suma+

revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

66

Febrero 2011

suma+

revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

Edita
FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS (FESPM)
Web
Antonio Alamillo Sánchez
www.revistasuma.es

Diseño de la portada: *O. Monzó*
Fotografía de la portada:
Apilaments *- O. Monzó*
Maquetación
T. Queralt y O. Monzó
Revista Suma
Apartado 498
E-46900-Torrent (España)
Fax: *+(34) 912 911 879*
Tirada: *6700 ejemplares*
Depósito legal: *Gr 752-1988*
ISSN: *1130-488X*

66 *Febrero 2011*

actividades de la FESPM

SUMA es una revista de didáctica de las matemáticas de periodicidad cuatrimestral, cuyo objetivo es tratar sobre aquellos aspectos relacionados con su enseñanza y aprendizaje, destinada al profesorado que trabaja en educación infantil, primaria, secundaria y universitaria.

La revista SUMA se edita en Torrent (Valencia) - ESPAÑA

suma+ 66
Febrero 2011

¿Está peor preparada la juventud de hoy que la del siglo pasado?

Suele oírse comentar que la juventud estaba mejor preparada hace 40, 70 o 100 años, no como la de ahora, que sale de nuestros centros educativos sin saber nada. Quisiéramos justificar qué no estamos de acuerdo con esas afirmaciones.

Si comparamos el alumnado de bachillerato de 1930, 1970 y 2010 podríamos darnos cuenta de que la enseñanza formal en los años 30 se realizaba en los institutos: el aprendizaje se basaba en el esfuerzo y la memoria, sólo tenía acceso a lo que memorizaba, no habían salido de su entorno y el conocimiento estaba en unos pocos libros.

Los alumnos de los años 70 ya tenían televisión, se movían de una ciudad a otra, convivían con los primeros turistas, su material didáctico era mejor y más diverso. Aunque el aprendizaje se debía también al esfuerzo y a la memoria (muchos se pueden sentir identificados con esa época), tenían mejores condiciones de estudio y mejoró el rendimiento.

Sin embargo, el joven actual dedica menos esfuerzo y utiliza poco la memoria, ¿acaso la necesita? Tiene todo a su disposición, al alcance de una tecla. Es capaz de hacer cosas impensables para nuestra generación o la de nuestros padres.

Los conocimientos han crecido exponencialmente, el joven de antes tenía pocas asignaturas, recogidas en unos pocos libros. En cambio el de ahora tiene más conocimientos que tratar, contenidos que aprender y problemas que resolver: medioambientales, energéticos, sociales, económicos, etc. Los conocimientos a estudiar, de cada asignatura, no caben en un libro, están dispersos en las redes de información.

Cómo podemos comparar a un joven de 16 años de los años 30 de un área rural, trabajador pero analfabeto, con uno actual que no haya terminado *la E.S.O., pero capaz de manejar un ordenador o un teléfono móvil, que ha viajado y conoce mundo. ¿Tiene menos capacidades? Lo que sí es seguro es que tiene menos necesidades.*

Si comparamos a los diez estudiantes con mejores resultados académicos de las tres generaciones mencionadas, utilizando cada uno las herramientas, tecnología y capacidades de la época, creo que ni nuestros padres ni nosotros tendríamos ninguna posibilidad de competir con los jóvenes actuales, ya que viven la vida de otra forma, y tienen unas capacidades y habilidades que ninguno de nosotros podríamos llegar ni a imaginar.

Los jóvenes que antes salían de su casa estaban obligados por la situación económica o social. Por contra, ahora viajan desde pequeños a cursos de verano para aprender idiomas, con becas Erasmus y muchos creando empresas en lugares insospechados. Los jóvenes de los años 30 ó 70 tenían ganas y se enfrentaban a todo principalmente por necesidad. Ahora los jóvenes son imaginativos, aventureros y son hombres y mujeres de mundo.

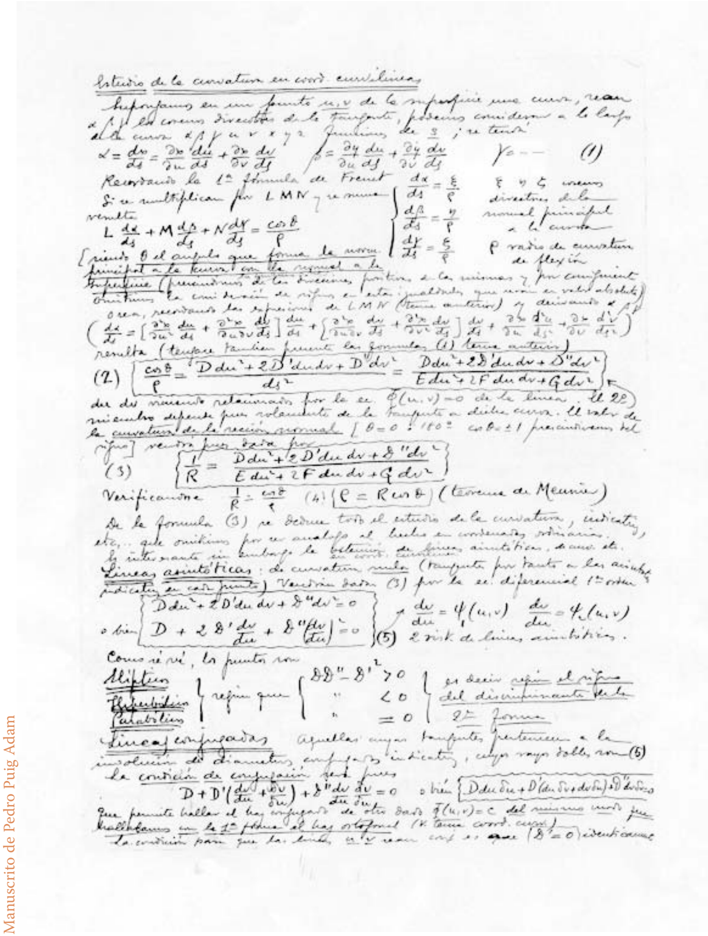
La revolución tecnológica cambia la forma de enseñar y aprender; ahora no podríamos memorizar toda la información existente. Si la metodología a utilizar hoy fuera la de los años 30, no se podría guardar toda esa información en unos pocos libros.

La comparación entre hoy y hace 70 ó 100 años, tal y como la realizan quienes desprestigian la educación actual, es al menos discutible. No se puede comparar la media de los rendimientos del 5% de la población que estudiaba con la media del 100% de la población que estudia actualmente. Podemos apostar que la media del 5% de los mejores estudiantes actuales sería como mínimo tan buena como la de entonces.

La segunda cuestión indiscutible es la mejora que supone que el 100% de la población tenga la posibilidad (mejor o peor aprovechada) de acceder al sistema educativo, frente al 5% de hace años (al menos en secundaria).

Y todo esto en un contexto social (por muchas y diversas razones) en el que cada vez más (o al menos recientemente) el aprendizaje escolar, como preparación para una vida futura, está desprestigiado.

Lo expuesto no es óbice para que no exista la posibilidad de mejorar algunas (muchas) cosas, pero esto no es excusa para afirmar con rotundidad que cualquier tiempo pasado fue mejor. ■



Manuscrito de Pedro Puig Adam

artículos

suma+ 66
Febrero 2011, pp. 7-15

Presencia y ausencia del número natural en la Educación Infantil

En este artículo analizaremos el tratamiento que se ha dado al número en los currículos españoles de Educación Infantil desde 1973 tomando como marco de reflexión los distintos accesos escolares al número natural. Criticaremos la argumentación sobre la que se apoya la construcción psicológica del número según Piaget y señalaremos los posibles efectos que han tenido estas ideas en la Educación Infantil. Por último, pondremos de manifiesto las consecuencias de limitar la enseñanza del número a los nueve primeros y de centrar la atención en su representación escrita.

Palabras Clave: Educación infantil, accesos al número natural, currículo educativo.

Presence and Absence of Natural Number in Early Chilhood Education

This paper examines the treatment that has been given to the number in the Spanish Early Childhood Education curriculum since 1973 using the different school approaches to the natural number as a reflection framework. We criticize the argument that rests on the psychological construction of the number according to Piaget and point out the possible effects that these ideas have had in Early Childhood Education. Finally, we show the consequences of restricting the teaching to the nine first numbers and focusing on their written representation.

Key words: Early childhood education, approaches to natural number, educational curriculum

Introducción

En 1959 la Organización Europea para la Cooperación Económica (la actual Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico) organizó en Royaumont un seminario con la intención de marcar las líneas de una reforma radical en la enseñanza de las matemáticas. Las propuestas de este seminario se orientaban hacia la educación secundaria y, fundamentalmente, tenían la intención de preparar a los futuros estudiantes universitarios. Sin embargo, en posteriores reuniones se convino la necesidad de extender la reforma a la educación primaria. Esta reforma de la enseñanza de las matemáticas encontró el apoyo de la escuela bourbakista en el campo de las matemáticas y de las ideas de Jean Piaget sobre el desarrollo de las estructuras mentales en el terreno de la psicología.

La conexión entre las matemáticas bourbakistas y la psicología genética piagetiana surgió en el coloquio sobre estructuras matemáticas y estructuras mentales que tuvo lugar en Melun en el año 1952. La reunión se inició con dos conferencias pronunciadas por Jean Dieudonné y Jean Piaget: la primera trataba sobre las estructuras bourbakistas; la segunda, sobre las estructuras mentales. Como explica Piaget (Beth y Piaget, 1961/1968), la convergencia entre las dos conferencias sorprendió a los autores y, posiblemente, señaló un camino a seguir.

> Sin conocer en aquel entonces la obra de Bourbaki, habíamos encontrado precisamente, simplemente tratando de clasificar las distintas estructuras operatorias observadas empíricamente en el desarrollo de la inteligencia del niño, tres tipos de estructuras irreductibles entre sí en su punto origen, pero que se combinan luego de diversas formas […] Aquella convergencia entre las dos charlas iniciales, que eran enteramente independientes, sorprendió a los miembros del coloquio, empezando por los mismos autores. (Beth y Piaget, 1961/1968, p. 210)

Posiblemente, la intención de Piaget a la hora de identificar y describir el desarrollo de las estructuras mentales en el niño no era influir sobre la reforma del sistema educativo. De hecho, Piaget sostenía que cualquier análisis genético podía verse contaminado por la enseñanza y, en consecuencia, las conclusiones desde un análisis genético no podrían exportar-

David Arnau
Universitat de València Estudi General

se al mundo de la enseñanza. Sin embargo, la reforma, o la creación en el caso español, de los currículos de Educación Infantil, a lo largo de la década de los 70, se vio influida por las ideas de Piaget sobre el desarrollo de las estructuras mentales y la génesis de los conceptos matemáticos.

Pero, ¿qué postulaba la teoría de Piaget respecto a la construcción de la idea de número? Su tesis principal era que los niños de estas edades no disponían de las estructuras mentales necesarias para hacer un uso operatorio del número. Al exportar su teoría al currículo de Educación Infantil, las actividades numéricas se sustituyeron por las prenuméricas y, aunque la enseñanza de los números volvió a formar parte del currículo oficial, se instaló una sombra de duda sobre la capacidad para usarlos por parte de los niños.

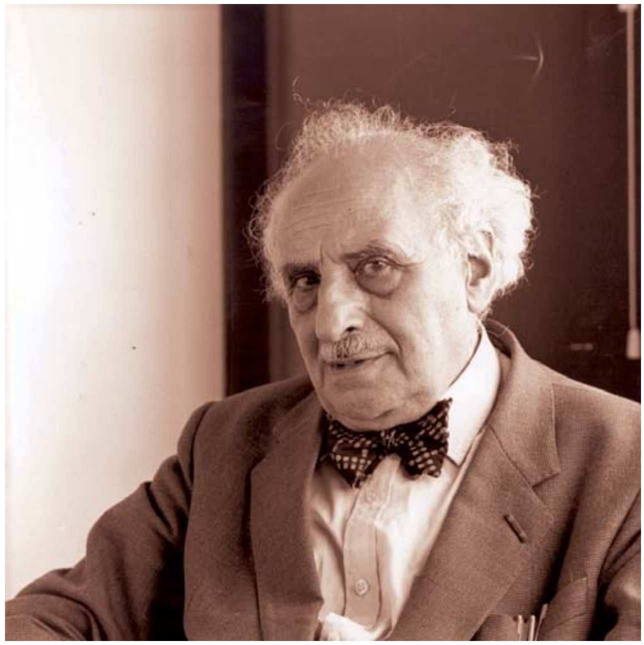
En este artículo describiremos los accesos escolares al número natural y los utilizaremos para analizar el tratamiento (o la ausencia) que se ha dado al número en los currículos españoles desde 1973. Mostraremos las consecuencias que han tenido las ideas de Piaget en la enseñanza del número en la Educación Infantil y criticaremos el análisis sobre el que apoyó la construcción del número. A modo de conclusión, ofreceremos una propuesta de aquello que debería atenderse en la enseñanza del número en el segundo ciclo de Educación Infantil.

Antes de iniciar la exposición hemos de aclarar que no se puede responsabilizar a Piaget de las implementaciones curriculares que se ampararon en su nombre o sus ideas, pues, como se ha señalado, él mismo reconocía el papel transformador de la enseñanza. Más bien al contrario, debemos reconocer la importancia y calidad de la obra de Piaget así como el esfuerzo de otros autores que, de una forma u otra, aparecerán citados.

Accesos escolares al número natural

Como señala Freudenthal (1973) el singular “concepto de número” es engañoso y depende del punto de vista desde el que se estudie. Así, si nuestra intención es dar cuenta de los distintos usos cotidianos que podemos hacer del número, nos encontraremos con: número para contar, número de numerosidad, número para medir y número para calcular. Sin embargo, desde el punto de vista de la matemática formal podríamos distinguir: número natural, número entero, número racional, etc.

Si asumimos que una intención primera de cualquier sistema educativo es conseguir una alfabetización matemática de la población, deberemos asegurar la posibilidad de alcanzar la competencia en los usos cotidianos que podemos hacer del número en los distintos contextos en los que aparece. Así, si nos encontramos en una situación de juego donde debemos contar hasta un número, nos hallaremos en un contexto de secuencia numérica y usaremos el número para contar. Si la intención es determinar el número de objetos que componen un conjunto, nos encontraremos en un contexto cardinal y usaremos el número de numerosidad.



Hans Freudenthal

Desde un punto de vista escolar, podemos partir de dos accesos para dar cuenta de los distintos usos del número: el acceso ordinal y el acceso cardinal. El primero de estos dos accesos se apoya en la actividad de contar y tendría su soporte formal en la construcción del número según Peano. El acceso cardinal, por su parte, se basa en la operación de coordinar conjuntos y respondería a la construcción del número natural según Cantor.

Podríamos considerar una supuesta tercera vía que combina el acceso cardinal y los resultados obtenidos por Piaget y sus colaboradores sobre la construcción psicológica del número. La actividad de coordinar conjuntos vuelve a ser la que permite la construcción de la idea de número, pero se considera que el niño debe recurrir a las estructuras de seriación para poder realizarla en cualquier situación. Como la construcción del número exige la participación simultánea de estructuras de clasificación (necesarias para llegar a la idea de número como la clase de equivalencia de todos los conjuntos que se pueden coordinar) y seriación, los defensores de este acceso concluyen que el número supone la construcción simultánea del número cardinal y ordinal.

A continuación, desarrollaremos con mayor profundidad[1] cada uno de estos accesos para así poder llevar a cabo un análisis del tratamiento que ha recibido el número en los distintos currículos españoles de Educación Infantil.

El acceso ordinal

En el acceso ordinal, el aprendizaje de la secuencia numérica y de la acción de contar ocupan un papel primero que contrasta con el lugar terminal en el que se ubica dentro del acceso cardinal. De acuerdo con los estudios de Fuson (1988), en el aprendizaje de la secuencia numérica se distingue la adquisición y la elaboración.

La adquisición exige de la memorización de los números con nombre no algorítmico (en español serían uno, dos… quince; pues el dieciséis ya se obtendría de la combinación de diez y seis); la producción de los nombres de las decenas a partir de las unidades y, por último, las reglas de generación algorítmica de los nombres de los nuevos números a partir de las decenas y unidades. Podemos distinguir tres fragmentos dentro de la secuencia numérica que emite un individuo que la está aprendiendo: una primera parte estable y convencional, una segunda parte estable y no convencional y una tercera parte inestable.

En la fase de elaboración se establecen relaciones entre los numerales de la parte estable y convencional que permitirá pasar de un emisión en bloque a una emisión reflexiva que convertirá a la secuencia numérica en el instrumento sobre el que construir la aritmética. Mientras se aprende de manera reflexiva la secuencia numérica, los individuos demuestran distintos niveles de elaboración: cuerda, cadena irrompible, cadena fragmentable, cadena numerable y cadena bidireccional. Por ejemplo, una característica del nivel de cadena irrompible es la necesidad de iniciar el conteo desde el uno, mientras que en el nivel de cadena fragmentable es posible iniciarla desde otro número.

Cuando optamos por un acceso ordinal, la secuencia numérica se convierte en la herramienta que nos permitirá usar el número en cualquier contexto. Así, cuando utilizamos la secuencia numérica para contar, debemos establecer una correspondencia uno a uno entre los numerales y una serie de objetos. El último numeral emitido al contar una colección de objetos nos proporciona su cardinal. Por otro lado, al contar una serie de objetos les asignamos etiquetas que les confieren una ordenación importada desde la secuencia numérica. Desde el acceso ordinal, la actividad de sumar se convierte en contar hacia delante; la actividad de restar, en contar hacia atrás; la de multiplicar en contar hacia adelante a saltos y la de dividir en contar hacia atrás a saltos.

El nivel de elaboración de la secuencia numérica será uno de los factores que condicionará la posibilidad de usarla con un determinado propósito. Así, un estudiante que ha alcanzado el nivel de cadena irrompible no podrá emplear la secuencia numérica para sumar utilizando la estrategia de contar a partir de un sumando, pues esta técnica exigiría poder iniciar el conteo desde un número distinto al uno.

El acceso cardinal

El acceso escolar al número natural a la manera de Cantor se apoya en la actividad de coordinar conjuntos. La coordinación de conjuntos supone hacer corresponder a un elemento de un conjunto, al que llamaremos conjunto inicial, un único elemento del otro conjunto, al que llamaremos conjunto final. El resultado de la acción de coordinar dos conjuntos puede ser:

a) agotamos los elementos de ambos conjuntos;
b) agotamos los elementos del conjunto inicial, pero no del final;
c) agotamos los elementos del conjunto final, pero no del inicial.

En el primer caso diremos que los conjuntos tienen igual cardinal, mientras que en los otros dos casos tendrán un cardinal distinto. Un número será la clase de equivalencia formada por todos los conjuntos que se pueden coordinar. La actividad de coordinar y sus posibles resultados nos permite establecer una relación de orden entre los números. Así, el número m será menor que el número n si al coordinar un conjunto de la primera clase de equivalencia con un conjunto de la segunda quedan elementos de este último sin correspondencia. En este acceso podemos construir la secuencia numérica mediante dos procedimientos: 1) a partir de la relación de orden definida anteriormente; 2) identificando “el siguiente de” con el incremento de un elemento en el conjunto. Sin embargo, en el acceso cardinal las operaciones no se realizan entre números, sino sobre conjuntos. Así, por ejemplo, para sumar dos números construimos dos conjuntos que tengan esos cardinales, aplicamos la operación unión de conjuntos y lo integramos dentro de una clase de equivalencia que nos proporcionará el número resultante.

¿Es adecuado centrar la construcción del número en la idea de número cardinal? Para Freudenthal (1973) el número cardinal es matemática y didácticamente insuficiente. Desde un punto de vista matemático, su crítica se basa en la imposibilidad de definir las potencias finitas de forma independiente a la inducción completa en el conjunto de los naturales. La escasa importancia matemática del número cardinal se observa en el hecho de que, aunque fue el que inicialmente empleó la humanidad, en el campo de las matemáticas no recibió atención hasta los trabajos de Cantor y, en este caso, la intención fue la de dar cuenta de la potencia de los conjuntos infinitos.

Desde un punto de vista didáctico, Freudenthal apunta que la capacidad de contar surge en edades tempranas en los niños y que gracias a esto pueden reconocer numerosidades.

> La secuencia numérica es la primera piedra de las matemáticas, históricamente, genéticamente y sistemáticamente. Sin la secuencia numérica, no hay matemáticas. Si algunos textos de la matemática moderna sugieren otro punto de vista, es porque sus autores malinterpretan las matemáticas. (Freudenthal, 1973, pp. 171-172)

El supuesto acceso al número desde la teoría de Piaget

Piaget creyó encontrar una convergencia entre las investigaciones genéticas y las axiomáticas centradas en la reducción del número a clases de equivalencia en la línea de Cantor, Frege, Russell, etc. Sin embargo, para la construcción lógica del número desde un punto de vista psicológico consideró necesario adoptar algunas matizaciones al acceso cardinal como consecuencia de lo que podríamos llamar *problema de las correspondencias biunívocas cualesquiera*.

> Parece muy 'natural' semejante reducción [la del número a clases de equivalencia], dado el carácter al mismo tiempo muy elemental y muy precoz de la operación de hacer corresponder término a término, tan espontánea y extendida entre los niños pequeños. [...] La dificultad fundamental que este modelo de reducción presenta desde el punto de vista psicológico (y tal vez desde el punto de vista lógico) es, en efecto, que hay dos formas muy distintas de correspondencia término a término: [...] una correspondencia biunívoca cualificada [...] una correspondencia biunívoca cualquiera[2]. (Beth y Piaget, 1961/1968 p. 325)

Escultura de Jean Piaget en Ginebra

Para Piaget las correspondencias biunívocas cualificadas serían correspondencias entre elementos de dos conjuntos establecidas en función de las semejanzas cualitativas. Por ejemplo, a un elemento de un conjunto inicial que tiene la característica de ser el más grande, le haríamos corresponder el elemento más grande del conjunto final. Sin embargo, en una correspondencia biunívoca cualquiera se hace abstracción de las cualidades y únicamente se atiende a que a un elemento de la colección inicial se le haga corresponder un único elemento de la final.

¿Qué problema psicológico introducían las correspondencias biunívocas cualesquiera? Según Piaget como las correspondencias biunívocas cualesquiera exigen la abstracción de las cualidades, los elementos individuales se convierten para el sujeto en equivalentes. Pero si son equivalentes, ¿cómo puede el usuario distinguirlos para establecer la correspondencia? La respuesta que da Piaget es la de ordenarlos de una u otra manera. La necesidad de recurrir a las estructuras de clasificación y seriación (el orden) para lograr la construcción lógica del número le llevó a realizar una de las proclamas que mayor repercusión tuvieron en la construcción de algunos currículos de Educación Infantil en las décadas de los 60, 70 y 80 del siglo pasado.

> No encontramos que el desarrollo del número se adelante con respecto a las clases (estructuras de clasificación) o a las relaciones asimétricas transitivas (estructuras de seriación), sino, por el contrario, una construcción simultánea de las estructuras de clases, de relaciones y de números [...] Por consiguiente, vamos a considerar como condiciones mínimas del número, no que el sujeto sea capaz de efectuar una numeración verbal (que es siempre muy equivoca desde el punto de vista operatorio), sino 1) que sepa igualar dos colecciones pequeñas (de cinco a siete elementos) por correspondencia biunívoca entre sus términos, y 2) que piense [sic] que tal equivalencia se conserva en caso de que, sin añadir ni retirar ningún elemento, simplemente se modifique la disposición espacial de una de las colecciones. (Beth y Piaget, 1961/1968, p. 321)

Como los estudios empíricos llevados a cabo por el autor situaban la consolidación de las estructuras de clasificación y seriación en el etapa de las operaciones concretas (6-11 años), se podía concluir, como así se hizo, que los niños en la etapa de Educación Infantil no podían acceder a la idea de número. La difusión de estas ideas hizo que los currículos y los libros de texto pasaran a proponer actividades de clasificación, seriación y conservación de la cantidad. Se sustituyeron, al menos sobre el papel, las actividades numéricas por las prenuméricas y, en muchas ocasiones, la diversidad de la idea de número se acabó reduciendo al número cardinal.

Podríamos recurrir nuevamente a la argumentación de Freudenthal contra el acceso cardinal para criticar la construcción de la idea de número según Piaget, pues la actividad de coordinar y la potencia de un conjunto vuelven a ocupar un papel central. Ahora bien, se podría responder a la crítica anterior diciendo que la intención de Piaget no era realizar una construcción matemática o didáctica del número, sino psicológica. Sin embargo, algunas de las hipótesis de partida de Piaget se asientan sobre ideas matemáticas y sobre observaciones experimentales llevadas a cabo por el autor y sus colaboradores y, por lo tanto, pueden ser objeto de análisis desde fuera de la psicología.

Un aspecto criticado en los experimentos es el recurso a respuestas verbales, ya que pueden introducir un nuevo factor que sea el responsable real de las características de la respuesta. El propio Piaget es consciente de esta posible objeción: "¿Pero no podría objetarse entonces que hay un malentendido en el uso de las palabras?" (Piaget y Szeminska, 1964/1987, p. 64). En lugar de analizar la dependencia o independencia entre razonamiento y lenguaje, se limitó a señalar que "para responder a esta objeción, y porque es difícil rechazar con palabras un malentendido verbal, multiplicaremos las situaciones y los ejemplos" (Piaget y Szeminska, 1964/1987, p. 64). Sin embargo, diversas investigaciones coetáneas o posteriores vinieron a demostrar esa independencia. Por ejemplo, Siegel (1978/1983) encontró que los conceptos relacionados con la cantidad no pueden valorarse como adquiridos o no adquiridos basándose únicamente en las respuesta verbales, lo que ponía en tela de juicio los resultado de los experimentos piagetianos. Los estudios de Donaldson y Balfour (1968) mostraron que los niños de entre tres y cuatro años tomaban como sinónimas las palabras *más* y *menos*, siendo dominante el significado de la primera sobre la segunda; lo que sembraba de dudas los resultados de los experimentos piagetianos en los que se analizaba la conservación y la comparación de cantidades para lo que se ponían en juego expresiones como *igual que*, *más que* o *menos que*[3].

Por otro lado, las conclusiones que obtienen Piaget y sus colaboradores son en muchos casos gratuitas, pues más que poder dar unas conclusiones generales sobre la construcción (o génesis) del número en el niño, se deberían limitar a señalar que los problemas que se proponen se pueden resolver a partir de una determinada edad, que, por otro lado, coincide con la del inicio de la escolarización obligatoria de los sujetos experimentales. Parece que Piaget, en este caso, no parece prestar importancia a la influencia de la educación recibida en las respuestas que ofrecen los estudiantes (que, como ya hemos dicho, él mismo señala como una importante distorsión en el desarrollo de las estructuras mentales).

Sin embargo, nuestra crítica se centrará en el recurso innecesario a la unidad numérica que llevó a Piaget a considerar precisa la participación de las estructuras de seriación para poder pasar de realizar correspondencias biunívocas cualificadas a correspondencias biunívocas cualesquiera y así conseguir, finalmente, la construcción mental del concepto de número. Ya hemos señalado que según Piaget los niños, en unos primeros estadios, son capaces de realizar espontáneamente correspondencias biunívocas cualificadas conectando elementos que comparten una determinada característica de dos conjuntos distintos. Pero, ¿qué pasa cuando los elementos de ambos conjuntos carecen de las cualidades que los hacen coordinables? Los niños no tendrán más remedio en este caso que hacer la conexión abstrayendo las cualidades, si las tienen, y limitándose a unir los elementos uno a uno. Para Piaget esta abstracción de las cualidades haría iguales todos los elementos desde un punto de vista lógico. Dejemos que hable Piaget para evitar una posible interpretación incorrecta por nuestra parte:

> Como es natural, lo consigue procediendo a abstraer de todas las cualidades; pero entonces los elementos individuales se vuelven, ipso facto, equivalentes entre sí, por más que sigan siendo distintos, y ese doble carácter de equivalencia generalizada y de distinción mutua es lo que los transforma en unidades aritméticas (ya que la sola utilización de la identidad lógica aboliría las distinciones, puesto que éstas, desde el punto de vista de la los sistemas de clases, no reposan más que sobre las diferencias cualitativas, de las que precisamente se había hecho abstracción). (Beth y Piaget, 1961/1968, p. 326)

En la afirmación de Piaget de que los elementos individuales se convierten en equivalentes encontramos un error ligado a la idea de conjunto y de sus posibles representaciones. Los elementos de un conjunto podemos representarlos entre llaves o mediante diagramas de Venn. Como señala Freudenthal (1973), el hecho de que en los diagramas de Venn aprovechemos las posibilidades espaciales, nos permite representar conjuntos formados por elementos que no tienen diferencias cualitativas, más allá de ocupar posiciones distintas en el espacio (ente lógico), lo que no podría hacerse en una diagrama de llaves, pues en estos más que representar los elementos, se representan los nombres de los elementos. En consecuencia, y como en las experiencias de Piaget los conjuntos se representan mediante diagramas de Venn de forma implícita, la ausencia de cualidades que los distingan no produce dificultad a la hora de diferenciar a los elementos como distintos. Es decir, ni tan sólo desde un punto de psicológico podríamos considerar los elementos como equivalentes de forma generalizada.

La necesidad ficticia de recurrir a las unidades aritméticas llevó a Piaget a suponer el desarrollo previo de las estructuras de seriación para poder construir el concepto de número desde un punto de vista psicológico.

> Desde la óptica psicológica, pues, habría un círculo vicioso si se pasase de la clase al número recurriendo simplemente a la correspondencia cualquiera, ya que ésta supone la unidad aritmética, de modo que el número se introduce ahora en la clase, en lugar de sacarse de ella. […] en caso de que se hayan abstraído las cualidades diferenciales o que falten, no hay más que un medio de distinguir los elemen-

> tos individuales, que es el de ordenarlos de una u otra manera. (Beth y Piaget, 1961/1968, pp. 326-327)

El número en el currículo español de Educación Infantil

En este apartado trataremos de sustanciar los distintos accesos escolares al número que se proponían, de manera implícita o explícita, en los currículos españoles de Educación Infantil desde 1973, poniendo de manifiesto las contradicciones en la estructuración de los contenidos que en algunos casos se observan.

Las primeras disposiciones curriculares que organizaban en España los contenidos de lo que en aquel momento se llamó Educación Preescolar se publicaron al inicio de la década de los setenta (MEC, 1973), durante la dictadura franquista. En las instrucciones para la enseñanza y aprendizaje en el caso de niños de cuatro y cinco años se establecía: "Introducción funcional de la idea de número mediante los conjuntos coordinables. [...] Aprendizaje de las cifras. [...] Introducción a la ordenación mediante conjuntos no coordinables" (MEC, 1973, p. 15904). La referencia a la actividad de coordinar conjuntos nos permite concluir que se proponía un acceso cardinal al número, característico de las matemáticas modernas que en aquel momento eran la base sobre la que se organizaba el currículo de primaria. Las ideas de Piaget sobre la enseñanza del número (o prenúmero), que ya se habían integrado en los currículos de algunos países europeos, no fueron tenidas en cuenta, como pone de manifiesto la propia presencia de la enseñanza del número o la instrucción de que los estudiantes debían aprender a contar de distintos modos (desplazando, agrupando, tocando...).

En los Programas Renovados (MEC, 1981a, 1981b), propuestos desde el gobierno de la Unión de Centro Democrático, la influencia de las ideas de Piaget se reflejó en la presencia del bloque *Experiencias Prenuméricas*, donde la clasificación, la seriación y la coordinación de conjuntos ocupaban un papel central. "Se irá profundizando en las actividades de clasificación para una comprensión del número. Tanto las seriaciones como las clasificaciones son tipos de experiencias a realizar en el periodo prenumérico." (MEC, 1981b, p. 46)

Sin embargo, aunque en cierta manera se asumía el discurso piagetiano, dentro del bloque de *Experiencias Prenuméricas* se incluyó el subapartado *Numeración* en el que se precisaban unas instrucciones que hacían necesaria la idea de número. Se planteaban como objetivos que los niños fueran capaces de utilizar los números hasta el nueve; reconocer los símbolos de los números de una cifra; la composición y descomposición de números de una cifra como una forma de introducir la adición y la sustracción; la asignación del cardinal a un conjunto como resultado de la actividad de contar; la ordenación de las cinco primeras cifras; o resolver problemas numéricos sencillos gráficamente.

Tras la victoria del Partido Socialista Obrero Español en 1982, se emprendió una profunda reforma del sistema educativo que se plasmó (MEC, 1991) en la Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE). Esta ley proponía un cambio radical respecto al tratamiento del número en la Educación Infantil (nombre que se dio a la Educación Preescolar en esta ley). Se volvió a introducir de manera explícita la enseñanza del número y desaparecieron las referencias a la idea piagetiana del número como se puede observar en el tipo de actividades que se pretendía que los estudiantes pudieran realizar al acabar la Educación Infantil:

> 6. Comparación de colecciones de objetos: Igual que, menos que, más que.
> 7. Aplicación del ordinal en pequeñas colecciones ordenadas.
> 8. Construcción de la serie numérica mediante la adición de la unidad.
> 9. Utilización de la serie numérica para contar elementos y objetos de la realidad.
> 10. Representación gráfica de la cuantificación de las colecciones de objetos mediante códigos convencionales y no convencionales.
> 11. Resolución de problemas que impliquen la aplicación de sencillas operaciones (quitar, añadir, repartir). (MEC, 1991, p. 29725)

En estas instrucciones se especificaba la necesidad de recurrir a la secuencia numérica para contar objetos, lo que sería propio de un acceso ordinal. Ahora bien, se proponía construir la secuencia numérica de una de las formas en que se hace en el acceso cardinal. Otro aspecto a destacar es el tratamiento que se daba al número para operar. Mientras en el currículo de 1981 las actividades de suma y resta se ligaban a la acción abstracta de componer y descomponer números y se introducía una resolución gráfica de problemas verbales sencillos; en el currículo de 1991 la resolución de problemas verbales se enlazaba, explícitamente, a las acciones de añadir y quitar, es decir, a situaciones de cambio que tienen un referente en las acciones de seguir contando hacia adelante o hacia atrás, respectivamente.

En definitiva, en el currículo de 1991 se asumió la enseñanza del número y, aunque de forma vaga y en ocasiones contradictoria, se proponía un acceso al número natural basado en la actividad de contar. En algunos casos, las disposiciones de los gobiernos autonómicos que en aquel momento habían asumido las competencias educativas profundizaron y aclararon la línea a seguir. Por ejemplo, en el desarrollo de la ley que decretó el Gobierno Valenciano (Conselleria de Cultura, Educació i Ciència, 1992) se establecían como contenidos el uso del número en su contexto social, el conocimiento de la serie numérica y la utilización de las estrategias de conteo en diferentes situaciones del quehacer cotidiano. Y se fundamentaba:

> El niño, desde muy pronto, comienza a contar oralmente y lo hace por la fuerte exposición social que se encuentra y que posibilita que memorice números. Contar oralmente es equivalente, en este caso a "contar de memoria" como primera técnica oral que utilizan los niños, pero no es una descripción adecuada de las posteriores intenciones de contar, sobre las cuales se basan las reglas fundamentales para construir la serie numérica.
>
> Tal como va adquiriendo más experiencia y en el uso que hace en las diferentes actividades cotidianas, en el que contar y recitar números están presentes, los niños y las niñas aprenden a utilizar su representación mental de la serie numérica de manera más elaborada y flexible, y se dan cuenta de las relaciones que existen entre los números. (Conselleria de Cultura, Educació i Ciència, 1992, p. 1409)

Un desarrollo adecuado de la LOGSE hubiera situado a la enseñanza del número en la Educación Infantil en una dirección adecuada; pero la ley tuvo una duración escasa y muchas dificultades en su implantación. De hecho, el Partido Popular propuso como acción principal de gobierno una contrarreforma que se plasmó en la Ley Orgánica de la Calidad de la Educación (LOCE). Esta ley planteaba una vuelta al pasado y criticaba abiertamente el espíritu de la LOGSE.

> Los valores del esfuerzo y de la exigencia personal constituyen condiciones básicas para la mejora de la calidad del sistema educativo, valores cuyos perfiles se han ido desdibujando a la vez que se debilitaban los conceptos del deber, de la disciplina y del respeto al profesor. (MECD, 2002, p. 45189)

Pero la involución no sólo se produjo en las orientaciones metodológicas, sino que también se observó en la descripción de los contenidos que en ocasiones era asombrosamente similar a la de los Programas Renovados, como podemos constatar si comparamos los párrafos siguientes:

> Antes de llegar a la idea de número, que el niño realice actividades de formación de conjuntos, correspondencia entre conjuntos, clasificaciones, hasta llegar a la coordinabilidad de conjuntos. (MEC, 1981b, p. 49)
>
> Antes de llegar a la idea de número tiene que realizar actividades de formación de conjuntos, correspondencias y clasificaciones. (MECD, 2004, p. 5048)

Ahora bien, en el regreso al espíritu de las instrucciones de los Programas Renovados se perdió la fundamentación que proporcionaban las ideas de Piaget y se ofreció una organización de contenidos que planteaba un acceso cardinal.

> Conocer, utilizar y representar la serie numérica para contar elementos. [...] Cuantificadores básicos. Conocer los aspectos cardinales y ordinales del número. La serie numérica. Los primeros números. [...] La serie numérica: los nueve primeros números. Su representación gráfica. Construcción de la serie numérica mediante la adición de la unidad. [...] Iniciación al cálculo con las operaciones de unir y separar por medio de la manipulación de objetos. Resolución de problemas que impliquen operaciones sencillas. (MECD, 2004, pp. 5048-5049).

Así, tras afirmar la necesidad de realizar correspondencias y clasificaciones antes de acceder a la idea de número, se proponía la construcción de la secuencia numérica; pero limitada a los nueve primeros números, estableciendo una fusión de número y su representación escrita. Por último, se pretendía ligar las operaciones de suma y resta a las acciones de unir y separar, lo que era típico del acceso cardinal.

El regreso al gobierno del Partido Socialista Obrero Español en 2004 trajo consigo una reforma de la contrarreforma que se materializó en la Ley Orgánica de Educación (LOE). Esta ley, en el caso de la Educación Infantil, suponía una vuelta a las instrucciones de la LOGSE, lo que se tradujo en una apuesta por el acceso ordinal. Así, se podía leer:

> Identificación de cualidades y sus grados. Ordenación gradual de elementos. Uso contextualizado de los primeros números ordinales.
>
> [...]
>
> Estimación cuantitativa exacta de colecciones y uso de números cardinales referidos a cantidades manejables. Utilización oral de la serie numérica para contar. Observación y toma de conciencia del valor funcional de los números y de su utilidad en la vida cotidiana. (MEC, 2008, p. 1024)

Se establece la necesidad de utilizar la secuencia numérica para contar y no se señala una limitación en la longitud de la misma y de los números que se pueden enseñar y aprender, pues el legislador en este caso sí que diferencia entre representación escrita y oral del número y da importancia a ésta última.

> Se valorará si el niño observa y puede verbalizar algunos de los usos y funciones que los números cardinales y ordinales cumplen en nuestra cultura así como si los utiliza funcionalmente en sus juegos y en situaciones propias de la vida cotidiana. (MEC, 2008, p. 1025)

A modo de conclusión

Hemos puesto de manifiesto el error sobre el que se apoyaba la argumentación piagetiana que exigía la introducción del orden para conseguir la construcción psicológica del número. También hemos presentado resultados de investigaciones contemporáneas a Piaget que mostraban la escasa solidez sobre la que se soportaban sus propuestas. Sin embargo, esto no fue un obstáculo para que fuera la base de una pedagogía para la enseñanza del número que se institucionalizó en el currículo de 1981. Podríamos pensar que las arbitrariedades que organizaban la idea de número según lo concebía Piaget tuvieron poca repercusión en la enseñanza del número en Educación Infantil y que se extinguieron junto a ley que les dio cuerpo. Sin embargo, de alguna manera se generó una desconfianza en las posibilidades de los niños de estas edades para aprender matemáticas. Así, la secuencia numérica, tan denostada por Piaget, ha pasado, en algunos casos, e independientemente del currículo en vigor, a ocupar un papel secundario en la práctica docente.

De hecho, es recurrente la limitación al estudio de los nueve primeros números[4] en los currículos que se basan en el aspecto cardinal del número. Una explicación plausible a esta restricción es la relación necesaria que el legislador establece entre número y su representación simbólica escrita y los conocimientos necesarios para representar de manera escrita un número mayor que nueve. Sin embargo, no parece tenerse en cuenta las posibilidades que proporciona la representación verbal donde los números mayores que nueve no plantean dificultad alguna más allá que la de su memorización.

Como consecuencia de estas instrucciones, en algunas ocasiones la enseñanza del número se ha centrado en que los niños "dibujaran" e identificaran la grafía de los números. En estos casos, se ha acabado confundiendo actividad numérica con representación escrita, lo que ha limitado las posibilidades para la enseñanza y aprendizaje del número. Nos tomaremos la licencia de parafrasear a Luis Radford, para presentar las consecuencias que tiene la representación escrita de la actividad matemática (el autor se refería a la enseñanza y aprendizaje del álgebra), lo que pondrá de manifiesto los efectos que tendría una introducción prematura:

> Poco a poco, a medida que los estudiantes se internan en el mundo de [los números], la palabra se hace menos presente. A veces lentamente, otras de manera más rápida, el lápiz se mueve sobre el papel, línea tras línea [...] Los signos, que produce la mano solitaria que sujeta el lápiz, entran en una especie de territorio mudo, ocasionalmente interrumpido por un murmullo –el vestigio de los tumultuosos intercambios sociales previos que cristalizan ahora en la letra silenciosa. (Radford, 2002, p. 54)

Por otro lado, podemos concluir que la enseñanza del número en la Educación Infantil siempre ha estado presente en el currículo español, incluso cuando, al amparo de las ideas de Piaget, las actividades numéricas se sustituyeron, teóricamente, por las prenuméricas. No obstante, la continuidad en la enseñanza del número contrasta con la alternancia en el acceso propuesto. En este sentido, hemos puesto de manifiesto que existe una relación entre la ideología del gobierno instructor del currículo y el acceso escolar al número que se propone. Así, los currículos promovidos por los gobiernos conservadores planteaban accesos basados en el aspecto cardinal del número, mientras que los gobiernos socialistas proponían un acceso ordinal. Más que una toma de postura por un determinado modelo, podríamos apuntar como causa de esta tendencia a que los encargados de elaborar el currículo recurrían a los documentos que generaron aquéllos que tenían una misma ideología política.

Para finalizar, ¿acceso cardinal o acceso ordinal? Estudios ya clásicos, como los de Rochel Gelman y Randy Gallistel (1978) o Karen Fuson (1988), pusieron de manifiesto que los estudiantes de entre tres y seis años pueden aprender y usar la secuencia numérica de manera operatoria. Se ha observado que los niños utilizan la actividad de contar para determinar el cardinal de un conjunto o suman continuando la secuencia numérica a partir de un número. De hecho, la espontaneidad con la que los niños utilizaban el conteo era una de las dificultades que debían vencer las propuestas metodológicas basadas en el acceso cardinal.

> Para impedir que el niño contara los objetos señalándolos con el dedo, se solía emplear un enmascaramiento [...] pues el gran temor de los pedagogos era que los niños recitaran la lista de las palabras-número de forma automática, como una lista de 'números' (el 'uno', el 'dos'...), sin comprender que a cada uno de ellos se le puede hacer corresponder una cantidad. (Brissiaud, 1989/1993, pp. 11-12)

Como señala Freudenthal (1973), la actividad de contar es la base sobre la que se construye la aritmética. Los autores que proponen un acceso cardinal malinterpretan la matemáticas: "Incluso los niños están mejor informados que ellos" (Freudenthal, 1973, p. 172).

NOTAS

[1] Una descripción más precisa de los accesos ordinal y cardinal se puede encontrar en Maza (1989) o Fernández (2004).

[2] En Piaget y Szeminska (1964/1987) se les da los nombres de correspondencia serial o similitud cualitativa y correspondencia ordinal o similitud generalizada, respectivamente.

[3] En estos experimentos se hacían preguntas del tipo *¿Dónde hay más?*. Por ejemplo, "HOC (4;3): –Estamos en un café. Tú eres el mozo y tienes que sacar del armario un vaso para cada una de esas botellas. El niño coloca con exactitud un vaso delante de cada botella sin tener en cuenta los vasos que quedan: –¿Hay lo mismo? –*Sí*. Amontonamos ahora las botellas en un grupo: –¿Hay lo mismo de botellas y de vasos? –*No*. –¿Dónde hay más? –*Hay más vasos*." (Piaget y Szeminska, 1964/1987, p. 62)

[4] Sin embargo, Fuson, Richards y Briars (1982) señalan que todos los niños analizados de entre cuatro y seis años podían contar más allá del diez. El 94% de los niños de entre cinco y seis años podía superar el 14 y el 44% podía alcanzar un valor entre el 30 y el 72.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Beth, E. W. y Piaget, J. (1968). *Relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real* [Traducido por Víctor Sánchez de Zabala]. Madrid: Ciencia Nueva. (Trabajo original publicado en 1961.)

Brissiaud, R. (1993). *El aprendizaje del cálculo: más allá de Piaget y de la teoría de los conjuntos* [Traducido por Celina González]. Buenos Aires: Visor. (Trabajo original publicado en 1989.)

Conselleria de Cultura, Educació i Ciencia. (1992). Decreto 19/1992, de 17 de febrero, del Gobierno Valenciano, por el que se establece el currículo de Educación Infantil en la Comunidad Valenciana. *DOGV*, *1727*, 1378-1409.

Donaldson, M. y Balfour, G. (1968). Less is more: a study of language comprehension in children. *British Journal of Psychology*, *59*(4), 461-471.

Fernández, C. (2004). *Análisis Didáctico de la Secuencia Numérica*. Málaga: Dykinson.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Fuson, K. C. (1988). *Children's Counting and Concepts of Number*. New York: Springer-Verlag.

Fuson, K. C., Richards, J. y Briars, D. J. (1982). The Acquisition and Elaboration of the Number Word Sequence. En C. Brainerd (Ed.), *Progress in Cognitive Development Research: Children's Logical and Mathematical Cognition*. New York: Springer-Verlag.

Gelman, R. y Gallistel, C. R. (1978). *The Child's Understanding of Number*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Maza, C. (1989). *Conceptos y numeración en Educación Infantil*. Madrid: Editorial Síntesis.

Ministerio de Educación y Ciencia. (1973). Orden de 27 de julio de 1973 por la que se aprueban las orientaciones pedagógicas para la Educación Preescolar. *BOE*, *186*, 15899-15906.

Ministerio de Educación y Ciencia. (1981a). Orden de 17 de enero de 1981 por la que se regulan las enseñanzas de Educación Preescolar y del Ciclo Inicial de la Educación General Básica. *BOE*, *18*, 1384-1389.

Ministerio de Educación y Ciencia. (1981b). *Programas Renovados de Educación Preescolar y Ciclo Inicial*. Madrid: Editorial Escuela Española, S. A.

Ministerio de Educación y Ciencia. (1991). Real Decreto 1333/1991, de 6 de septiembre, por el que se establece el currículo de la educación infantil. *BOE*, *216*, 29716-29726.

Ministerio de Educación y Ciencia. (2008). ORDEN ECI/3960/2007, de 19 de diciembre, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la educación infantil. *BOE*, *5*, 1016-1036.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2002). LEY ORGÁNICA 10/2002, de 23 de diciembre, de Calidad de la Educación. *BOE*, *307*, 45188-45220.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2004). REAL DECRETO 114/2004, de 23 de enero, por el que se establece el currículo de la Educación Infantil. *BOE*, *32*, 5041-5050.

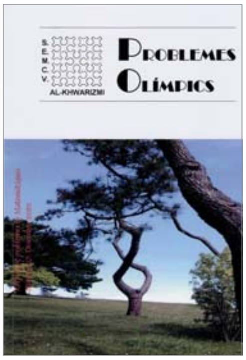
Piaget, J. y Szeminska, A. (1987). *Génesis del número en el niño* [Traducido por Sara Vasallo]. Buenos Aires: Editorial Guadalupe. (Trabajo original publicado en 1964.)

Radford, L. (2002). Algebra as tekne. Artefacts, Symbols and Equations in the classroom. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *1*(1), 31-56.

Siegel, L. S. (1983). La relación entre lenguaje y pensamiento en el niño del estado preoperatorio: una nueva consideración de las alternativas no verbales a las pruebas propuestas por Piaget [Traducido por Mercedes Valcárcel]. En L. S. Siegel & C. J. Brainerd (Eds.), *Alternativas a Piaget*. Madrid: Ediciones Pirámide. (Trabajo original publicado en 1978.)

Este artículo fue recibido en SUMA en diciembre de 2009 y aceptado en enero de 2011

Publicaciones recibidas



PROBLEMES OLÍMPICS
SEMCV Al Khwārizmī
N.º 57, desembre 2010
Valencia
ISSN: 1578-1771

LOSANGES
SBPMef
N.º 10, Octobre 2010

LA GACETA DE LA RSME
RSME
Vol.13, n.º 4, 2010
Madrid
ISNN 1138-8927

INVESTIGACIÓN Y CIENCIA
Prensa Científica, S.A.
Enero 2011
Barcelona
ISSN: 0210136X

PNA. REVISTA DE INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS
Universidad de Granada
Vol. 5 n.º 2, enero 2011
ISSN 1886-1350

GRAND N
Irem de Grenoble
N.º86, Décembre 2010
Saint Martin d'Hères Cedex
ISSN: 0152-4682

LLULL
SEHCYT
Vol. 33 (nº72) 2010
Zaragoza
ISSN: 0210-8615

XLA TANGENTE
Kangourou Italia
N.º 24, dicembre 2010
Monza. Italia
ISSN: 1971-0445

suma+ 66
Febrero 2011, pp. 17-26

Picos y mesetas en los aprendizajes matemáticos en Educación Primaria: el caso de la multiplicación

En el presente artículo se pretenden identificar los puntos críticos que entrañan mayor dificultad para los alumnos dentro de los contenidos numéricos en Educación Primaria. La finalidad didáctica de este trabajo reside en ser capaces de saber dónde se sitúan esos puntos críticos para proponer tratamientos educativos que los superen. También se proporcionan unas indicaciones para la enseñanza basadas en el carácter visual y espacial de los números, así como un conjunto de actividades abiertas, susceptibles de ser empleadas en el trabajo con los alumnos.

Palabras Clave: Experiencia de aula, aritmética, números, enseñanza-aprendizaje, primaria.

Peaks and plateaus in learning mathematics in primary education: the case of multiplication

This paper shows some of the most critical issues that primary education students have to face when they solve numerical problems. If all these important facts are identifyed, we will be able to define solutions to improve the learning process. This document also provides some indications to work with visual and spatial teachings. Some interesting activities are also proposed to make the education process easier.

Key words: Classroom experience, arithmetic, numbers, teaching and learning, primary.

Introducción

Siendo alumno en la escuela de mi pueblo escuché a mi maestro D. José Guerra, que imagino que no había leído a Piaget, esta frase de los picos y mesetas en los aprendizajes. Se refería a la mayor dificultad que entrañan unos contenidos en relación a otros. Una meseta se correspondería con un tramo de aprendizajes de similar dificultad, no existe propiamente una mayor exigencia cognitiva entre los requerimientos de un aprendizaje y el siguiente; un pico se correspondería con un desafío nuevo, un aprendizaje que exige de capacidades superiores para ser adquirido.

La metáfora es adecuada, situados en una meseta del conocimiento se avanza por un tiempo sin mayores dificultades y pueden ser adquiridos un grupo importante de contenidos, luego, lo natural es que venga un pico, que da acceso a otra meseta en la que están situados un nuevo grupo amplio de aprendizajes, pero que supone un escalón cognitivo, y por tanto, un mayor esfuerzo para ser superado.

Esta secuencia de picos y mesetas, que se produce en todas las materias, y de un modo más acusado en el aprendizaje de las matemáticas, es importante de identificar. Permite conocer dónde se encuentran los lugares en los que algunos alumnos van a encontrar más dificultades, y por tanto, seleccionar con anterioridad las estrategias metodológicas más adecuadas, a la vez que colocar las ayudas necesarias, para que, si es posible, los obstáculos puedan ser superados por todos o casi todos.

Nos referiremos en este artículo a un pico y a su meseta subsiguiente, relevantes en el conjunto de contenidos que tienen que adquirir los alumnos de Educación Primaria, se trata de la multiplicación, y más concretamente, del aprendizaje de las tablas de multiplicar. La multiplicación constituye un pico por la importante dificultad que supone para algunos alumnos y da inicio a su vez a una meseta porque es un contenido básico a partir del cual se construyen otros contenidos importantes. Pero no es un pico cualquiera, un alumno puede prescindir de otros supuestos picos matemáticos como el álgebra o la combinatoria, pero la no adquisición con soltura del

José Antonio Redondo González
Junta de Extremadura
José Luis Redondo García
Universidad de Extremadura

automatismo de la multiplicación cercena en buena medida cualquier posibilidad de desarrollo matemático, e incluso de desenvolvimiento en su vida cotidiana.

La suma como meseta de partida

El comienzo del aprendizaje numérico se inicia cuando a un grupo de elementos se le asigna un número. En los primeros intentos de contar, el alumno va señalando con el dedo cada uno de los elementos de un conjunto, a la vez que va recitando la serie numérica, de modo que cuando finaliza con los elementos ha obtenido el cardinal del conjunto. En una segunda etapa, esta tarea se puede llevar a cabo mediante una estrategia más potente, con lo que se vuelve más rápida y automática, se reconocen configuraciones de elementos como un todo, tres, cuatro, cinco, seis puntos, tal como vienen situados en un dado. Así, de un solo golpe de vista, se le asigna un cardinal al conjunto.

Adquirido el concepto de número, un número se puede añadir a otro y así se crea la operación suma, 5+3 = 8; con ella se inicia la primera meseta del aprendizaje numérico. En una meseta hay muchos pasos (contenidos procedimentales) de parecido nivel, cada paso supone un conocimiento nuevo, pero no un esfuerzo cognitivo significativamente superior al paso anterior, así 8+7 es más complicado que 5+3 porque los números son mayores y hay que saltar de la primera a la segunda decena, pero no hay una ruptura radical con el paso anterior. La suma de números en los que intervienen las decenas, por ejemplo 15+13, necesita de mayores conocimientos, saber que por un lado hay que sumar las decenas y por otro las unidades, también de un poco más de memoria de trabajo, hay que retener las suma de las decenas mientras se suman las unidades, pero no exige una diferencia radical de representación con respecto al paso anterior. Otro contenido dentro de las misma meseta es 5+9+3 =, sobre un resultado obtenido volver a aplicar de nuevo el procedimiento de la suma.

La resta se sitúa en esta misma meseta que la suma, 9– es sencillamente contar desde 3 hasta 9, en los dos casos es el mismo mecanismo de ir progresivamente de un número a otro, por lo que todos los ejercicios de restar, por ejemplo 17–9 se sitúan en la misma meseta que la suma.

Los algoritmos tradicionales de la suma y de la resta están también situados en esta misma meseta, 345+297 no es más que una serie de sumas sencillas, es el mismo proceso repetido con el añadido de la preocupación de las llevadas, pero si la suma de cada par de números se realiza de forma automática, no entrañan mayor problema. El algoritmo de la resta aparece como más difícil porque tiene algunos impedimentos que no posee la suma, como que el número mayor debe situarse arriba, o que las llevadas deben agregarse inexcusablemente al sustraendo mientras que en la suma es indiferente al sumando que se añadan, pero no exige mayor carga de memoria, y por tanto, tampoco mayores dificultades de representación.

El territorio sobre el que se producen todas estas operaciones es el sistema de numeración, muy especialmente los números hasta el 100. Las operaciones de suma y resta no son más que desplazamientos en el territorio de los números del 1 al 100, por eso es de especial importancia tener una representación mental completa y ajustada de este tramo numérico.

La multiplicación como pico

La multiplicación como pico se manifiesta tanto en el concepto mismo de la operación como en los cálculos necesarios para llevarla a cabo.

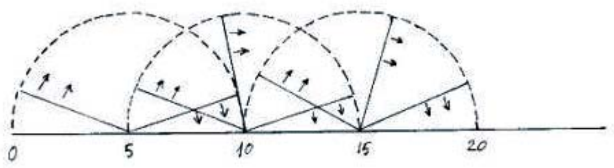
La dificultad del concepto de multiplicación

El concepto de multiplicación es más difícil que el de suma o resta, crear una película mental de la suma o de la resta es relativamente fácil: dos colecciones de objetos que se juntan o se separan, se trata de un solo movimiento mental. Para imaginar la multiplicación se necesitan varias colecciones iguales, o una colección que reiteradamente se repite, se trata pues de varios movimientos. La multiplicación es ya una operación construida sobre otra operación, de ahí su mayor nivel de abstracción y dificultad.

En la multiplicación los números crecen rápidamente y la cantidad de información que se maneja es mayor. Diversos autores (Nesher y Katriel, 1977; Luriya, 1969 y Hart, 1981) han señalado que la comprensión del significado de la multiplicación y la división es considerablemente más difícil que el de la adición y la sustracción. Añadir o quitar son acciones concretas y fáciles de visualizar, “tantas veces” no tiene una referencia activa tan obvia.

La multiplicación como la suma y la resta puede ser representada en la recta numérica mediante las metáforas de la longitud y el movimiento. Los papeles que juegan en la multiplicación los dos números son distintos, el primer número es la longitud del segmento que se considera, el segundo número indica las veces que el primero se lleva sobre la recta numérica. Surge la idea intuitiva de que con la multiplicación se avanza más rápidamente sobre la recta numérica, con el 5 y el 4 se avanza hasta el 20.

La representación de la multiplicación como una suma reiterada, al igual que otras formas de representación, puede adoptar formas idiosincrásicas, un alumno expresaba que visualizaba la multiplicación como un segmento que girando sobre sí mismo avanzaba sobre la recta numérica.

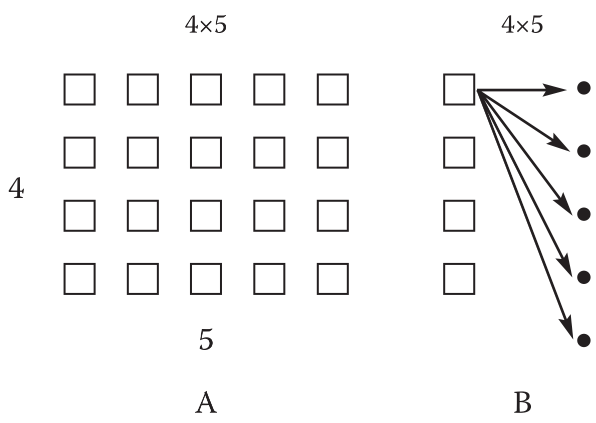


Representación idiosincrásica de la multiplicación

La información conceptual es que se suma cuatro veces la misma cantidad y se manifiesta espacialmente rotando un segmento. Este ejercicio mental necesita de mayor capacidad de representación que el de juntar dos colecciones.

Al hilo de las nuevas situaciones problemáticas que se les van planteando los alumnos van construyendo otras representaciones.

A: ¿Cuántas baldosas hay en una habitación que tiene 5 baldosas a lo largo y cuatro baldosas a lo ancho?
B: ¿De cuántos modos pueden combinarse cuatro pantalones y cinco camisetas?



Representaciones de la multiplicación

En el diagrama A las dos cantidades se colocan al mismo nivel, el modo más abstracto de representación de la operación multiplicación. En él participan numerosos elementos visuales, los elementos están organizados en varias hileras con el mismo número de elementos y por tanto de la misma longitud, columnas paralelas que encajan verticalmente unas sobre otras completando así la figura de un rectángulo.

Aunque ambos diagramas responden a la misma operación, el diagrama B es más fácilmente comprensible por los alumnos, quedan explicitados de manera más clara el tipo de relación que se establece entre los datos: cada pantalón puede combinarse con cada una de las cinco camisetas. Este diagrama o forma de representación de la multiplicación podría considerarse el estándar, en cuanto que es muy utilizado por los profesores y resulta de los más eficaces para ser comprendidos y asimilados por los alumnos.

La dificultad del algoritmo de la multiplicación

El afán de las matemáticas es la búsqueda de regularidades. La regularidad de una suma en que los sumandos son iguales, situación por lo demás bien frecuente en los cálculos cotidianos, puede ser aprovechada para buscar una forma más ágil, rápida y sencilla de buscar el resultado, así surge el algoritmo de la multiplicación.

Cawley et al., (1998), mostraron que sólo el 85% de la población de 14 años desarrolla una buena fluidez con la operación de la suma; el 81% con la resta; el 54% con la multiplicación; y el 54% con la división.

En la suma existen unas combinaciones básicas que es necesario manejar con soltura 8+6; 6+3; 9+5... de igual modo en la operación multiplicación existen unas combinaciones básicas 7×5; 8×9; 4×3; etc, lo que constituyen las tablas de multiplicar, que también es necesario dominar. Ambos tipos de combinaciones se realizan en el tramo del sistema de numeración que va del 1 al 100, sin embargo, existe una diferencia notable entre ellas, las combinaciones básicas de la suma pueden realizarse con ayuda de los dedos elemento a elemento, las de la multiplicación no. Esta imposibilidad de servirse de apoyos concretos y que la multiplicación necesita de una mayor capacidad de representación –los números se hacen más grandes, los desplazamiento en la recta numérica son más largos– son lo que la hacen más difícil.

Todas las combinaciones básicas de las tablas de multiplicar y sus extensiones son aprendizajes que pertenecen a la meseta de la multiplicación. Unas tablas, por ejemplo la del 5, son más sencillas de visualizar y retener que otras, por ejemplo la del 7. Un cálculo que supone un avance en la misma meseta de la multiplicación puede ser por ejemplo 8×7+5, añade una suma a una multiplicación previa lo que supone mayor carga de la memoria de trabajo, si se resuelve la multiplicación de modo automático la suma no debe suponer una dificultad mucho mayor. Los algoritmos tradicionales de la multiplicación y división se resuelven por aplicaciones sucesivas de este tipo de mecanismos en los que un componente esencial es el dominio de las combinaciones básicas multiplicativas. Muchas personas tienen almacenados en la memoria otras combinaciones, como por ejemplo 4 por 15, o 4 por 25 o 5 por 12; pertenecen a su red de conocimiento individual en cálculo mental que puede ser más o menos extensa.

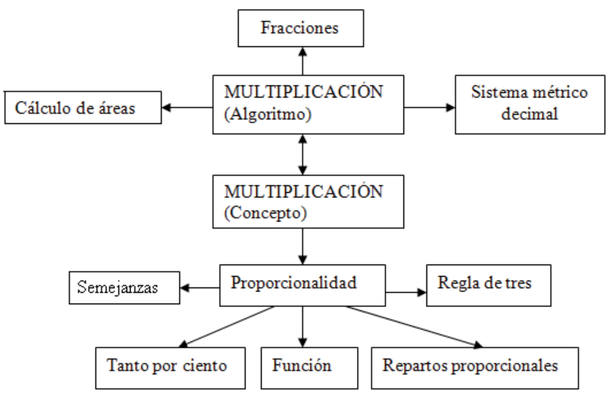
La multiplicación como meseta: contenido básico alrededor del cual se construyen otros contenidos importantes

La mayoría de los profesores coinciden en señalar, que la comprensión del concepto de multiplicación y la automatización de su algoritmo, abren una gran vía de progreso en los alumnos, suponen la culminación del aprendizaje numérico en primaria, y dotan a los alumnos de la competencia necesaria para su progreso en secundaria.

El algoritmo de la multiplicación está omnipresente en numerosos cálculos: cálculo de áreas, fracciones, sistema métrico decimal, problemas en los que están implicadas las operaciones de la multiplicación y división etc. Es una herramienta universal aplicable a multitud de situaciones matemáticas.

En cuanto al concepto de multiplicación muchos de los contenidos posteriores de las matemáticas se basan de una u otra manera en él, el concepto de razón construido sobre esta operación, es nuclear a una gran cantidad de contenidos matemáticos, está subyacente a conceptos tales como proporcionalidad, tanto por ciento, regla de tres, semejanzas, función, que la mayoría de lo que los alumnos deben después aprender. Si por incapacidad del alumno, o por cualquier otro motivo, no se interioriza este aprendizaje, los alumnos ven interrumpidos de forma drástica sus posibilidades de comprensión y asimilación de casi todos estos conceptos y por tanto su fracaso en la asignatura resulta casi asegurado.

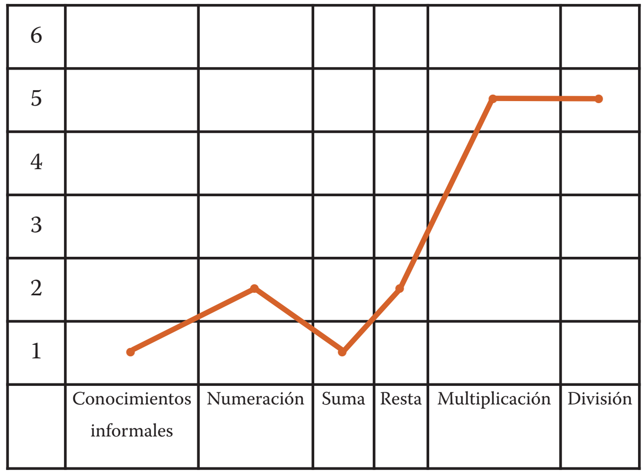
De modo sucinto la meseta de la multiplicación tanto en lo relativo a su algoritmo como a su concepto se extendería por los siguientes contenidos:



Meseta de la multiplicación

Lo que expresan los profesores

Los profesores saben, por su propia experiencia, de aquellos contenidos que suponen un mayor esfuerzo para sus alumnos. Los resultados obtenidos en la entrevista (anexo I) en cuanto a nivel de dificultad quedan resumidos en la siguiente tabla:



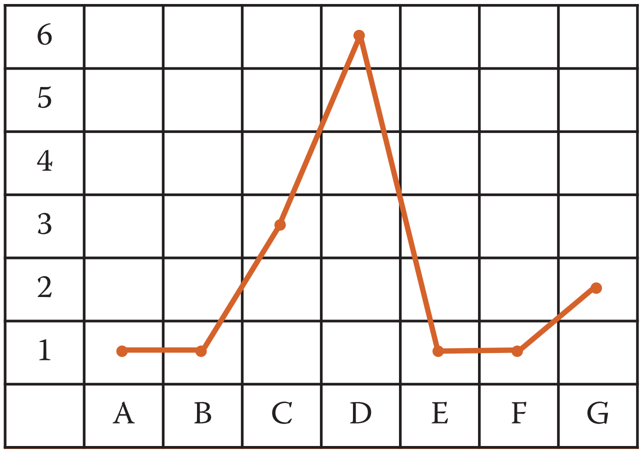
Abcisas: Contenidos de Educación Primaria
Ordenadas: Niveles de dificultad atribuido a esos contenidos

Niveles de dificultad según los profesores

Los conocimientos informales aparecen como aquellos contenidos adquiridos en un ambiente menos estructurados que el escolar, pero importantes porque son fruto de la comprensión y porque preparan al alumno para un buen abordaje del sistema de numeración.

Para los profesores la suma es un poco más fácil que la resta y la multiplicación ligeramente más fácil que la división, pero en niveles diferentes. De la suma y la resta a la multiplicación y división marcan un escalón muy pronunciado. La suma y la resta se sitúan en una meseta común, y la multiplicación y la división, en otra meseta de altitud y dificultad superior.

Aquilatando un poco más los profesores expresan que el escollo mayor para dominar los algoritmos de la multiplicación y división se encuentra en la retención y automatización de las combinaciones que componen las tablas de multiplicar. Consideran que los otros tipos de errores que aparecen son sólo expresiones de descuido que los alumnos suelen superar sin inconveniente mayor, eso sí, una vez que las combinaciones numéricas de las tablas son automatizadas y la memoria de trabajo queda descargada de esa exigencia. Su opinión sobre la frecuencia y relevancia de los tipos de errores más comunes en los alumnos queda reflejada en la siguiente tabla



Errores cometidos por los alumnos

A: Colocar los números en su posición.
B: Errores en las llevadas.
C: Fallos en la suma y la resta que participan en la multiplicación y división.
D: Errores en las tablas multiplicar.
E: Omitir ceros en el cociente.
F: Dejar restos intermedios mayores que el divisor.
G: Saber qué número cabe.

Una observación importante extraída de la práctica es que los alumnos que fallan en los algoritmos de la multiplicación o división, cuando se les permite abordarlos con plantillas con las tablas de multiplicar a la vista, apenas cometen errores y los realizan correctamente. Estos datos coinciden con los aportados por Buswel y John (1926) en un estudio acerca de los métodos de trabajo de los escolares de 3º a 6º grado en el que muestran que el error más frecuente y el obstáculo cognitivo más importante es la falta de conocimiento sobre las combinaciones de las tablas de multiplicar.

Lo que saben los alumnos

Con el objetivo de indagar sobre la dificultad expresada en la automatización de las combinaciones básicas en el aprendizaje numérico en Educación Primaria, se ha elaborado una prueba de cálculo mental (anexo II) que consta de ejercicios con las operaciones básicas, graduadas en cuatro niveles de dificultad.

Nivel de dificultad I: sumas dentro de la misma decena 2+3=; 4+4=; 23+5=; Los niños pequeños más aventajados las captan rápidamente de un sólo golpe de vista, la mayoría de los alumnos de 2º y 3º curso de primaria las suelen dominar con facilidad. Dentro de este nivel –como en los otros– hay unas sumas sencillas que otras, bien por simetría 3+3 =; o porque encajan de modo perfecto en la decena 6+4=; lo que facilita su visualización.

Nivel de dificultad II: sumas del tipo 8+7=; 9+5=. El salto de la decena y el tener que utilizar números más grandes ya supone un nivel de dificultad añadido. Para realizarlas con soltura es necesario aplicar una habilidad fundamental que es la capacidad de segmentación, que supone partir los números y agrupar las partes de forma sabia. Es básico el conocimiento de las decenas.

Nivel de dificultad III: sumas en las que hay que sumar decenas y unidades 19+19 =; 14+17=; supone un mayor grado de dificultad, los apoyos concretos con los dedos si se aplican al número completo no sirven –no hay suficientes dedos– y es más difícil abarcar los números mentalmente. Las decenas deben ser agrupadas por un lado y las unidades por el otro. Se hace ineludible la capacidad de partir los números en decenas y unidades.

Nivel de dificultad IV: son ítems que evalúan el aprendizaje de las tablas de multiplicar 9x8 =; 6x7 =; suponen menos referencias visuales y manipulativas, mayor nivel de abstracción y por lo tanto mayor nivel de dificultad.

En los criterios de corrección (anexo III) se tienen en cuenta los errores cometidos y necesariamente también el tiempo empleado. Con tiempo suficiente y los métodos que se quiera –conteo con los dedos– cualquier alumno podría finalizar la prueba correctamente.

Datos cuantitativos extraídos de la aplicación de la prueba de cálculo mental (anexo II)

Los resultados son que de 91 alumnos de tercer ciclo de Educación Primaria de tres colegios de ámbito rural a los que se les pasó la prueba, 67 mostraron tener perfectamente automatizadas las combinaciones básicas de las tablas de multiplicar y por añadido el algoritmo de la multiplicación, 15 dejaban ver algunas lagunas que con un mayor entrenamiento podían ser superadas y 9 manifestaban tener dificultades serias en la automatización y aprendizaje de las tablas de multiplicar.

Datos cualitativos

El nivel I se corresponde con las combinaciones básicas más sencillas, las más fáciles de aprehender y memorizar y que por tanto su respuesta es inmediata en un grupo importante de alumnos.

En el nivel II al tener que saltar de decena y que los números sean más grandes hace que aparezcan más errores y que el tiempo de respuesta aumente. Los alumnos que resuelven bien este apartado se desenvuelven bien en los algoritmos tradicionales de la suma y de la resta, en ambas operaciones deben manejarse mentalmente números menores que 20.

El nivel III de la prueba exige respecto del nivel II el uso de estrategias apropiadas de cálculo mental, agrupar las decenas por un lado y las unidades por otro, para poder resolver sus ítems. En sumas del tipo 12+17 es muy frecuente que los alumnos se inclinen por aplicar mentalmente el algoritmo de cálculo del mismo modo que si pudieran utilizar lápiz y papel. Es decir, apenas intentan utilizar otras estrategias más flexibles. A algunos incluso se les observa un intento de escribir con los dedos sobre la mesa los resultados de las operaciones mentales para poder retenerlas. Ello es indicativo de que en las aulas se enseñan los algoritmos de cálculo repetidamente de forma tradicional, lo que supone un empobrecimiento para los alumnos, con la consecuencia de que muy pocos se inclinan por utilizar estrategias variadas que les haga más fácil el cálculo mental de la operación.

De los alumnos a los que se les pasó la prueba los que manifestaron dificultades en el nivel II también las manifestaron en el nivel IV. Ambos apartados, II y IV, deben de mantener algún tipo de relación clara, porque los alumnos que fracasan en uno de ellos también lo hacen en el otro. Es decir, que quienes no realizan las sumas con soltura tampoco aprenden con facilidad las tablas de multiplicar.

La experiencia de aplicación de la prueba muestra que la evaluación del nivel II de dificultad es fundamental, importante no es tanto si el alumno lo ha resuelto sino más aún saber cómo lo ha resuelto; si se ha servido de los dedos para realizar las sumas –lo que indica que necesita de apoyos concretos– la velocidad o soltura con que las lleva a cabo, en definitiva, el grado de automatización que ha conseguido. La deficiencia más frecuente es el contar paso a paso al hacer la operación, con algunos alumnos es difícil percibir que están contando, lo hacen casi a escondidas, con los labios, los dedos de las manos bajo su mesa, o incluso mentalmente.

Todavía en 6º curso de primaria, para determinados alumnos, el sumar a grupos con soltura es una actividad compleja, algunos de ellos suman elemento a elemento, lo que significa situarse en los primeros estadios del aprendizaje del sistema de numeración. Son incapaces de aprehender la estructura de grupo de elementos, que proporciona una estrategia mucho más flexible, la capacidad de agrupar de una forma sabia según convenga a la situación. No tienen una visión integrada del número como una totalidad que a su vez consta de una serie de elementos, tratar el número siete como una unidad que a su vez consta de siete elementos, el número ocho como una unidad que consta de ocho elementos es una habilidad que se les escapa. Su conocimiento del sistema de numeración es muy reducido y carecen de muchas unidades de información sobre el mismo que les permitiría actuar de forma más flexible.

Se observa en la prueba que algunos alumnos con dificultades conocen mejor las combinaciones más pequeñas porque son más fácilmente abarcables mentalmente o porque se han utilizado con mayor asiduidad y por tanto las han aprendido de memoria, pero realmente no las sacan provecho porque no son capaces de generalizarlas a otros tramos de la recta numérica. Por ejemplo pueden contestar que 5+3 son ocho pero no son capaces de contestar con rapidez que 25+3 son 28.

Los alumnos que resuelven con facilidad la prueba se apoyan en los números nudo (decenas) para realizar un cálculo más rápido. Esta estrategia, presente en sus verbalizaciones, es de extraordinaria importancia. Se basa en una de las virtualidades que posee el sistema de numeración, que un fragmento de la recta numérica, la decena, se repite con regularidad a lo largo de la recta numérica. Todo se reduce a operar dentro de una decena (apartado I de la prueba) o saltar de una decena a otra (apartado II de la prueba). Si por ejemplo se hace la suma 52+3 se está dentro de la misma decena, sería una generalización de 2+3; en la suma 57+8 lo que se hace es saltar de una decena a la siguiente, con 3 llegar hasta 60 y con las 5 restantes hasta 65. Los números nudos (10, 20, 30, etc.) juegan un papel fundamental en esta representación, a partir de ellos utilizados como hitos o mojones en el camino se pueden realizar los cálculos y situar los demás números.

Del modo de proceder de los alumnos en los ítems de la prueba de cálculo mental (anexo II) se desprende que las estrategias de conteo, el saber desplazarse en la serie numérica, juegan un papel destacado, aquellos alumnos que las realizan adecuadamente pueden aprender con rapidez las tablas de multiplicar. Para construir la tabla del 7 se va sumando de 7 en 7, pero si esta suma se realiza uno a uno significa que los alumnos no visualizan la serie numérica, su conocimiento es demasiado particular, no manejan tramos más amplios de ella, no se representan aspectos generales y fallan al tratar de retenerlas. Como se ha señalado, para sumar 56+7 primero debe sumarse 4 e ir hasta el número nudo que es 60 y después añadir 3 y obtener el resultado 63. Esta estrategia de suma a trozos o saltos es fundamental para manejarse en la serie numérica, que a su vez es imprescindible para retener el contenido de la tabla de multiplicar. Esto explicaría la relación que aparece entre los apartados II y IV de la prueba.

Los alumnos que resuelven con rapidez y eficacia la prueba se valen de estrategias tales como:

- Contar a saltos y no contar paso a paso.
- Apoyarse para las sumas en los números nudos.
- Partir un número y utilizar los trozos con los que se puede operar más fácilmente. Por ejemplo 12+16 se puede hacer como 10+10 más 8.
- Utilizar estrategias variadas. Por ejemplo 15+17 se puede hacer como el doble de 15 y añadir 2 al resultado.
- Manejan muchos ítems de información sobre el sistema de numeración, saben por ejemplo que 7 puede des-

componerse como 5 + 2 o 4 + 3 o 6 + 1; que de 25 a 30 hay la misma distancia que de 35 a 40; que para hacer 38 + 7 pueden servirse de la suma 8 + 7 etc.

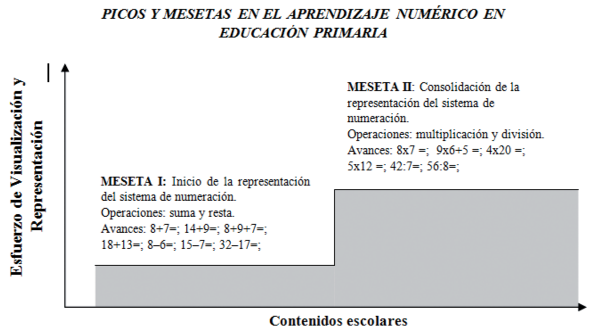
Los alumnos que fallan en la realización de la prueba no es un grupo muy numeroso, (9 de 91 alumnos) pero con un gran significado, porque constituyen el grueso de lo que podría denominarse fracaso escolar en base a causas cognitivas. Son alumnos que no han sabido manejarse con soltura en los apartados II y III de la prueba del cálculo mental y no contestan o cometen errores en el apartado IV.

Las causas se encuentran en la incapacidad para formarse una representación eficaz de los contenidos numéricos.

- Suman elemento a elemento, ayudándose en la mayoría de las ocasiones de los dedos de las manos. Se muestran incapaces de desprenderse de este asidero concreto.
- Falta de capacidad de representación, no son capaces de visualizar tramos más amplios de la recta numérica, dan la sensación de encontrarse perdidos de tener que caminar a tientas, apoyándose en ayudas.
- No se apoyan en las decenas y números nudo para realizar un cálculo más flexible.
- No son capaces de automatizar la suma a saltos. Consecuencia de ello es que a pesar de sus esfuerzos tienen muchas dificultades para memorizar las tablas de multiplicar.
- No conocen con soltura las combinaciones numéricas más usuales.
- Dificultades para generalizar, si de 2 a 10 hay 8, desde 32 hasta cuarenta también debe haber 8.
- Dificultades para realizar inferencias a partir de los conocimientos que se poseen: por ejemplo si un número termina en cinco hasta la decena siguiente hay cinco y apoyándose en ese conocimiento saber rápidamente que de 34 hasta 40 hay 6.
- Les cuesta descomponer un número de diversas formas.
- No utilizan con flexibilidad las estrategias de análisis y síntesis pasando de una modalidad a otra.
- Apenas se sirven de las propiedades de los números, doblar un número, utilizar los ceros, realizar la resta como suma, la división como multiplicación, la propiedad distributiva etc.
- Pueden manifestar dificultades espaciales, en ocasiones confundir la posición de los dígitos en un número, 91 con 19, realizar alguna escritura de números con la direccionalidad equivocada, comenzar el cálculo con lápiz y papel de una suma o resta por la izquierda, realizar una suma en vez de una resta y viceversa.

Para que se produzca la memorización de las combinaciones básicas de la multiplicación, por ejemplo 6×3 = 18 hace falta que la operación y el resultado estén de forma simultánea en la memoria de trabajo. Como la memoria de trabajo de los alumnos con dificultades es de menor capacidad, y como utilizan con preferencia procedimientos algorítmicos más lentos (la estrategia sumar o contar todo, la estrategia de sumar elemento a elemento), es posible que hayan olvidado uno de los dos sumandos cuando alcanzan el resultado. En este caso, al no estar todos los números de la combinación a la vez en la memoria de trabajo tienen menos posibilidades de ser almacenados y posteriormente recuperados.

Cuando las operaciones aritméticas se transforman con relativa facilidad cualquier cálculo matemático adquiere un sentido más atractivo, semejante al de un juego de números y ello puede derivar en una actitud positiva hacia las matemáticas. Pero cuando esto no es posible los cálculos más sencillos pueden convertirse en una tarea excesivamente ardua y árida.



Picos y mesetas

La situación es que algunos alumnos quedan retenidos en la meseta primera de la suma y la resta, sin un dominio y automatización de los cálculos de la meseta de la multiplicación, lo que les imposibilita el acceso a contenidos básicos para un posterior desarrollo matemático e incluso personal de desenvolvimiento en la vida corriente.

Indicaciones para la enseñanza: la naturaleza espacial y visual de los cálculos numéricos

La multiplicación ocupa un lugar crucial dentro de los contenidos matemáticos, pero para poder multiplicar es necesario aprender las tablas. Bastantes alumnos tienen dificultades para memorizarlas. Esta incapacidad es debida a que no son capaces de elaborar una representación mental adecuada que les permita visualizarlas y situarlas en la recta numérica. Cuando lo que pretenden es aprenderlas de memoria, sin haberlas construido mentalmente, fallan en su propósito.

En el aprendizaje de las tablas de multiplicar se observa que la práctica repetitiva por si misma no asegura el dominio de las combinaciones básicas numéricas, hasta que no se “hace la luz” de manera significativa en la mente del alumno, no se consiguen progresos. Memorizar hechos que no se comprenden, aparentemente aislados, constituye una tarea dura y por ello muchos alumnos abandonan estos aprendizajes.

Todos los algoritmos y operaciones, la mayoría de los conceptos que se trabajan en la etapa de primaria, máximo común divisor, mínimo común múltiplo etc. tienen como teatro de operaciones la serie numérica. Es muy conveniente representarla, bien dibujada sobre el suelo o construida con un modelo de madera, en la que estén marcados los números. Para crear una representación mental es necesario promover actividades de exploración y desplazamiento espacial a través de las serie de los números, situarse en referencia a los hitos o mojones, los números nudo, para a la hora de calcular, poder apoyarse en ellos. Conocer bien el terreno es básico para poder desplazarse bien a través de él. El uso de preguntas sobre la serie numérica contribuye a rellenar los huecos de una representación incompleta ¿Se va más lejos con la tabla del 3 o con la tabla del 7? ¿Cuántos pasos hay de 56 a 60? ¿Si de 35 a 40 hay cinco pasos, cuántos hay de 35 a 43? ¿Cuál es la decena que sigue a 62? Y a través de las verbalizaciones conocer los procesos de pensamiento de los alumnos. El uso del cálculo mental y de los procedimientos informales, aunque puede que menos rápidos y eficaces que los algoritmos tradicionales, tienen las ventajas de que son creados por los propios alumnos, y están siempre basados en la comprensión de quien los lleva a cabo.

Además de la recta numérica, disposiciones espaciales numéricas como la siguiente favorecen los aprendizajes:

7×1= 7	**7×4=28**	**7×7=49**
7×2=14	**7×5=35**	**7×8=56**
7×3=21	**7×6=42**	**7×9=63**

Disposición espacial de la tabla del 7

Esto se justifica teniendo presente las posibilidades de la visualización como favorecedora de la memoria. Del mismo modo que las diferentes partes de un discurso para ser mejor recordadas pueden situarse mentalmente en un espacio físico conocido, por ejemplo las estancia de una casa, en las tablas de multiplicar, dividiendo el espacio en fragmentos, es más sencillo organizar los contenidos y localizar la respuesta.

La tabla del siete puede ser considerada una de las más difíciles, dentro de ella unas combinaciones, las más fáciles de retener, pueden ser aprendidas antes y servir de apoyo para retener las demás. Por ejemplo, 7 por 5 en la segunda columna puede ayudar a memorizar 7 por 4 y 7 por 6. En la tercera columna 7 por 7 puede ayudar a memorizar 7 por 8 y 7 por 9.

Existen diferentes propuestas sobre el orden en que las tablas de multiplicar deben ser aprendidas (Maza, 1991), primero las más sencillas y las que funcionalmente desempeñen un papel importante. Una tabla es más sencilla cuanto más fácil es de visualizar la secuencia de los números que la componen. Puede comenzarse por la tabla de 10 que marca las decenas, seguida de la del 5 que parte justamente las decenas por la mitad y por ello es fácil de visualizar, seguidas de las del 2, 4, 3, 6, 8, 9 y 7. Este orden no debe ser rígido, ni es bueno quedar detenido en una tabla porque ésta no se retiene. Deben ser trabajadas en conjunto y sobre la base de un buen conocimiento del sistema de numeración, particularmente de los números del 1 hasta el 100. Las combinaciones que se sitúan antes del 50 son más fácilmente retenidas que las que se sitúan del 50 hasta el 100 porque ese primer tramo de la recta numérica es más conocido y familiar. Pueden relacionarse unas tablas con otras en base a las combinaciones básicas que comparten, 12 es 2 por 6 y también 4 por 3.

Algunas actividades tipo

Es posible y deseable una enseñanza basada en la selección por parte de los profesores de aquellas actividades que su práctica profesional diaria ha demostrado son más valiosas para el desarrollo de los alumnos. Actividades abiertas que puedan ser resueltas por diferentes caminos, que permitan diferentes niveles de dificultad y con impacto cognitivo sobre los esquemas de los alumnos.

Se trata de que los alumnos practiquen en la composición y descomposición de números en situaciones interesantes para ellos, partiendo de los conocimientos que ellos mismos pueden descubrir u observar, como fragmentación de un número, relaciones entre las operaciones, propiedades etc. No se trata de introducirlos de inmediato en los algoritmos tradicionales de la multiplicación y de la división, más bien que mediante la experimentación con cantidades, en solitario o pequeños grupos, puedan reflexionar y construir un conjunto amplio de experiencias que les haga posible el desarrollo y aplicación de un cálculo rico y flexible.

1. Con treses y cincos tengo que llegar a 180.

2. Construir en madera un modelo físico de la recta numérica y aprender a desplazarse a través de él.

3. Construir sobre el suelo mediante cintas adhesivas de colores un modelo de la recta numérica.

4. Con cincos y ochos ¿puedes ir de 87 a 149?

5. Números diana. Con los números 9, 8 y 5 conseguir el número 143 (con sólo cambiar los números y las opera-

ciones esta actividad puede realizarse de muy diferentes formas).

6. Los sellos: Si tenemos muchos sellos de 3 céntimos y 5 céntimos. ¿Se pueden conseguir hacer todos los valores hasta 50 céntimos?

7. Ajustar armarios de 5 y 7 dm en habitaciones de diferente longitud.

8. Realizar sumas mentalmente
   a) 3+6+8+9+5+4++3+2+8 =
   b) 7+4+5+8+9+1+4+5+6 =

9. Multiplicaciones y divisiones: 3×12 =; 4×15 =; 5×60 =; 3×45 =; 148:7 =; 225:25 =; etc.

10. ¿Cuántos balones de a 12 euros pueden comprarse con un billete de 50 euros.

11. Un mecánico debe colocar 100 tornillos en cajas de 15 tornillos cada una ¿Cuántas cajas necesita?

12. Imagina 120 ¿Cómo lo ves? Sobre el 120 que tenías imaginado, imagina ahora 75. ¿Cuánto hay de de 75 a 120? Explica como lo has hecho.

Conclusión

Los números, el sistema de numeración, constituyen un verdadero lenguaje, el lenguaje para calcular y operar, el lenguaje matemático por excelencia. Cualquier lenguaje debe ser no sólo aprendido, sino automatizado, lo que quiere decir que debe poder utilizarse con mucha facilidad y rapidez, sin aparente esfuerzo y con poco costo cognitivo, sin apenas ocupar espacio de la memoria de trabajo. La retención de las tablas de multiplicar es un punto de especial dificultad. Cuando se realiza una multiplicación o una división, si se tiene que comenzar a pensar cuánto son 9 más 6 u 8 por 9, por poner un ejemplo, se escapa el sentido general de lo que se está haciendo, se alarga la actividad en tiempo y consumo de energías, haciendo inviable la solución y las posibilidades de progreso del alumno.

Volviendo a la frase del inicio de mi maestro D. José Guerra, decía yo al principio que presumiblemente no debía haber leído a Piaget, ciertamente esta es una afirmación gratuita, porque yo no lo sé. Sólo, que su propuesta de picos y mesetas es más visual que la de Piaget. Quizás es posible que entonces hubiera menos pedagogismo que a veces cuesta sacarle utilidad, y sí había muchos maestros intuitivos, con un buen conocimiento de la estructura de la materia que enseñaban, y con un gran ascendiente sobre la conducta de sus alumnos. Que sirva este modesto artículo de pequeño homenaje a D. José Guerra, a las muchas cosas que nos enseñó, y por las que hoy le estamos agradecidos. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Buswell, G. T., & John, L. (1926). Diagnostic studies in arithmetic. *Supplementary Educational Monographs, 30*, pp. 138-140.

Fernández Bravo, J. A. (1994). ¿Es la multiplicación una suma de sumandos iguales*? Comunidad Educativa*. Mayo, 215, pp. 36-42.

Hart, K. M. (Ed.)(1981). *Children´s Understanding of Mathematics. 11-16* . London: John Murray.

Luriya, A. R. (1969). On the Pathology of Computational Operations. En J. Kilpatrick y I. Wirszup (Eds) *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics, vol I*, Stanford. California: School Mathematics Study Group.

Maza Gómez, C. (1991). *Enseñanza de la multiplicación y la división.* Madrid: Síntesis.

Nesher, P. & Katriel T. (1977). A Semantic Analysis of Addition and Subtraction Word Problems in Arithmetic. *Educational Studies in Mathematics* 8, pp.251-270

Este artículo fue recibido en SUMA en diciembre de 2009 y aceptado en diciembre de 2010

Anexo I

CURSO EN EL QUE IMPARTE SUS CLASES _______
1. Señalar con una cruz el nivel de dificultad asignado a cada uno de los siguientes contenidos de matemáticas:

CONTENIDOS	NIVEL DE DIFICULTAD					
	1	2	3	4	5	6
Conocimientos informales						
Sistema de numeración						
Algoritmo de la Suma						
Algoritmo de la Resta						
Algoritmo de la Multiplicación (aprendizaje de las tablas de multiplicar)						
División						

2. ¿Qué contenidos dentro de los que se imparten en la Educación Primaria en el área de Matemáticas considera son más trascendentales para un alumno que pueda progresar sin dificultad en cursos posteriores? Señale dos.

3. ¿Dónde se encuentran los cuellos de botella, es decir aquellos contenidos que son importantes pero que por su especial dificultad impiden el progreso del alumno? Señale alguno.

Anexo II

I) 3 + 2 =	15 +7 =	3 × 9 =
5 + 5 =	24 + 7 =	4 × 7 =
5 + 4 =	36 + 8 =	6 × 9 =
11 + 8 =	77 + 6 =	9 × 8 =
12 + 7 =	43 + 8 =	6 × 3 =
26 + 4 =	84 + 9 =	6 × 8 =
25 + 3 =	17 + 8 =	7 × 4 =
42 +6 =	68 + 9 =	8 × 5 =
II) 8 + 5 =	59 + 6 =	7 × 9 =
9 + 2 =	III) 18 + 15 =	8 × 7 =
6 + 5 =	19 + 19 =	9 x 5 =
8 + 3 =	20 +16 =	9 × 6 =
7 + 4 =	4 +9 +3 =	7 × 6 =
7 + 7 =	5 + 9 + 2 + 7 =	5 x 7 + 9 =
9 + 9 =	8 +7 + 9 + 6 =	9 × 4 + 7 =
8 + 6 =	IV) 5 × 2 =	7 × 8 + 5 =
8 + 9 =	5 × 5 =	6 · 7 + 3 =
8 + 7 =	2 × 6 =	5 × 12 =
12+9	4 × 3 =	4 × 15 =

Anexo III

NORMAS DE APLICACIÓN Y CORRECCIÓN

Información a los alumnos:

Haz las siguientes sumas mentalmente (de cabeza), sin escribir otra vez los números, pon sólo el resultado a la derecha. Concentraros en hacer la prueba y tratar de hacerlo en el menor tiempo posible.

Orientaciones para los profesores:

La prueba pretende medir el grado de automatización del lenguaje matemático en los alumnos.

Puede pasarse tanto de forma individual como colectiva, pasarla de modo colectivo para los alumnos que obtienen buenas puntuaciones en matemáticas y de modo individual para los alumnos con dificultades.

En la aplicación individual, tanto como evaluar si el alumno lo hace o no lo hace bien se trata de evaluar cómo lo hace, si cuenta elemento a elemento, si se apoya o no en la decena.

Es fundamental observar si se suma con los dedos, porque es el indicador de la necesidad de apoyo concreto y de dificultades en la capacidad de representación.

Permite saber también qué tipo de combinaciones básicas domina.

Para obtener una puntuación debe tenerse presenta el número de aciertos y el tiempo empleado, la ponderación de ambos dará el grado de automatización del lenguaje matemático.

ALUMNO_____________________________CURSO_________

Nº ACIERTOS______TIEMPO EMPLEADO_________________

¿En qué apartado de la prueba se sitúan preferentemente los fallos?

¿Cuenta con los dedos, bien a las claras?

¿Cuenta con los dedos de modo encubierto, en alguna parte de la prueba?

OTRAS OBSERVACIONES:

suma+ 66
Febrero 2011, pp. 27-34

Borges y escalas

Partiendo de un magnífico texto de Borges, planteamos aquí una serie de actividades alrededor del concepto de escala. En estas actividades se reflexiona sobre la utilidad de los distinto tipos de escala y se calculan las medidas para construir modelos reales del universo, el átomo o una célula. Estas actividades se plantean como trabajos abiertos en los que los alumnos buscan toda la información necesaria y deciden cómo resolverlas. Y sobre todo, buscamos que al final sean capaces de contar detalladamente todo el proceso seguido y analizar los resultados para discutirlos con los compañeros.

Palabras Clave: Escalas, J. L. Borges, competencia lingüística, trabajo en equipo, secundaria.

Borges and scales

Taking Borges' magnificent text as a basis, an account of activities concerning the scale concept is set. In these activities we reflex on the usefulness benefit of the different types of scales and measures for the building of a real model of the universe, the atom or a cell are calculated. These activities are created as an open and flexible task in which students search all the necessary information and they decide how to resolve them. And above all, we seek that students will be able to relate in details all the process, together with a complete analysis of the results to discuss with their partners.

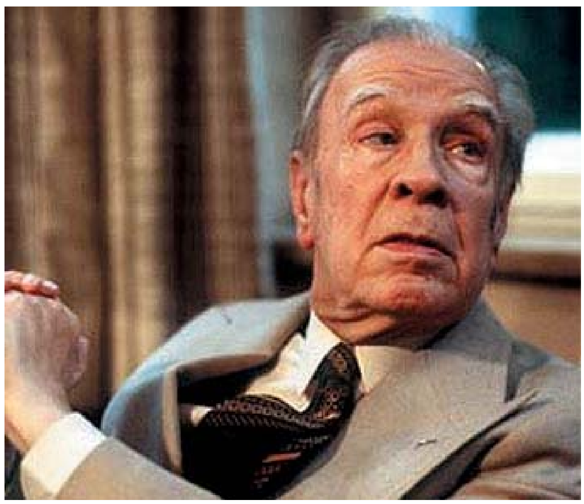
Key words: Scale, J. L. Borges, linguistic competence, teamwork, high school.

¿Cuántas veces hemos repetido que los alumnos no saben hacer problemas? Mas, si preguntamos a los profesores de otras asignaturas encontraremos con que los alumnos no leen los enunciados de los problemas, no saben hacer resúmenes, memorizan sin comprender… En la raíz de todos estos problemas se encuentra la comprensión lectora y los problemas de redacción.

Vivimos en una sociedad audiovisual en la que rara vez es necesario leer textos completos. Por ejemplo, al leer textos legales o para navegar en Internet nos hemos acostumbrado a hojear las páginas y leer sólo lo que necesitamos.

El problema es que, lo que podría ser una herramienta potente y eficaz, se convierte en un lastre para quien está aprendiendo. Muchas veces, los alumnos se quedan sólo con esa lectura a "vuela pluma" (incluso nos sucede a nosotros mismos). Y con mayor razón, si los textos escolares nos acostumbran a preguntas en las que hay que contestar con una sola palabra, con un monosílabo o completando huecos.

Si queremos mejorar sustancialmente en la resolución de problemas y en la educación en general, debemos prestar más atención al la lectura comprensiva y pedir a los alumnos que expliquen su resolución. No es suficiente con dar la respuesta correcta a un problema, sería muy enriquecedor que los alumnos explicasen los pasos que han seguido. Pero esto sólo puede suceder si les exigimos que lo hagan.



Jorge Luis Borges

Francisco Molina López
IES Las Sabinas, El Bonillo (Albacete)

Intentando trabajar en esta dirección, propongo la herramienta de los trabajos temáticos. En este caso, propongo un trabajo en el que se empieza leyendo un pequeño relato de Jorge Luis Borges y se van realizando una serie de actividades. Estas actividades van encaminadas tanto a la comprensión completa del texto como a la reflexión sobre el mismo y sobre conceptos matemáticos del curriculum. Además los alumnos tienen que buscar la información necesaria para resolver las cuestiones. No basta con copiar los datos del enunciado, sino que debemos tener claro qué necesitamos y luego buscarlo en Internet o donde se considere oportuno.

En concreto, en esta actividad, se trabaja principalmente con los conceptos de escala, un poco de errores, unidades y notación científica. Aunque estos contenidos se impartan en 2º de ESO, propongo algunas cuestiones que quedan fuera del alcance de este nivel. De esta manera podemos adaptarlas a niveles desde 2º de ESO a 1º de Bachillerato. Además, trabajar con niveles bajos este material tiene el inconveniente de que el texto de Borges tiene un vocabulario demasiado complejo. Desde mi punto de vista, tal vez sea en 4º de ESO el nivel más apropiado.

El texto, aunque es breve, destaca por su originalidad y su calidad literaria. De hecho incluso podría ser analizado ampliamente en clase de literatura. Por ejemplo, destaca el hecho de que el autor utilice tanto las mayúsculas. Supongo que con ello intentará dar a todas esas palabras una singularidad y una importancia mayor. Así, el Mapa en mayúsculas se convierte en el único mapa, o el mapa más perfecto, el que los engloba a todos. Borges trata en muchos de sus textos conceptos matemáticos de forma magistral. Por esto, desde la clase de matemáticas, debemos aprovechar que un gran literato se digne a incluir en sus textos, dedicados al público general, conceptos tan profundos.

Las preguntas abiertas en las que tenemos que buscar los datos necesarios ofrecen la posibilidad de resolverlas con diferentes niveles de dificultad según los datos y herramientas que usemos. Además, tenemos la oportunidad de tratar otros aspectos no mencionados en las cuestiones; como pueden ser las coordenadas geográficas, la dificultad de una representación plana de la superficie terrestre, la composición de la materia y la morfología de una célula.

Por tanto, pasemos a leer el texto y las cuestiones propuestas, deteniéndonos en resolver las más complicadas, las que necesitan buscar datos o aquellas sobre las que queramos hacer un comentario. Recordar que el grupo de alumnos puede encontrar estas soluciones u otras distintas, debe tener libertad para enfocar el problema de una forma diferente, pero en todo caso debemos pedir que explique y discuta la resolución del mismo con sus compañeros.

Comentario de texto

> ...En aquel Imperio, el Arte de la Cartografía logró tal Perfección que el mapa de una sola Provincia ocupaba todo una Ciudad, y el mapa del Imperio, toda una Provincia. Con el tiempo, esos Mapas Desmesurados no satisficieron y los Colegios de Cartógrafos levantaron un Mapa del Imperio, que tenía el tamaño del Imperio y coincidía puntualmente con él. Menos Adictas al Estudio de la Cartografía, las Generaciones Siguientes entendieron que ese dilatado Mapa era Inútil y no sin Impiedad lo entregaron a las Inclemencias del Sol y de los Inviernos. En los desiertos del Oeste perduran despedazadas Ruinas del Mapa, habitadas por Animales y por Mendigos; en todo el País no hay otra reliquia de las Disciplinas Geográficas.
>
> Del rigor de la ciencia
> J. Luis Borges

El texto que acabas de leer es un relato corto del autor Jorge Luis Borges. Antes de nada vamos a intentar comprender el texto completo.

1.- Anota primero todas las palabras de las que desconozcas el significado para ponerlas en común en clase. Quizás alguno de tus compañeros sepa o intuya el significado, comenta estas impresiones antes de buscar las palabras en el diccionario (También puedes consultar algún diccionario en Internet).

2.- Una vez que sabes el significado de las palabras del texto, comenta con tus compañeros el sentido de todo el relato.

> ...el mapa de una sola Provincia ocupaba todo una Ciudad, y el mapa del Imperio, toda una Provincia...

3.- Comenta la frase que encabeza este apartado (que piensas de ese mapa, de su utilidad, etc.).

Aunque el texto nos presenta una situación de todo punto irreal y absurda, podemos destacar el hecho de que, conseguir mapas cada vez más exactos ha sido un asunto crucial. Sirvan como ejemplo los mapas que se muestran en las siguientes fotografías:

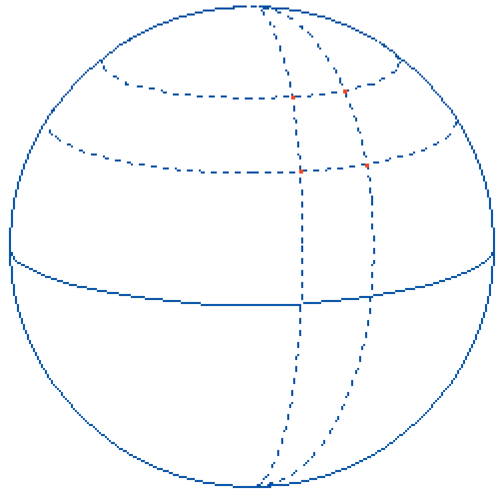
El primero es conocido como el Atlas del Gran Elector de Brandemburgo. Es una colección de 37 mapas pegados en cartones de 175 centímetros de alto y pesa más de 120 kilogramos. Es del siglo XVII y su tamaño es tan desmesurado que tuvieron que sujetarlo con enormes abrazaderas de hierro para que no se desmoronase por su propio peso. La segunda fotografía corresponde al llamado Atlas de Carlos II, mide 176 centímetros de altura y tuvieron que ponerle unas ruedas para poder transportarlo y mantenerlo abierto.

Actualmente no se realizan estos mapas, o mejor dicho, estos mapas no se llevan al papel. Pero sí que se han realizado estudios topográficos haciendo un barrido con láser desde un avión. De manera que cada 1,4 metros se registra al menos un dato de la altitud del terreno en esa zona. Además estos datos permiten incluso distinguir los árboles y calculan su altura.

Y aunque muchos de estos datos aún no son accesibles a toda la población, sí que están a nuestra disposición multitud de páginas de Internet en las que podemos ver fotografías aéreas del campo (SIGPAC y otros), de las ciudades (páginas del catastro), de las ciudades y pueblos (Google Earth) incluso podemos "movernos" por muchas calles del mundo (con Google Estreet View).

4.- Busca en Internet, en un libro de geografía o en un atlas cual es el tamaño de la península ibérica (por ejemplo a lo ancho). Si quisiéramos hacer un mapa como el que se menciona al principio del texto, de manera que ocupase toda la provincia de Albacete, ¿qué escala se usaría en este mapa?

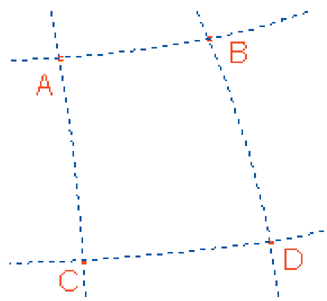
Si el alumno encuentra las dos medidas mencionadas esta pregunta sería un simple ejercicio de escalas, lo complicado es encontrar todos los datos.



El primer problema que se nos plantea es tomar una medida para "el ancho" de la península ibérica. Debido a la esfericidad de la tierra no podemos medir el ancho igual que se mide sobre un mapa. La solución que usaremos para encontrar esta longitud dependerá del nivel de los alumnos. Para empezar, tenemos que imaginarnos un "rectángulo" sobre el globo terráqueo que contenga la Península Ibérica. Ese será el trozo que queremos representar en un mapa. Observamos que ese "rectángulo" es más estrecho en el norte que en el sur.

- Una solución fácil al problema sería usar el visor del SIGPAC para medir sobre el mapa la longitud (a ojo pero siguiendo un paralelo) desde una longitud como la del cabo de Roca, en Portugal, hasta otra igual a la del cabo de Creus. Esto lo podemos hacer hacia el centro del mapa y nos da una aproximación bastante buena.

- Otra posibilidad sería ver con SIGPAC las latitudes y longitudes máximas y mínimas de manera que podemos dotar de coordenadas a los vértices del rectángulo que enmarca la Península. Luego se puede usar la página de Internet:
http://www.tutiempo.net/p/distancias/calcular_distancias.html
que permite calcular distancias en línea recta entre dos puntos de los cuales conocemos sus coordenadas.



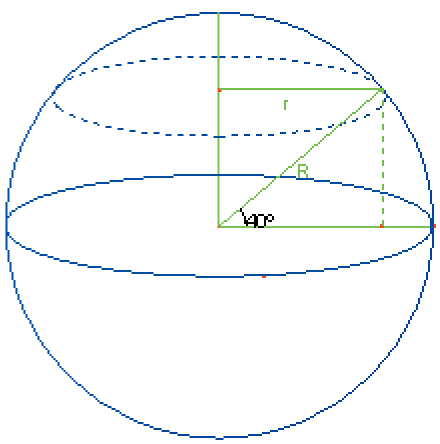
	Latitud	Longitud	Distancia
Punto de Partida (A)	43,7913	-9,4825	1041,28 Km.
Punto Final (B)	43,7913	3,32194	

Punto de Partida (C)	36,02	-9,4825	1151,85 Km
Punto Final (D)	36,02	3,32194	

Para tomar un valor del ancho de la Península Ibérica podemos usar la media de esas dos distancias o calcular el ancho que tiene el rectángulo en una latitud intermedia, por ejemplo de 40º. De cualquier manera obtenemos valores muy cercanos a 1100 km.

La duda con este sistema es saber si el programa usa para calcular esas distancias la línea que une, por ejemplo A y B, siguiendo un paralelo o siguiendo una geodésica.

- Si los alumnos saben trigonometría se puede calcular la longitud del paralelo que pasa por una determinada latitud, por ejemplo 40º, usando la longitud media del radio terrestre. De manera que



$r = R{\cdot}\cos(40)$
Y el paralelo mencionado mide: $L = 2\pi r = 2\pi R{\cdot}cos(40)$

De manera que entre dos puntos que distan de longitud geográfica gº hay una distancia (siguiendo el paralelo) de

$$d = \frac{g^{o}{\cdot}L}{360^{o}} = \frac{g^{o}{\cdot}2\pi R\cos(40)}{360^{o}}$$

Usando los valores:
$g^{o} = 9{,}4825 + 3{,}32194 = 12{,}80444$ y $R = 6.371$ Km.

Obtenemos $d = 1090{,}7$ Km.

Para calcular el ancho de la provincia de Albacete no influye tanto la curvatura de la tierra, y podemos usar directamente el SIGPAC para ver que es de aproximadamente 170 km. Con lo que la razón de proporción sería aproximadamente 6,47, es decir, tendríamos que usar una escala como mínimo de 1:7. En este caso, también es interesante advertir que no usamos el redondeo, sino que hacemos siempre una aproximación por exceso.

En el ejemplo anterior hemos calculado la escala 1:7, de esa forma, la península tendría un tamaño parecido al de la provincia, pero seguro que no cabría totalmente en su interior. Ese sería un problema mucho más difícil puesto que, al tener distinta forma, seguro que “el mapa” se saldría de la provincia en algunos lugares.

Al final, encontramos que la forma más realista de buscar la escala es de forma empírica. Usando dos copias del mapa de España probaremos a reducirlo hasta que quepa dentro de la provincia. Como estamos usando herramientas informáticas podemos consultar las propiedades de las dos imágenes para ver el ancho de las mismas y calcular la escala, en este caso hemos usado exactamente la escala 1:10.

5.- En ese mapa, ¿qué tamaño tendría tu pueblo? ¿Y tu casa?

6.- Está claro que esta escala no sirve para representar un “mapa geográfico” pero, ¿serviría para algún otro propósito?

> … y los Colegios de Cartógrafos levantaron una Mapa del Imperio, que tenía el tamaño del Imperio y coincidía puntualmente con él…

7.- Comenta la frase que encabeza este apartado.

8.- Vamos a calcular de nuevo la escala de un mapa como el de la frase del encabezamiento. Pero ¿qué medidas tomaremos como referencia para ello? Discute con tus compañeros sobre esto y calcula la escala.

9.- No hace falta que hagamos muchas cuentas para saber cuanto mediría nuestra casa en ese mapa, pero nos volvemos a preguntar si esa escala servirá para algo. Busca algún ejemplo no cartográfico en el que se use esta escala.

10.- Imagina un mapa de tu casa que fuese de grande como tu casa, ¿Qué opinión te merece dicho plano?

Vamos a cometer Errores.

11.- Imaginemos que tenemos la posibilidad de medir una longitud sobre el primero de los mapas que hemos comentado aquí (el de España sobre Albacete). Pero, ¿cual sería el instrumento de medida que usarías? Como es lógico, depende de cuanto queramos medir.

a) Supongamos que queremos medir la longitud de la fachada del ayuntamiento de tu pueblo sobre el mapa. Como, incluso sobre el mapa, esa fachada sigue siendo muy grande, usaremos un metro. ¿Qué error de medida se comete al medir con el metro?

b) Según la escala del mapa que hemos calculado antes, ese error sobre el mapa se puede trasladar a un error en la realidad, ¿a cuánto asciende este error?

12.- Según la Wikipedia:

> Los errores geométricos de un mapa suelen mantenerse por debajo de lo que el ojo humano puede percibir. Es habitual cifrar el límite de la percepción visual humana en 0,2 Mm.

Es decir, que el ojo humano lo podemos considerar como un “instrumento de medida” (ahora tiene sentido la expresión de “medir a ojo”) en el cual, el error cometido es de 0,2 mm. ¿Este error cometido sobre ese plano, a cuánto asciende en la realidad?

13.- Según el texto, el mapa del que estamos hablando tiene la perfección indicada en el ejercicio anterior. Es decir, que cualquier variación de un accidente geográfico superior a la medida de error calculada tendría que estar representada en el mapa. Pon ejemplos de objetos de la vida cotidiana que superen el tamaño antes indicado (Es decir que serían visibles en ese mapa).

Escalas:

Si hablamos de las escalas a nivel general (no solo en cartografía), tenemos tres tipos de escalas:

- **Escala natural.** Es el tipo de mapa con el que termina el texto. Esta escala, si bien no es útil para cartografía, ya hemos visto que sí se utiliza en otros campos.
- **Escala de reducción.** Se usa para representar objetos con un tamaño inferior al real. Es el tipo al que estamos acostumbrados en los mapas, maquetas, etc.
- **Escala de ampliación.** Se usa para representar objetos demasiado pequeños para ser apreciados a simple vista. (Un ejemplo sería la escala 100:1 cada 100 unidades en el modelo es sólo 1 en la realidad)

Aunque, en teoría, sea posible aplicar cualquier valor de escala, en la práctica se recomienda el uso de ciertos valores normalizados con objeto de facilitar la lectura de dimensiones mediante el uso de reglas o escalímetros.
Estos valores recomendados para las escalas de reducción son:
1:2, 1:5, 1:10, 1:20, 1:50, 1:100, 1:200, 1:500, 1:1.000, 1:2.000, 1:5.000, 1:20.000

14.- Busca junto a un par de compañeros, ejemplos de aplicaciones prácticas reales en las que crees que se puede aplicar cada una de estas escalas. Para ello indica el tamaño que tendría el objeto representado en la realidad y en el plano para comprobar que todo cuadra y que el plano es útil y manejable.

Trabajo en equipo

Cada uno de los cuatro grupos trabajará una de las siguientes cuestiones:

15.- Busca en Internet, algún libro de ciencias o en una enciclopedia cual es el tamaño de una célula (por ejemplo eucariota animal) y de sus partes y orgánulos más importantes (núcleo, nucleolo, ribosomas, mitocondrias, lisosomas). ¿Qué escala usarías (en este caso, de ampliación) para hacer un modelo a escala en el que se puedan apreciar sus partes? ¿Qué tamaño tendrían en este modelo cada una de las partes?

El tamaño y la forma de una célula, incluso centrándonos en las eucariotas animales, es muy variado. Según las fuentes de Internet consultadas, puede medir entre 10 y 100 micras, siendo los siguientes algunos ejemplos:

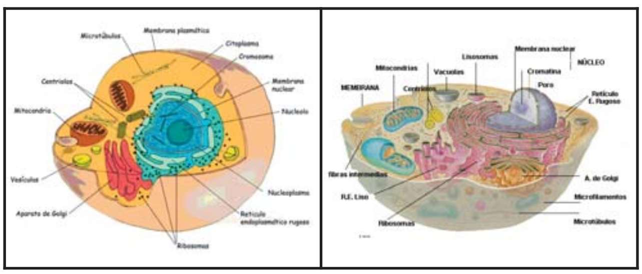
Células óseas:	12 – 25 micras.
Glóbulos rojos:	7’5 – 8 micras.
Bacteria:	2 – 3 micras.
Neuronas:	100 – 200 micras.

Puesto que encontramos una gran variedad de medidas, lo primero que observamos es que es imposible representar una “célula tipo”, simplemente hacemos un modelo de los muchos posibles, pues también tenemos mucha variedad en la morfología. Los tamaños de los orgánulos que pretendemos representar son:

		Tamaño según escala	
	Tamaño	133.333:1	31.000:1
Célula eucariota media	$10{\cdot}10^{-6}$ m	1,33 m	31 cm
Núcleo	$6{\cdot}10^{-6}$ m	80 cm	18,6 cm
Mitocondrias	$2{\cdot}10^{-6}$ m	26,6 cm	6,2 cm
Ribosomas	$32{\cdot}10^{-9}$ m	4,3 mm	1 mm
Membrana celular	$7{,}5{\cdot}10^{-9}$ m	1 mm	

En los tamaños encontramos varias unidades de medida a las que no estamos acostumbrados, como nanómetros o micras. Usaremos la red para encontrar las equivalencias con el metro, aunque por comodidad a la hora de comparar, no usamos la notación científica.

Para decidir la escala usada, primero tenemos que comprobar cual es el tamaño más pequeño que vamos a representar, para que sea visible con la escala que utilizaremos. Si queremos usar escalas más exactas, podemos representar los ribosomas con un tamaño de 3,2 Mm.; con lo cual la escala será 100.000:1 y la célula mediría 1m. Este modelo nos permite comprobar que los dibujos de los libros de ciencias deben ser considerados como esquemas, puesto que hacerlo a escala real sería imposible en un libro de texto.

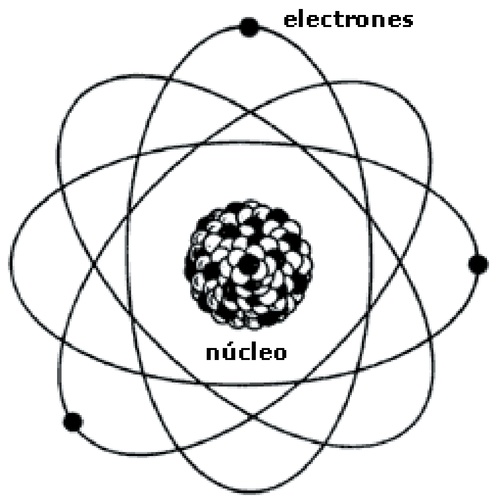


16.- Busca en Internet, algún libro de ciencias o en una enciclopedia los tamaños de un protón, un neutrón, un electrón y el del propio átomo. ¿Qué escala usarías (en este caso, de ampliación) para hacer un modelo a escala en el que se puedan apreciar el átomo completo y sus partes? ¿Qué tamaño tendrían en este modelo cada una de las partes?

De nuevo tenemos que usar las potencias de 10 para expresar los tamaños.

		Tamaño según escala		
	Tamaño	$3{,}6{\cdot}10^{14}$:1	$1{,}9{\cdot}10^{8}$:1	$3{,}8{\cdot}10^{7}$:1
Átomo de Hidrógeno	$5{,}29{\cdot}10^{-11}$ m	19 Km	530 m	106 m
Protón	10-15 m	36 cm	1 cm	2 mm
Electrón	5,55·10-19 m	0,2 mm		

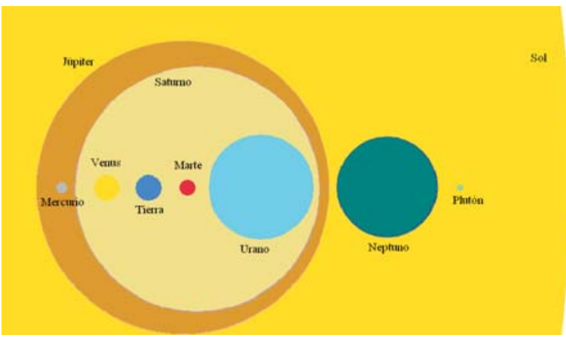
La sorpresa se este modelo es el gran vacío que existe en un átomo, incluso siendo el más pequeño de todos. Para imaginarlo, basta que comentemos que un campo de futbol mide 120 m (sin gradas). En ese modelo los electrones estarían moviéndose a gran velocidad, muy alejados del núcleo y representados por partículas invisibles al ojo humano. Evidentemente, este modelo también está muy alejado del típico átomo de los libros de texto.

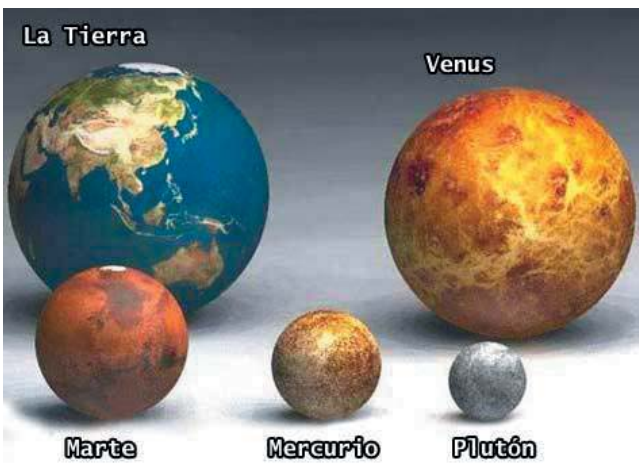


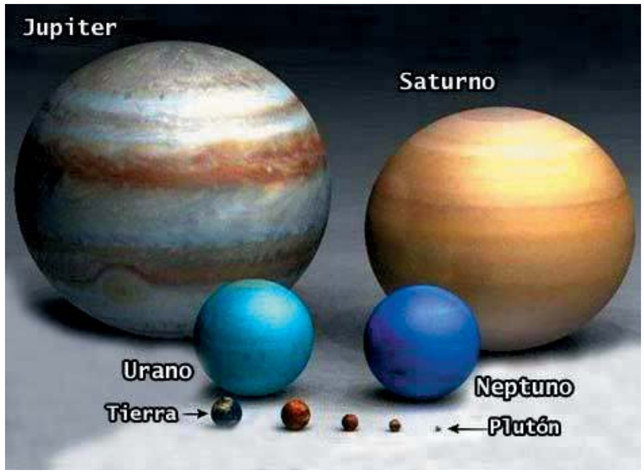
17.- Para hacernos una idea que nos permita comparar los planetas del sistema solar, vamos a realizar una representación de los mismos a escala. Pero cuidado porque hay mucha diferencia en los tamaños. De manera que habrá que elegir bien la escala (no sea que algunos no se vean, o que otros sean tan grandes que aun no los percibamos totalmente).

		Tamaño según escala	
	Diámetro	$2{,}39{\cdot}10^9:1$	$10^9:1$
Sol	1.392.000 Km	58,24 cm	1,39 m
Mercurio	4.879 Km	2 mm	4,9 mm
Venus	12.104 Km	5 mm	1,2 cm
Tierra	12.742 Km	5 mm	1,3 cm
Marte	6.794 Km	3 mm	6,7 mm
Júpiter	142.984 Km	5,98 cm	14,3 cm
Saturno	120.536 Km	5,04 cm	12 cm
Urano	51.118 Km	2,14 cm	5,1 cm
Neptuno	49.572 Km	2,07 cm	4,9 cm
Plutón	2.390 Km	1 mm	2,4 mm

Aquí tenemos una representación de hecha con el programa Cabri con esos datos y otra descargada de Internet muy vistosa pero en la que no sabemos si las proporciones son correctas.







18.- El sistema solar es demasiado grande para nuestra comprensión, vamos a hacer una maqueta a escala de las órbitas de todos los planetas. Pero cuidado porque hay mucha diferencia en los tamaños.

		Tamaño según escala	
	Diámetro	$2{,}39{\cdot}10^9:1$	109 :1
Sol	1.392.000 Km	58,24 cm	1,39 m
Mercurio	4.879 Km	2 mm	4,9 mm
Venus	12.104 Km	5 mm	1,2 cm
Tierra	12.742 Km	5 mm	1,3 cm
Marte	6.794 Km	3 mm	6,7 mm
Júpiter	142.984 Km	5,98 cm	14,3 cm
Saturno	120.536 Km	5,04 cm	12 cm
Urano	51.118 Km	2,14 cm	5,1 cm
Neptuno	49.572 Km	2,07 cm	4,9 cm
Plutón	2.390 Km	1 mm	2,4 mm

Trabajo final de toda la clase

Usando la escala que ha calculado el grupo que contestó la pregunta 17, la clase tiene que representar de las distancias de los planetas en el sistema solar (como en el ejercicio 18). No debemos sorprendernos por las dimensiones que cobrará dicha representación ya que aun no llegamos a cubrir toda la provincia ni todo el país como en el texto. Pero sí es sorprendente el tamaño del universo, ¿no crees? ■

			Tamaño según escala	
		Tamaño	2,39·109 :1	109 :1
Sol	Diámetro	1.392.000 Km	58,2 cm.	1,39 m
Mercurio	Diámetro	4.879 Km	2 mm	4,9 mm
	R. Orbital Med.	$57{,}9 \cdot 10^6$ Km	24,2 m	57,89 m
Venus	Diámetro	12.104 Km	5 mm	1,2 cm
	R. Orbital Med.	$108{,}2 \cdot 10^6$ Km	45,27 m	108,21 m
Tierra	Diámetro	12.742 Km	5 mm	1,3 cm
	R. Orbital Med.	$149{,}6 \cdot 10^6$ Km	62,60 m	149,60 m
Marte	Diámetro	6.794 Km	3 mm	6,8 mm
	R. Orbital Med.	$227{,}9 \cdot 10^6$ Km	95,35 m	227,94 m
Júpier	Diámetro	142.984 Km	6 cm	14,3 cm
	R. Orbital Med.	$778{,}4 \cdot 10^6$ Km	325,68 m	778,41 m
Sturno	Diámetro	120.536 Km	5,0 cm	12,1 cm
	R. Orbital Med.	$1.426{,}7 \cdot 10^6$ Km	597 m	1427 m
Urano	Diámetro	51.118 Km	2,1 cm	5,1 cm
	R. Orbital Med.	$2.871{,}0 \cdot 10^6$ Km	1.201 m	2871 m
Neptuno	Diámetro	49.572 Km	2,1 cm	4,9 cm
	R. Orbital Med.	$4.498{,}2 \cdot 10^6$ Km	1.882 m	4498 m
Plutón	Diámetro	2.390 Km	1 mm	2,4 mm
	R. Orbital Med.	$5.913{,}5 \cdot 10^6$ Km	2.474 m	5914 m

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Borges, J. L. (2003). *El hacedor*. Madrid: Alianza Editorial.

Internet:

http://es.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Portada
http://www.tutiempo.net/p/distancias/calcular_distancias.html
http://sigpac.mapa.es/fega/visor/

Este artículo fue recibido en *Suma* en abril de 2010 y aceptado en enero de 2011.

suma+ 66
Febrero 2011, pp. 35-40

Medidas de altura: trigonometría con cuerda, metro y móvil

Proponemos una experiencia didáctica para tratar el bloque de semejanza y trigonometría en el último curso de enseñanza secundaria obligatoria. Analizamos cinco métodos distintos que los alumnos y alumnas trabajarán para estimar la altura del edificio del instituto a través de medidas indirectas que realizarán desde el patio. Discutimos la metodología de la actividad y el tratamiento de las competencias básicas. Presentamos además los guiones de la práctica.

Palabras Clave: Experiencia de aula, geometría, semejanza, medidas indirectas, secundaria.

Height measurements: trigonometry with a rope, tape, and mobile phone

We propose a didactic methodology to cover the topics of trigonometry and similarity in the final course of compulsory secondary education. We shall analyze five different approaches that the students must apply to measure the height of the building of their institute by using indirect measurements taken in the playground. We shall focus on the methodology and the treatment of the basic competencies. Finally, we also propose a practice guide of the activity.

Key words: Classroom experience, geometry, similarity, indirect measures, high school.

Introducción

La motivación de los estudiantes de secundaria es una tarea complicada a la que hoy día se destina una buena parte de los esfuerzos de los docentes y que, sin duda, se hace imprescindible para contribuir a lograr un aprendizaje significativo (Sánchez, 2004). Elaborar materiales y programaciones de aula que motiven e impliquen a nuestros alumnos de matemáticas es, por tanto, una necesidad en el actual marco del proceso de enseñanza-aprendizaje.

La aplicación de conceptos de semejanza y trigonometría a la resolución de problemas métricos en el mundo físico es uno de los contenidos fundamentales del cuarto curso de ESO en la opción B de Matemáticas. Habitualmente se lleva a cabo mediante la realización de problemas que aparecen en el libro de texto en los que se calculan alturas de supuestos árboles, torres, montañas o antenas. No parece fácil con ese planteamiento convencer al alumnado de la cotidianidad de las matemáticas y de su utilidad real. Pero además tampoco parece ésta una metodología que pueda resultar motivadora.

En este artículo proponemos una experiencia didáctica alternativa a los problemas de trigonometría de lápiz y papel mencionados. En concreto, los alumnos estimarán la altura del edificio del instituto a través de medidas indirectas que realizarán desde el patio. Llevar a cabo una clase de matemáticas fuera del aula no sólo constituye un elemento dinamizador y motivador, con una alta implicación por parte del alumno, sino que además transmite una idea más cercana de las matemáticas y permite señalar su utilidad en la vida real (Marcos y Carpintero, 2001; Ramírez et al., 2006).

La actividad propuesta parte de un problema –determinar la altura del edificio del instituto– abierto en el sentido de que no se conoce ningún dato a priori, y que, a diferencia de los ejercicios tipo de los libros, puede abordarse de múltiples maneras. Es ya clásica la fábula del barómetro y del edificio de A. Calandra (1961, 1968) en la que un profesor pide a un alumno de física que determine la altura de un edificio con ayuda de un barómetro. La respuesta convencional sería medir la diferencia de presiones entre el suelo y la azotea y

Manuel Feito Guzmán
IES Santa María de los Baños, Fortuna (Murcia)
Joaquín Martínez Ramírez
IES Miguel Hernández, Alhama de Murcia (Murcia)

luego utilizar la ley física *altura = densidad del aire* x *gravedad* x *diferencia de presiones*. Sin embargo, el alumno del texto va enumerando varias respuestas alternativas, también correctas, tales como medir el tiempo de caída del barómetro lanzado desde la azotea o utilizar el barómetro como péndulo y medir su periodo para, aplicando distintas leyes físicas en cada caso, resolver el problema. Y claro, el profesor acaba dándole al heterodoxo alumno una buena nota.

En la actividad de aula (patio) que proponemos incidimos en la potencia de las herramientas matemáticas que los alumnos estudian en clase para resolver un problema de la vida real palpable y en cómo somos capaces de plantear distintos caminos de resolución que, dependiendo de las circunstancias concretas, podrán ser más o menos útiles.

En el siguiente apartado describimos en detalle la metodología que se seguirá en la actividad práctica. En el tercer apartado presentamos los materiales didácticos que se suministrarán al alumno en donde se desarrollan cinco métodos distintos de afrontar el problema. Abordaremos también, el tratamiento de las competencias básicas y, finalmente, concluiremos con una discusión general y las conclusiones del trabajo.

Descripción de la actividad y metodología

Como hemos comentado en la introducción, la actividad propuesta consiste en resolver el problema de cómo medir la altura de un edificio utilizando diferentes métodos, en particular, propondremos cinco métodos distintos.

Para ello proporcionaremos a los alumnos y alumnas un guión de la práctica en el que se explica el procedimiento de medida a seguir. En ese guión anotarán los datos que han obtenido experimentalmente, que después sustituirán en la expresión que proporcionamos para obtener la altura. En el guión de cada método también se encuentra un apartado en el que se fundamenta analíticamente el procedimiento seguido.

La actividad está planteada para que se lleve a cabo por grupos de cuatro alumnos. Esta metodología elegida fomenta el trabajo cooperativo, tan importante en el ámbito científico actual. Los grupos serán heterogéneos, es decir, estarán formados por alumnos que presenten una mayor dificultad en cuanto al manejo de los procedimientos junto con otros con menos dificultades. Se asignarán los distintos métodos a los grupos, que irán rotando al siguiente método conforme finalicen las medidas de cada uno de ellos.

Los estudiantes medirán ángulos y longitudes. Para ello utilizarán materiales sencillos y cotidianos (cuerda, flexómetro, teléfono móvil) con la idea de que perciban la simplicidad de la toma de medidas y la facilidad de determinar alturas y distancias en otras circunstancias de la vida real a las que se tuvieran que enfrentar.

La actividad de medida en sí se realizará en una sola sesión. Durante el desarrollo de la misma el profesor actuará como coordinador y orientador de los diferentes grupos, e intervendrá desbloqueando y animando a los alumnos siempre que lo considere necesario. Previamente conviene haber dedicado algunos minutos de la clase del día anterior a comentar brevemente en qué consistirá el trabajo de campo, pero sobre todo esa sesión previa es imprescindible para que los alumnos tengan el guión y puedan *pensarlo* en casa. La sesión posterior a la de medida se dedicará al análisis y discusión de la experiencia. La evaluación de la actividad se llevará a cabo a través de una puesta en común de los resultados obtenidos por los distintos grupos.

Con esta propuesta de trabajo se consigue motivar a nuestros alumnos que tienen que implicarse en ella desde el principio, diferenciándose así, como ya indicamos, de una sesión tradicional, en la que primero se introducen los contenidos y luego se resuelven mecánicamente una y otra vez ejercicios iguales.

Materiales didácticos

Discutimos a continuación en detalle los cinco métodos usados para la determinación de la altura del edificio del instituto y los materiales didácticos para llevarlos a cabo.

Los instrumentos de medida utilizados son:

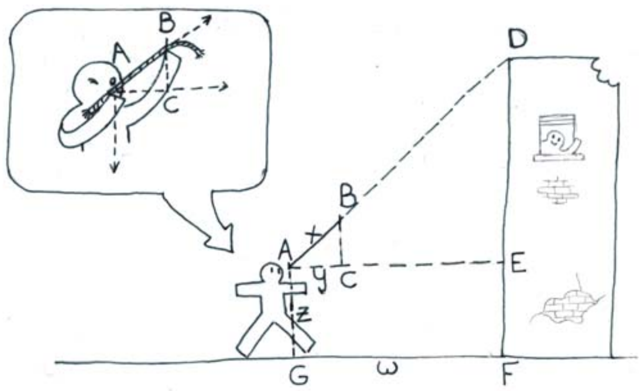
i) un trozo de cuerda de una longitud aproximada de un metro,
ii) un flexómetro, preferentemente de cinco o más metros,
iii) un goniómetro que se entrega en un folio junto al guión de prácticas (basta fotocopiar un transportador escolar),
iv) un teléfono móvil con cámara digital y
v) un ordenador que se utilizará para completar uno de las procedimientos en casa.

Aparte del guión de prácticas que se entregará previamente al alumnado se usará también un lápiz o bolígrafo y una calculadora científica (por ejemplo la del móvil).

A la hora de desarrollar el material se ha tenido en cuenta que sea ameno para el alumno sin que esto suponga perdida de rigor. En las ilustraciones explicativas del guión de la práctica los adornos aparecen en un tono más claro, como si estuvieran a otro nivel, para no restar importancia a los datos relevantes y que éstos sean fácilmente apreciables.

Guión de prácticas: Método I

Lo primero que hay que hacer es colocarse a una distancia adecuada del edificio y *apuntar* con la cuerda a la parte superior del edificio como se indica en el esquema:



Hay que medir directamente con el metro las longitudes (mira el esquema) $x=AB$, $y=AC$, $z=AG$ y $w=GF$. Apunta las medidas aquí:

$x=$ $z=$

$y=$ $w=$

Para obtener la altura del edificio, h, basta aplicar la fórmula siguiente:

$$h = z + w\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 1} \quad (1)$$

Sustituye los datos medidos y opera:

$h =$

Pero... ¿de dónde viene esa fórmula? Veámoslo.

La altura del edificio es (ve mirando el dibujo)

$$h=DE+EF \quad (2)$$

Por un lado tenemos $EF=AG$, que es la longitud z que medimos directamente:

$$EF=z \quad (3)$$

Por otro lado vamos ahora a determinar DE. Los triángulos ABC y ADE son semejantes, ya que están en posición de Tales. Por lo tanto, sus lados son proporcionales:

$DE/BC = AE/AC$, de donde $DE/BC = w/y$

Además, BC lo obtenemos de aplicar el Teorema de Pitágoras al triángulo ABC: $x^2=y^2+BC^2$. Así, para la proporción anterior tenemos

$$\frac{DE}{\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{w}{y} \Rightarrow DE = \frac{w\sqrt{x^2-y^2}}{y} \quad (4)$$

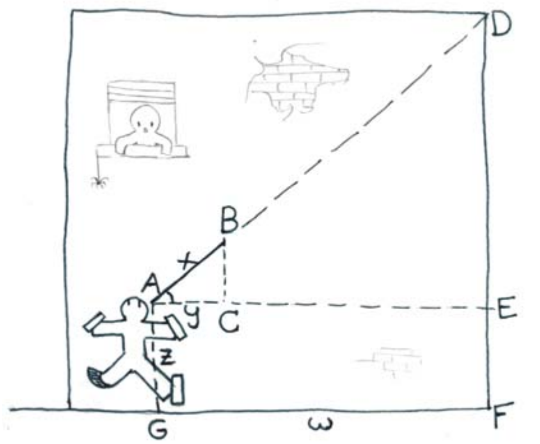
Llevando las ecuaciones (3) y (4) a la ecuación (2) queda para la altura del edificio:

$$h = \frac{w\sqrt{x^2-y^2}}{y} + z$$

Si queremos que la ecuación anterior quede algo más simplificada basta meter la y dentro de la raíz (como y^2, claro) y obtenemos al final la ecuación (1) que queríamos deducir.

Guión de prácticas: Método II

Es similar al método I, pero esta vez vamos a situarnos sobre la pared del edificio. Con la cuerda apuntaremos hacia una de las esquinas superiores del edificio como se ve en el esquema:



Hay que medir directamente con el metro las longitudes $z=AG$ y $w=GF$, y con el transportador el ángulo A (date cuenta de que ahora las medidas pueden ser distintas que en el método I).

Apunta los resultados de las mediciones aquí:

$z =$ $w =$ $A=$

Para obtener la altura del edificio, h, basta aplicar la fórmula siguiente:

$$h=z+w \operatorname{tg} A$$

Sustituye y opera:

h =

Pero... ¿de dónde viene esa fórmula? Veámoslo.

Fijándonos en el triángulo ADE, obtenemos para la tangente del ángulo A:

$$\operatorname{tg} A = DE/AE, \text{ de donde } \operatorname{tg} A = DE/w$$

y despejando de la ecuación anterior tenemos $DE=w \operatorname{tg} A$.

La altura del edificio es $h=EF+DE$, es decir,

$$h=z+w \operatorname{tg} A \qquad (5)$$

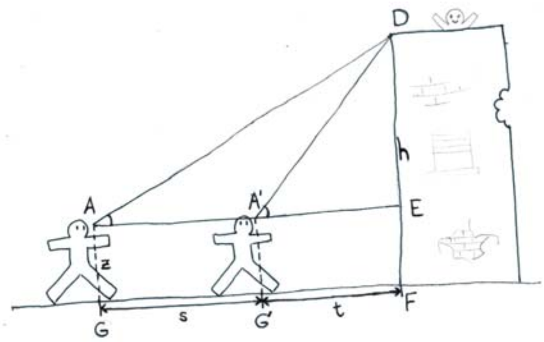
tal y como queríamos demostrar. De hecho, esta ecuación (5) es equivalente a la (4) que vimos en el método I. En efecto, si nos fijamos en el triángulo ABC tenemos $\operatorname{tg} A=BC/AC$, donde $BC^2=x^2-y^2$. (sale por Pitágoras como en el método I) y donde $AC=y$. Así pues,

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sqrt{x^2-y^2}}{y}$$

Si sustituimos esta última ecuación en la ecuación (5) obtenemos, tras operar, la ecuación (1).

Guión de prácticas: Método III

Nos situamos a una distancia del edificio y apuntamos con la cuerda a la parte superior del edificio. Luego, repetimos lo mismo pero desde una distancia mayor. Ver el esquema adjunto.



Hay que medir directamente con el metro las longitudes (mira el esquema) $z=AG$ y $s=GG'$ y con el transportador los ángulos A y A'. Apunta las medidas aquí:

z = A=

s = A'=

Para obtener la altura del edificio, h, basta aplicar la fórmula siguiente:

$$h = z + \frac{s}{\frac{1}{\operatorname{tg} A} - \frac{1}{\operatorname{tg} A'}}$$

Sustituye los datos medidos y opera:

h =

Pero... ¿de dónde viene esa fórmula? Veámoslo.

En el triángulo ADE tenemos

$$\operatorname{tg} A = \frac{DE}{AE} \iff \operatorname{tg} A = \frac{DE}{s+t} \quad (6)$$

En el triángulo $A'DE$ tenemos

$$\operatorname{tg} A' = \frac{DE}{A'E} \iff \operatorname{tg} A' = \frac{DE}{t} \quad (7)$$

Las ecuaciones (6) y (7) forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (DE y t son las incógnitas, mientras que $\operatorname{tg} A$, $\operatorname{tg} A'$ y s son números que conocemos puesto que los hemos medido directamente). Resolviendo este sistema [despejando t de la ecuación (7) y sustituyéndolo en la ecuación (6); intenta hacer las operaciones] obtenemos

$$DE = \frac{s}{\frac{1}{\operatorname{tg} A} - \frac{1}{\operatorname{tg} A'}}$$

La altura del edificio es $h=EF+DE$, es decir,

$$h = z + \frac{s}{\frac{1}{\operatorname{tg} A} - \frac{1}{\operatorname{tg} A'}}$$

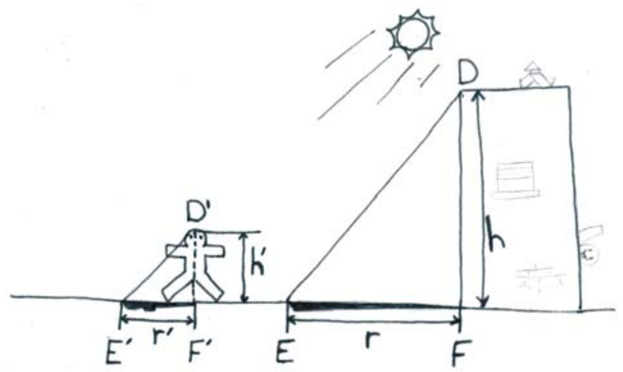
que también podemos escribir como

$$h = z + \frac{s}{\operatorname{cotg} A - \operatorname{cotg} A'}$$

Este método III tiene la ventaja sobre los anteriores de que no necesitamos tener accesible el edificio. Nos valdría, por ejemplo, para medir desde el patio del instituto la altura de un edificio que estuviera fuera sin tener que ir hasta la base del edificio.

Guión de prácticas: Método IV

Probablemente este método es el más sencillo. Se trata, por un lado, de medir la sombra que proyecta el edificio (para ello tiene que hacer sol y que la hora del día sea adecuada para que la sombra se sitúe en nuestra zona de medida) y, por otro lado, medir la altura de una persona y su sombra. Por lo tanto, hay que obtener las longitudes (mira el esquema) $r=EF$, $r'=E'F'$ y $h'=D'F'$.



Mide con el metro y anota los valores:

r = r' = h' =

Para obtener la altura del edificio, h, basta aplicar la fórmula

$$h=rh'/r'.$$

Sustituye y opera:

h =

Pero... ¿de dónde viene esa fórmula? Veámoslo.

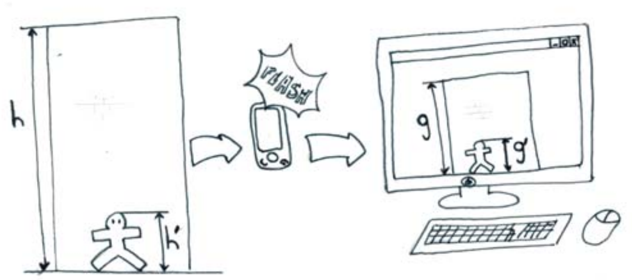
Los triángulos *EDF* y *E'D'F'* son semejantes (por el primer criterio de semejanza) y por lo tanto sus lados son proporcionales:

$$DF/D'F'=EF/E'F', \text{ de donde } h/h'=r/r'$$

Si despejamos h obtenemos la fórmula utilizada.

Guión de prácticas: Método V

Sitúate junto a la pared del edificio y mide tu altura, h'. Luego, que te hagan una foto (con la cámara del móvil por ejemplo) en la que se te vea a ti y al edificio completo. Esa foto la puedes pasar en casa a la pantalla del ordenador y medir allí con una regla la altura de la imagen del edificio, g, y la tuya, g'.



Apunta aquí las medidas que has hecho:

g = g'= h' =

Para obtener la altura del edificio, h, basta aplicar la fórmula

$$h= gh'/g'.$$

Sustituye los datos medidos y opera:

h =

Pero... ¿de dónde viene esa fórmula? Veámoslo.

La realidad y la foto son figuras semejantes (una es una copia de la otra a escala). Por lo tanto sus longitudes son proporcionales: $h/g=h'/g'$. Despejando h llegamos a la fórmula deseada.

Competencias básicas

Que el alumno sea competente y sepa desenvolverse en los diferentes aspectos de la vida es uno de los objetivos del actual marco educativo (MEC, 2006). A continuación vamos a ver cómo las diferentes competencias se ven favorecidas con la práctica propuesta y la metodología de trabajo.

Aparte de la contribución evidente a la *competencia matemática*, la discriminación de formas, relaciones y estructuras geométricas, y la capacidad para transferir formas entre el plano y el espacio contribuyen a profundizar en la competencia en el *conocimiento y la interacción con el mundo físico.* Además, la geometría es parte integral de la expresión artística de la humanidad al ofrecer medios para describir y comprender el mundo que nos rodea (*competencia cultural y artística*). La realización de la actividad en el patio es un punto clave en esta dirección.

Con esta actividad se desarrollan la *competencia social y ciudadana* y la *competencia en comunicación lingüística*, ya que los alumnos y alumnas tienen que comentar, discutir y ponerse de acuerdo para repartirse las tareas de las mediciones, así como para analizar los errores y aciertos cometidos en los procesos de resolución del problema planteado con espíritu constructivo.

En esta misma línea, los procesos de resolución del problema que aquí se lleva a cabo contribuyen de forma especial a fomentar la *autonomía e iniciativa personal* porque se utilizan para planificar estrategias, y hacen hincapié en la idea de que se puede llegar a una misma solución utilizando métodos o caminos diferentes. El mero hecho de que sean los alumnos los que obtengan y manipulen la información consolida la adquisición de destrezas involucradas en la *competencia de* *aprender a aprender* tales como la curiosidad de plantearse preguntas, identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles ante una misma situación, la toma de decisiones con la información disponible o la habilidad para comunicar con eficacia los resultados del propio trabajo.

Finalmente, desde la experiencia propuesta también se contribuye a mejorar el *tratamiento de la información y competencia digital* de los estudiantes. En particular, en el último de los métodos geométricos proponemos que el alumno use la cámara digital de su teléfono móvil y luego el ordenador de casa como herramientas matemáticas útiles para resolver el problema planteado. Además, esta experiencia también puede servir para introducir el uso de la calculadora como medio de obtener valores de las funciones trigonométricas. Se fomentará el uso de la calculadora científica incorporada en la mayoría de los móviles de nuestros alumnos.

Discusión y conclusiones

En este trabajo hemos propuesto una experiencia didáctica para el tratamiento de la unidad de semejanza y trigonometría de cuarto curso de ESO. Dicha experiencia está diseñada para ser realizada en el patio del instituto, lo que constituye un elemento motivador del alumnado. La medida de la altura del edificio del instituto nos permite acercar los conceptos abstractos de la trigonometría al mundo real y mostrar la utilidad de las matemáticas.

Hemos visto como la metodología seguida contribuye al desarrollo de las competencias básicas del currículo, especialmente a la competencia en el conocimiento e interacción con el mundo físico, el tratamiento de la información y competencia digital, la competencia para aprender a aprender y, por supuesto, la competencia matemática.

La experiencia no se circunscribe únicamente a la actividad en el patio, sino que, como ya indicamos, tras la sesión de medida se prevé una sesión de aula completa para analizar, discutir y poner en común los diferentes métodos y resultados obtenidos. Esta sesión es importante para concluir con éxito la actividad. En particular se hará énfasis en la deducción de las fórmulas empleadas. Por otra parte, esta sesión en el aula es fundamental para insistir en dos ideas básicas:

Primera: en el mundo real cuando nos enfrentamos a un problema (métrico en nuestro caso) uno debe plantearse interrogantes del tipo ¿qué mido?, ¿para qué mido?, ¿cómo lo mido?, ¿puedo resolver el problema de otra forma más sencilla o más precisa? Los problemas del mundo real son mucho más abiertos y más ricos que en los libros.

Y segunda: aunque los métodos de medida utilizados son en exceso simples, constituyen la base de mecanismos más sofisticados como otros que se usan a diario en la ingeniería (como esos trípodes grandes llamados teodolitos que los alumnos han visto en las obras de su calle...)

Más allá de esta última sesión integradora, los resultados podrán retomarse posteriormente a lo largo del curso. Por ejemplo, una cuestión relacionada en las pruebas escritas podría ser: ¿cómo medirías la altura de una montaña –cima y base inaccesibles–? También podemos retomar los resultados obtenidos por los distintos grupos al trabajar la unidad didáctica de estadística –tratamiento de datos–.

Esperamos que este trabajo, y en particular el guión de práctica presentado, sirva para animar a docentes y alumnos a la resolución de problemas con enfoques abiertos. ¡Si un barómetro puede servir para medir la altura de un edificio de mil maneras, un trozo de cuerda y un metro nos ofrecen infinitas posibilidades! ■

Agradecemos sinceramente a María Ángeles Cano Sánchez su colaboración en la preparación de las ilustraciones.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Sánchez Delgado, P. (Coord.) (2004). *El proceso de enseñanza y aprendizaje*. Madrid: ICE, Universidad Complutense de Madrid.

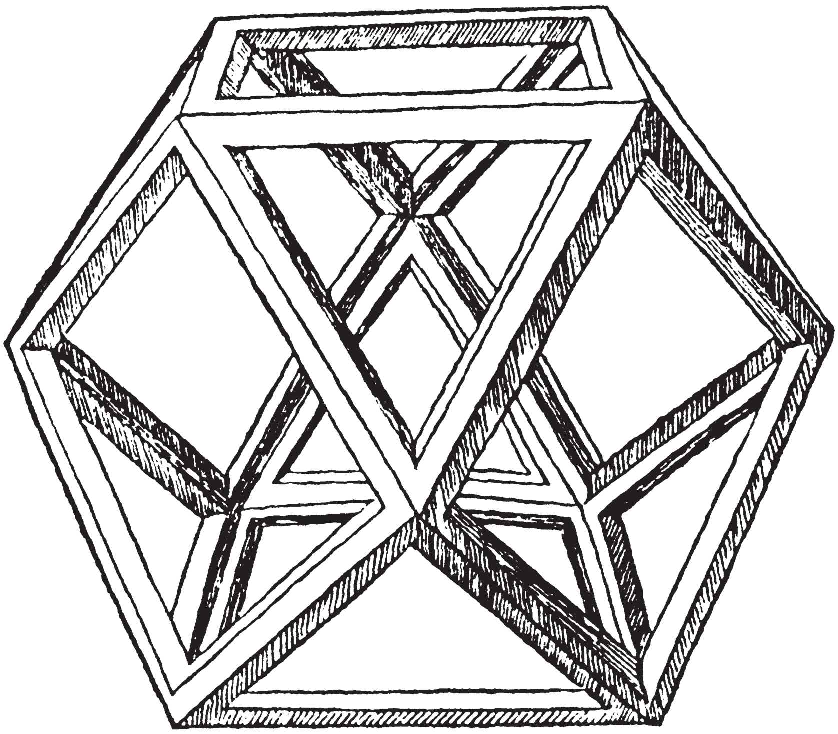
Ministerio de Educación y Ciencia, RD 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de Educación Secundaria.

Marcos Cabellos, A., Carpintero Montoro, E. (2001). Actividades matemáticas fuera del aula: Cuaderno de Campo. *Suma, 38*, pp. 73-83.

Ramírez Uclés, R., Soriano Poyatos, J.M., Ávila Flores, J. (2006). A tomar viento fresco: matemáticas en el patio. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales", 65*, pp. 265-272.

Este artículo fue recibido en *Suma* en julio de 2010 y aceptado en dicembre de 2010.

suma+



Dibujo de Leonardo da Vinci para *La divina proporción* de Luca Pacioli

poliedro

Juegos

suma+ 66
Febrero 2011, pp.43-46

Puzles de cuadraturas

Desde la más tierna infancia todos nos hemos sentido fascinados por los puzzles. Trabajar con piezas irregulares y desconocidas y que tras un arduo trabajo encontremos una imagen o figura reconocible siempre es algo atractivo. Como además se suele abordar desde un aspecto lúdico, suele ser una actividad motivante con gran potencial didáctico, por eso no es raro que el puzzle sea uno de los recursos educativos desde los primeros años de escolarización.

En esta sección ya hemos trabajado anteriormente con gran variedad de puzzles, tanto de dos como de tres dimensiones: poliábolos, hexamantes, el cubo de Muñoz, el Teorema de Pitágoras, Stomachion de Arquímedes, etc. Hay ocasiones en que intentamos agotar todo lo que en ese momento conocemos de un tema y en otros incluimos lo que podemos para que el artículo no quede demasiado extenso. Pero hasta el momento no habíamos retomado un tema que ya habíamos trabajado antes. Aprovechando que aunque los directores de SUMA van cambiando, siempre se encargan amigos que nos siguen honrado con su confianza, hoy podemos volver la vista atrás y retomar el tema de las cuadraturas.

Como dice el Diccionario de la Real Academia de la Lengua, en su acepción geométrica, cuadratura es el efecto de cuadrar, es decir, dar el aspecto de cuadrado. Esto es algo corriente en el mundo de los puzzles ya que muchos de ellos parten de la disección de un cuadrado, como en el Tangram Chino o de Sam Loyd. En nuestro caso vamos a trabajar, en esta ocasión, con la disección de polígonos regulares con cuyas piezas puede reconstruirse un cuadrado.

En el número 48[1] de esta revista SUMA, del ya lejano año 2005, apareció el artículo *Cuadraturas de los polígonos regulares* donde se planteaba el problema de las disecciones de polígonos regulares para obtener un cuadrado. En él se comentaban las cuadraturas del triángulo, del pentágono, del hexágono y del octógono, y por medio del teorema de Wallace-Bolyai-Gerwein se daba respuesta a la pregunta que hacíamos sobre qué polígonos admiten una cuadratura: *Dados dos polígonos de igual área existe una disección de uno en un número finito de piezas poligonales que recubre exactamente el otro*[2]. La demostración se puede encontrar en http://bayledes.free.fr/decoupage/index.html

El concepto matemático que se desarrolla en las disecciones planas es la conservación del área cuando se corta una figura y se reordenan las piezas resultantes. Por el teorema enunciado anteriormente siempre es posible pasar de un polígono a otro distinto; la dificultad estriba en hacerlo con el menor número de piezas o con piezas no muy sofisticadas. En esta entrega queremos presentar una segunda parte ampliando el trabajo que habíamos realizado a otros cuatro polígonos regulares: heptágono, eneágono, decágono y dodecágono.

Grupo Alquerque de Sevilla
Constituido por:
Juan Antonio Hans Martín. *CC Santa María de los Reyes.*
José Muñoz Santonja. *IES Macarena.*
Antonio Fernández-Aliseda Redondo. *IES Camas.*
juegos@revistasuma.es

El primer trabajo suele ser aclararle al alumnado cuáles son estos polígonos, pues hay veces que no saben que existen, pues no suelen ser polígonos que se trabajen normalmente en clase, ni tienen idea clara de su forma y algunos hasta desconocen el número de lados que tienen. Por ello puede ser un buen momento para tratar aspectos de la geometría plana que se están perdiendo, como la construcción de polígonos regulares con regla y compás, y además la dimensión histórica y cultural de las matemáticas.

Podemos pues comentarles los requisitos sobre la regla y compás como elementos ideales que se autoimpusieron los griegos para sus construcciones geométricas, aspectos que seguro les llamarán la atención, pues no están acostumbrados a reglas de longitud infinita, que no tengan marcas que permitan medir o trasladar distancias y con un sólo borde (para evitar el paralelismo fácil), ni a compases de memoria frágil que olvidan la distancia que tenían entre sus puntas cuando se levantan del papel.

Desde la época de Euclides, alrededor del 300 a. C., se conocían construcciones geométricas, con sólo regla y compás, para dibujar polígonos regulares de 3, 4, 5 y 15 lados y aquellos otros que se pueden deducir de ellos por bisección, como los de 6, 8, 10, 12, 16... lados. Más tarde Gauss (1777-1855), el Príncipe de las Matemáticas, demostró que es imposible construir, utilizando únicamente regla y compás, los polígonos regulares de 7, 9, 11 y 13 lados. Y hoy se sabe perfectamente qué polígonos regulares de n lados son construibles de esta forma sin más que conocer la descomposición en factores primos de n.

Vamos a empezar viendo la cuadratura del dodecágono regular pues a pesar de ser el de mayor número de lados de los cuatro polígonos que vamos a tratar, permite un desarrollo completo más fácil del proceso de disección: la construcción del polígono de partida es posible con regla y compás o de forma aproximada si no se desea ser tan riguroso geométricamente, y las instrucciones de cortes no son tan compicadas.

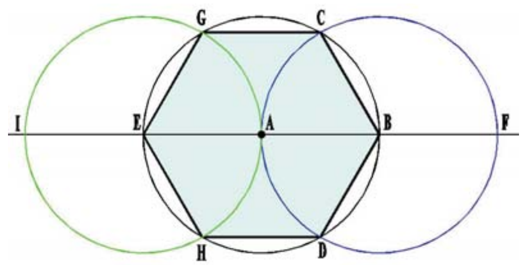
La cuadratura del dodecágono

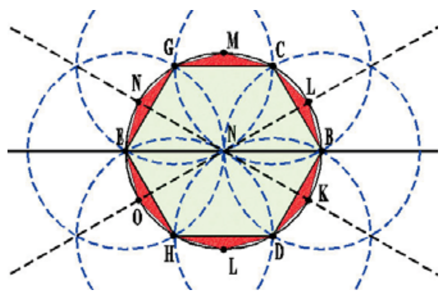
La construcción y posterior disección de este polígono nos permite realizar un buen trabajo de regla y compás y de repaso de elementos geométricos como circunferencia, polígono inscrito, radio, segmento, cuerda y punto medio de un segmento entre otros.

Vamos a empezar construyendo un hexágono regular a partir de dos puntos A y B:

Con radio AB trazamos sendas circunferencias con centro primero en A y después en B. Estas circunferencias se cortan en dos puntos: C y D que van a ser vértices de nuestro hexágono. Prolongando el segmento AB y cortando con las circunferencias trazadas obtenemos E y F. Volvemos a trazar un circunferencia, ahora con centro en E y que pase por A; sus cortes con la circunferencia de centro A nos determinan los puntos G y H. Uniendo los puntos-vértices obtenemos el hexágono regular buscado.

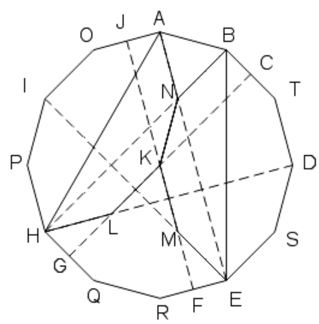
Posteriormente cada uno de los seis lados se divide en dos, calculando en cada una de las cuerdas que se determinan en la circunferencia de centro A la mediatriz del segmento y su corte con el arco (también se puede hacer trazando las bisectrices de los ángulos centrales de los distintos sectores circulares). Obtenemos así el dodecágono regular.



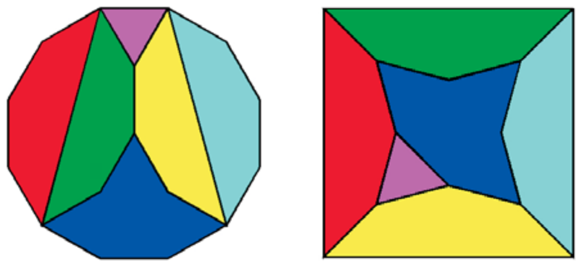


La transformación de un dodecágono en un cuadrado fue creada por Harry Lindgren ((1912–1992), ingeniero anglo-australiano y matemático aficionado) en 1951. Lindgren publicó en 1964 el libro Geometric Dissections sobre técnicas de elaboración y resolución de rompecabezas de disección.

Para diseccionarlo seguimos los siguientes pasos:



1. Dibujamos el dodecágono regular.
2. Trazamos los segmentos (cuerdas del polígono): AH, AE, BH, BE, EI Y HD.
3. Trazamos los segmentos GC y JF, unen los puntos medios de lados opuestos.
4. Dibujamos el segmento KN.
5. Dividimos el dodecágono en seis piezas:
    a. Cuatro pentágonos iguales: AHPIO, ANKLN, BEMKN y BTDSE.
    b. El triángulo ABN y el heptágono HLKMERQ.

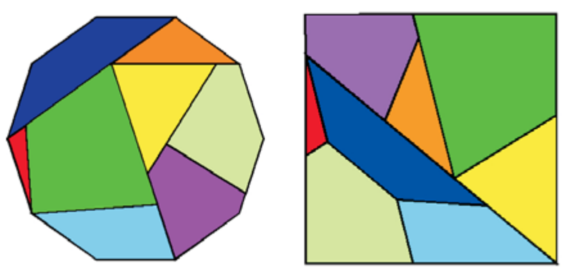


Y con las seis piezas podemos formar un cuadrado. La imagen de la izquierda muestra el polígono de partida y la de la derecha su transformación en un cuadrado.

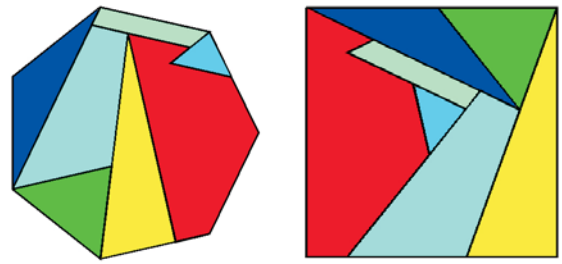
Ya hemos comentado que la construcción con regla y compás del heptágono y eneágono regulares son imposibles (aunque siempre podemos partir de una construcción no exacta), pero como además las instrucciones para la construcción de la disección de estos dos polígonos y del decágono son más complicadas es por lo que sólo presentamos sus dibujos. Las plantillas para construir los puzzles de este artículo y de su predecesor se pueden descargar en formato PDF en nuestra web: http://www.grupoalquerque.es/

Las tres disecciones siguientes corresponden al decágono, al heptágono y al eneágono. Han sido descubiertas por Gavin Theobald que, junto a Greg N. Frederickson, es uno de los expertos actuales en disecciones geométricas, y cuya página web citada en la bibliografía recomendamos encarecidamente.

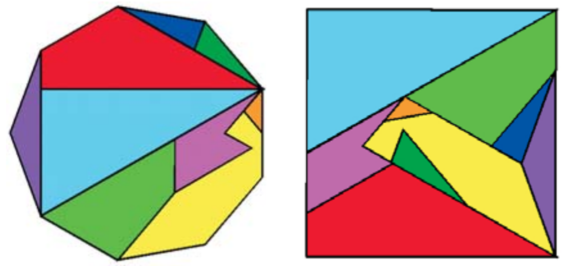
La cuadratura del decágono



La cuadratura del heptágono



La cuadratura del eneágono



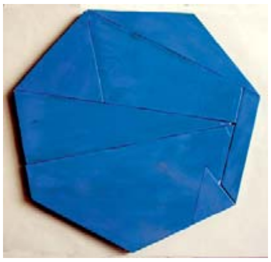
La siguiente tabla muestra el estado actual de los récords de disección entre polígonos, al indicar el número menor de piezas con las que se pueden conseguir unos de otros.

	3	4	5	6	7	8	9	10	12
3	1	4	6	5	8	7	8	7	8
4	4	1	6	5	7	5	9	7	6
5	6	6	1	7	9	9	10	10	10
6	5	5	7	1	8	8	11	9	6
7	8	7	9	8	1	11	13	11	11
8	7	5	9	8	11	1	12	10	10
9	8	9	10	11	13	12	1	13	14
10	7	7	9	9	11	10	13	1	12
12	8	6	10	6	11	10	14	12	1

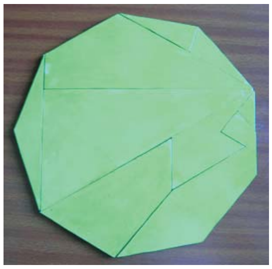
Trabajo en clase

Poniendo la Tecnología al servicio de las Matemáticas o las Matemáticas al servicio de la Tecnología, para nuestros compañeros tecnólogos, puede ser un buen proyecto de trabajo el construir los puzzles a partir de una plantilla del polígono en papel. La construcción del dodecágono puede comenzar desde su propio diseño con regla y compás.

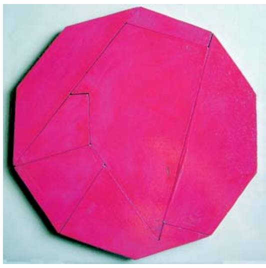
Las plantillas se copian en cartulina, cartoncillo, cartón pluma, panel, que es también muy fácil de cortar con un cutter o, mucho mejor, en madera, para su corte con la sierra de marquetería, lijado, pintado y barnizado. Quedando unos estupendos puzzles para su manipulación.



heptágono



eneágono



decágono

dodecágono

Al manipular las piezas obtenidas en las disecciones del heptágono, eneágono y dodecágono podemos distinguir que los tres tienen alguna pieza un poco distinta a las demás: tienen piezas que son polígonos cóncavos, lo que nos puede permitir plantear el siguiente cuestionario de trabajo o investigación:

- Diferencias entre un polígono cóncavo y uno convexo.
- ¿Cuánto pueden medir los ángulos interiores en un polígono convexo? ¿Y en uno cóncavo?
- ¿En los polígonos convexos cuánto vale la suma de sus ángulos interiores? ¿Y de los ángulos exteriores? ¿Y en los cóncavos?

Pero estos puzzles son también problemas en cuanto plantean un reto de transformación de un polígono en otro para el que de entrada no se conoce el camino de resolución más adecuado. Al jugar con ellos podemos comprobar su dificultad. Para evitar la frustración del alumno ante estos rompecabezas y que no abandone la resolución del problema que tiene delante se le pueden dar como pistas unas plantillas con el contorno del polígono inicial y del cuadrado de área equivalente.

La plantilla con el contorno sirve de ayuda, orienta y guía hasta la construcción que se debe realizar, al facilitar la medida del lado del polígono y poder medir comparando la longitud de las piezas con la longitud de los segmentos dibujados en la plantilla.

Aprovechando el puzzle se pueden trabajar aspectos geométricos y numéricos en clase. Por ejemplo, repasar los ángulos interiores de un polígono regular, lo que nos puede servir de pista para encontrar las piezas que van a formar el contorno del polígono regular. Otro aspecto más complicado es trabajar con las medidas de los lados, es decir, si conocemos cuánto mide el lado del cuadrado, ¿cuánto debe medir el lado del polígono regular para que tengan la misma área?

Para su uso directamente en clase o para actividades complementarias y extraescolares, como Matemáticas en la calle, estos materiales manipulables constituyen unos elementos altamente atractivos y motivadores, cuya resolución engancha a casi todos los que por allí pasen.

Hemos visto en estos dos artículos cómo partir de polígonos regulares para llegar a obtener un cuadrado, pero es posible partir de otros tipos de polígonos también muy atractivos. El tema de las cuadraturas no termina aquí… aunque sí por hoy.

JUEGOS ■

NOTAS

1 En la página de divulgación de la Real Sociedad Matemática Española, http://www.divulgamat.net/, puede consultarse el artículo dentro de la sección Juegos Matemáticos en el apartado de Recursos.

2 En 1833, P. Gerwein, teniente del ejército prusiano dio la solución a la pregunta sobre las disecciones planteada por el matemático húngaro y experto en geometría Wolfang Bolyai (1775-1856). También llamado Teorema de Bolyai-Gerwein, parece que sin embargo fue demostrado por primera vez en 1807 por el matemático escocés William Wallace (1768-1843). El teorema no se generaliza a tres dimensiones. En 1908 el matemático alemán Max Dehn (1878-1952) demostró que un cubo y un tetraedro regular del mismo volumen no son equivalentes por disección; aunque hay ejemplos de figuras que sí lo son.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Frederickson, Greg (1997). *Dissections: Plane & Fancy*. Cambridge (UK): Cambridge University Press.

Hans, J. A.; Muñoz, J.; Fernández-Aliseda, A.; Blanco, J y Aldana, J. (2003). Rompecabezas del Teorema de Pitágoras. *Suma*, 43, 119-122.

Hans, J. A.; Muñoz, J.; Fernández-Aliseda, A. (2005). Cuadraturas de polígonos regulares, *Suma*, 48, 65-68.

Van Delft, P., Botermans, J. (1995). *Creative puzzles of the World*. Emeryville (California, USA): Key Curriculum Press.

Internet (consultadas en agosto de 2010)

http://www.cabri.net/abracadabri/abraJava/Dissection/ListDiss.html

http://geometriadinamica.es/Geometria/Disecciones/

http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/puzzles.htm

http://home.btconnect.com/GavinTheobald/Index.html. *Geometric Dissections*. Autor: Gavin Theobald

Este artículo fue solicitado por *Suma* en noviembre de 2010 y fue aprobado para su publicación en enero de 2011.

suma+ 66
Febrero 2011, pp. 47-48

Espaguetis y raíces cuadradas

El objetivo de este clip es que la próxima vez que le pregunten: ¿para que sirven las raíces cuadradas? usted pueda responder: para hacer las raciones de espaguetis… y otras cosas.

En el variado y apetitoso mundo de la pasta, los "espaguetis" han alcanzado enorme popularidad. Ya hace años la despampanante actriz italiana Sophia Loren dijo con orgullo aquello de que: *todo lo que ve lo debo a los espaguetis*.

Saber comer espaguetis con dignidad (sin mancharse) no es tarea simple pues la cuchara debe facilitar el enrollado de la pasta en el tenedor inclinado y luego esta debe emprender el largo viaje que va del plato a la boca del comensal, sobrevolando el vestido.

Antes de llegar a esta escena culminante de su ingestión estas formas cilíndricas alargadas (*espaguetis* si el diámetro está entre 1,7 y 1,8 mm, *spaghettini* si el diámetro va de 1,3 a 1,5 mm y *spaghettoni* si el diámetro oscila entre 2 y 2,2 mm) habrán sido hervidas en agua y para ello deberá haberse resuelto el siempre difícil problema de determinar "cuántos" espaguetis poner sabido el número de comensales. Normalmente la experiencia es la que acaba dando pistas sobre cuántos espaguetis corresponden a una ración.

¿No podría haber un método fiable para determinar estas raciones? Contarlos sería impropio (son muy delgaditos) y pesarlos también resultará complicado (son largos y resbalan). El tema lo ha resuelto Richard Joseph y Antony Joseph de la empresa de diseño JosephJoseph®.

Figura 1. *El medidor de Spaghetis* de Joseph Joseph™

Claudi Alsina
Universitat Politècnica de Catalunya
elclip@revistasuma.es

Este genial artilugio de plástico se encuentra hoy a la venta (diseño inglés pero Made in China) y se basa, como se ve en la fotografía, en que los espaguetis que caben en el aro abierto corresponden a 4 raciones, con la manecilla desplazada al "3" son 3 raciones, con la marca "2" son 2 raciones y con la "1" una ración. Es como un objetivo fotográfico pero para pasta. Observe que el espaciado de las marcas 1, 2, 3, 4 no es regular y el motivo es obvio: la abertura para 4 raciones es circular con 4,7 cm de diámetro, para 2 raciones como debe ajustarse la mitad de espaguetis el diámetro debe dividirse por $\sqrt{2}$ y será $\frac{4,7}{\sqrt{2}} \approx 3,32\,\text{cm}$.

De nuevo dividiendo este por $\sqrt{2}$ resulta el diámetro de una ración $\frac{3,32}{\sqrt{2}} \approx 2,35\,\text{cm}$.

Para pasar del diámetro de 1 ración a tres raciones deberemos multiplicar éste por $\sqrt{3}$. Además hay puntitos que indican medias raciones con lo cual detrás de las aberturas de este diseño hay escondidos los factores:

$$\sqrt{1,5},\ \sqrt{2},\ \sqrt{2,5},\ \sqrt{3},\ \sqrt{3,5},\ \sqrt{4}=2$$

Existían en el mercado algunas piezas con circunferencias vacías correspondientes a distintas raciones. Si entra en Google (Images) "spaghetti measures" podrá contemplar una extenso repertorio de tales instrumentos. Pero este diseño aquí descrito supera con creces anteriores patentes.

En el sistema DIN A de papel al ser las superficies "dobles" aparecen las potencias de $\sqrt{2}$ entre las longitudes correspondientes de las hojas y lo mismo ocurre con los números *f* de la fotografía manual. En este caso de los espaguetis aparecen temas como el de ser tres a la mesa y por esto surgen también las otras raíces.

Los de mates somos tan especiales que seguro que ahora con esto de las raíces cuadradas nos apetecerá más comer espaguetis, ¡Buen provecho!

Para saber más

F. Marenghi. 1990. *Tuttopasta.* Milán: A. Mondadori Editore.

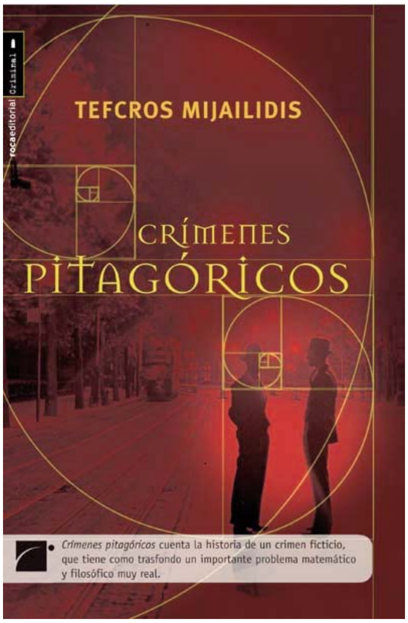
http://www.josephjoseph.com

EL CLIP ■

Este artículo fue solicitado por *Suma* en noviembre de 2010 y aceptado en diciembre de 2010 para su publicación.

suma+ 66
Febrero 2011, pp. 49-56

Las Matemáticas del siglo XX. La visión de un asesino neopitagórico que conoció a Picasso



Crímenes pitagóricos
(Título original: πνθαγόρεια εγχλματα)
Tefcros Mijailidis
Roca Editorial, Barcelona
Primera edición en castellano: septiembre de 2008
ISBN: 978-84-92429-45-5
200 páginas

Nos encontramos ante una obra con un amplio y profundo contenido matemático. La presentación de la obra, en su contraportada, es como sigue:

> A Mijaíl Mavroleos lo despiertan una mañana anunciándole que su mejor amigo Stéfanos ha sido hallado muerto, y que la última persona que lo vio con vida fue él. Ambos hombres se habían conocido muchos años atrás en el París de principios del siglo xx, cuando eran estudiantes de matemáticas y acudieron a un congreso en la capital francesa. Allí vivieron con intensidad la efervescencia de la ciudad, disfrutaron de las tabernas de Montmartre y del Moulin Rouge y se codearon con personajes como Pablo Picasso, a quien supieron insuflar la pasión por las matemáticas. Con los años, Mijaíl y Stéfanos volvieron a Grecia y sus caminos siguieron unidos por la amistad, el delirio por las ciencias y algunas relaciones peculiares con las mujeres.
>
> El inspector de policía que trata de esclarecer la muerte de Stéfanos se encontrará con un rompecabezas que mezcla problemas matemáticos que llevan siglos sin solución, extrañas relaciones sentimentales, un mafioso al acecho y el pacto de silencio que los pitagóricos hicieron en la antigua Grecia mil quinientos años atrás.

Sobre el autor, en el interior de la obra podemos leer:

> Tefcros Mijailidis (Atenas, 1954) es doctor en matemáticas por la universidad Pierre et Marie Curie. En 1981 empezó su andadura como profesor de matemáticas en la educación secundaria. Ha escrito libros divulgativos sobre matemáticas e informática y ha publicado diversos artículos sobre este tema. En 2006 el Gobierno francés lo distinguió con el título de Caballero de la Orden de las Palmas Académicas. Crímenes pitagóricos es su primera novela.

Constantino de la Fuente Martínez
IES Cardenal López de Mendoza, Burgos
literatura@revistasuma.es

En cuanto a la trama, como aclara el propio autor:

> ...se desarrolla en un marco histórico y geográfico real, la Europa y la Grecia del periodo comprendido entre 1900 y 1930. Todos los datos históricos, geográficos, científicos y tecnológicos que aparecen son exactos, al menos en la medida en que es exacta la bibliografía actual (pág. 199).

Sobre Picasso, Mijailidis nos dice:

> ...he tenido que traer a Picasso a París dos meses antes de la cuenta (en realidad visitó la ciudad por primera vez en el otoño de 1900), pero, por lo demás, todo lo que se cuenta sobre él, sus amigos, sus costumbres y los lugares que frecuentaba es cierto (pág. 199).

Pero esta presentación quedaría incompleta si no aclaráramos que lo que el autor denomina *trama* no es más que una de las dos *tramas* que se desarrollan en la novela: la principal, de la que él habla, que se desarrolla en el siglo XX y aquélla en la que radica el germen de toda la obra, intercalada como un opúsculo en la *trama principal,* que tuvo lugar en los albores de la matemática griega. De ella hemos escogido unos párrafos de su *Interludio,* en la pág. 53, con los que finalizaremos esta pequeña presentación:

> *Hipaso se había quedado mudo.*
> *–Pero si la demostración es correcta, si la diagonal y el lado del cuadrado son inconmensurables...*
> *Lisipo lo interrumpió:*
> *–Unos pilares podridos pueden aguantar durante siglos, hasta que alguien encuentre la manera de sustituirlos. Pero si quitas de una vez los pilares de una edificación, se derrumba sin más.*
> *–Pero si el problema se mantiene en secreto, ¿cómo podría alguien solucionarlo?*
> *–Te recuerdo el juramento de silencio que prestaste. En este momento lo extiendo a los iniciados, a los miembros de la escuela. Te prohíbo que hagas el más mínimo comentario sobre el tema. Te prohíbo que sigas con la investigación. Y te recuerdo que la desobediencia es motivo de expulsión de la hermandad. Retírate.*
> *Desesperado, Hipaso se volvió para irse. Al salir, encontró valor para murmurar:*
> *–¿O sea que no hay matemáticos? ¿Somos y siempre seremos oyentes*[1]*?*

Nuestro comentario

Nos encontramos ante la novela con más contenido matemático de todas las presentadas en esta sección a lo largo de los años; no sólo porque nos describa los principales momentos de la compleja historia de las matemáticas en la primera mitad del siglo XX, sino porque continuamente nos abre ventanas retrospectivas a problemas y personajes de siglos anteriores, para evidenciar que la contemporaneidad siempre es el resultado de la convergencia de multitud de historias previas que, sin duda, son las raíces que dan sustento a la realidad actual.

Una de las primeras ideas que deseamos destacar de la novela es la variedad de situaciones y formas con las que Mijailidis contextualiza la rebelión contra la educación y la sociedad decimonónicas, conservadoras e hipócritas, en las que la preocupación principal es aparentar felicidad y perfección de cara a los demás; todo con el fin de consevar el estatus, la influencia y el poder económico.

Es en este contexto donde mejor podemos situar, por un lado, a un Picasso joven, que disfruta de París y padece los altibajos propios de una búsqueda personal hacia la construcción de nuevos paradigmas artísticos, y atisbar, por otro, una dualidad que ha acompañado a las matemáticas desde la antigüedad: la posibilidad de dedicarse a ellas desde una vida acomodada y las dudas que muchos tuvieron a lo largo de la historia, sobre su dedicación a ellas cuando la situación personal está más cerca de la escasez o no está tan resuelta. La novela también nos muestra restos de esta tradición.

En cuanto a los temas matemáticos, ¿Qué podemos decir de la ambientación que nos hace Mijailidis del Congreso de París? Posiblemente para los lectores de la novela que no sean matemáticos les parezca excesiva, pero para los que sí... puede ser una crónica literaria y periodística deliciosa. Aquel 8 de agosto de 1900 supuso un reencuentro de ideas: el *ignoramus et ignorabimus*[2], de Du Bois-Reymond, frente al aplastante *he aquí el problema, encuentra la solución. Sólo es posible encontrarla con el razonamiento puro. El matemático nunca tendrá por qué decir ignorabimus,* de Hilbert. También el recuerdo para algunas otras: el *Pauca et matura*[3] de

Gauss, al que otros denominaron *el zorro que va borrando sus huellas con la cola*[4]; la suplicante *trabaje duro, se lo imploro, para convertirse algún día en un gran matemático,* de Jordan a Minkowski y otras que nos llevaría bastante tiempo enumerar. Y en medio del murmullo general, propio de estos acontecimientos, llegó el momento y el personaje esperados:

> Entró a toda prisa, repartiendo sonrisas y saludos a diestro y siniestro. [...] Los congresistas se pusieron en pie y permanecieron así hasta que Hilbert y Klein tomaron asiento y Poincaré subió a la tribuna...[5]

El párrafo anterior es el preámbulo a la famosa conferencia del *herr Professor*, como lo denominó Poincaré en la presentación… Realmente impresionante su comienzo:

> ¿A quién no le gustaría levantar el velo detrás del cual se esconde el futuro, echar un vistazo a los futuros progresos de nuestra ciencia y conocer los secretos de su evolución en los siglos venideros, conocer cuáles serán las metas particulares en las que pondrán todo su empeño los adalides de las matemáticas de las próximas generaciones? ¿Qué nuevos métodos y metas del tan rico y vasto campo del pensamiento matemático se descubrirán en los próximos siglos?

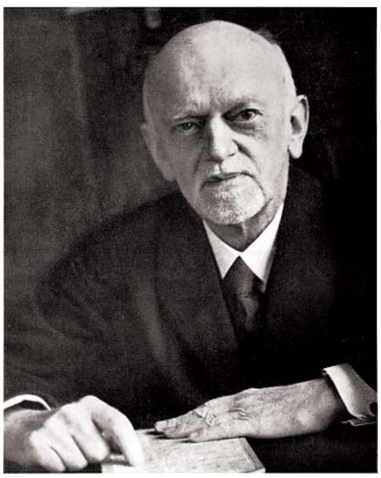
Pero, como ocurre en todas las reuniones de este tipo, si la conferencia ha pasado a ser legendaria, seguro que la intrahistoria del Congreso también habrá significado mucho para los asistentes; porque, ¿cuántas nuevas amistades se llevarían de vuelta a sus lugares de origen?, ¿cuántos reencuentros entre viejos colegas serían inolvidables?, ¿cuántas conversaciones entre pasillos y descansos habrán dejado huella en sus historias personales? Es en este ambiente donde Mijailidis profundiza en la esencia de las matemáticas a través de los dos personajes prinicipales, Mavroleos y Stéfanos: geometrías no euclídeas, la no contradición y la completitud de una teoría, las demostraciones de existencia, el papel de los problemas, una mención pasajera a la novela *Planilandia*, entonces recien publicada, etc. Todo ello puede ocurrir lo mismo en un pasillo de La Sorbona que en *una mesa del cabaré más famoso de Europa.*

El Congreso de 1900 acaba y la historia sigue hasta el 16 de mayo de 1932, cuando el protagonista escribe una fatídica carta. En esos años, casi 32, tenemos la oportunidad de asomarnos a los principales problemas y protagonistas de la historia de las matemáticas: la Conjetura de Kepler sobre el apilamiento de las esferas; el papel de Cauchy con Abel o con Galois en relación con el problema de la resolución de las ecuaciones polinómicas, las mismas que nos remontan a Omar Kayyam o a la agria controversia, unos siglos más tarde, de Tartagalia con Cardano y Ferrari; el problema de los puentes de Königsberg, que resuelve Euler y da paso a la teoría de grafos; el quinto postulado de Euclides y las *geometrías* correctas y la geometría adecuada; los problemas de la Conferencia de Hilbert; los números primos y los primos gemelos; el número π y su carácter trascendente; el segundo problema de Hilbert… Hubo muchas tardes de jueves en las que los dos protagonistas, amigos desde el Congreso de París, se reunieron para jugar al ajedrez y, sobre todo, para hablar de matemáticas. Es ahí donde surgieron la mayoría de estos temas, además de las diferencias sobre los valores de vida que importaban a cada uno.

Simultáneamente a la narración principal, se va desarrollando otra historia que también finaliza trágicamente: la muerte de Hípaso. Recogida en unas escenas previas muy imaginativas y bien escogidas, Mijailidis nos abre la puerta al conflicto que genera en *la hermandad* una de sus normas: la no divulgación del conocimiento.

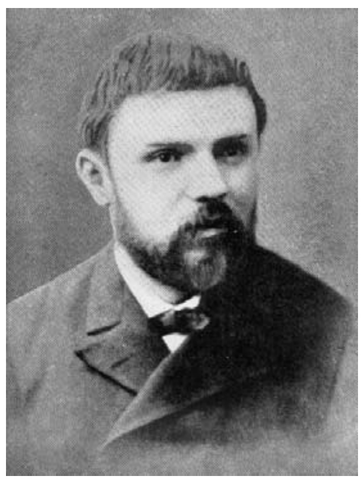
Huyendo de la literatura de ficción, en Jámblico (1991) podemos leer algo sobre este asunto:

> De Hípaso cuentan, sobre todo, que fue uno de los pitagóricos, pero que por haber divulgado por escrito por primera vez la esfera de los doce pentágonos[6] murió en el mar como impío, pero obtuvo fama como inventor, cuando todo era de "aquel hombre", pues así suelen llamar a Pitágoras sin mencionar su nombre.[7]



David Hilbert

Gödel y Einstein



Henri Poincaré

Hípaso está considerado como uno de los pitagóricos más importantes de la antigüedad, además de ser un discípulo rebelde. A él se le atribuye también su alineamiento contra *la hermandad* en la denominada conspiración de Cilón y Ninón. Seguro que su vida daría bien para otra novela, aunque en *Crímenes pitagóricos* haya quedado reducida a unos episodios minimales.

Pero, ¿puede, *el segundo problema de Hilbert*, ser la causa de un asesinato pitagórico? Si Gödel lo hubiera sabido, seguro que habría intentado acelerar la publicación de su famoso artículo *Sobre las proposiciones formalmente indecidibles de los Principia Mathematica y sistemas afines.* Decididamente, la mente humana es un laberinto en el que en cualquier momento podemos encontrarnos con el monstruo, el minutauro.

Como podrá comprobar el futuro lector, la obra es una inmersión continua en la ciencia matemática presentada con los adornos propios de la divulgación científica: diálogos muy bien construidos, descripciones minuciosas y a la vez ligeras, conexiones certeras entre distintos temas, y una continua añoranza, para el lector cercano al mundo de las matemáticas, de los años jóvenes, en que eran frecuentes las conversaciones sobre muchos de los temas. Por todo ello, no es fácil encontrar palabras para expresar nuestro inmenso agradecimiento a Mijailidis por esta obra, en la que nos muestra su gran atracción por las matemáticas y su maestría para acercarlas al gran público con un envoltorio en forma de ciencia y ficción. Definitivamente, *Crímenes pitagóricos* es un continuo diálogo sobre una pasión compartida entre sus personajes por las matemáticas en su acepción más bella y pura.

Una propuesta de trabajo en el aula

El planteamiento de un trabajo matemático sobre cualquier obra literaria exige una reflexión previa, por parte del profesor/a, para tomar las decisiones más adecuadas sobre los distintos aspectos a considerar.

En el caso de la obra que nos ocupa, debida a sus características, todo lo anterior adquiere mucha importancia y debe ser muy meditado. Desde nuestra experiencia previa, aconsejamos lo siguiente:

– El nivel académico más adecuado para plantear un trabajo sobre la obra es bachillerato; además creemos que se debe plantear a alumnos/as elegidos por su gusto y afición por las matemáticas. No es una novela para plantear a todo un grupo; en este caso esta estrategia puede resultar un fracaso.

– Si queremos que el trabajo no sea sólo de recopilar episodios históricos, anecdotas o biografías, sino que se entre en el contenido matemático, debemos elegirlo de manera que los conocimientos matemáticos sean de un nivel accesible para el alumnado de bachillerato. El nivel de profundización lo dará el propio alumno/a, su interés, su ganas de profundizar, etc. A veces, nos dan sorpresas realmente agradables.

– Siempre hemos sido partidarios de facilitar un guión de trabajo al alumnado, de forma que tenga un eje sobre el que desarrollar, con coherencia y unicidad, las diferentes cuestiones que se le planteen. Por eso presentaremos más adelante un ejemplo de guión concreto para trabajar un tema de esta obra.

– Ferécides, un personaje de la deliciosa novela de Benigno Morillas, (2004): *Pitágoras. El hijo del silencio*, le dice a Pitágoras, a propósito de su legendario muslo de oro: “Nada hay tan motivador como el misterio”. Decimos esto a propósito de nuestras expectativas con los alumnos/as para la realización de un trabajo matemático sobre este libro. Los temas son complicados, pero también suele ocurrir que, si planificamos y elegimos bien, los estudiantes nos sorprenderán gratamente.

¿Qué temas matemáticos hay en la novela? Presentamos, a continuación, una lista de ellos con su correspondiente situación dentro de la obra:

Tema	Página/s	Tema	Página/s
Números primos	23, 161	Resolución de ecuaciones	83-87
Los 23 problemas de Hilbert	31, 46, 69-70, 131-136	Puentes de Königsberg	97-99
Los problemas de matemáticas	16, 29-30, 70	Geometría del sistema planetario	111-112
Geometrías no euclídeas	37-42, 108-109	Tres problemas clásicos	179-180
Planilandia y otros similares	44-45	Números π, e	179-180
Demostraciones de existencia	58, 59	Conjetura de Kepler	73, 74

Un ejemplo concreto: los tres problemas clásicos

Plutarco cuenta en alguna parte que cuando Anaxágoras es tuvo en prisión, se dedicó a estudiar la cuadratura del círculo. (Pág. 178)

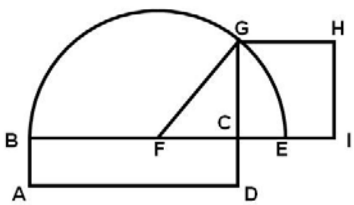
Seguro que muchas veces has oído en conversaciones cotidianas la expresión: ¡eso es más difícil que la cuadratura del círculo! Con ella se quiere dar a entender que es algo imposible, y todo el mundo la entiende así. Veamos el origen del problema.

a. ¿En qué consiste el problema de la cuadratura del círculo? Escribe su enunciado.

b. En general, ¿qué significa cuadrar una figura geométrica?

El problema de la cuadratura del círculo tenía un objetivo que se salía del campo de las matemáticas; cuadrar una figura significaba sustituir sus irregularidades y asimetrías por la simetría y la regularidad del cuadrado, era el triunfo de lo racional, encarnado en el cuadrado, sobre lo irracional, representado por cualquier figura geométrica complicada. Todo esto evidenciaba la superioridad de la razón humana y presencia de la belleza y la simplicidad entre las leyes del Universo.

La siguiente construcción, que presentamos a continuación, nos permite llevar a cabo la cuadratura de un rectángulo. Para ello partimos de un rectángulo ABCD y prolongamos el lado BC, de manera que CE=CD=b. Hallamos el punto medio de BE, que llamamos F, y, con centro en él, trazamos el semicírculo de radio BF=FE=a. Llamaremos c=FC. Prolongamos el lado CD hasta cortar al semicírculo en G. Con lado CG=d construimos el cuadrado CGHI.



c. Haz, con regla y compás, la construcción correspondiente, siguiendo las instrucciones anteriores. A continuación, con estas hipótesis, demuestra que el área del cuadrado CGHI es igual a la del rectángulo ABCD.

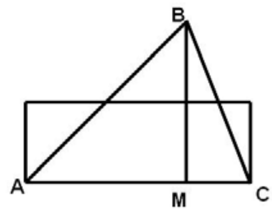
d. Si el rectángulo tiene de base 18 cm. y de altura 2 cm. calcula el lado del cuadrado equivalente.

Unos años antes, Oenopides estableció las normas: las únicas construcciones geométricas aceptables son aquellas que sólo pueden lograrse con la ayuda de la regla y del compás.(Pág. 178)

Como puedes observar, la construcción con regla y compás es obligatoria en Grecia para obtener la solución de un problema geométrico. De ahí que nosotros también te lo pidamos a lo largo de esta investigación.

Volviendo a las cuadraturas, tenemos que todo rectángulo se puede cuadrar siguiendo el proceso anterior. ¿Pasará lo mismo con otras figuras geométricas sencillas? Veámoslo ahora con el triángulo:

En el triángulo ABC, de la figura siguiente, trazamos la altura BM correspondiente a la base AC. Calculamos el punto medio de BM, y construimos un rectángulo con base AC y altura la mitad de BM.

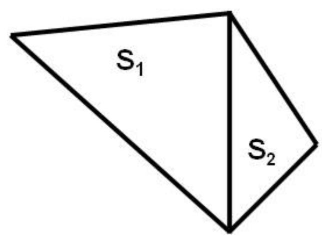


e. Con regla y compás, lleva a cabo la construcción de la figura que nos permite cuadrar un triángulo cualquiera. Demuestra, después, que el área del triángulo y el área del rectángulo son iguales.

Después de lo anterior, sólo nos falta cuadrar el rectángulo obtenido, y eso ya lo hemos hecho en la actividad anterior. Por tanto todo triángulo se puede cuadrar, transformándolo primero en un rectángulo y éste en un cuadrado.

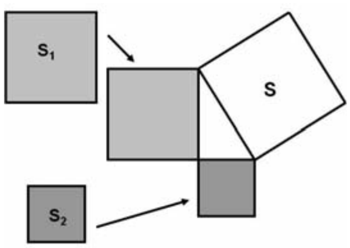
f. Si el triángulo fuera equilátero, con 6 cm. de lado, calcular la base y la altura del rectángulo equivalente y el lado del cuadrado equivalente.

Para cuadrar un polígono, se descompone en triángulos y se cuadran todos ellos. Por ejemplo, el polígono de la figura siguiente se descompone en dos triángulos y se cuadra cada uno de ellos.



Una vez cuadrados los dos triángulos, ¿cómo calcular un cuadrado de área igual a la suma de las áreas de esos dos? Veamos.

Queremos encontrar un cuadrado que tenga por área $S_1 + S_2$. Para ello, construimos un triángulo rectángulo que tenga por catetos los lados de cada cuadrado obtenido al cuadrar los triángulos que componían el polígono, como en la figura siguiente:



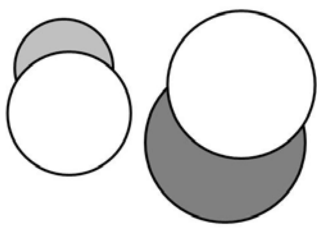
g. Justifica que las areas verifican: $S = S_1 + S_2$.

h. Si el polígono se descompone en 3 triángulos, ¿cómo harías para cuadrarlo? ¿Y si el polígono tuviera otro número de lados?

i. Tenemos un hexágono regular de 20 cm. de lado. Calcular el lado de su cuadratura (cuadrado equivalente).

Después del proceso anterior, hemos logrado cuadrar cualquier polígono. El problema que se nos plantea ahora es el siguiente: ¿podremos hacer eso mismo con figuras que tengan algunos lados curvos?

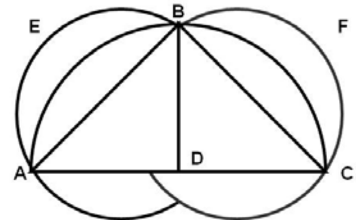
Un matemático griego llamado Hipócrates, nacido en la isla de Quíos en el siglo V a. C.; más concretamente, alrededor del año 470 a. C., demostró la posibilidad de cuadrar un tipo de figuras llamadas lúnulas. Éstas son figuras planas limitadas por dos arcos circulares de distinto radio, como las de la figura siguiente (las zonas sombreadas):



Nuestro objetivo más inmediato va a ser analizar el procedimiento de Hipócrates para cuadrar algunas lúnulas.

En primer lugar construyó un triángulo rectángulo isósceles ABC inscrito en un semicírculo de radio *r* la mitad de la longitud de la hipotenusa. Con radio la mitad de la longitud de cada cateto construyó semicírculos AEB y BFC. Obtuvo así dos lúnulas iguales.

j. Calcular las áreas de los semicírculos ABC y AEB. Demostrar que una de ellas es el doble de la otra.

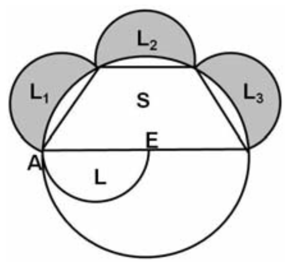


k. Demostrar que el área de cada una de las lúnulas es igual, respectivamente, al área de los triángulos ABD y BCD.

Con ello hemos obtenido un triángulo equivalente a la lúnula. Posteriormente, cuadrando el triángulo, podemos obtener la cuadratura de la lúnula.

l. Si el diámetro AB = 20 cm., calcular el área de la lúnula y el lado de su cuadratura o cuadrado equivalente.

Hipócrates también fue capaz de cuadrar otros tipos de lúnulas; entre ellos te vamos a presentar el siguiente, en la figura de a continuación:



m. Con regla y compás, construye la figura teniendo en cuenta que la distancia AE, radio de la circunferencia es 20 cm.

n. Demostrar que la suma de las áreas $L_1 + L_2 + L_3 + L$ es igual al área S del trapecio que tiene tres lados iguales al radio AE de la circunferencia (L denota el área del semicírculo de diámetro AE). A partir de este resultado, calcula el lado de la cuadratura de cada una de las lúnulas.

o. Si el radio AE midiera una longitud cualquiera r, ¿sabrías demostrar la igualdad $L_1 + L_2 + L_3 + L = S$? ¿Cuánto valdría, en ese caso, el lado de la cuadratura de cada una de las lúnulas?

p. Después de todo lo anterior, ¿podríamos plantearnos la cuadratura del círculo? Resuelve el problema con métodos algebraicos; es decir, supón conocido el círculo (con conocer su radio ya basta) y calcula algebraicamente el valor del lado del cuadrado de igual área.

Anaxágoras, para soportar los tormentos de la cárcel, se enfrascó en la cuadratura del círculo, es decir, la construcción, con regla y compás, de un cuadrado que tuviera la misma área que un círculo dado. ¡Vano propósito! Por mucho que lo intentó no lo consiguió. (Pág. 178)

q. ¿Se puede resolver la cuadratura del círculo mediante regla y compás? Explica razonadamente la causa.

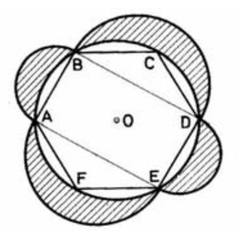
Finalmente, en 1882, Carl Lindemann utilizó el método de Hermite para demostrar que el número π es trascendental; punto y final. (Pág. 180)

Cuando la persona que traduce no sabe mucho de matemáticas, puede que cometa errores al nombrar los conceptos. Concretamente la palabra trascendental no se usa en castellano para nombrar a los números que son solución de una ecuación algebraica; se llaman *trascendentes*.

r. Teniendo en cuenta las páginas 179 y 180, elabora un informe histórico sobre el número π, de no más de una página, en el que enumeres los principales episodios hasta la demostración de Lindemann.

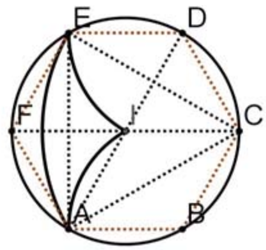
Como aplicación práctica de lo anterior, te vamos a proponer algunos problemas relacionados con la cuadratura de figuras:

s. Partimos de un hexágono regular ABCDEF inscrito en una circunferencia de centro *O* y radio *r*. Tomando como diámetros AB, BD, DE y EA se dibujan hacia fuera cuatro semicircunferencias. Demuestra que el cociente entre la suma de las áreas de las cuatro lúnulas limitadas por las semicircunferencias y circunferencia de centro *O* y radio *r* y el área del hexágono es igual a 2/3.



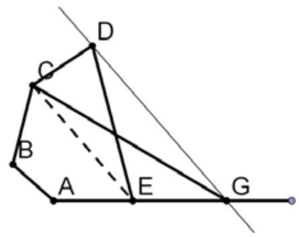
Vamos a comprobar, en un caso concreto, que no todas las figuras son cuadrables en el sentido de los griegos; es decir, que no se pueden construir con regla y compás. En el problema siguiente lo puedes comprobar:

t. Se divide una circunferencia de centro *O* y radio *r* en seis partes iguales por los puntos ABCDEF. Tomando los puntos B y D como centros y con un radio *r* se describen los arcos de circunferencia AOC y COE. Desde el punto C y con CA como radio se traza el arco AGE. Calcula el área de la parte sombreada y comprueba que vale π/6. Esto sirve para demostrar que no es cuadrable, pues π no es construible con regla y compás.



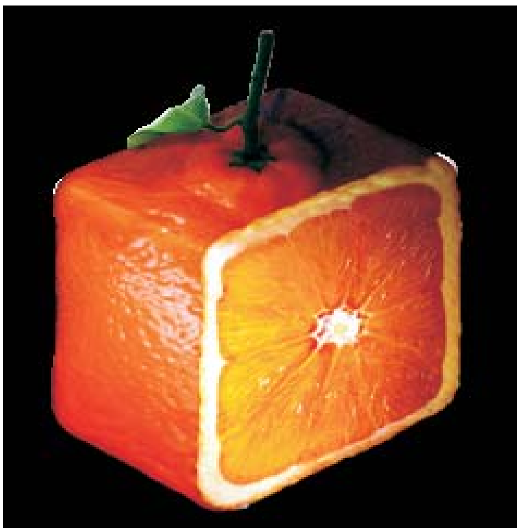
El siguiente problema consiste en un método para transformar un pentágono en un cuadrilátero de igual área. Sigue atentamente las instrucciones y lo verás:

u. Dado el pentágono ABCDE, trazamos la diagonal CE y por D una paralela a CE que corta a la prolongación del lado AE en el punto D'. Demostrar que el área del triángulo CDE es igual al área del triángulo CED'. De ahí obtenemos que el área del pentágono ABCDE es igual al área del cuadrilátero ABCD'.



Unos años antes, con el mismo criterio de Wantzel, se demostró que ni la trisección del ángulo ni la duplicación del cubo eran construcciones que pudiesen hacerse con regla y compás. (Pág. 180)

v. Explica el contenido del problema délico o problema de la duplicación del cubo y su origen legendario. Enuncia con claridad el problema.



A propósito de este problema:

v.a. Si duplicamos la longitud de los lados de un polígono o de cualquier figura plana, manteniendo la forma, ¿qué variación experimenta el área? Estudia el problema empezando por figuras planas sencillas.

v.b. Si lo que deseamos es duplicar el área de una figura plana, ¿cómo debemos modificar sus dimensiones?

v.c Si duplicamos las dimensiones de un cubo, ¿qué ocurre con su volumen? Si queremos duplicar su volumen, ¿qué debemos hacer en cada una de sus dimensiones?

v.d. Seguro que es fácil, a estas alturas, responder a esta cuestión: ¿Por qué la raíz cúbica es la solución del problema de la duplicación del cubo?

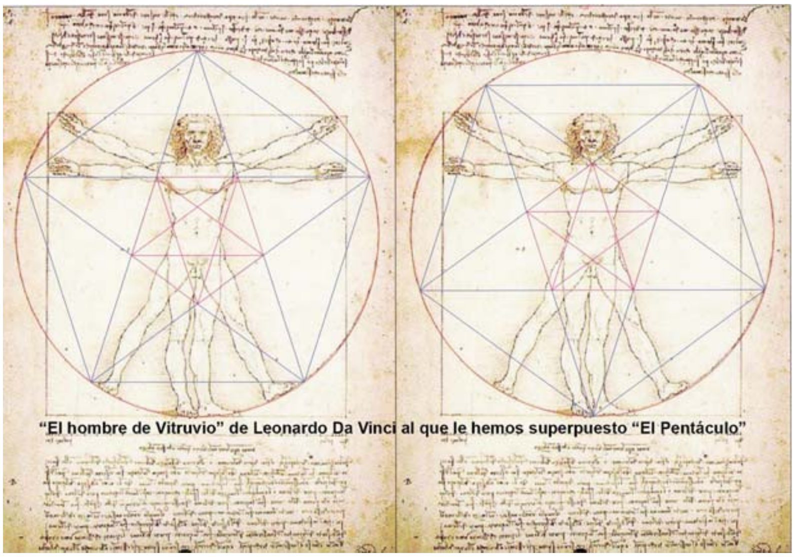
Para que descanses del estudio del segundo problema clásico te vamos a plantear una cuestión entretenida:

w. El cálculo de raíces cuadradas tiene un algoritmo que has usado muchas veces. ¿Hay un algoritmo parecido para hallar raíces cúbicas? Descríbelo o explica algún otro método para calcularlas. ¿Cómo calcularías la raíz cúbica de 2, con la calculadora, si no funciona la tecla de la raíz cúbica?

La última cita que te hemos presentado habla de otro problema denominado *la trisección del ángulo.* Es el tercero de los denominados *Tres Problemas Clásicos* de la matemática griega.

x. ¿Cuál es el enunciado del tercer problema clásico? Exponlo y elabora una pequeña historia del mismo (de no más de una página).

LITERATURA Y MATEMÁTICAS ■



El hombre de Vitruvio de Leonardo Da Vinci al que le hemos superpuesto *El Pentáculo*

NOTAS

1 Téngase en cuenta que en la hermandad había dos clases de personas: los *acusmáticos*, que sólo podían oír, pero no ver, al maestro; y los *matemáticos*, que eran los integrantes con plenos derechos.

2 Ignoramos e ignoraremos.

3 Poco, pero maduro.

4 En el contexto del proceso de descubrimiento y creación en matemáticas, las huellas son las ideas claves, las pistas para los demás, que a Gauss no le gustaba dejar explícitas.

5 Pág. 29.

6 Se refiere al dodecaedro inscrito en la esfera.

7 Pág. 66.

Este artículo fue solicitado por *Suma* en octubre de 2010 y aceptado en diciembre de 2010 para su publicación.

Suma+ 66
Febrero 2011, pp. 57-66

GCompris: un software multinivelar con clara aplicación para las matemáticas

En esta sección MatemásTIC de la revista *Suma* hemos estado analizando y haciendo un recorrido por aplicaciones de software libre o bien con licencia GPL de forma que el uso de estas aplicaciones no tenga un coste económico y se puedan disponer de las mismas en la red o bien a través de los repositorios de las diferentes distribuciones Linux. En ese recorrido que aún seguimos, hemos tratado aplicaciones recomendadas para el aula de matemáticas haciendo especial hincapié en aplicaciones indicadas para la enseñanza secundaria, aunque también hemos tratado aplicaciones para la enseñanza primaria que pudieran utilizarse en los primeros cursos de la secundaria. Esta es precisamente la calificación o el nivel ideal para la aplicación cuyo recorrido comenzamos en este número de *Suma*. Se trata de un software de mucha utilidad para diferentes asignaturas y contenidos de educación primaria e incluso infantil y que su utilidad se dilata en el tiempo para poder ser utilizada en los primeros cursos de educación secundaria.

La aplicación a la que nos referimos se llama GCompris. En la imagen 1 podemos observar la pantalla de inicio de la aplicación.

GCompris es un programa educativo especialmente diseñado para niños de entre 2 y 12 años. Es software libre y está disponible para Windows, Mac y Linux. Aunque existe una versión de GCompris para Windows, el propósito de la misma es promover el uso del sistema GNU/Linux por lo que la versión para Windows tiene sólo un número limitado de actividades,

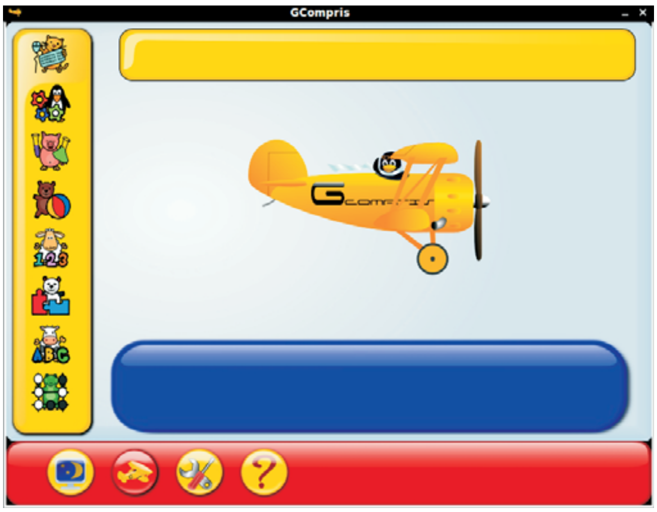


Imagen 1. Pantalla inicial de GCompris

aproximadamente ofrece 20 actividades de las más de entre 50 y 60 totales con que cuenta realmente la aplicación en Linux, dependiendo de la versión. En este caso es posible acceder a todas las actividades mediante el pago de una cuota.

Mariano Real Pérez
CEP de Sevilla
matemastic@revistasuma.es

Existen versiones del paquete binario para las siguientes distribuciones: Mandriva, Debian, Skolelinux, Ubuntu, Edubuntu, Pardus, ArchLinux, FreeBSD, Yellow Dog 3, Gentoo, Lindows, Fedora Core, Suse, y ALT Linux. El paquete correspondiente a la versión de Debian o el de Ubuntu es el que se utiliza en distribuciones de Linux basadas en éstas como Linex, GuadaLinex, Lliurex, Molinux... También existe una versión una versión para Mac OS.

En total GCompris incluye más de 50 actividades y evoluciona constantemente, ya que es Software Libre, por lo tanto tienes la posibilidad de adaptarlo a tus necesidades, o de mejorarlo. La temática de las actividades es muy variada:

- Uso del ordenador y sus periféricos: acostumbrarse al teclado, ratón…
- Álgebra: memoria, números, tablas, imágenes…
- Ciencia: el ciclo del agua, electricidad, canales, el submarino…
- Geografía: países y mapas.
- Juegos: ajedrez, memoria, fútbol, rompecabezas…
- Lectura: diferentes ejercicios de lectura.
- Otros: las horas, dibujos vectoriales…

Muchas actividades y juegos tienen varios niveles de dificultad, por lo que pueden ser usados por personas de casi cualquier edad. Los niños son usuarios muy especiales y exigentes, y la interfaz gráfica está muy trabajada para que sea lo más sencilla, agradable y cómoda posible.

Para algunas actividades exigirá tener instalados otros programas que GCompris utiliza, mostrará un mensaje con el programa y la dirección de su página web para conseguirlo. Por ejemplo, la actividad de electricidad permite al niño crear sus primeros circuitos eléctricos sencillos, y se necesitará tener instalado *gnucap*.

En la página oficial hay una sección dedicada a mostrar las capturas en imágenes de muchas de las pantallas que hay ahora mismo en GCompris. Así puedes ver la cantidad de juegos y ejercicios diferentes que hay y la interfaz gráfica del software. Incluso también mantienen una sección de Desarrollo en la que explican cómo documentarse para crear o modificar tus propias actividades.

GCompris es sin duda uno de los mejores programas educativos ahora mismo, con muchos temas y niveles diferentes, y con la capacidad de adaptarse a cualquier entorno que tenga unas exigencias específicas.

GCompris está disponible en mas de 50 lenguas. Si deseas verificar si está disponible en una lengua específica, puedes iniciar GCompris y seleccionar el idioma en las opciones de configuración. Debemos tener cuidado ya que el sistema operativo tiene que soportar el lenguaje que deseemos configurar para que GCompris pueda utilizarlo. Si encontramos una cruz roja mientras seleccionamos el lenguaje en GCompris, esto significa que el sistema no lo soporta, aún existiendo una traducción para GCompris.

En GNU/Linux, si el idioma que deseemos no está disponible, tenemos que seleccionar otro soporte para su lenguaje en la distribución que estemos utilizando para agregarlo. En la mayoría de los casos, tenemos que instalar un paquete adicional 'locale*xx' o 'language*pack*xx' * xx es un código para el idioma como 'En' es para Inglés o "Es" para español. Estos paquetes solemos encontrarlos generalmente en los repositorios de cada distribución Linux sin mayor problema y contamos con lo sencillo que resulta instalar en Linux cualquiera de estos paquetes.

En la imagen 2 puedes observar la pantalla correspondiente al programa Synaptic de instalación de software en una distribución Ubuntu de Linux en el que hemos visualizado los archivos correspondientes a Gcompris. En ella observamos los distintos idiomas que podemos instalar para Gcompris, aunque ahí solamente aparecen marcados dos de ellos, español e inglés, que son los que hemos instalado.

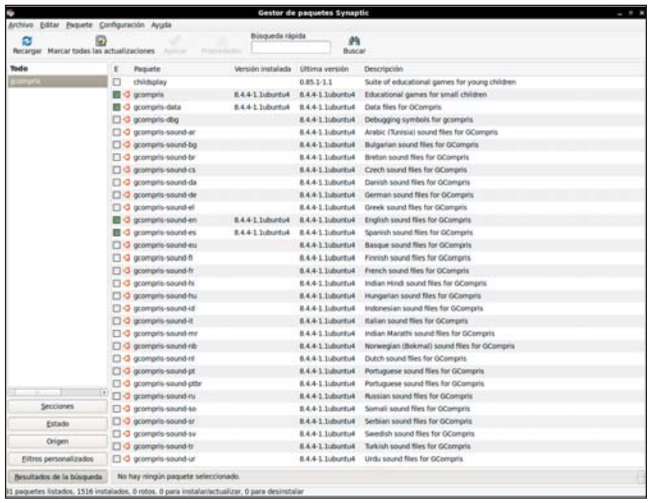


Imagen 2. Archivos de instalación de GCompris en Linux

Volvemos ahora a la pantalla inicial de GCompris que observamos en la imagen 1. Esta pantalla aparece dividida en tres partes. La primera de estas partes es una barra horizontal que aparece en la zona inferior de la misma y en la que observamos cuatro iconos. La segunda parte el una barra vertical que está situada en la parte izquierda de la pantalla y en ella observamos ocho iconos distintos. La tercera parte es la que más superficie ocupa y se encuentra en la zona central de la pantalla.

A medida que vayamos profundizando en esta aplicación, vamos a ir observando que cada una de estas zonas o partes va a permanecer en el lugar en el que las hemos localizado y con prácticamente las mismas funciones con las que aparecen. Que esta estructura se mantenga a lo largo de las diferentes pantallas que vamos a visitar contribuye a que Gcompris sea un software fácil de utilizar y en el que, a pesar de concentrarse una gran cantidad de actividades, el usuario siempre va a saber identificar la zona en la que se encuentra y cómo moverse por la aplicación. Recordemos que es una aplicación pensada para que la puedan utilizar alumnos y alumnas de 2 a 12 años.

Ahora nos proponemos hacer un recorrido por cada una de estas partes que nos ayude a comprender mejor la forma de movernos por la aplicación.

Comenzamos por la zona inferior de la pantalla. Como hemos dicho, en ella aparecen cuatro iconos distintos, aunque en algunas pantallas observaremos que aparece alguno más. Esta zona va a ser la que nos ayudará a configurar la aplicación y las distintas pantallas que recorramos.

El primero de los iconos que observamos es una pequeña televisión con un cielo estrellado. Este icono nos conduce a salir de la aplicación. Al pulsar sobre él nos aparece una nueva pantalla en la que nos preguntarán si deseamos salir de la aplicación.

En el segundo icono de la barra inferior observamos que aparece una avioneta sobre fondo rojo. Si pulsamos sobre este icono aparece una nueva pantalla con información sobre los creadores de la aplicación y los traductores de la misma. Son los créditos de la aplicación.

En el tercer icono aparece un destornillador junto con una llave fija para tornillos. Este icono nos va a llevar a la zona de configuración de la aplicación. Si pulsamos nos aparece la pantalla que observamos en la imagen 3.

Imagen 3. Pantalla de configuración de GCompris

Entre las opciones que podemos configurar de la aplicación se encuentra el idioma. Como hemos indicado anteriormente, el sistema debe estar preparado previamente para poder configurar ese idioma. Si nos fijamos en la Imagen 3, el idioma que está configurado es el español. Pulsando sobre las flechas que aparecen al lado de la bandera, podremos configurar el idioma que deseemos. Esta adaptación a cada idioma ha sido realizada por usuarios y desarrolladores que de forma altruista colaboran con el proyecto, por lo que si un idioma no aparece, lo único que debe hacer alguien que desee trabajar por amor al arte educativo es traducir la aplicación al idioma en el que la desee utilizar.

Observamos también que podemos configurar si deseamos que la pantalla de la aplicación la observemos ocupando toda la pantalla o con la configuración ideal para Gcompris. La configuración ideal, dado que es un sistema con muchos gráficos, es una pantalla de 800×600.

GCompris también está dotado de música. De esto nos damos cuenta en cuanto entramos en la aplicación. Esta música es un atractivo más de la aplicación de cara a su uso por parte del alumnado, pero puede ser caótica cuando en un aula tenemos 15 ordenadores o más funcionando con la aplicación. El sonido es ensordecedor, por lo que muchos agradecemos que en la configuración exista esta opción de poder quitarle la música.

También podemos quitarle los efectos. Estos efectos son pequeños sonidos que produce cuando el alumno/a accede a un lugar determinado o resuelve una actividad bien o mal. La verdad es que estos efectos son menos molestos en una clase completa.

En el temporizador vamos a poder configurar cómo deseamos que transcurra el tiempo que el alumnado tiene para resolver o ejecutar una actividad. Este temporizador admite tres niveles: lento, normal y rápido. Dependiendo de las dificultades del alumnado con el que estemos trabajando o el nivel escolar de cada uno, podremos adaptar este temporizador haciendo una adaptación individualizada.

Para finalizar, podemos configurar la apariencia que va a tener la aplicación. Para esta apariencia vamos a poder elegir entre "Babytoy" y "Gartoon". La primera ofrece una apariencia más infantil y la segunda es una apariencia más formal dentro de lo que permiten los llamativos gráficos con los que cuenta GCompris.

Con esto terminamos nuestro recorrido por la barra inferior aunque vamos a observar que en otras pantallas aparecerán nuevos iconos que explicaremos en su momento.

Volvemos a la imagen 1 y nos fijamos ahora en la barra lateral que aparece en la parte izquierda de la pantalla. Esta barra nos va a conducir a las distintas actividades con las que cuenta GCompris.

Si colocamos el ratón encima de uno de los iconos de esa barra vertical, en la pantalla central nos aparece información sobre el tipo de actividades al que conduce. Así, haciendo un recorrido de arriba a abajo las actividades pueden ser:

1.– Descubre la computadora. Jugar con periféricos del ordenador.
2.– Ir a las actividades de descubrimiento. Colores, sonido, memoria...
3.– Ir a las actividades de experiencias. Varias actividades basadas en el movimiento físico.
4.– Ir a las actividades recreativas. Varias actividades recreativas.
5.– Matemáticas. Actividades de matemáticas.
6.– Puzles. Puzles variados.
7.– Ir a las actividades de lectura. Actividades de lectura.
8.– Juegos de estrategia. Ajedrez, conecta 4, ...

Vamos a entrar en una de ellas. Si accedemos a la pantalla de actividades de descubrimiento observamos la pantalla que aparece en la imagen 4.

Imagen 4. Actividades de descubrimiento.

Si te fijas en la imagen 4 observarás que ha aparecido una nueva barra horizontal, esta vez en la parte superior de la pantalla. En esta barra va a ir apareciendo el recorrido que vamos haciendo por la aplicación para llegar a la ventana en la que nos encontramos actualmente. En este caso, hemos pulsado sobre el segundo icono de la barra vertical, el icono que nos conduce a las actividades de descubrimiento. Observamos por tanto que en la barra horizontal superior aparece el mismo icono sobre el que habíamos pulsado. Además, este icono aparece activo, es decir, podemos pulsar sobre él.

Como ya te hemos indicado pueden aparecer más símbolos en la barra horizontal, por lo que para puedas en cada momento conocer qué es lo que hacen te hemos preparado una pantalla que aparece en la imagen 5 en la que puedes contemplar todos ellos. Esta pantalla no aparece en GCompris y solamente nos va a servir para esta explicación.

Imagen 5. Iconos horizontales del programa.

Como ves, aparecen algunos cuyo significado ya conoces, pero otros que no y son símbolos que puedes observar en distintas pantallas de la aplicación. El significado de cada uno, de izquierda a derecha, es el siguiente:

- El primer símbolo es una televisión con un cielo estrellado. Este icono nos va a servir para salir de la aplicación.
- El segundo símbolo es una avioneta y nos va a ofrecer los títulos de crédito de la aplicación.
- El tercer símbolo en el que aparecen varias herramientas nos va a llevar a la pantalla de configuración del programa que pudiste ver en la imagen 3.
- El cuarto símbolo es un signo de interrogación y nos ofrece ayuda sobre la pantalla en la que nos encontremos en cada momento.
- El quinto símbolo es un dado y nos va a indicar el nivel de dificultad en el que nos encontremos en cada momento. A medida que vamos realizando un determinado ejercicio o vamos avanzando en una actividad, el nivel de dificultad es mayor y este dado nos marcará ese nivel en el que nos encontramos en un momento dado. Si accedemos a una actividad determinada y deseamos un nivel de dificultad superior, solamente deberemos pulsar sobre este dado y el nivel de dificultad observaremos que aumenta en un punto. Este icono es muy útil para adaptar la actividad a cada alumno en cada momento. Esto hace que una misma actividad podamos utilizarla en un curso y en cursos posteriores sin más que adaptar el nivel de dificultad de la misma a las destrezas que en ese momento deba tener adquiridas.
- El sexto símbolo es una mano con un pulgar alzado. Este símbolo nos va a servir para comprobar si la solución que proponemos para una actividad es la correcta o no. Una vez que el alumno o la alumna haya escrito la solución deberá

pulsar sobre este símbolo para saber si su respuesta es la correcta.

- El séptimo símbolo, aunque no es muy corriente, sin embargo aparece en algunas pantallas. Este símbolo nos va a servir para pasar de algo que estemos viendo en tres dimensiones a verlo en dos dimensiones. Su uso es común en la zona de laberintos.
- El octavo símbolo aparece en las mismas zonas que el séptimo y es el opuesto de éste, es decir, algo que estemos observando en dos dimensiones, pasaremos a verlo en tres dimensiones.
- El noveno símbolo nos va a servir para reiniciar una actividad. Solamente aparece en algunas actividades y nos sirve para volver al punto de partida.
- Por último, el décimo símbolo nos va a servir cuando estemos realizando una actividad, para volver a la pantalla inmediatamente anterior en la que se nos proponía el conjunto de actividades en la que se encontraba la que estemos desarrollando en ese momento.

Ahora ya sabemos cómo movernos por la aplicación y por el conjunto de actividades que nos van a proponer.

Algo común a todas estas actividades son las pantallas de valoración que aparecen cuando se finaliza una de ellas. Estas pantallas contienen mensajes tanto visuales como escritos.

En la imagen 6 podemos contemplar una de las pantallas de refuerzo que se le muestra al concluir correctamente una actividad.

Imagen 6. Pantalla de refuerzo tras haber resuelto correctamente una actividad.

Esta imagen va acompañada de un refuerzo sonoro que le indica al alumnado en el idioma en el que tengamos configurada la aplicación que lo ha realizado bien.

Al igual que aparece esta imagen de refuerzo, también aparece otra cuando el alumno no realiza bien la actividad. Es una imagen que visualmente le indica al alumnado que no lo ha hecho bien. En la imagen 7 podemos observar una de estas pantallas que sale cuando la actividad se he resuelto mal.

Imagen 7. Pantalla que aparece cuando una actividad se ha resuelto de forma incorrecta.

Esta imagen va acompañada de una frase sonora que indica que no se ha hecho bien, pero dándole ánimos para que se vuelva a intentar. Como sucede en el caso del refuerzo positivo, la frase la escuchan en el idioma que tengamos configurada la aplicación. La verdad es que el efecto está muy conseguido y el estímulo en todo momento es positivo.

Comenzamos ahora un recorrido por distintas actividades de las que se proponen en Gcompris que pueden resultar útiles en matemáticas. Dejamos para el próximo número de *Suma* aquellas más específicas que vienen dentro del apartado de matemáticas ya que es conveniente tratarlas todas juntas y ahora nos proponemos recuperar actividades que aparecen en otras zonas de la aplicación. Somos conscientes de que en las edades más tempranas cualquier estímulo educativo exterior puede conllevar una aproximación a la matemática, por lo que todas las actividades con las que cuenta la aplicación podrían tratarse en este punto, pero nos vamos a centrar en aquellas en las que se observe una clara implicación matemática.

La primera actividad la localizamos en el menú "Descubre la computadora" de la parte izquierda de Gcompris. Cuando accedemos a estas actividades nos aparecen dos posibles tipos "Tableros de manipulación de teclados" y "Actividades con el ratón". Seleccionamos las actividades de manipulación del teclado y nos aparece la primera de las pantallas que observamos en la imagen 8. De entre todas las que aparecen pulsamos la que tienen como icono un dado que se denomina "Números con dados" y nos aparece la segunda pantalla que observamos en la imagen 8.

Imagen 8. Pantallas utilizadas para la configuración

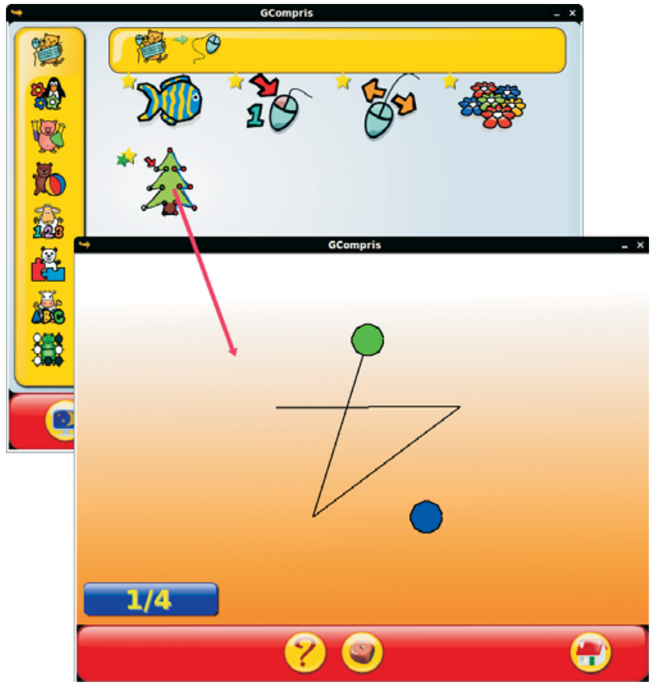


Imagen 9. Trazados geométricos.

Esta actividad está pensada para que el alumnado identifique los números que aparecen en los dados y los identifique con cada número. Así, a medida que van cayendo los dados, el alumno deberá pulsar en el teclado del ordenador la tecla correspondiente al numero que indica el dado. Si lo hace correctamente el dado desaparece de la pantalla. Observamos en la imagen 8 que en esta pantalla aparece un dado en la barra horizontal inferior indicando la dificultad de la pantalla en la que se encuentra. En nuestro caso el nivel es 1. Como ya sabemos, si pulsamos sobre ese dado vamos aumentando el nivel de dificultad. En este caso el nivel de dificultad llega hasta el 9. Es una actividad recomendable para que el alumno identifique cada número con la cantidad que representa.

Otra actividad que puede resultar útil en el aula de matemáticas de infantil y primaria es la que observamos en la imagen 9.

Esta actividad la localizamos en el menú “Descubre la computadora” de la parte izquierda de Gcompris. Cuando accedemos a este menú nos aparecen dos posibles tipos “Tableros de manipulación de teclados” y “Actividades de manipulación del ratón”. Seleccionamos las actividades de manipulación del ratón y nos aparece la primera de las pantallas que observamos en la imagen 9. De entre todas las que aparecen pulsamos la que tienen como icono un árbol que se denomina ”Pulsa y dibuja” y nos aparece la segunda pantalla que observamos en la imagen 9.

En este caso, aparecen numerosos puntos en verde en la pantalla y la persona que esté manejando la aplicación debe pulsar sobre el que se ponga en azul en cada momento. Rápidamente aparecerá una línea recta que lo unirá con el punto inmediatamente anterior. Al final aparecerá una figura geométrica dibujada con trazos rectos. En el caso de la imagen 9 la figura que observamos que aparecerá será una estrella.

Si entramos dentro de la zona de actividades de descubrimiento, existen muchas de ellas que tendrían mucha utilidad en el aula de matemáticas. Alguna de ellas, por evidentes, solamente las vamos a mencionar mientras que en otras nos pararemos más.

Al acceder a las actividades de descubrimiento, segundo icono de la barra vertical izquierda, encontramos un conjunto de ellas con clara utilidad matemática. Nos referimos a las actividades de laberintos en las que el alumnados deberá moverse por laberintos que unas veces aparecen en dos dimensiones y otras en tres dimensiones. Son actividades que ayudan al alumnado a situarse espacialmente en un entorno virtual y a moverse por ese entorno. Algunas de ellas tienen bastante dificultad.

Otro grupo que nos encontramos en las actividades de descubrimiento son las “actividades varias” como se denominan en la aplicación. Todas estas actividades las observamos en la imagen 10.

Al entrar en las actividades de descubrimiento observamos la primera pantalla que aparece en la imagen 10. Posterior-mente, si pulsamos sobre el icono de “actividades varias” como se indi-

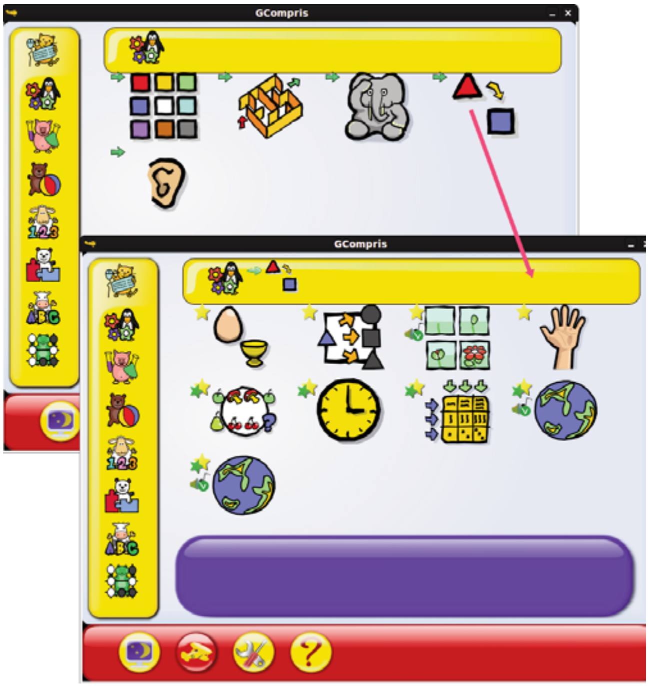


Imagen 10. Actividades de descubrimiento.

ca con la flecha roja de la imagen 10, obtenemos la segunda pantalla que aparece en esta imagen. Aquí podemos ver que aparecen 9 ejercicios o actividades diferentes que pueden ser de mucha utilidad. Observa que en la parte superior de la segunda pantalla que aparece en la imagen 10, se recoge la ruta seguida hasta llegar a esa pantalla en la que nos encontramos.

De cara al uso de la aplicación en el aula de matemáticas vamos a destacar dos de ellas. La primera es la que se denomina "Algoritmo" y que aparece representada por un icono con un círculo blanco y algunas frutas alrededor. Al entrar en esta actividad observamos la pantalla que aparece en la imagen 11.

En esta actividad se nos presenta una serie de elementos que han sido colocados siguiendo un orden lógico. En la mesa que se encuentra en la parte inferior de la pantalla aparecen otros muchos elementos. El alumno o la alumna deberá pulsar sobre aquel elemento de la mesa que considere que debe colocarse en seguidamente, es decir, en el lugar en el que aparece la flecha tras la secuencia lógica. En este caso observamos que no aparece un dado con el nivel de dificultad, aunque es cierto que a medida que avanzamos va aumentando la dificultad.

Dentro del grupo de "actividades varias" que se encuentra en las actividades de descubrimiento nos encontramos con otro ejercicio que nos puede resultar útil en el aula de matemáticas. Nos referimos a la tabla de doble entrada. En este caso la pantalla que aparece es la que observamos en la imagen 12.

Imagen 11. Algoritmos.

En nuestro caso observamos una tabla que inicialmente contenía un elemento en cada casilla de la columna de la izquierda y un número en cada casilla de la primera fila. El alumnado deberá ir completando cada una de las casillas de la tabla con lo elementos que le aparecen a su izquierda de forma que la casilla correspondiente a un "2" y "galleta" deberá completarla con la imagen en la que aparecen dos galletas. De todas formas en la pantalla que aparece en la imagen 12 ya observamos que se han completado algunas casillas que inicialmente aparecían vacías. Observamos que en esta actividad podemos elegir el nivel de dificultad ya que en la parte inferior aparece el dado que nos indica ese nivel.

Otra actividad del grupo de "actividades varias" que tienen clara utilidad es la denominada "aprendiendo la hora" en la que el alumnado deberá ir moviendo las manecillas del reloj que aparece de forma que marquen la hora que se les indica. En esta actividad también vamos a poder seleccionar el grado de dificultad con su dado correspondiente.

Imagen 12. Tabla de doble entrada.

Saltamos ahora a las actividades de puzzles. A estas actividades accedemos pulsando sobre el sexto icono de la barra lateral izquierda. Al entrar en este tipo de actividades nos aparece la pantalla que observamos en la imagen 13.

Imagen 13. Puzzles.

Observamos que aparecen 9 tipos de actividades distintas que son de interés para la utilización en el aula de matemáticas. De todas ellas nos vamos a para en dos que son de interés específico para nuestra materia. El primero de ellos viene determinado por el segundo icono que observamos en la pantalla de la imagen 13. Este segundo icono nos conduce a "El juego de puzle de tangram". Ya en esta sección hemos dedicado un artículo a una aplicación específica sobre tangram, la aplicación llamada gtans. Aquí nos encontramos integrado el uso de este puzle y con un potencial similar al que indicábamos en aquella ocasión. Si pulsamos sobre el segundo icono de la imagen 13 accedemos a la pantalla que vemos en la imagen 14.

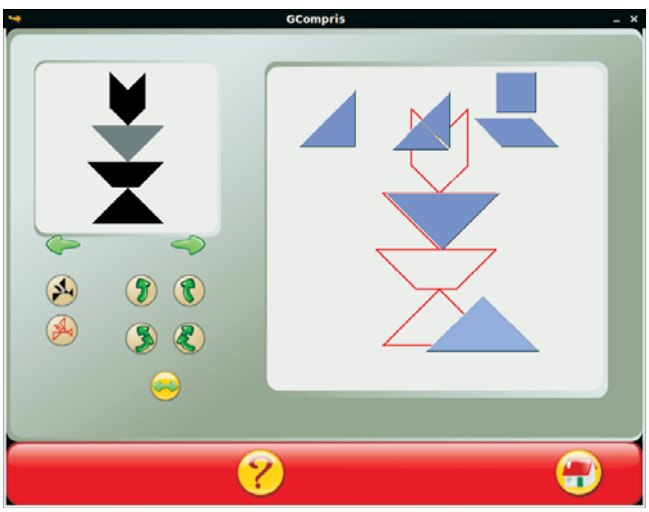


Imagen 14. Tangram.

En la imagen 14 observamos que en la barra inferior solamente aparecen dos iconos cuyo funcionamiento conocemos. Posteriormente observamos que la pantalla aparece dividida en dos zonas, izquierda y derecha. En la zona de la derecha nos encontramos el espacio de trabajo en el que se encuentran las piezas del tangram que vamos a poder arrastrar utilizando el ratón.

La zona de la izquierda aparece dividida en dos partes, una superior y otra inferior. En la zona superior aparece la imagen que debemos conseguir realizar con las piezas del tangram que se encuentran en el área de trabajo. Debajo de esta imagen podemos apreciar dos flechas, una que apunta hacia la izquierda y otra hacia la derecha. Estas flechas nos van a servir para ir viendo otras imágenes distintas que se pueden hacer con las piezas del tangram. En esta parte aparecen una extensa cantidad de imágenes, lo que nos da una idea de la potencialidad de este puzle.

En la zona inferior nos encontramos una zona de botones que nos van a ayudar a la hora de construir la figura. El primero de estos botones, en el que aparece una paloma negra, si pulsamos sobre él, observamos que en la imagen de la zona inferior se marca con un color gris una determinada pieza con la que está construido el dibujo.

El segundo botón, en el que aparece la paloma dibujada con líneas rojas nos va a servir para que aparezca en el área de trabajo el contorno de la figura que pretendemos construir. Este contorno nos va a servir de referencia a la hora de colocar las piezas del tangram para construir la imagen.

Posteriormente observamos un grupo de cuatro botones muy parecidos. En ellos aparecen una flecha o dos flechas en verde marcando un sentido de giro en la circunferencia en la que están inscritas. Si pulsamos sobre una pieza del tangram en el área de trabajo, al pulsar con el ratón sobre uno de los botones que tiene un flecha verde, observamos que la pieza gira sobre su centro según el sentido de giro que indica la flecha. Si esto mismo lo realizamos pulsando sobre uno de los botones que tiene dos flechas, la figura girará en el sentido que le marcan las dos flechas pero con un ángulo de giro mayor, gira más rápidamente. Por tanto, estos botones nos van a servir para que giramos las piezas del tangram hasta colocar cada una de ellas en la forma que aparecen en la figura que deseemos construir.

Por último, aparece un botón con una flecha verde en su interior que apunta a izquierda y derecha. Este botón voltea la pieza marcada en el área de trabajo de forma horizontal.

Con estos cinco botones conseguimos obtener todos los posibles movimientos de cada pieza del tangram. El de desplazamiento ya lo hacemos con solo arrastrar la pieza con el ratón.

Puedes comparar este puzle con el que proponíamos cuando recorrimos la aplicación gtans en números anteriores.

Otro de los puzles en el que nos vamos a fijar es el que aparece en el penúltimo icono de la imagen 13. Este icono nos conduce a “Sudoku, coloca símbolos únicos en un cuadrado”. Si pulsamos sobre el mismo accedemos a la pantalla que observamos en la imagen 15.

Imagen 15. Sudoku.

Los sudokus son de sobra conocidos por todos. En esta pantalla nos proponen un sudoku especial, sin números. El funcionamiento es el mismo que conocemos. Lo que debemos hacer es colocar en cada cuadro del cuadrado una imagen de forma que no se repitan por líneas verticales y horizontales.

Como puedes observar, en la barra horizontal de la imagen 15 aparece un dado, lo que indica que existen diferentes niveles para este puzle. Los niveles que permite la aplicación son del 1 al 5, de forma que en los tres primeros se trabajan con figuras, mientras que en el 4 y el 5 ya aparece el sudoku numérico que conocemos. Para el nivel 4 aparece un sudoku 5×5 y para el nivel 5 aparece un sudoku 9×9 dividido en otras nueve regiones. El objetivo del puzle es introducir un número del 1 al 9 en cada celda de un tablero, siendo lo más frecuente un tablero de 9×9 hecho de subtableros de 3×3 (llamados «regiones»), comenzando con varios números ya colocados en algunas celdas (los «mostrados»). Cada fila, columna y región deben contener sólo un ejemplar de cada número. Completar el puzle requiere paciencia y habilidad lógica.

Es una buena forma de introducir al alumnado en este tipo de puzzles.

Para finalizar este primer recorrido lo vamos a hacer con una aplicación que encontramos en la zona de Juegos de estrategias. Para entrar debemos pulsar en el último icono de la barra lateral izquierda de la pantalla que observamos en la imagen 1.

Al entrar observamos la pantalla que aparece en la imagen 16.

Imagen 16. Juegos de estrategia.

Aquí se nos presentan varios juegos de estrategia. El primero que observamos es “Practicamos el ajedrez”. Aquí se nos ofrecen tres posibilidades distintas. En la primera se nos ofrece la posibilidad de jugar una partida didáctica de ajedrez contra el ordenador. En la segunda el alumno o alumna deberá atrapar un peón que mueve el ordenador siguiendo los movimientos del ajedrez. En la tercera y última se nos presentan posibles jugadas terminales del ajedrez que podremos jugar. En la primera posibilidad no existen niveles ya que es una partida didáctica. En las otras dos sí aparecen niveles de dificultad.

El segundo juego de estrategia es el conocido “Conecta 4” del que se nos ofrecen dos versiones. En una primera el alumno o alumna utiliza el juego de estrategia teniendo como rival al ordenador y en la segunda son dos alumnos los que se enfrentan entre sí.

El siguiente juego de estrategia que nos plantean es “Oware”. El objetivo del juego es capturar más semillas que el oponente. Debido a que el juego sólo tiene 48 semillas, capturar 25 es suficiente para lograr esto. Debido a que hay un número par de semillas, es posible el empate, si cada jugador captura 24. El juego se acaba cuando un jugador ha capturado 25 o más semillas, o ambos jugadores han capturado 24 semillas cada uno. En este caso se produce un empate. Si ambos jugadores están de acuerdo el juego puede reducirse a un ciclo sin fin, cada jugador captura las piedras en su lado del tablero.

En la imagen 17 podemos observar el último juego de estrategia que nos proponen.

Imagen 17. Juegos de estrategia.

La aplicación lo denomina juego de barras. En este juego el alumno o alumna se enfrenta al ordenador representado por el pingüino Tux. Observamos que aparecen varios huecos en la tierra en los que habrá que ir colocando las bolas con las que cuenta cada jugador. Cada uno de los jugadores, en su turno, decide cuantas bolsa coloca en ese momento de entre las que dispone en cada jugada. En la imagen 17 observamos que en ese caso cada jugador puede colocar entre 1 a 6 bolas. El juego lo pierde el jugador que tiene que colocar la última bola.

Para este tipo de juegos se pueden encontrar estrategias ganadoras que se obtienen pensando en las jugadas finales que se deben desarrollar, es decir, para que mi contrincante pierda, lo deseable es que en su última jugada solamente encuentre libre el último hueco, para ello, lo deseable es que en mi última jugada me haya encontrado libre entre 2 el 1+número máximo de bolas que pueda colocar, así, en cada caso la estrategia dependerá del número máximo de bolas que puedo colocar. Además, en la barra horizontal inferior observamos que aparece el dado, lo que significa que existen distintos niveles para el juego.

En este juego, en un principio, comienzo colocando bolas el alumno o alumna. Si deseamos que sea Tux el que comience debemos pulsar sobre él. Cuando nos toque el turno, debemos pulsar sobre el recuadro inferior derecho en el que aparece una bola al lado de un número. Cada vez que pulsemos con el ratón, este número irá aumentando en uno. Cuando ya tengamos en ese recuadro el número de bolas que queremos colocar, pulsamos sobre la mano que aparece en la barra horizontal inferior y se colocarán tantas bolas como hayamos indicado. Seguidamente será otra vez el turno de Tux.

Esperamos que las distintas aplicaciones que te hemos mostrado te sirvan de ayuda a la hora de desarrollar determinados contenidos matemáticos.

MATEMASTIC ■

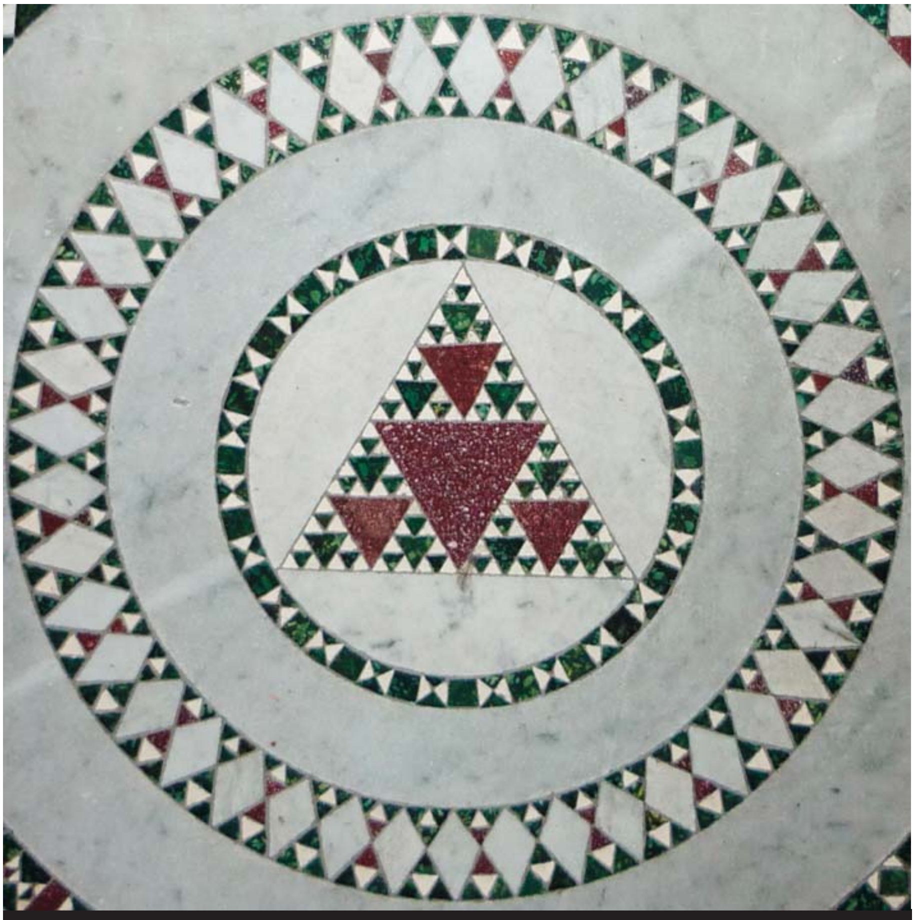
Ficha educativo - técnica	
Nombre	GCompris
Sistema	Aunque es una aplicación propia de Linux y para cada distribución cuenta con el archivo de instalación en su repositorio, también encontramos las versiones correspondientes para Windows y para Mac.
Descarga	Repositorio de la distribución de Linux correspondiente o Página oficial: http://gcompris.net Página español: http://gcompris.net/-es- Descarga: http://sourceforge.net/projects/gcompris/files/
Licencia	GPL
Contenido	Aunque es una aplicación general para la educación, en la parte de matemáticas se tratan ejercicios y juegos numéricos.
Nivel	Multinivelar: Primaria y ESO.
Metodología	Aplicación para utilizar a partir de 2º de Primaria. Los alumnos utilizarán individualmente la aplicación para resolver las tareas propuestas en la aplicación.

Este artículo fue solicitado por *Suma* en junio de 2010 y fue aceptado en diciembre de 2010 para su publicación.

suma+ 66
Febrero 2011, pp. 67-71

Un fractal cosmatesco

Paseando por Roma, los ojos muchas veces no saben adónde dirigirse. Levantando ligeramente la mirada podemos toparnos con un caravaggio*, con su luz oscura. Alzando los ojos al cielo, con el mismo cielo a través del óculo de la bóveda del Panteón. Al mirar hacia abajo encontramos los magníficos suelos cosmatescos que son pura geometría. Centraremos nuestra mirada matemática en algunos de estos diseños. En 2003, el Campidoglio celebró el noventa cumpleaños de Emma Castelnuovo. Mª Jesús Luelmo, paseando por Roma, con ocasión de ese evento, descubrió el mosaico de la derecha. A ambas, a Emma y a Mª Jesus, dedico este artículo.*



Suelo cosmatesco, Santa María in Trastevere, Roma (Foto: FMC)

Francisco Martín Casalderrey
IES Juan de la Cierva (Madrid)
fmc@revistasuma.es

Los Cosmati fueron una familia de artesanos romanos. Son conocidos siete de sus miembros a lo largo de cuatro generaciones. La saga se inició con Laurentius Cosmati a finales del siglo XII. El último representante de esta familia es Giovanni Cosmati que vivió a mediados del siglo XIII. Los Cosmati fueron arquitectos y escultores, pero sobre todo se les recuerda por sus mosaicos marmóreos. Los Cosmati crearon un estilo propio, llamado *cosmatesco*, derivado en parte del arte bizantino y en parte del gusto clásico. Sus pavimentos se forman a base de teselas, normalmente de mármol y otras piedras, raramente de vidrio, con las que forman dibujos de carácter abstracto geométrico. Con respecto al *opus tessellatum* romano —que utiliza siempre teselas del mismo tamaño y forma pero de diferentes colores— los suelos cosmatescos son más complejos. Usan teselas de formas y tamaños diferentes y de variados colores que van del rojo oscuro del pórfido, al verde de la serpentina, dejando el blanco del mármol de Carrara para los fondos.

Predominan las formas redondas que muchas veces son secciones de columnas de las ruinas de la Roma antigua, de donde tomaban también los mármoles para las piezas más pequeñas. La otra forma fundamental son las bandas entrelazadas que rodean los círculos, pasando de unos a otros. Por último, para rellenar los espacios que quedan entre bandas y círculos y pasar de lo redondo a lo rectangular, se usan generalmente mosaicos semirregulares, basados en polígonos regulares.

El estilo cosmatesco fue muy imitado por otros artistas a lo largo de los siglos y en diversos países. Recordamos, por ejemplo, el suelo representado en el cuadro de *Los embajadores*, del que hablamos en esta sección en *Suma* 65.

El interés matemático de los mosaicos cosmatescos es indudable y requeriría un estudio profundo y específico. En esta ocasión me contentaré con señalar y sugerir algunas ideas que pueden resultar útiles para los lectores de *Suma*, es decir, para los profesores de matemáticas.






Figuras 2-7, en esta página.
Seis detalles de motivos utilizados en los mosaicos cosmatescos de Roma. De izquierda a derecha y de arriba abajo, los dos primeros son de *Santa María Mayor* (siglo XII), los dos siguientes de *Santa Maria in Cosmedin (siglo XIII)* y los restantes de *Santa Maria in Trastevere,* (restaurados y rehechos en el siglo XIX).

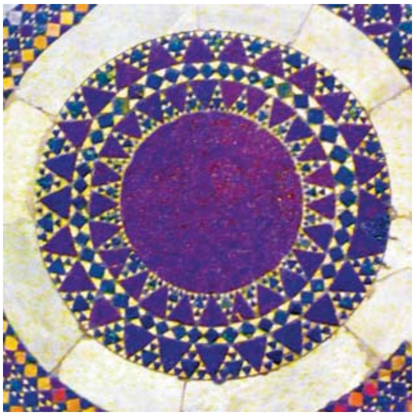
Figuras 8-19, en la página siguiente.
Doce rosetones de mosaicos cosmatescos romanos. Los cuatro primeros, en el mismo orden anterior, de *Santa María Mayor* (del siglo XII), los ocho restantes de *Santa Maria in Trastevere* (restaurados y rehechos en el siglo XIX)
Fotos: FMC

Wacław Sierpiński (1882-1969)

Wacław Franciszek Sierpiński, de nacionalidad polaca, fue un matemático conocido por sus notables contribuciones a la Teoría de conjuntos —trabajó sobre el Axioma de Elección y la Hipótesis del continuo— la Teoría de números, la Topología y la Terоría de funciones.

Tres fractales reciben nombres asociados a su apellido: el *triángulo de Sierpiński*, la *alfombra de Sierpiński* y la *curva de Sierpiński*.









Como se puede ver en las imágenes de las páginas anteriores son muchos los motivos que abordan los suelos cosmatescos. Los representados en detalle son todos de pavimentos de iglesias romanas. Los de la Basílica de Santa María Mayor y de Santa Maria in Cosmedin son originales del siglo XII. Los de Santa Maria in Trastevere, entre los que se encuentra también el de la primera página, fueron casi completamente rehechos en una restauración realizada por Virginio Vespignani en el último cuarto del siglo XIX, aunque parece ser que respetando los dibujos y los motivos originales.

Triángulos de Sierpiński cosmatescos

Pero lo que más llama la atención es la frecuencia con la que aparecen entre los dibujos distintas versiones de los triángulos de Sierpiński, obviamente muchos años antes de que ese triángulo recibiera tal nombre.

Refiriéndonos a las imágenes por su número de orden. La primera es sin duda la más espectacular. Se trata de un triángulo de orden cuatro. Los triángulos de los dos primeros niveles están realizados en rojo con pórfido, mientras que en los otros dos niveles el diseñador ha optado por el verde de la serpentina. Como hemos señalado, este suelo fue rehecho por Vespignani en el siglo XIX, por lo que no podemos asegurar que el dibujo precedente fuera exactamente como el que podemos ver en la actualidad. Podría tratarse por tanto de una innovación y no de una autentica restauración, a pesar de eso, por la fecha en que se hizo, continuaría siendo anterior a los estudios de Sierpiński sobre el triángulo que lleva su nombre. Además, como vemos al analizar las restantes imágenes, este tipo de triángulos aparecen en los suelos cosmatescos desde los origines.

Así, por ejemplo, en las imágenes 2, 3, 5 y 6 —las de los detalles de los motivos ornamentales– podemos ver triángulos de orden uno, mientras que en las imágenes 3, 4 y 7 se pueden ver triángulos de orden dos. El de la imagen inicial del artículo como hemos señalado es de orden cuatro.

Si pasamos a las imágenes de la página siguiente observamos que en todas ellas aparecen triángulos de Sierpiński a excepción de la tercera de la fila superior, ya que los que se ven en ella, entre las puntas de la estrella central, no lo son. En las restantes los que aparecen son de órdenes uno y dos. Buscar dónde están en cada caso y de que orden son puede ser un juego divertido.

Resulta también interesante estudiar el grupo de simetría de cada uno de los rosetones; nos podemos llevar sorpresas. Por ejemplo, si observamos la figura número 13, es decir, el sexto de los rosetones de la página precedente, el cuadrado central nos puede llevar a pensar que se trata del grupo diédrico D_4, sin embargo, al considerar el marco de rombos que lo rodea y contar éstos, vemos que son 41; como 41 es primo, no tiene divisores comunes con 4; la figura solo tiene una simetría, es decir, realmente se trata del grupo diédrico D_1. La figura 16 —inmediatamente debajo de la anterior— en su parte central tiene las simetrías de un hexágono y como en el marco hay 36 triángulos de Sierpiński de orden 1, se trata de un D_6.

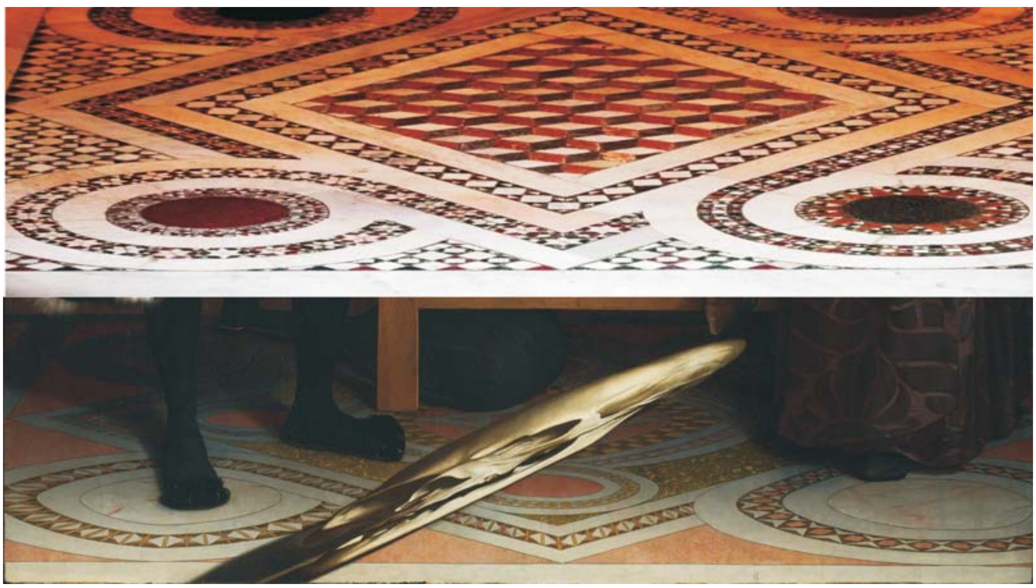
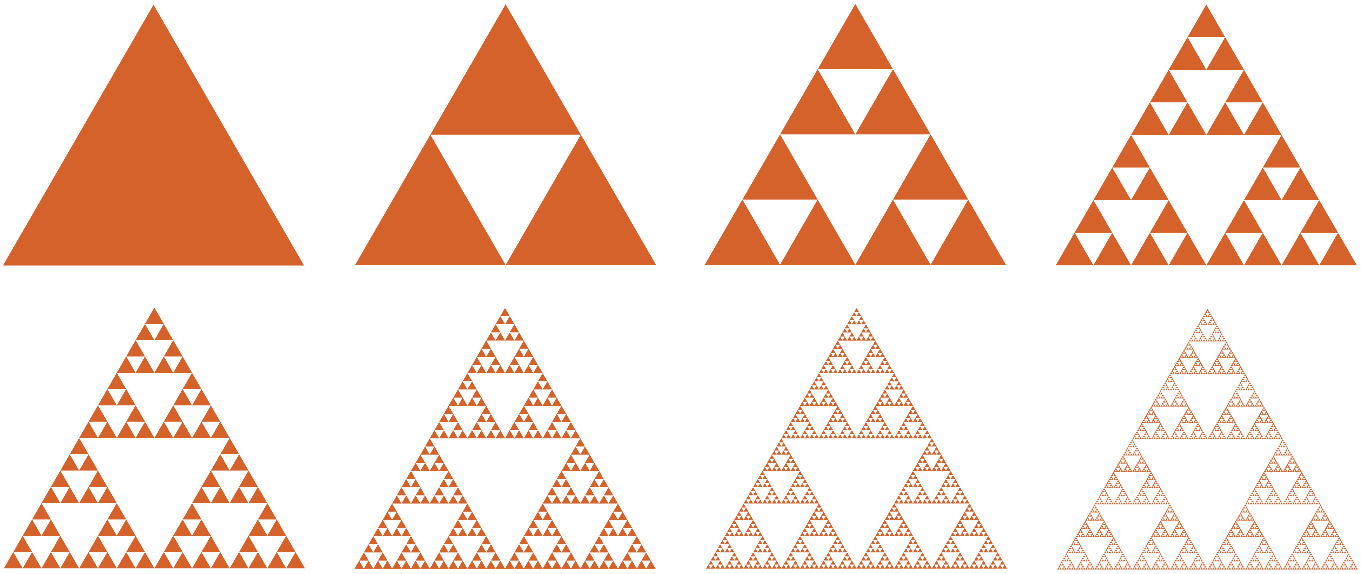


Figura 20
Comparación del pavimento de estilo cosmatesco de Los Embajadores, Hans Holbein El Joven, 1533 National Gallery (Londres) y el suelo de Santa Maria Maggiore, de Roma, visto con una perspectiva similar



Figuras 21-28. Triángulos de Sierpiński de niveles cero a siete (Imágenes: FMC)

Alrededor del triángulo de Sierpiński

La manera más sencilla de imaginar, de una manera generativa, el triángulo de Sierpiński, es partir de un triángulo cualquiera y marcar en él los puntos medios de cada lado. Al unirlos se formará un triángulo semejante al original, con una razón de semejanza de ½, en el centro del anterior y otros tres, también semejantes y con la misma razón de semejanza, uno en cada vértice. Si al triángulo inicial le asignamos el orden 0 y lo denominamos $\boldsymbol{S_0}$, a la nueva figura la podemos denominar $\boldsymbol{S_1}$. El triángulo de Sierpiński, $\boldsymbol{S}$, lo podemos obtener pasando al límite.

$$\boldsymbol{S} = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{S}_n$$

El triángulo de Sierpiński, $\boldsymbol{S}$, es autosimilar, ya que cada una de las tres subfiguras triangulares de lado 1/2 que lo forman son idénticas a la figura global, reducidas a escala 1:2.

Si observamos en la sucesión $\boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{S_1}, \boldsymbol{S_2}$ ... el número de triángulos coloreados, vemos que forman una progresión geométrica cuyo primer término es 1 y de razón 3. Así, el número de triángulos de $\boldsymbol{S_n}$ es 3^n. El último de los triángulos que hemos representado es un $\boldsymbol{S_7}$, que, por tanto, está formado por 3^7= 2.187 triángulos semejantes al inicial.

Los lados de los triángulos de la sucesión $\boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{S_1}, \boldsymbol{S_2}$ ... forman otra progresión geométrica. Si llamamos l al lado del triángulo inicial, la progresión tiene como primer l y una razón de 1/2. Así, el lado de los triángulos que forman $\boldsymbol{S_7}$, es una ciento veintiochoava parte del inicial. O dicho de otro modo, sobre el lado del triángulo $\boldsymbol{S_7}$ se apoyan 128 triángulos de lado $l/128$.

El área coloreada de cada uno de los triángulos de la sucesión $\boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{S_1}, \boldsymbol{S_2}$ ... es 3/4 del área coloreada del anterior. Así en la figura del $\boldsymbol{S_7}$, el área de la superficie coloreada es

$$A = \left(\frac{3}{4}\right)^7 \simeq 0{,}133$$

Obviamente, como

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

El área de la superficie coloreada del triángulo de Sierpiński $\boldsymbol{S}$ es 0. Podemos decir, por tanto, que es *invisible*. Al no tener superficie ni ser tampoco exactamente una línea, el triángulo de Sierpiński pasa a ser objeto intermedio entre ambos. Un objeto con una dimensión no entera. De hecho, la dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch del triángulo de Sierpiński es:

$$D_{HB} = \frac{\ln 3}{\ln 2} \simeq 1{,}585$$

Wacław Sierpiński estudió su triángulo en 1915. Muchos años antes, en el siglo XII, una idea geométrica parecida había servido de inspiración a los Cosmati para construir sus suelos. El arte y las matemáticas otra vez se tocan.

ARTE CON OJOS MATEMÁTICOS ■

Servicio de Publicaciones de la FESPM
Apartado de Correos 590
06080 Badajoz
Información y pedidos: *publicafespm@wanadoo.es*

Día Escolar de las Matemáticas
12 de mayo de 2011
Las matemáticas de la química

suma+ 66
Febrero 2011, pp. 73-77

Niponas

Salió de un callejón sombrío. Los pocos occidentales que había a esas primeras horas del día comenzaron a hacerle fotografías. Ella se dejaba mientras avanzaba con los pasitos cortos que le imponía el ropaje tan ajustado. La solemnidad y exquisitez del kimono contrastaba con los calcetines bífidos y las sandalias de madera. Un calzado muy ligero para el frío que hacía aquella mañana.

La ornamentación del tocado sintonizaba con el entorno de las *sakuras* y las ramas lánguidas de los cerezos. El maquillaje era una pátina blanca que se extendía por el cuello y la parte alta de la espalda trazando una extraña curva en el cogote (figura 1). El carmín en los labios era escueto y no se reducía a la manchita redondeada tan abundante en los rostros femeninos de la pintura tradicional nipona.

Mi exotismo cultural hacía de la geisha un ser insólito y de su atavío un disfraz. Le confería un aire irreal. ¿Había realmente alguien bajo el kimono y esa capa de blanco? Su esencia era para mí la de un ser platónico, tan perfecto como intangible. Imaginé que si me acercaba a ella con el brazo extendido mi mano la atravesaría sin ninguna dificultad. La geisha y su entorno eran niebla, un cuadro vivo de formas ideales como la del círculo de Platón.

Figura 1. Geisha entre sakuras (Kioto)

Miquel Albertí Palmer
Institut Vallés, Sabadell
adherencias@revistasuma.es

Ése círculo aparece también en los *sangaku* japoneses. Entre los siglos XVII y XIX Japón estuvo aislado del mundo occidental. Fue entonces cuando se desarrolló, tanto en lo que concierne a la creación como a la práctica, una corriente matemática que recorrió el país a través de templos budistas y de altares sintoístas. La comunicación se establecía por medio de tablas de madera llamadas *sangaku* en las que se escribían teoremas y problemas matemáticos. El reto consistía en resolverlos o demostrarlos. Durante esa época apenas había academias oficiales en Japón, por lo que las matemáticas no eran exclusivas del mundo académico. Esa geometría templaria fue un conocimiento autóctono y extra académico. Muchas de esas tablas han desaparecido; otras, en cambio, se han hallado muy recientemente. La última se encontró en 2005 en el altar Ubara de la ciudad de Toyama y data de 1879.

La costumbre de colgar tablillas es un fenómeno extraordinariamente corriente en el Japón de hoy en día (figura 2). A las entradas de los lugares de culto hay espacios reservados para ello. En épocas de exámenes los estudiantes los llenan de tablillas con la esperanza de obtener buenos resultados.

Figura 2: Tablillas de buenos deseos a la entrada de un altar sintoísta

El sangaku del altar de Katayamahiko, en Okayama, data de 1873. Su autor, Irie Shinjyun, escribió en él:

> Las matemáticas son profundas. Cada uno tiene sus propios métodos para resolver problemas. Esto es cierto tanto en Occidente como en China y en Japón. Quienes no estudian duro no pueden resolver ningún problema. Yo no domino aún las matemáticas pese a haberlas estudiado desde joven. Así que no merezco ser profesor de nadie, pero algunos me han pedido que les enseñe matemáticas. Les enseñé a resolver problemas y colgaré un sangaku junto al altar de Katayamahiko, en el que he escrito dieciséis problemas. Dedico esta tabla al altar con la esperanza de que mis alumnos ganen maestría en matemáticas.

Uno de los problemas de este sangaku hace referencia a la inserción de tres círculos tangentes entre sí en otro círculo mayor. La relación k entre el radio r de los tres círculos tangentes inscritos y el radio R del círculo que los contiene es:

$$k = \frac{R}{r} = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Las cosas pueden llevarse mucho más lejos iterando la inscripción hasta el infinito para crear un diseño (figura 3) cuya dimensión fractal es:

$$D = \log_{\frac{1}{k}} n = \frac{\log 3}{\log\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)} = 1{,}431\ldots$$

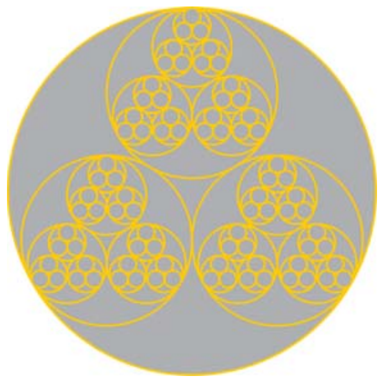


Figura 3: Iteración de un sangaku

Los círculos aparecen también en las aceras niponas. La mayoría de ellas están marcadas con senderos amarillos hechos de arrugas circulares y rectangulares (figura 4). Al principio, el visitante exótico no comprende su sentido, pero luego ve que sirven de guía a los ciegos. Tentando esas arrugas con el bastón saben qué camino seguir y dónde se encuentran.

Figura 4: Acera nipona

Algo similar ocurre con las tapas del alcantarillado y las arquetas de acceso a los suministros de electricidad, gas o agua que se abren al subsuelo. Sus arrugas ayudan al transeúnte a no resbalar cuando las pisa. Pero, ¿cuál es el arrugado óptimo de una arqueta? Cuantas más arrugas tenga, mejor. Sin embargo, un arrugado llevado hasta el infinito acabaría siendo absolutamente liso. ¿Cómo debería ser la arqueta ideal?

Busquemos una curva o serie de curvas perpendiculares a la trayectoria de un transeúnte imaginario que partiese del centro de una arqueta o pasase por él. Es decir, una arruga perpendicular a cualquier dirección que pase por el centro de la arqueta. Una sencilla reflexión permite dar con la solución, pero podemos ser más rigurosos aplicando el cálculo diferencial. Sean $(x, f(x))$ los puntos de esa curva en un sistema de coordenadas con origen en el centro de la arqueta. Matemáticamente, la condición expuesta quiere decir que, en todo momento, el radio vector $(x, f(x))$ es perpendicular al vector tangente $(1, f'(x))$ a la curva. Por lo tanto, su producto escalar debe ser nulo:

$$x + f(x)\cdot f'(x) = 0$$
$$f(x)\cdot f'(x) = -x$$
$$\frac{\left(f(x)^2\right)'}{2} = -x$$
$$f(x)^2 = \int(-2x)\,dx = -x^2 + k \text{ , k} \in \mathrm{R}$$
$$f(x) = \sqrt{k - x^2} \text{ , k} \in \mathrm{R}^+$$

Se trata de la familia de circunferencias concéntricas de radio creciente $r = \sqrt{k}$ y con centros en el de la arqueta. Así es una arqueta de la ciudad de Takayama (figura 5). Otra opción es combinar ésta última (radial) con la anterior (reticular) y crear, en vez de un arrugado concéntrico de radio creciente, un arrugado de círculos de igual radio también ortogonal a todas las direcciones que la recorran (figura 6).

Figuras 5 y 6: Arquetas circulares en suelo nipón (Takayama)

Llevando esos círculos a límites extremos y abandonando su distribución hexagonal, llegaríamos a una arqueta arrugada con miríadas de diminutos círculos. No importa que las arrugas sean geométricas, sino que haya muchas y en todas direcciones. Para cumplir con ese cometido valen tanto una descomposición particular de la circunferencia (figura 7) como diseños puramente artísticos (figuras 8 y 9).

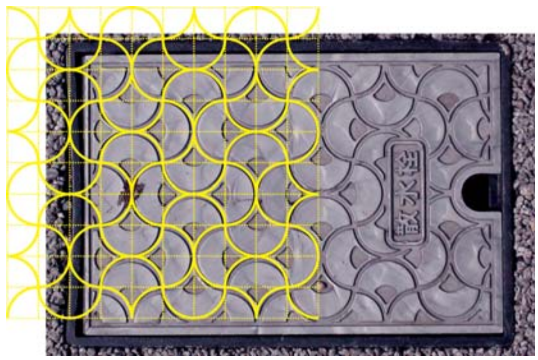


Figura 7: Arcos circulares en una arqueta (Okayama)

Figuras 8 y 9: Arquetas con arrugados artísticos (Kanazawa y Kobe)

Los recorridos urbanos no se reducen a los callejeos por un plano horizontal. Hace tiempo que las ciudades abandonaron las dos dimensiones para desarrollarse hace arriba y hacia abajo. Subir y bajar se hace por escaleras y ascensores. Tras un ascenso vertiginoso superior al centenar de metros se llega al mirador de las oficinas del gobierno metropolitano de Tokio. Desde esa sala se aprecia el carácter abierto de la metrópoli, una extensión urbana sin principio ni fin, sin una línea precisa que indique donde comienza o termina. Grandes ventanales rodean un espacio en el que hay varios sofás para relajarse, una cafetería y expositores con información de diversos eventos culturales (exposiciones, museos, actuaciones...). En uno de los expositores un folleto gris destacaba entre los de colores vivos y dibujitos infantiles que había a su alrededor. No entendía los caracteres nipones, pero estaba claro que era un cuestionario. Entre las preguntas identifiqué fórmulas químicas. Me resultaron familiares, pero no las comprendí. Me llamaron más la atención otras cuestiones de contenido evidentemente matemático. Una de las preguntas se ilustraba con una figura geométrica familiar. Otra contenía fórmulas matemáticas sobre igualdades entre los valores de una función desconocida. Otra parecía versar sobre un problema de programación lineal, dadas sus inecuaciones con dos incógnitas. ¿Cuál era el objetivo del test?

Busqué a alguien que me pudiese traducir al inglés ese enunciado. Una mujer atendió mi petición. Según me explicó se trataba de un test para acceder al Cuerpo de Bomberos de Tokio. Tradujo el enunciado de la cuestión 4 (figura 10), aquella ilustrada con la figura geométrica, así: *Al cerrar este desarrollo, ¿sobre cuál de las caras marcadas caerá la cara sombreada?*

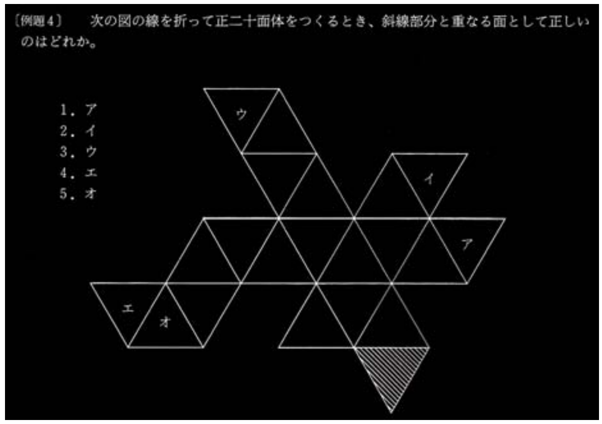


Figura 10: Una pregunta del test para bomberos de Tokio

La figura es un desarrollo plano poco corriente del icosaedro al que se le ha añadido una cara extra. La cara sombreada se superpone a la marcada con el ideograma japonés de la respuesta número 5. Lo deduje sobre el papel, pero no pude retraerme del deseo de comprobar realmente que la solución era la correcta. Recorté el perfil de la figura y marqué los pliegues de las aristas. La reconstrucción del icosaedro llevó la cara sombreada encima de la solución predicha.

Figura 11: Recortando el patrón cuadrado del pan de oro (Kanazawa)

Nada de lo que existe es bidimensional. Quizá sea verdad, pero en la ciudad de Kanazawa, al oeste de la isla de Honshu, se trabaja el oro hasta límites muy próximos a la bidimensionalidad. El proceso comienza con una pieza de oro del tamaño de una moneda que se aplana en una tira de grosor fino como una hoja de papel. Luego se corta en trozos pequeños más o menos cuadrados que se apilan insertando entre ellos hojas de papel de corteza. Esa pila es prensada a golpes para obtener cuadrados más extensos y más finos. Luego, esos cuadrados son separados de nuevo en otros fajos que vuelven a ser golpeados. Y así en varias etapas hasta conseguir unas láminas cuadradas finísimas (figura 11) de lado 10,9 cm. El espesor de cada cuadrado de oro es de tan sólo 0,1 micras, una diez milésima parte del milímetro, un objeto real translúcido y casi bidimensional (figura 12).

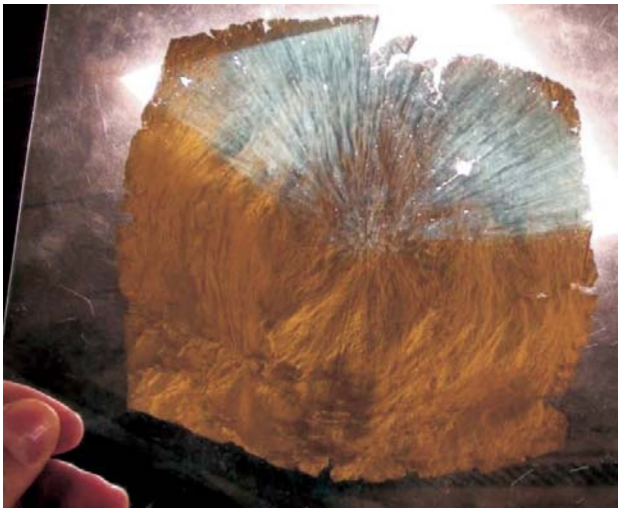


Figura 12: La luz atraviesa el pan de oro

Supongamos que la pieza de oro de la que se hacen las láminas tiene el tamaño de una moneda: unos 2 cm de diámetro y 1 mm de espesor. ¿Qué dimensiones tendrá la lámina que se puede extraer de esa moneda? Igualando el volumen de la moneda de radio r=1 cm y altura h=1 mm al de un cuadrado de lado c y altura a=10^{-4} mm, que es la forma final de la lámina, vemos que:

$$\pi r^2 h = a \cdot c^2 \Rightarrow c = r \cdot \sqrt{\frac{\pi h}{a}} = 10mm \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot 1mm}{10^{-4}mm}} = \sqrt{\pi}\ \text{m} \approx 1{,}77\text{m}$$

La finísima lámina dorada extraíble de esa moneda es un gran cuadrado de lado superior al metro y medio. Pero lo más extraordinario es que ese resultado sea precisamente un cuadrado de área π, es decir, ¡el área del círculo de radio un metro! En conclusión, una moneda de radio 1 cm y altura 1 mm se transforma en una lámina circular de radio 1 m y espesor 0,1 µ.

El llamado pan de oro es sin duda la obra artesana que más cerca está de las dos dimensiones. Una labor cuyos orígenes se remontan al antiguo Egipto de hace cuatro mil quinientos años y que se realiza en Kanazawa desde hace cuatro siglos.

Entre los siglos XVII *y* XIX *Japón desarrolló una corriente matemática que recorrió el país a través de templos budistas y de altares sintoístas. La comunicación se establecía por medio de tablas de madera llamadas* sangaku *en las que se escribían teoremas y problemas matemáticos.*

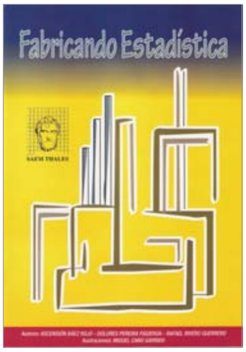
El pan de oro no es lo mas fino que se conoce. En 2005 investigadores de la Universidad de Manchester obtuvieron laminas de grafeno, un compuesto de grafito y carbono, de 3 angstroms de espesor. Mil tercios mas finas que el pan de oro.

¿Verdaderamente no existe nada bidimensional o es la limitada capacidad de nuestros sentidos la que nos impide percibirlo? Un objeto bidimensional carecería de espesor, por lo que sería perfectamente translúcido. ¿Cómo verlo? ¿Cómo tocarlo? No nos daríamos cuenta de su existencia. Como el círculo, lo bidimensional es también un ideal platónico cuya esencia perseguimos y que sólo las matemáticas permiten vislumbrar.

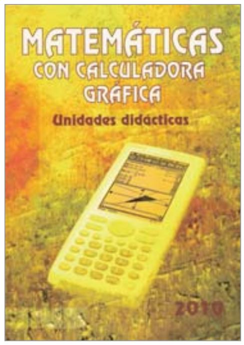
ADHERENCIAS ■

Este artículo fue solicitado por *Suma* en octubre de 2010 y aceptado en diciembre de 2010 para su publicación.

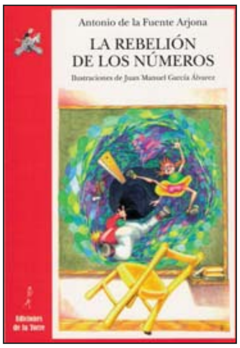
Publicaciones recibidas



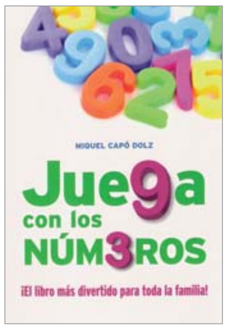
FABRICANDO ESTADÍSTICA
Ascensión Báez, Dolores Pereira y Rafael Rivero
SAEM Thales
Sevilla 2010
ISBN: 978-84-935760-9-7
44 páginas



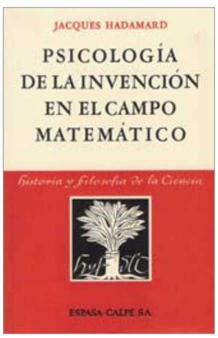
MATEMÁTICAS CON CALCULADORA GRÁFICA. UNIDADES DIDÁCTICAS
Agustín Carrillo de Albornoz (Ed.)
SAEM Thales
Sevilla 2010
ISBN: 978-84-937577-2-4
150 páginas



LA REBELIÓN DELOS NÚMEROS
Antonio de la Fuente Arjona
Ediciones de la Torre
Madrid 2010
ISBN: 978-84-7960-471-9
96 páginas



JUEGA CON LOS NÚMEROS
Miquel Capó Dolz
Ediciones CEAC
Barcelona 2010
ISBN: 978-84-329-2062-2
190 páginas



PSICOLOGÍA DE LA INVENCIÓN EN EL CAMPO MATEMÁTICO
Jacques Hadamard
Espasa Calpe, S.A
Buenos Aires 1947
Reimpresión con motivo de la celebración en 2011 del primer centenario de la RESME
236 páginas

suma+ 66
Febrero 2011, pp. 79-88

Biblioteca

Mi presentación

Daniel Sierra Ruiz

Hace unos meses estaba reflexionando sobre las personas a las que debía pedir que escribieran sobre *su biblioteca particular,* cuando me di cuenta de que estaba cometiendo un error en forma de omisión imperdonable, al menos desde mi punto de vista. Seguro que a todo el mundo le vienen varios nombres a la cabeza de gente que no ha aparecido por esta sección y que debería aparecer. A mí también. La sección llega a sus últimos capítulos bajo mi coordinación y no va a dar para que estén todos los que son, pero pienso que Miguel Barreras es una de esas personas que tenía que firmar.

Su vinculación con los libros es evidente. Para definir a Miguel inevitablemente habremos de utilizar la palabra *escritor.* Es de sobras conocida esta faceta entre nosotros, pues ha sido premiado en varios concursos de lo que se viene llamando *literatura matemática* y algunos de sus libros han sido reseñados en esta revista; si para hacer referencia a él se dice *el de los ciruelos chinos* (ver *Suma* 63), mucha gente en seguida lo identifica. Se podría decir que existe un *estilo Barreras* muy reconocible en sus textos, en los que mezcla, por supuesto algo de matemáticas, unos toques de escepticismo, una pizca de pesimismo, aderezado con alguna paradoja y, todo ello, ambientado excelentemente en escenarios que van desde lo decadente a lo luminoso, flirteando en ocasiones con lo surrealista. Leyéndole quedan claras dos cosas: su importante bagaje literario y que tiene un carácter singular, dicho sea esto último en sentido positivo.

Cuando alguien se dedica a escribir lo convierte en una auténtica pasión, por lo que su trabajo habitual, el que le sirve para pagar las facturas, pasa a ser eso, un mero modo de subsistencia. Así que no sería de extrañar que Miguel dejara su faceta de profesor de matemáticas un poco más apartada, y se limitara a dar sus clases como vienen en el libro, corregir los exámenes y poco más. Pues no es así. De hecho, dedica también mucho esfuerzo y tiempo a desarrollar otras formas de enseñar las Matemáticas, a intentar que su alumnado vea nuestra materia desde otros puntos de vista.

Miguel es profesor en el instituto de Valderrobres, un bonito pueblo de Teruel que bien merece una visita… incluso una

Daniel Sierra Ruiz (coordinador de la sección)
IES Benjamín Jarnés, Fuentes de Ebro (Zaragoza)
biblioteca@revistasuma.es

visita matemática. Como guía podemos utilizar la ruta matemática que hace un tiempo él mismo elaboró y que en Aragón es casi un referente en este tipo de actividad. Así que si alguien se decide a visitar el Matarraña, que no deje de pasarse por allí, ni de bajarse la guía de Miguel en el apartado de materiales impresos de <www.matematicavital.com>; de esta forma comprobará el excelente trabajo que llevó a cabo. Él todos los cursos da un paseo con el alumnado de su centro para hacer matemáticas por la calle.

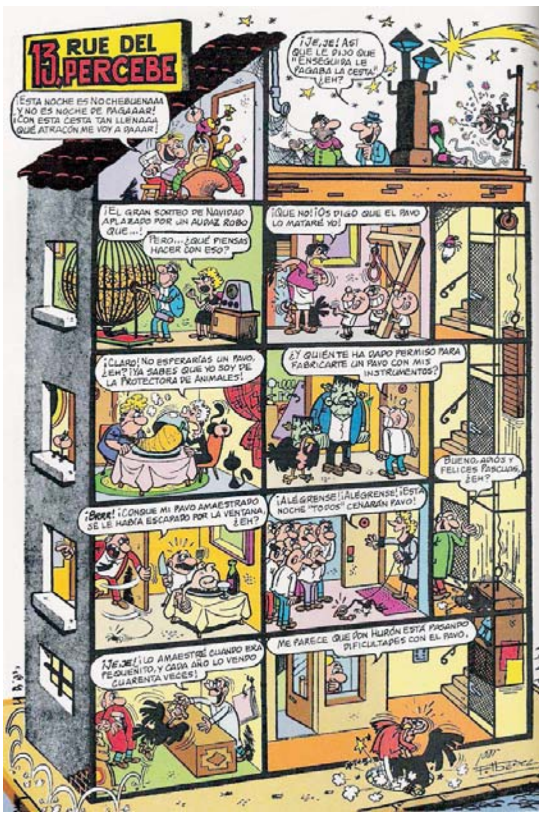
Tampoco me quiero olvidar de sus trabajos de Excel y Matemáticas, sobre lo que ha dado charlas en diferentes puntos de España. También en este apartado da muestras de su singularidad, ya que no se limita a utilizarlo en Estadística, como todo el mundo, si no que prepara actividades de casi cualquier parte del currículo. Tiene dos libros sobre ello, pero también ofrece el fruto de su esfuerzo a todo el mundo en su página web *Matemáticas desde los contextos.*

Así pues, como he dicho antes, hubiera sido una omisión importante, sobre todo para mí, teniendo en cuenta que somos compañeros en el programa *Matemática Vital* y en la Sociedad Aragonesa.

Tengo que acabar agradeciéndole, además, haber aceptado regalarnos otra vez su prosa con ese *estilo Barreras,* del que quien no lo conozca va a tener ahora unas pequeñas pinceladas que, sin duda, le dejarán con ganas de leer más. Por tanto, me considero afortunado de poder dar paso a *la biblioteca particular* de Miguel Barreras Alconchel.

Mi biblioteca particular

Miguel Barreras Alconchel



De pequeño no leía cuentos. De adolescente no leía libros. Solo tebeos. Naturalmente, tenía mis preferencias, pero lo que más me gustaba era *Rue Percebe n.º 13*, aquel universo absurdo y desternillante concentrado en un bloque habitado por vecinos a cuál más excéntrico. Hoy todavía me fascina y, forzando la imaginación, con ojos de matemático, puedo entrever aritmética en el pícaro vendedor de la tienda de ultramarinos, el espíritu de Galileo en el destartalado ascensor, espeleología en el pobre don Hurón, inquilino de la alcantarilla, ingenio científico en el atribulado veterinario, geometría en las imposibles confecciones del desastroso sastre o en la tela de la araña de la escalera.

Las primeras novelas que aparecieron por casa fueron las que editaba el Círculo de Lectores. Recuerdo una que trataba de un médico en un pueblo minero de Escocia. La historia me fascinó y, unido a la devota admiración por mi primo, a la sazón estudiante de Medicina, hizo que empezara a considerar la posibilidad de yo mismo empezar esa carrera. Pero ya no cayó en mis manos ninguna otra novela de médicos heroicos y, cuando tocó matricularse en la Universidad, hacía tiempo que no veía a mi primo. Tal vez por eso hoy me dedico a dar clase de matemáticas en vez de extirpar apéndices o recetar tranquilizantes.

Pascal Mercier, en su hermosa novela *Tren nocturno a Lisboa*, anota una reflexión que viene a cuento:

> El verdadero director de escena de nuestra vida es el azar; un director lleno de crueldad, de misericordia y de encanto cautivador.

El primer libro de mi propiedad me lo regaló precisamente mi primo médico: *El ajedrez*, escrito por Román Torán. Y fue allí donde leí la primera historia matemática interesante de mi vida, la famosa suma de granos de trigo que el rey no pudo pagar al inventor del juego, Sissa. Teniendo en cuenta que por entonces yo tendría unos dieciséis años, se puede imaginar la calidad y entusiasmo de mis profesores de matemáticas hasta esa fecha.

> *[…] algunas matemáticas de alto nivel son accesibles […]. Solo hace falta una mente despierta y abierta y, sobre todo, un comunicador que te las cuente*

Mi afición a la literatura coincidió con la entrada en la Universidad. Me conmocionó *El extranjero*, de Albert Camus. Cuando lo acabé, empecé a leerlo de nuevo.

> Hoy ha muerto mamá. O quizás ayer.
>
> Todo el mundo sabe que la vida no merece la pena de ser vivida.
>
> En cualquier caso, yo no estaba tal vez seguro de lo que me interesaba realmente, pero estaba absolutamente seguro de lo que no me interesaba.

En los cinco años que pasé en la Facultad de Ciencias manejé muy pocos libros de matemáticas. Me limité a aprobar exámenes con mis apuntes y algunos libros de problemas. Por otra parte, los libros de teoría me parecían todos iguales: definición, definición, lema, teorema, corolario. Quizá no tuve suerte en la selección. El caso es que mis lecturas por aquella época se limitaron al campo de la ficción. Los clásicos (Samuel Beckett, Dostoyevski, Cela, Italo Calvino, Álvaro Cunqueiro, Céline, Quevedo), los sudamericanos (Onetti, García Márquez, Cortázar), los obligados para cualquier universitario que se las diera de progre (Henry Miller, Kerouac, Lovecraft). También me acerqué a la filosofía (*Discurso del método*, *Historia de la filosofía* de Russell). Por aquella época me aficioné a la Espasa, el internet del siglo XX. Todavía hoy, cuando visito una biblioteca y dispongo de algo de tiempo, me gusta relajarme con la lectura de su prosa científica, precisa y exquisita. También me resulta placentero sumergirme sin rumbo por las páginas del *Diccionario etimológico de la lengua castellana*, de J. Corominas.

Cuando descubrí a Borges constaté con profundo placer que literatura y matemáticas no eran campos disjuntos. Se suele decir que el *Aleph* es el relato borgiano más matemático. Yo lo veo más metafísico. Hay mucha matemática en la obra del argentino, pero el cuento que me produce mayor excitación mental es *La Biblioteca de Babel*. Cuántas matemáticas en tan pocas líneas.

Infinito y geometría

> El universo (que otros llaman la Biblioteca) se compone de un número indefinido, y tal vez infinito, de galerías hexagonales.

Más geometría

> Por ahí pasa la escalera espiral, que se abisma y se eleva hacia lo remoto.
>
> La Biblioteca es una esfera cuyo centro cabal es cualquier hexágono, cuya circunferencia es inaccesible.

La paradoja de conjuntos de Russell

> …he peregrinado en busca de un libro, acaso del catálogo de catálogos.

Aritmética

> …cada anaquel encierra treinta y dos libros de formato uniforme; cada libro es de cuatrocientas diez páginas; cada página, de cuarenta renglones; cada renglón, de unas ochenta letras de color negro.

Combinatoria

> Uno, que mi padre vio en un hexágono del circuito quince noventa y cuatro, constaba de las letras MCV perversamente repetidas desde el renglón primero hasta el último.

Y, sobre todo, esa idea de infinito abarcable que impregna todo el relato.

> La biblioteca es ilimitada y periódica.

Descansa el relato de Borges en la mesa. Elijamos un cuadro de Escher, *Cielo e infierno*, por ejemplo, en el que ángeles y demonios se precipitan, complementarios, al infinito acotado por el borde de un círculo. Tomemos el exquisito libro de Enrique Gracián, *Un descubrimiento sin fin*. El infinito matemático. Encendamos el tocadiscos para oír, *Fracture*, de King Crimson. Relato, cuadro, ensayo, música. Cuatro caras de un tetraedro. Todo es lo mismo: el infinito literario e inquietante de Borges, el infinito bello y comprimido de Escher, el infinito racional del matemático, el infinito musical y progresivo de

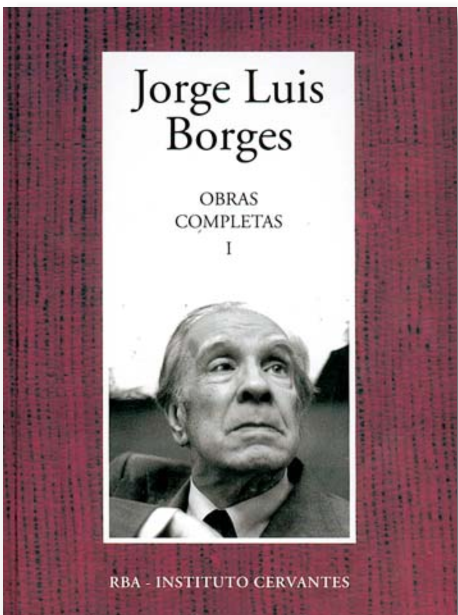
Robert Fripp. Cuatro caras de un mismo tetraedro. El infinito en nuestras manos: abarcable, cognoscible. El infinito a nuestro alcance.

> El infinito se hace largo, sobre todo hacia el final.

Cuando acabé la carrera hice un curso de doctorado. Historia de las Matemáticas. Es patético que un licenciado en Matemáticas salga del supuesto centro del conocimiento (omito voluntariamente las mayúsculas tal vez pertinentes) sin saber que los genios Leibniz y Newton llegaron a las mismas conclusiones sin conocerse, qué revolucionó Descartes y cuándo, por qué a Gauss se le llama el príncipe de las matemáticas, de dónde viene la palabra algoritmo, desde cuándo y desde dónde se utiliza el sistema de numeración actual, etc.

He aprendido más matemáticas en los libros llamados de divulgación o en los de matemáticas recreativas que en los libros de texto.

Así que me apliqué devoto al estudio para subsanar mi ignorancia. El libro que se me recomendó de historia de las matemáticas me lo leí aplicado, los dos tomos, tomando notas y escribiendo reflexiones. No me gustó. Me pareció útil, en su sentido enciclopédico, pero vacío de humanidad. Me aburrió. Cuando ya no tenía que malgastar mi tiempo aprobando exámenes, aunque sí emplearlo en prepararme las clases, me hice con *Historia de la matemática*, de Carl B. Boyer. Y empecé a disfrutar, sintiendo un latido, fuerte, interminable: la matemática era algo vivo. Luego descubrí a Morris Kline. Muy a menudo consulto alguno de los tres tomos que conforman *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días.* El contenido hace honor al título.



Tanto me gustó esta obra de Kline (de la que no he leído aún todos los capítulos, reservándome para la felicidad de la jubilación el placer del todo lineal) que busqué y encontré otra joya de Kline: *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre.*

> Personas sumamente inteligentes siguen creyendo hoy en día que las matemáticas son un conjunto de verdades inquebrantables sobre el mundo físico y que el razonamiento matemático es exacto e infalible. Matemáticas. La pérdida de la certidumbre refuta este mito. Morris Kline pone de manifiesto que hoy en día no hay concepto de las matemáticas universalmente aceptado, que de hecho hay muchos conceptos enfrentados unos a otros. Sin embargo la capacidad de las matemáticas para describir y explorar los fenómenos físicos y sociales continúa aumentando. ¿Por qué?

Este libro se lee no como un ensayo sino como una novela. Acaba un capítulo en suspenso y la curiosidad del principio del siguiente vence al sueño. Entre la clase de los matemáticos el título puede sugerir desánimo, frustración. Lejos de eso, cuando Kline culmina el capítulo dedicado al teorema de Gödel reflexiona lúcido:

> No hay que rasgarse las vestiduras porque sepamos que hay proposiciones que nunca llegaremos a demostrar ni a saber si son falsas. Sintámonos profundamente orgullosos de que uno de nosotros, no un dios venido de otro mundo, sino un hombre de carne y hueso, Gödel, haya sido capaz de conocer y demostrar esa (hasta ahora) supuesta limitación.

Conocí el teorema de Gödel en quinto de carrera, en la asignatura Lógica y Fundamentos. Me impresionó, a pesar del envoltorio. La demostración me resultó ardua, pero el resultado merecía el esfuerzo. Pensaba, no sin cierta pedantería, que aprehender esa cima del conocimiento estaba reservado a los matemáticos hasta que cayó en mis manos un librito de portada naranja, inocente, casi infantil, de un tal Raymond Smullyan, del que no había oído hablar. ¿La dama o el tigre? Y otros pasatiempos lógicos. Parecía un cuento, pero en el capítulo 15, Demostrabilidad y verdad, descubrí que algunas matemáticas de alto nivel son accesibles, que lo bueno de un bombón es el bombón, no la caja con papel rizado que lo contiene, ni el papel de plata que lo envuelve. Solo hace falta una mente despierta y abierta y, sobre todo, un comunicador que te las cuente.

El desarrollo de las matemáticas en aras de una mayor precisión ha conducido a que grandes áreas de ellas sean formalizadas, y así las demostraciones puedan llevarse a cabo conforme a unas cuantas reglas mecánicas. Los sistemas formales más extensos hasta el presente son, por un lado, los *Principia Matemática* de Whitehead y Russell, y por otro, el sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel para teoría de conjuntos. Estos dos sistemas son tan extensos que en ellos se pueden formalizar todos los métodos de demostración utilizados hoy en día en matemáticas; es decir, pueden reducirse a unos pocos axiomas y reglas de inferencia. Sería razonable, por consiguiente, suponer que estos axiomas y reglas de inferencia son suficientes para decidir todas las cuestiones matemáticas que puedan formularse en el sistema dado. A continuación se mostrará que no es este el caso, sino más bien que, en los dos sistemas citados, existen problemas relativamente simples de la teoría de números enteros ordinarios que no pueden decidirse partiendo de los axiomas.

Del ensayo en el que Gödel publicó el *Teorema de la Incompletitud*

Tal vez, a veces, el término divulgador se presente como ligeramente peyorativo. Raymond Smullyan, matemático, lógico, filósofo, mago y humorista, dignifica el término. Entre todas sus obras de matemáticas recreativas, me quedo con una rareza, Juegos de ajedrez y los misteriosos caballos de Arabia, en la que se plantean situaciones de partidas de ajedrez, absurdas, pero posibles, para que el lector, convertido de repente en Sherlock Holmes, investigue dónde se encuentra el rey negro desaparecido o si las blancas enrocaron en algún momento. Es increíble la imaginación que exhibe Smullyan en este libro. Cada ejercicio requiere del lector paciencia y un manejo del método de reducción al absurdo combinado con la idea diacronía-sincronía de Saussure.

He aprendido más matemáticas en los libros llamados de divulgación o en los de matemáticas recreativas que en los libros de texto.

Nuestra finalidad ha consistido en extender el proceso de *haute vulgarisation* [...] para demostrar [...] algo del carácter de las matemáticas, de su espíritu osado y libre de trabas y de cómo, en su doble aspecto de arte y ciencia, ha continuado guiando a las facultades creadoras más allá aún de la imaginación y la intuición. En la extensión que permite un volumen tan reducido, solo puede haber instantáneas y no retratos.

De la Introducción de *Matemáticas e imaginación*, de E. Kasner y J. Newman.

Tal vez los autores consideren este libro una simple colección de instantáneas, pero están tan bien contadas, tan bien elegidas, que solo merecen un prólogo a su altura, de Borges, que empieza así:

Un hombre inmortal, condenado a cárcel perpetua, podría concebir en su celda toda el álgebra y toda la geometría [...]

Se lamenta Newman de la estrecha extensión del volumen (en 1940) y se resarce (en 1956) escribiendo la impresionante, maravillosa y necesaria enciclopedia en seis volúmenes, SIGMA, *El mundo de la matemáticas*. Normalmente, se presenta el corpus matemático como algo completo y acabado. Los teoremas de los libros de texto no dudan, no sudan, no fallan. Son perfectos. Y fríos. Hay falta de humanidad. Con Σ viajamos a través del tiempo hacia el conocimiento matemático.

James R. Newman ha compuesto una antología de 132 textos básicos del pensamiento matemático, todos los cuales, incluso los más recientes, merecen el calificativo de clásicos. La intención principal de su antología es educar en ese pensamiento cuya importancia aumenta ante los ojos del hombre contemporáneo. Pero no lo hace de un modo escolar, pues su lector no ha de ser exclusivamente estudiante.

Su lector no ha de ser exclusivamente estudiante, pero yo impondría a todo estudiante de matemáticas la lectura de esta enciclopedia. Sería una asignatura de primero; se llamaría Σ. (El universo de las matemáticas, de William Dunham, también debería ser lectura obligada).

Un lujo acceder por línea directa a Arquímedes, Laplace, Newton, Poincaré, Dedekind, Russell, Galileo, Bernouilli, leer de primera mano la implacable crítica del asombroso obispo Berkeley al manejo de los infinitésimos de Newton o convencerse de que en cualquier momento hay dos puntos antípodas en el ecuador de la Tierra que tienen la misma temperatura utilizando el teorema de Bolzano. Todo eso es Σ y mucho más. También *Entretenimentos, rompecabezas, fantasías*, la última parte del último tomo. Aunque el mago en este asunto es sin duda Martin Gardner con sus *Paradojas e Inspiración ¡ajá!*, dos joyas en la literatura matemática. Para todos los públicos, porque el problema que se plantea inicialmente es entendible sin mucho bagaje matemático y la generalización del mismo

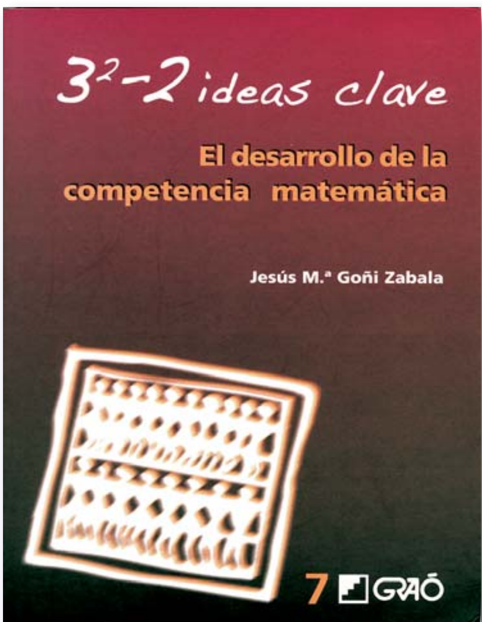
puede conducir al estudioso a profundidades extremas. La anécdota que cuenta en la introducción de *Inspiración, ¡ajá!* debería formar parte del catálogo del buen profesor:

> En psicología experimental es clásica la anécdota de un profesor que pretendía estudiar la capacidad de los chimpancés para resolver problemas. A ese fin, colgó un plátano del centro del techo, a suficiente altura para que el mono no pudiera alcanzarlo de un salto. En la habitación no había más que unas cuantas cajas de embalaje dispersas al azar. El experimento consistía en ver si a una damita chimpancé se le ocurría apilar primero las cajas en el centro del cuarto, y luego, encaramarse a ellas para coger el plátano.

Omito el desenlace del experimento. Los que hayan leído a Gardner lo saben. Los que no, pueden jugar a adivinarlo.

En cuanto a didáctica de las matemáticas es inevitable nombrar *Cómo plantear y resolver problemas* de G. Polya, el catón del profesor de matemáticas.

En la línea de acercar las matemáticas a la realidad son muy interesantes *Érase una vez un número* y *Un matemático lee el periódico*. Su autor, John Allen Paulos, demuestra que lo divertido, lo matemático y lo cotidiano no son conceptos incompatibles. Y también otro libro no matemático, *La rebelión de las formas*, de J. Wagensberg, un maravilloso cóctel de esferas, hexágonos, espirales, etc. que el profesor catalán rescata de la naturaleza y nos las presenta con elegante escritura. En la línea de libros científicos no matemáticos he gozado mucho con la lectura de *The pleasure of finding things out*, una encantadora colección de charlas, entrevistas y artículos del genial Premio Nobel de Física Feynman.



> Si ustedes están interesados en el carácter último del mundo físico, o del mundo entero, nuestra única forma de comprenderlo por el momento es mediante un razonamiento de tipo matemático.

Experiencia matemática de P. J. Davis y R. Hersh nos aproxima a la naturaleza global de las matemáticas actuales.

> ¿Cuál es la naturaleza de las matemáticas? ¿Qué significado tienen? ¿De qué se ocupan? ¿Cuál es su metodología? ¿Cómo se crean? ¿Cómo se utilizan? ¿De qué forma y en qué medida encajan con la multiplicidad de la experiencia humana? ¿Qué beneficios emanan de ella? ¿Qué daños? ¿Qué importancia podemos adscribirles?

Cada vez me interesan más las biografías. Dos autobiografías atractivas son la de Cardano, *Mi vida*, y la de G. H. Hardy, *Apología de un matemático*.

> Es una experiencia melancólica para un matemático profesional encontrarse a sí mismo escribiendo sobre matemáticas.

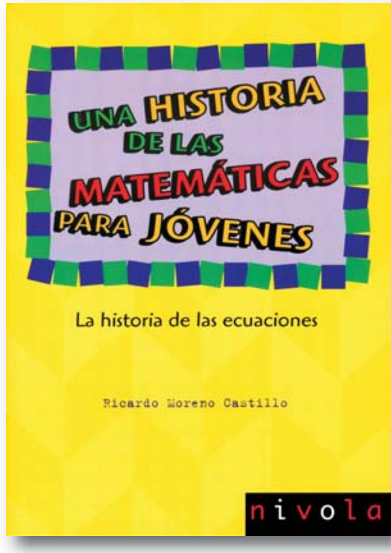
[...]la situación actual de la enseñanza de las matemáticas en España e invita a la innovación y al cambio.

Para acabar, un libro necesario para cualquier profesor de matemáticas de secundaria: *El desarrollo de la competencia matemática*, en el que su autor, J. M. Goñi, analiza, firme y certero, la situación actual de la enseñanza de las matemáticas en España e invita a la innovación y al cambio.

Me gustan las paradojas. Quizá sea autorreferencial terminar declarándome un lector entusiasta de la revista *Suma* y fan de los habituales (Alsina, Franchi, Sorando, Albertí...), y de todos los demás, también.

Escaparate 1:
Una Historia de las Matemáticas para jóvenes

UNA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS PARA JÓVENES
LA HISTORIA DE LAS ECUACIONES
Ricardo Moreno Castillo
Anaya y RSME, Madrid, 2010
ISBN: 978-84-667-9353-7
132 páginas



La historia de las ecuaciones es el tercer tomo de una serie que se titula *Una historia de las matemáticas para jóvenes*. En esta ocasión, el autor Ricardo Moreno Castillo se centra en contarnos la evolución del Álgebra a lo largo de la historia. Tanto el título como el aspecto infantil de las tapas esconden una verdadera joya. De igual manera que los tomos anteriores y, en la misma línea que la colección *Las matemáticas en sus personajes* de la misma editorial, no sólo se trata de un libro de historia donde se escribe sobre acontecimientos, personajes y fechas, sino que además, como si de un libro de texto se tratara, se exponen explicaciones matemáticas con todo detalle, permitiéndonos disfrutar de su belleza y admirar aún más, si cabe, a sus protagonistas.

El libro comienza con la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado en el Antiguo Egipto, y continúa con el álgebra en Mesopotamia, donde se resolvían algunas ecuaciones cúbicas con ayuda de tablas. Después, la geometría griega y sus cálculos con segmentos, Euclides, Menecmo, Diocles, Nicomedes y Dinostrato, y el estudio de los tres problemas clásicos de la geometría. También Arquímedes y las famosas ecuaciones diofánticas. De la India destacan Aryabhata, Brahmagupta y Bhaskhara. En China los *Nueve capítulos sobre las artes matemáticas*, y el *Espejo precioso de los cuatro elementos* de Chu Shih Chieh. En la matemática árabe aparecen algebristas como Al-jwarizmi, Abu Kamil (llamado el calculista egipcio), Alhacén y Omar Jayyam, entre otros. En el occidente medieval Fibonacci y el maestro Biaggio; en la Italia renacentista Cardano, Tartaglia y Ferrari. Viète y Descartes en la Francia de los siglos XVI y XVII. Las aportaciones de Newton, Euler, Bézout, Lagrange, Vandermonde y Gauss. Y finaliza con el teorema fundamental del álgebra y la teoría de Galois.

Hay dos temas centrales que aparecen de forma recurrente. El primero es el conjunto de problemas que son resolubles con regla y compás, como los tres problemas clásicos y la construcción de polígonos regulares. La sencillez y claridad con la que se explica la construcción del polígono regular de 17 lados de Gauss son dignas de admiración. El segundo se refiere a los métodos de resolución de ecuaciones de hasta cuarto grado, al estudio de la existencia de soluciones y su resolubilidad por radicales.

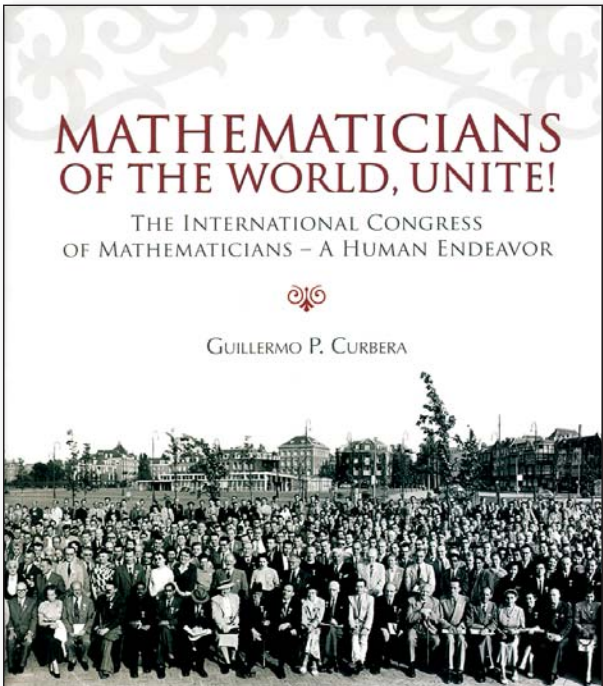
Quizás por deformación profesional durante toda la lectura me he preguntado: ¿A quiénes recomendaría este libro? Para leer este libro y disfrutar de él en toda su plenitud, hay que coger lápiz y papel, hacer las cuentas uno mismo e ir comprobando los resultados. Y para las construcciones geométricas, una regla y un compás o, en su defecto, alguna aplicación informática para la representación gráfica de curvas, como Geogebra. Yo lo he hecho y, desde luego, ha sido una experiencia muy enriquecedora. Esto exige un esfuerzo que, por supuesto, merece la pena, pero para alguien que no está acostumbrado al sacrificio intelectual y sin ningún hábito de estudio, puede provocar un abandono prematuro de la lectura e incluso un rechazo total, como desgraciadamente les ocurre a muchos jóvenes en la actualidad.

Daniel Digón
IES Benjamín Jarnés, Fuentes de Ebro (Zaragoza)

En la contraportada aparece la siguiente recomendación: «A partir de 16 años», y tengo que reconocer que inicialmente me pareció una edad muy temprana, ya que algunos fragmentos del texto contienen una dificultad conceptual considerable, como la teoría de Galois sobre la resolubilidad por radicales de una ecuación, que se apoya en muchos conceptos nuevos como grupo, subgrupo, clase de equivalencia, extensión de cuerpos, automorfismo o torre radical, que son totalmente desconocidos para alumnos de Bachillerato. Pero después recapacité, y pensé que lo cómodo es apoyarse en excusas como la mala situación actual de la educación o subestimar las capacidades de nuestros alumnos.

Debemos luchar porque las cosas mejoren, aprovechando materiales tan valiosos como este libro e incorporándolos adecuadamente a nuestras programaciones didácticas.

Escaparate 2: Historia del ICM



MATHEMATICIANS OF THE WORLD, UNITE!
THE INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICIANS. A HUMAN ENDEAVOR
Guillermo P. Curbera
A K Peters, Wellesley (Estados Unidos), 2009
ISBN: 978-1-56881-330-1
XVIII+326 *páginas*

Con motivo del *International Congress of Mathematicians* (ICM) de Madrid en 2006 el autor de este libro fue comisionado para organizar una exposición para celebrar el 25 aniversario de esta serie de congresos. Para desarrollar el trabajo, fue precisa la recopilación de un abundante material documental y gráfico que se ha querido conservar en esta publicación.

Para comprender el contenido de este libro debe tenerse muy en cuenta cuáles son, desde sus inicios, los objetivos del ICM:

a) Promover las relaciones personales entre los matemáticos de diferentes países.
b) Presentar en las conferencias de las sesiones plenarias y en las diferentes secciones una descripción de la situación actual de las diferentes áreas de la matemática y sus aplicaciones y discutir problemas concretos de particular importancia.

Obsérvese que el primero de los objetivos tiene que ver con el ámbito de relación que dichos congresos desean proporcionar: la posibilidad de compartir durante unos días un espacio en el que desarrollar discusiones científicas pero también de fomentar relaciones de amistad entre los matemáticos provenientes de todo el mundo, y de desarrollar un fuerte sentimiento de comunidad.

Por ese motivo una parte importante de este libro está dedicada a relatar las condiciones en las que se desarrollaron los ICM, fijándose en los lugares donde tuvieron lugar (edificios emblemáticos), las actividades culturales y festivas que los acompañaron (exposiciones, conciertos, excursiones, etc.), el material gráfico relacionado con el congreso (carteles, sellos conmemorativos, etc.), así como las intervenciones de los congresistas resaltando la voluntad de colaboración entre matemáticos de diferentes países. En la estructura del libro el espacio dedicado a estos aspectos constituye varios interludios que separan los distintos periodos en que se agrupan los ICM.

Julio Sancho
IES Avempace, Zaragoza

Uno de los interludios más interesante es el dedicado a los premios que se dan en el ICM: la medalla Fields, otorgada a matemáticos jóvenes para premiar un trabajo relevante e incentivarle para alcanzar mayores logros en el futuro; podremos seguir la historia de la creación del premio y cómo llego a explicitarse el hecho de que el premio fuese a un trabajo realizado por su autor antes de cumplir los 40 años. También conoceremos el premio Nevalinna, por trabajos que supongan una contribución importante a los aspectos matemáticos de las Ciencias de la Información y el premio Gauss, de reciente creación, que desea hacer patente a la sociedad como resultados matemáticos han influido de manera decisiva en la tecnología, la economía, o la vida diaria de la gente.

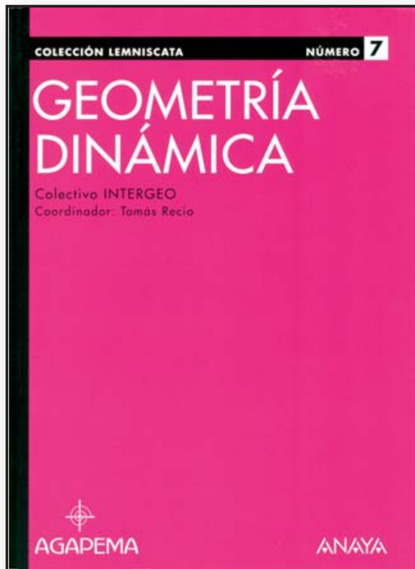
En el libro se agrupan los ICM en cinco: *Los primeros tiempos* (de 1897 hasta 1912); *Crisis en el periodo entreguerras* (de 1920 a 1936); *La edad de oro* (de 1950 a 1962); *En el camino* (de 1966 a 1986), y por último, *En un mundo global* (de 1990 a 2006). Cada periodo está relacionado con momentos decisivos de los últimos 110 años de historia que han marcado las relaciones de colaboración entre los matemáticos. Así, las imposiciones de los vencedores de la I Guerra Mundial impidieron la participación de los matemáticos de los imperios centrales en los dos primeros congresos del periodo entreguerras. El sentimiento de unidad de la comunidad matemática llevó a Herman Weyl a declarar, en la ceremonia de apertura del congreso de 1932, que no existían suficientes motivos para dilucidar si se encontraba inaugurando el 7.º ó 9.º congreso de la serie debido a la falta de una parte importante de la comunidad durante los ICM de 1920 y 1924.

A lo largo del libro también se puede seguir la evolución de los aspectos científicos del ICM, sin ser éste el propósito principal del libro. Si se desea más información, en el enlace http://euler.us.es/%7Ecurbera/icm/NavigateThroughICM.htm el autor del libro pone a nuestra disposición un recorrido por el listado de asistentes, de conferencias plenarias y ponencias presentadas en los ICM.

En resumen: estamos ante un texto de enorme interés para comprender la formación de la comunidad de matemáticos a través de las fronteras de los países. Su lectura resulta sencilla y amena y la gran cantidad de material gráfico aporta un complemento muy interesante.

Escaparate 3: Lemniscata 7

Geometría dinámica
Varios autores (Coordinador: Tomás Recio)
Anaya y AGAPEMA, Madrid, 2010
ISBN: 978-84-667-4120-0
186 páginas



Geometría Dinámica es un monográfico de la colección Lemniscata, publicación de la Asociación Galega de Profesores de Educación Matemática (AGAPEMA) en colaboración con la editorial Anaya.

En números anteriores, Lemniscata ha abordado temas diversos como: Resolución de problemas, Matemáticos gallegos, Matemáticas para disfrutar, Competiciones escolares, Paseos matemáticos y un Cuento geométrico. El número 7 ha sido coordinado por Tomás Recio con el objetivo de recoger experiencias, investigaciones y propuestas que acerquen la Geometría Dinámica (GD) a las clases de matemáticas.

José Antonio Mora
IES San Blas, Alicante
Manuel Sada
CAP de Pamplona

El vínculo común a la mayoría de los autores es su participación en el proyecto europeo INTERGEO (<i2geo.net>) que pretende catalogar, difundir y evaluar los materiales realizados y crear un estándar común para el intercambio de archivos entre los distintos programas: GeoGebra, Cabri, Cinderella, Wiris, DrGeo, Tracenpoche y Geoplan.

Tomás Recio, en la presentación traza la breve historia de estos recursos –que no va más allá de veinte años–, señala las características principales de estos programas y su capacidad para modificar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

El grupo *Xeodin* comienza con la construcción de una lemniscata con GeoGebra como homenaje a la revista. Después, en el artículo *GeoGebra, moito máis que Xeometría: Xeometría e moito máis*, hace un análisis del currículo de matemáticas gallego en relación con el software y continúa con una propuesta de actividades guiadas para realizar construcciones con GeoGebra que abarcan un amplio abanico de tópicos que se estudian en las clases de secundaria: geometría sintética, trigonometría, el estudio de los movimientos en el plano, la construcción de gráficas de funciones, las sumas de Riemann, los complejos, la estadística o las cónicas.

El equipo G4D en *Mosaicos con GeoGebra* se centra en un contenido más concreto: los movimientos en el plano. Realiza una propuesta de investigaciones escolares en las que los estudiantes resuelven situaciones problemáticas y toman decisiones acerca del camino a seguir y la profundidad que dan a su estudio. Se plantean tres líneas de trabajo: la reflexión sobre las isometrías y su conexión con los movimientos en el mundo real, una investigación centrada en los mosaicos de azulejos que se construyen a partir de un cuadrado que contiene un diseño simétrico en su interior. Para acabar muestra una propuesta de estudio de los 17 grupos cristalográficos planos mediante la construcción dinámica de la baldosa y su expansión en el plano.

Francisco Botana, Miguel A. Abanades y Jesús Escribano en *Herramientas de demostración en Sistemas de Geometría Dinámica* nos proponen una reflexión sobre la fiabilidad de los métodos utilizados por las herramientas de obtención de lugares geométricos en los sistemas de Geometría Dinámica. Los autores apuntan algunas precauciones a tener en cuenta a la hora de tomar estos software como herramientas de demostración. Para acabar, plantean uno de los grandes retos actuales en este campo: el logro de un formato común de archivos de GD que permita el intercambio de unos programas a otros.

Núria Iranzo y Josep M. Fortuny estudian el comportamiento de los estudiantes en la resolución de problemas en *La co-emergencia de técnicas de papel y lápiz y técnicas de Geometría Dinámica en las estrategias de resolución de problemas de Geometría: un estudio de casos en Bachillerato*. Buscan relaciones entre las concepciones de los alumnos y las técnicas que utilizan en las estrategias de resolución de problemas y lo realizan mediante la observación de los comportamientos de los alumnos durante la resolución de los problemas con GeoGebra. Por un lado se analiza cómo influye el software en las estrategias de los alumnos (instrumentación) y por otra la forma en que el conocimiento del alumno guía la utilización que hace del programa (instrumentalización). La investigación se realiza mediante el estudio de casos.

M.ª del Mar García e Isabel Mª Romero muestran su experiencia de aula en la realización de una investigación didáctica que en el momento de la publicación se encontraba en curso. En el artículo *Incorporación y manejo de software de GD en el aula: una experiencia en 3.º de ESO para favorecer el aprendizaje de las isometrías y las teselaciones en el plano* realizan un completo informe que abarca todas las fases de la metodología de la investigación: la planificación (contenidos, capacidades y competencias y actividades de aprendizaje), la acción en el aula, la obtención de información de las sesiones por varias vías y, para acabar, exponen los primeros resultados.

Ángel Gutiérrez y Jorge Fiallo presentan una propuesta de enseñanza de la trigonometría para 4.º de ESO y 1.º de Bachillerato en *La enseñanza de la Trigonometría con ayuda de los Sistemas de Geometría Dinámica (SGD)*. Los autores analizan la aportación de la GD para favorecer las conexiones entre procesos, representaciones y procedimientos con el objetivo de favorecer el aprendizaje de la demostración. Presentan una unidad didáctica en la que proponen una secuencia de enseñanza planteada desde el descubrimiento guiado y basada en el trabajo con los SGD.

José L. Valcarce y Francisco Botana relacionan la instrucción que reciben los estudiantes cuando utilizan herramientas de SGD con el desarrollo de las competencias que intentan medir las pruebas PISA en *O informe PISA e o software de Xeometría Dinámica*. Los autores consideran que la GD puede prestar especial atención a la competencia relativa a la comprensión de los cambios dinámicos de las formas, para ello analizan la resolución de algunas de las preguntas liberadas del estudio mediante diversos programas de GD.

El libro viene acompañado de un CD que incluye, además de los textos, muchas de las construcciones –creadas con GeoGebra o Cabri– citadas en ellos. En síntesis, esta recopilación de trabajos de diferentes docentes recoge una muestra variada de propuestas de trabajo en el aula junto con un análisis de los condicionantes y consecuencias que puede conllevar la incorporación de este software a la enseñanza de las matemáticas. En todos los artículos se trasluce de la idea de que los programas de Geometría Dinámica son mucho más que una herramienta para hacer geometría de manera rápida, limpia o precisa, se han convertido en un software que facilita una nueva metodología docente. ■

suma+ 66
Febrero 2011, pp. 89-100

Historias de al-Khwārizmī (5ª entrega). La cosa

Cosa en el lenguaje natural

En el apartado 11 "Variables en el lenguaje vernáculo" del capítulo 16 de su *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*, dedicado al análisis fenomenológico del lenguaje del álgebra, Hans Freudenthal cuenta la siguiente historia de su hija:

> Cuando mi hija estaba en la edad en que los niños juegan el juego de "esto qué quiere decir" y le pregunté qué quiere decir "cosa" contestó que cosa es si quieres decir algo y no sabes cuál es su nombre. (Freudenthal, 1983, p. 474)[1]

A menudo las matemáticas han elaborado sus conceptos a partir de la riqueza inmensa de la lengua vernácula, fijando el uso de alguno de sus términos en un sentido preciso, determinado, unívoco. El proyecto algebraico necesita poder calcular con lo desconocido. Ya vimos en la entrega anterior de estas historias (Puig, 2010) que la elaboración del concepto de especie de número hace posible referirse a los cálculos con cantidades que se desconocen por el intermedio de las especies, que son "formas de números". Pero las especies de números, raíz, tesoro o simple número, son sólo esas formas que los números adoptan cuando se calcula con ellos. Cuando se trata de resolver un problema, también hace falta poder referirse directamente a números concretos que son desconocidos, no basta con decir si son de la especie raíz, o de la especie tesoro o de la especie simple número. Pero esos números son desconocidos, no sabemos cuál es su nombre, y, como dijo la hija de Freudenthal, "cosa" sirve para nombrar algo cuyo nombre se desconoce.

No sabemos quién ni cuándo usó por primera vez la palabra "cosa" para referirse a un número desconocido y así poder darle nombre. Lo que sí sabemos es que el libro de álgebra de al-Khwārizmī es el más antiguo que se conserva en el que la palabra aparece usada así. En el fragmento que queda del libro, casi contemporáneo, de Ibn Turk[2] (Sayili, 1962) la palabra "cosa" no aparece, aunque eso no significa que no pudiera estar también en este libro, ya que la pequeña parte que se ha conservado de él corresponde a las demostraciones de los algoritmos de solución de las formas canónicas compuestas, y al-Khwārizmī tampoco usa el término "cosa" en esa parte de su libro de álgebra.

Luis Puig
Universitat de València Estudi General

Es bastante plausible que el uso de la palabra "cosa" como término técnico para nombrar una cantidad desconocida con la que se quiere calcular, proceda de una tradición distinta de la tradición de la que proceden los términos con los que al-Khwārizmī designa las especies de números[3]. Venga de donde venga, la primera vez que aparece, lo hace en árabe, *shay'*, y será a partir de esa palabra árabe de la que pasará al latín como *res*, cuando se traduzca el libro de al-Khwārizmī al latín en el siglo XII. Luego aparecerá como "cosa" a principios del siglo XIV en el primer libro escrito en una lengua romance, el *Tractatus algorismi* de Jacopo da Firenze, y el término "cosa" hará tanta fortuna, que la "Regla de la cosa" acabará siendo otro nombre del álgebra.

Como la observación de la hija de Freudenthal muestra, no es de extrañar que una palabra como "cosa" se use para designar lo desconocido, y la palabra árabe *shay'*, según Rashed, es una palabra que pertenece al árabe clásico ya que aparece en el Corán, y

> se dice de todo cuerpo animado o inanimado, de todo lo que puede ser sujeto de atribución, sin ser, sin embargo, representado necesariamente por individuos [...] Designando un desconocido, la palabra necesita siempre una determinación o una explicación. Si por ejemplo se dice: "yo tengo una cosa", la afirmación no puede entenderse sin un comentario suplementario. (Rashed, 1984, p. 122).

El mismo Rashed nos dice que los gramáticos de la época de al-Khwārizmī decían que la palabra *shay'* era "lo más indefinido de los indefinidos" y que

> en teología, el término remite a una existencia cierta, pero de la que nuestro conocimiento todavía está indeterminado. Por ejemplo, se atribuye al lingüista al-Khalil en el siglo VIII esta expresión a propósito de Dios: "Es una cosa de una cosa, no cosa de no cosa, cosa de no cosa, no cosa de una cosa", que se conjuga también como una tabla de verdad. Se entiende que al-Khwārizmī haya elegido este término para bautizar la incógnita algebraica[4] (Rashed, 2007, p. 15).

هو شيء شيء، ولا شيء لاشيء، وشيء لاشيء، ولاشيء شيء

La fórmula "es una cosa de una cosa, no cosa de no cosa, cosa de no cosa, no cosa de una cosa", escrita en árabe

La cosa en el lenguaje del álgebra de al-Khwārizmī

La primera vez que aparece la palabra "cosa" con significado técnico en el libro de al-Khwārizmī es en el primero de los capítulos dedicados al cálculo literal, el que se titula "sobre la multiplicación". En él al-Khwārizmī comienza anunciando lo que va a hacer en ese capítulo y el siguiente:

> Yo te enseño cómo multiplicar unas por otras las cosas, que son las raíces; si están solas, si están con un número, si están disminuidas en un número o si están restadas de un número; y cómo sumarlas unas a otras y cómo restarlas unas de otras (Rashed, 2007, p. 122-123; Hughes, 1986, p. 241).

Sin embargo, no es en esta parte del libro de al-Khwārizmī donde puede verse por qué hace falta que al-Khwārizmī nos enseñe a "multiplicar unas por otras las cosas", menos aún por qué aparece ese nuevo término "cosa", del que al-Khwārizmī lo único que dice al introducirlo es "que son las raíces". Si "cosa" y "raíz" fueran la misma cosa, hubiera sido innecesario que apareciera la cosa en escena; podría al-Khwārizmī haber explicado en este capítulo "cómo multiplicar unas por otras las raíces" y ahorrarse un término primitivo, un concepto del cálculo de al-jabr y al-muqābala. Si al-Khwārizmī explica el cálculo con la cosa y no el cálculo con la raíz, es porque cosa y raíz no son conceptualmente iguales, aunque al mencionar por primera vez el término, al-Khwārizmī se limite a explicarlo diciendo "que son las raíces", o incluso, unas líneas más adelante diciendo "el significado de la cosa es la raíz" (Rashed, 2007, p. 124-125; Hughes, 1986, p. 242)

El significado de la cosa en el texto de al-Khwārizmī está en su uso (ésa es la definición pragmática de significado de Wittgenstein), más que en esa definición. Al-Khwārizmī no usa nunca "cosa" cuando introduce las especies de números que se usan en los cálculos: ahí usa "raíz". Las especies de números son raíz, tesoro y simples números. La raíz es raíz del tesoro, y el tesoro proviene de una raíz que se ha multiplicado por sí misma, el tesoro no es una cosa que se ha multiplicado por sí misma. Al-Khwārizmī no usa nunca "cosa" cuando establece las seis formas canónicas, ni cuando expone los algoritmos de solución de las formas canónicas, ni cuando expone las demostraciones de esos algoritmos. En las formas canónicas, al-Khwārizmī siempre usa raíz y tesoro, por ejemplo "tesoro y raíces igual a números", nunca dice al-Khwārizmī "tesoro y cosas igual a números".

En esto, sus sucesores inmediatos le son fieles. En el álgebra de Abū Kāmil (ca. 850-930) tampoco aparece la cosa en las formas canónicas, ni en los algoritmos, ni en las demostraciones. Más aún, en la lista de veinticinco formas canónicas de las ecuaciones hasta el tercer grado que ᶜUmar al-Khayyām (1048-1131) estudia unos dos siglos más tarde en su *Tratado de álgebra y al-muqābala* (Rashed y Vahebzadeh, 1999) tampoco aparece la cosa, sino las especies cubos, tesoros, raíces y simples números[5].

Al-Khwārizmī introduce el término cosa en el capítulo dedicado al cálculo literal, pero donde al-Khwārizmī lo usa continuamente y cobra sentido es en los capítulos dedicados a resolver problemas. En efecto, al-Khwārizmī comienza la resolución de cualquier problema llamando a alguna de las cantidades desconocidas "cosa". Así, por ejemplo, el primer problema que al-Khwārizmī plantea para estudiar las seis formas canónicas es

> Es por ejemplo cuando dices: has dividido diez en dos partes; has multiplicado una de las dos partes por la otra; luego has multiplicado una por sí misma, de manera que la multiplicada por sí misma es igual al cuádruple del producto de una de las dos partes por la otra. (Rashed, 2007, p. 144-145; Hughes, 1986, p. 247)

y la solución, la regla para resolver problemas, comienza llamando "cosa" a una de las dos partes en que se ha dividido diez:

> tú pones una de las dos partes una cosa y la otra diez menos una cosa; multiplica una cosa por diez menos una cosa, y resulta diez cosas menos un tesoro (Rashed, 2007, p. 144-145; Hughes, 1986, p. 247).

Como esa cosa se multiplica por sí misma, es una raíz y el producto por sí misma es un tesoro. De esta manera, al-Khwārizmī traduce el enunciado del problema al lenguaje de su álgebra, que no tiene signos distintos de los del lenguaje vernáculo, pero sí un vocabulario propio y preciso. La palabra del lenguaje vernáculo "cosa", convertida en nombre de lo desconocido, permite desarrollar un cálculo con lo desconocido, y que la resolución de los problemas se desarrolle por la vía del análisis. En el libro de álgebra de al-Khwārizmī, la palabra "cosa" aparece arrebatada al lenguaje vernáculo para ser apropiada por el lenguaje del álgebra.

En efecto, si pensamos que el corazón de la resolución algebraica de problemas se puede decir que es esa lectura del enunciado del problema, que está en lenguaje vernáculo, para transformarlo en un nuevo texto que está en el lenguaje del álgebra, una de las señales en el texto de al-Khwārizmī de que se está pasando de un lenguaje a otro es que la palabra "cosa" nunca aparece en los enunciados de los problemas, donde aparece es en las soluciones.

Hay una excepción, que en realidad no lo es: el problema 28 (en la numeración de Rashed, 2007). En el enunciado de ese problema sí que aparece la palabra "cosa". Sin embargo, en la solución del problema, la cantidad que al-Khwārizmī designa con "cosa" no es la que en el enunciado ha sido llamada "cosa", sino otra cantidad desconocida. De hecho, la cantidad desconocida que en el enunciado se llama "cosa" no es necesaria para resolver el problema, el problema tiene la misma solución, valga esa cantidad lo que valga. El enunciado del problema es

> Si te dicen: repartes un dirham entre unos hombres y les toca una cosa; les añades un hombre, y repartes entre ellos un dirham, entonces les toca un sexto de dirham de menos que en el primer reparto (Rashed, 2007, p. 190-191; Hughes, 1986, p. 255)

y al-Khwārizmī llama "cosa" al número de hombres que había al principio, y calcula con esa cosa. La cantidad que en el enunciado se ha dicho que era una cosa no aparece para nada en la solución del problema, con lo que "cosa" en el transcurso de la solución es el nombre propio de la cantidad desconocida "número de hombres que había al principio", sin que quepa ambigüedad alguna sobre ello. En el lenguaje del álgebra de al-Khwārizmī "cosa" es un nombre común, cuyo significado tiene que ver con el hecho de que la cantidad que nombra es una cantidad determinada, pero cuyo valor se desconoce. De hecho, la mayor parte de las veces el término algebraico "cosa" aparece sin artículo, "cosa", o de forma indeterminada, "una cosa", y muy pocas veces con el artículo determinado, "la cosa".

En resumen, al-Khwārizmī *nunca* usa el término "cosa" en las primeras partes del libro en las que trata:

1. Introducción.
2. Las especies de números.
3. Las (seis) formas canónicas, simples y compuestas.
4. Los algoritmos de solución de las formas canónicas.
5. Las demostraciones de los algoritmos de solución de las formas canónicas compuestas.

Al-Khwārizmī introduce el término "cosa" en el primer capítulo dedicado al cálculo literal:

6. Sobre la multiplicación [de expresiones con especies].

Al-Khwārizmī *nunca* utiliza el término "cosa" en los otros dos capítulos dedicados al cálculo literal:

7. Sobre la adición y la substracción [de expresiones con especies y con radicales].
8. Sobre la división [de radicales].

Al-Khwārizmī usa sistemáticamente el término "cosa" en los capítulos dedicados a enseñar a resolver problemas algebraicos de segundo grado:

9. Los seis problemas [ejemplos de las seis formas canónicas].
10. Varios problemas.

Los cuatro capítulos restantes son especiales y no entraré a describir aquí cómo usa al-Khwārizmī el término "cosa" en ellos. Sólo diré que en el corto capítulo titulado "Transacciones mercantiles" no usa el término "cosa". Esto se debe a que el capítulo está dedicado a una clase de problemas en los que siempre están implicadas cuatro cantidades que tienen nombre. Al-Khwārizmī comienza el capítulo diciendo "Que sepas que todas las transacciones entre las gentes, de venta, compra […] se realizan […] según cuatro nombres pronunciados por el que pregunta, que son cantidad de evaluación, tasa, precio y cantidad evaluada" (Rashed, 2007, p. 196-197; Hughes, 1986, p. 255[6]). Esas cuatro cantidades forman una proporción, y los problemas son problemas de hallar la cuarta proporcional dados los otros tres términos de la proporción. Al-Khwārizmī no usa el término "cosa" porque no necesita darle nombre a la cantidad desconocida, ya tiene nombre para referirse a ella, y los cálculos para resolver los problemas son los que establece la regla de tres, en los que no se calcula con lo desconocido.

La cosa y la raíz

He señalado que "cosa" y "raíz" son términos con significado distinto, que probablemente provienen de tradiciones anteriores a al-Khwārizmī distintas, y que él identifica, pero usa de manera diferenciada. Esa situación no podía dejar de causar dificultades, y la historia lo atestigua. El historiador tunecino Mohamed Souissi así lo afirma en uno de los capítulos de su libro *Feuilles d'automne* en que, ya jubilado quince años antes, repasa su trabajo. Trata ese capítulo del poema didáctico de Ibn al-Yāsamīn, del que hablaré más adelante, y Souissi cita un comentario a ese poema hecho en el año 1506 por un tal al-Māridini que

> señala una polémica que se había desatado en torno al uso de las dos palabras *shay'* (cosa, res) y *jidhr*[7] (raíz). Para ciertos algebristas son dos términos sinónimos. Otros, como Ibn al-Hā'im, piensan que es necesario reservar la palabra *shay'* para el número desconocido, y restringir *jidhr* al número conocido. Ibn al-Yāsamīn, así como su comentarista, optan por el primer punto de vista y se refieren a una cita de Abū Kāmil Shujā[c] ibn Aslam, en su obra *Al-Mabsūt fī-l-jabr wa-l-muqābala*: "La *shay'* no es sino la *jidhr*, y la *jidhr* no significa más que la *shay'*; son dos nombres que sirven, uno y otro, para expresar la misma noción". (Souissi, 2001, p. 120).

Rastraeré indicaciones del uso de cosa y raíz en algunos textos y autores posteriores a al-Khwārizmī en este apartado.

Abū Kāmil (ca. 850-930)

En el siglo XVI andaban pues los algebristas discutiendo sobre el uso de cosa y raíz, y quien mantenía que eran términos sinónimos usaba como autoridad las palabras de Abū Kāmil, conocido en su tiempo como el calculista egipcio, que nace cuando muere al-Khwārizmī. Sin embargo, si se recorre el libro de álgebra de Abū Kāmil[8], aunque afirme que cosa y raíz son lo mismo, igual que ya lo había hecho al-Khwārizmī, el uso que hace de los dos términos en su libro es prácticamente el mismo que el que hace al-Khwārizmī: no lo usa en los capítulos iniciales, lo introduce cuando comienza el cálculo literal, y lo usa en la resolución de problemas de forma similar a al-Khwārizmī.

[c]Umar al-Khayyām (1048-1131)

El caso del persa [c]Umar al-Khayyām es más interesante. La palabra "cosa" sólo aparece una vez en todo su libro de álgebra, muy al comienzo, cuando dice:

> Es la costumbre, entre los algebristas, nombrar en su arte la incógnita que se quiere determinar "cosa", su producto por sí misma, tesoro, su producto por su tesoro, cubo, el producto de su tesoro por su semejante, tesoro tesoro, el producto de su cubo por su tesoro, tesoro cubo, el producto de su cubo por su semejante, cubo cubo, y así sucesivamente hasta tan lejos como se quiera. Se sabe a partir del libro de los *Elementos* de Euclides que esos grados son todos proporcionales, quiero decir que la razón de la unidad a la raíz es igual a la razón de la raíz al tesoro y es igual a la razón del tesoro al cubo. La razón del número a las raíces es por tanto igual a la razón de las raíces a los tesoros, igual a la razón de los tesoros a los cubos, e igual a la razón de los cubos a los tesoro tesoro, y esto hasta tan lejos como se quiera (Rashed and Vahebzadeh, 1999, pp. 120-122).

En esa frase, "cosa" aparece como un término propio del lenguaje del álgebra ("es la costumbre, entre los algebristas") que se usa para designar la "incógnita que se quiere determinar". Al-Khayyām está pues dando a "cosa" el sentido en que hemos visto que al-Khwārizmī usa el término, pero, de inmediato, lo usa para generar las especies de número bastante más allá del tesoro, que es donde se queda al-Khwārizmī, mezclando pues el sentido en que al-Khwārizmī usa raíz.

Podría parecer que la raíz ya no va a ser para al-Khayyām un término necesario porque la ha substituido por la cosa en la lista de especies de número, pero, muy al contrario, cuando explica que "se sabe a partir del libro de los *Elementos* de Euclides que esos grados son todos proporcionales", la cosa desaparece y ya sólo habla de la raíz. Mucho más significativo aún es que la término "cosa" no vuelve a aparecer en todo el libro. Esto se debe claramente a que al-Khayyām no resuelve ni un solo problema en todo el libro; a lo que el libro está dedicado es a encontrar algoritmos de solución para las veinticinco formas canónicas, que son todas las posibilidades de combinar las especies números, raíces, tesoros y cubos, y, para las que no consigue encontrar un algoritmo, encontrar su solución geométrica mediante la intersección de cónicas. Las formas canónicas están enunciadas en términos de números, raíces, tesoros y cubos, nunca aparece el término "cosa" al enunciarlas, y nunca se usa el término "cosa" en las soluciones de las ecuaciones.

Sharaf al-Dīn al-Tūsī (1135-1213)

El libro fundamental que se conserva del persa al-Tūsī (nacido en el ciudad de Tūs) es su *Tratado de las ecuaciones* (Al-Tūsī, 1986). En él al-Tūsī aborda la resolución de las veinticinco formas canónicas de las ecuaciones de tercer grado, como lo había hecho al-Khayyām, pero, a diferencia de éste, lo que hace es desarrollar métodos aproximados para la resolución de las formas canónicas para las que no se había encontrado en la época ningún algoritmo de solución.

En su libro, el término "cosa" tampoco aparece cuando presenta las veinticinco formas canónicas, que están enunciadas en términos de números, raíces, tesoros y cubos:

> De la formación de las ecuaciones entre los números, las raíces, los tesoros y los cubos se engendran veinticinco problemas que son: una raíz igual a un número, un tesoro igual a un número [...] (Al-Tūsī, 1986, p. 16).

El término "cosa" tampoco aparece en los algoritmos, ni en las demostraciones de éstos, ni en los cálculos aproximados de las soluciones de las ecuaciones. Como además el libro sólo trata de la resolución de ecuaciones y no de la resolución de problemas de enunciado verbal, no hay lugar a que se use el término "cosa" para nombrar alguna cantidad desconocida y así traducir el enunciado del problema al lenguaje del álgebra.

Sin embargo, el término "cosa" tiene una única aparición en todo el libro cuando al-Tūsī demuestra que la forma canónica tesoro igual a raíces y números se puede resolver transformándola en la forma canónica tesoro y raíces igual a números, para la que ya ha dado previamente un algoritmo de solución.

Veamos qué es lo que hace al-Tūsī exactamente. Se trata de resolver la ecuación "raíces y números igual a tesoros", que, en el lenguaje del álgebra simbólica actual, podemos escribir $x^2 = