Manuel Torralbo, profesor de la Universidad de Córdoba, presidente de la SAEM Thales, vicepresidente de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM)

Colaboración con la sociedad peruana SOPEMAT

Del 23 al 27 de enero de 2006 se celebraron en la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) en Lima las *Jornadas Internacionales de Educación Matemática* en las que estuvo presente la FESPM, representada por Sixto Romero. La invitación cursada consistió en la impartición de:

a. Conferencia inaugural: *Mitos en Educación Matemática.*
b. Conferencia de Clausura: *Matemáticas y atención a la diversidad*
c. Taller de resolución de problemas para profesores de Secundaria y profesores de facultades de educación

Como consecuencia de esta visita se han establecido varios contactos con la PUCP de Lima en la persona del profesor César Carranza con la posibilidad de realizar programas de formación conjunta entre los dos países, así como la posibilidad de establecer un programa de doctorado entre la UHU y PUCP.

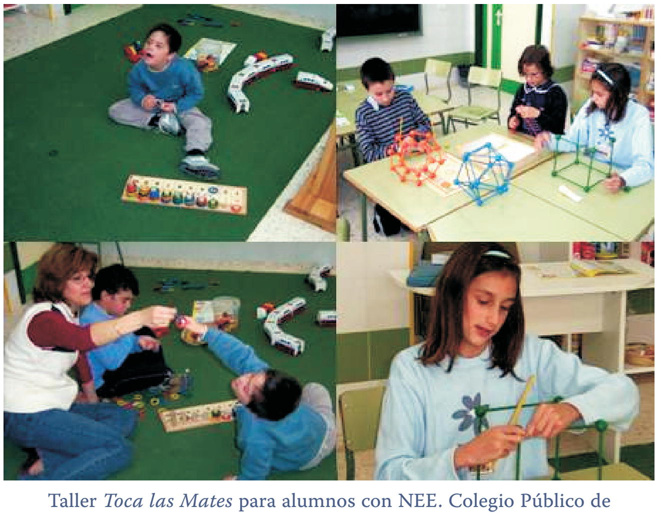
También se realizaron gestiones para que 10 profesores y profesoras de secundaria realizaran, gratuitamente, los cursos *Thales-Cica* en internet durante el año 2005-2006.

Congreso de la Sociedad Venelozana de Educación Matemática

A partir del CIBEM de Oporto en julio de 2005 se propuso a la FESPM la posibilidad de participar en el Congreso de Investigación y Educación Matemática que se celebraría en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador Instituto Pedagógico de Maturín- en el estado de Monagas (Venezuela) que se desarrolló del 21 al 23 de junio de 2006. Participó el profesor Sixto Romero con

A. La lección inaugural: M*atemáticas para alumnos con NEE. Un proyecto de aplicación para alumnos con diferentes patologías.*
B. Taller sobre Modelización Matemática en Secundaria.

A partir de esta visita se mantuvieron reuniones con profesores del IPM dedicados a la enseñanza de la matemática para alumnos con NEE, se concretó un proyecto de colaboración entre los profesor Fernando Castro y Virginia Morillo y varios profesores de la Universidad de Huelva: *La enseñanza de las matemáticas para estudiantes con deficiencias auditivas y sordos*. Durante la estancia se presentó el trabajo *Attention to the diversity. Mathematics for students with special difficulties presentation (SDP)* y cuyos autores son Virginia Movilio, Sixto Romero, Fernando Castro, que ya había sido presentado en SRNI (Chekia) en el marco del CIEAEM-58 en verano de 2006.



Taller *Toca las Mates* para alumnos con NEE. Colegio Público de Infantil y Primaria *Federico García Lorca* (Huelva)

Este proyecto ha favorecido que profesores que trabajan en la Universidad de Palermo (Italia) junto con los profesores citados antes comiencen a trabajar, en el año 2007 con alumnos discapacitados: sordos y ciegos.

Relación con la Federación Iberoamericana Sociedades de Educación Matemática (FISEM)

La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas está en contacto permanente con el Secretario General de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática en cuanto a contactos con las respectivas sociedades que conforman la citada federación. La revista digital *Unión* es el órgano de difusión de las actividades que se vienen realizando en todas las sociedades iberoamericanas federadas. En la actualidad hay un proyecto conjunto entre ambas federaciones al objeto de configurar definitivamente la FISEM en sus aspectos jurídicos.

Cartel anunciador Jornadas de la APMEP

Secretaría de relaciones con Europa (en funciones)

Como se ha indicado anteriormente desde la última reunión de la JD de la FESPM, en marzo de 2006, la Vocalía de Relaciones con Iberoamérica se hizo cargo, hasta las nuevas elecciones en el próximo verano de 2007, de la Vocalía de Relaciones con Europa.

Las actividades realizadas hasta el momento se pueden resumir en:

a) Contactos con el ejecutivo de la *Commissión International des Études et l´Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques (CIEAEM)* al objeto de iniciar una colaboración fructífera debido a la presencia de varios profesores españoles en la citada comisión. Información *http://www.uhu.es/gmmrm* o *http://www.cieaem.net*

b) Asistencia al congreso de la APMEP celebrado en Clermont-Ferrand (Francia) al que fue invitada la FESPM Acudió Sixto Romero en su representación. Toda la documentación del congreso, para la persona interesada está a su disposición en la secretaría de la FESPM. Para información detallada sobre el congreso visitar la página web: *http://apmep.jn.free.fr/*

A este congreso cuyo cartel anunciador es bastante sugerente y con un título atractivo *¿Las matemáticas: un volcán activo?*

Asistieron cerca de 800 profesores de matemáticas de todos los niveles educativos de la enseñanza pública francesa. Las Jornadas se celebraron del 26 al 28 de octubre cuyo contenido se puede resumir en:

- Debates
- Reuniones de las representaciones regionales y nacionales de la APMEP
- Reunión con invitados extranjeros.
- Otros

b.1. Conferencias plenarias

La conferencia plenaria de inauguración corrió a cargo del profesor Yves Chevallard, Profesor del IUFM de Aix-Marseiille con título: ¿Las matemáticas serán en el futuro el corazón de una revolución epistemológica en la escuela y la sociedad?

La conferencia de clausura fue impartida por el profesor Alain Bouvier, antiguo Rector y miembro del Alto Consejo de Educación, con el título: *A las puertas del siglo XXI, ¿qué es lo que está en juego para las matemáticas, su enseñanza y la formación de maestro?*

b.2. Conferencias semi-plenarias en paralelo

Jean Dhombres, Escuela Altos Estudios en Ciencias sociales: *Cuestiones vivas para la enseñanza en el futuro de las matemáticas.*

Gilles Chazot, Laboratorio Magmas y Volcanes. Universidad Blais Pascal de Clermont-Ferrand. *Los volcanes en ecuaciones: Matemáticas, Física y química al servicio de las ciencias de la tierra.*

Claire Margolinas, INRP_UMR_ADEF y Floriane Wozniak, IUFM, Lyon: *¿Las matemáticas en la escuela?¡ Más com-*

plejo de lo que parece! El caso de la numeración desde infantil…al instituto.

Pierre Bernard, Universidad de Blaise Pascal-CNRS y Michel Fogli,Universidad de Blaise Pascal-CNRS, *Matemáticas para la vigilancia del viaducto de Millau.*

b.3. Talleres

Durante todos los días en sesiones paralelas y en una amplia oferta de elección se prepararon 22 talleres para los días 26 y 27 en sesión de tarde y 22 talleres para la sesión matinal del día 28 de octubre.

http://apmep.jn.free.fr/Ateliers_Info.php

b.4. Otras actividades

Un amplio abanico de actividades se ofertó por parte de la organización:

- Debates
- Reuniones de las representaciones regionales y nacionales de la APMEP
- Reunión con invitados extranjeros.

Es importante destacar la reunión con la Junta Directiva de la APMEP de los siguientes países invitados: Marruecos, Argelia, Bélgica y España. En esta reunión se llegó al acuerdo de trabajar fundamentalmente sobre tres temas:

a) Evaluación
b) Olimpiada internacional a través de Internet organizada en AGADIR
c) Federación Europea

Viaducto de Millau, Aveyron (Francia)

Si hubiese que destacar algo importante de esta reunión, es el interés mostrado por los compañeros de Marruecos en trabajar en colaboración con profesores de Cataluña y Andalucía. A partir de varios contactos con España, se presentó en la última Junta de Gobierno de la FESPM, por parte del profesor Sixto Romero toda la información relativa a una propuesta de un gran Concurso Internacional de Matemáticas organizado por el Centro de Investigación de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas de Agadir (CREMA), y cuyos detalles se puede hallar en la dirección *http://cremagadir.ifrance.com/* Por último se adquirió el compromiso de que en los próximos meses se iniciara una reunión conjunta de los Rectores de las Universidades de Huelva y Agadir, con el fin de comenzar a dar los pasos necesarios para la posible firma de un convenio de colaboración en materia de formación del profesorado, y doctorado en Educación Matemática y en todos aquellos programas que se imparten en la actualidad y que pudieran interesar a los compañeros de Marruecos. Esto, evidentemente significaría uno de los objetivos que no debemos olvidar: la colaboración entre nuestro país y el Magreb. ■

El viaducto de Millau en Aveyron (Francia) es el puente más alto del mundo. Inaugurado el 14 de diciembre de 2004 tras 36 meses de trabajos de construcción, la estructura alcanza una altura máxima de 343 metros sobre el río Tarn, y una longitud de 2.460 m, entre el Causse du Larzac y el Causse Rouge; tiene 7 pilares de hormigón y el tablero tiene una anchura de 32 m. Fue concebido por el arquitecto Norman Foster y por el ingeniero Michel Virlogeux.

SOCIEDAD DE ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN OPERATIVA. SEIO

II Concurso de Proyectos Educativos en Estadística e Investigación Operativa para Profesores de Enseñanza Secundaria y Bachillerato

La Sociedad de Estadística e Investigación Operativa (SEIO), consciente de la importancia que estas disciplinas tienen hoy en día como materias de formación académica y herramientas para la toma de decisiones en los entornos públicos, privados y empresariales, desea contribuir a la difusión de la Estadística y de la Investigación Operativa en la sociedad. Reconociendo la transcendencia que tiene el aprendizaje de estas materias en la enseñanza no universitaria, la SEIO ha decidido convocar un concurso con el fin de fomentar la elaboración de material didáctico en los ámbitos de la Enseñanza Secundaria y del Bachillerato.

Bases del concurso

1. Podrán participar todos los profesores que en el curso 2006-07 realicen tareas docentes en los niveles de Educación Secundaria Obligatoria y/o Bachillerato. Los concursantes podrán participar a nivel individual o en grupo.
   Los trabajos se enmarcarán preferentemente en alguna de las dos siguientes líneas:
   Material didáctico en relación con alguno de los temas o tópicos de Estadística o Investigación Operativa incluidos en los programas de los niveles señalados.
   Experiencias didácticas para divulgar y/o fomentar el interés en la Estadística y/o la Investigación Operativa.
   La extensión máxima del trabajo presentado será de 25 páginas y deberá tener una estructura similar a la siguiente:
   - Título y pseudónimo (portada del trabajo).
   - Presentación (incluyendo los objetivos del trabajo y el ámbito educativo al que va dirigido (ESO o Bachillerato, y curso)).
   - Desarrollo del trabajo.
   - Experimentación en el aula y evaluación de la experiencia, en su caso.
   - Referencias, en su caso.

     Los trabajos podrán acompañarse con una presentación en formato electrónico.
4. Los concursantes remitirán una copia del trabajo impresa en DIN-A4, un CD que incluya una copia del trabajo en formato PDF, en su caso la presentación electrónica, y un sobre cerrado indicando en el exterior el título del trabajo y el pseudónimo, y en el interior: nombre y apellidos del autor/es, nombre, dirección y teléfono del centro/s al que pertenece y un e-mail o teléfono de contacto.
5. Los trabajos se remitirán a la siguiente dirección:

   Sociedad de Estadística e Investigación Operativa
   II Concurso de Proyectos Educativos en
   Estadística e Investigación Operativa para
   Profesores de Enseñanza Secundaria y Bachillerato

   Facultad de Ciencias Matemáticas
   Universidad Complutense de Madrid
   Despacho 502, Plaza de Ciencias, 3
   28040-Madrid (Ciudad Universitaria)
6. La fecha límite de remisión de los trabajos será el 31 de Mayo de 2007.
7. Se otorgará un premio de 600 € al mejor trabajo presentado. El concurso podrá ser declarado desierto o compartido entre varios trabajos, sin que ello suponga una variación en su cuantía global.
8. La Comisión de Educación del la SEIO será la encargada de evaluar los trabajos presentados.
9. La fecha límite para la resolución del concurso será el 30 de septiembre de 2007.
10. El trabajo ganador será publicado en la página Web de la SEIO (www.seio.es).

Madrid, 1 de diciembre de 2006

NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, Apartado de Correos 19012, 28080 Madrid), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.

2. Los gráficos, diagramas, fotografías y figuras se enviarán impresos en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración. Indíquense los créditos de las fotografías y dibujos.

2. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original impreso ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos no serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, etc.

4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de un máximo de 625 caracteres contando los blancos, que no necesariamente tiene que coincidir con la introducción al artículo. De este resumen se remitirá también su traducción al inglés.

5. Los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; sociedad federada a la que pertenecen (si procede) y el resumen en castellano y en inglés deberán ir escritos en una misma hoja aparte.

6. Se enviará también en soporte magnético (disco de tres pulgadas y cuarto con formato PC, CDRom o DVDRom) una copia de los archivo de texto que contenga el artículo y del que contega la hoja con los datos y los resumenes, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quieran incluir. La etiqueta debe identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda Microsoft Word para Windows o RFT. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS o TIFF. Para las fotografías se recomienda archivos TIF o BMP y con una definición mínima de 600x600 puntos por pulgada cuadrada.

7. Al menos un ejemplar del texto como los gráficos, si proceden de impresoras, deben ser originales y no fotocopias.

8. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.

9. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo y se incluirán al final del texto.

10. La bibliografía se dispondrá también al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:
    TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma*, n.° 20, 91-98.
    En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:
    GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas*, Labor, Barcelona.
    En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:
    VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2*, ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

11. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ... supone un gran avance (Hernández, 1992). Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ... según Rico (1993).

12. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como -en caso afirmativo- la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido.

13. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

SUMA

Boletín de suscripción

Tarifas	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	25 €	10 €
Centros	40 €	15 €
Europa	50 €	20 €
Resto del mundo	60 €	22 €

Fotocopiar esta hoja y enviar:

por correo a: Revista SUMA. Apartado de correos 19012
E-28080 MADRID
por Fax al: (+34) 912 911 879
por correo-e a: administracion@revistasuma.es

Deseo suscribirme a la revista SUMA:

Nombre y apellidos: ________ NIF/CIF: ________

Dirección: ________ Teléfono: ________

Población: ________ CP: ________

Provincia: ________ País: ________

Correo electrónico: ________ Fax: ________

	Importe (€)
☐ Suscripción a partir del año (3 números) ________	
☐ N.^{os} sueltos ________	
Total	

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto)

☐ Transferencia bancaria (CCC 2085-9981-38-0330066350 / IBAN ES68 2085 9981 3803 3006 6350)

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista SUMA

☐ Giro postal dirigido a Revista SUMA

Fecha y firma:

Nombre y apellidos: ________

Código Cuenta Cliente: Entidad: ⌊_⌊_⌊_⌊_⌋ Oficina: ⌊_⌊_⌊_⌊_⌋ DC: ⌊_⌊_⌋ Cuenta: ⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌋

Banco/Caja: ________

Agencia n.º: ________ Dirección: ________

Población: ________ Provincia: ________

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que, periódicamente, les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (fecha y firma):

SUMA.
REVISTA SOBRE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS.

ISSN 1130-488X

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS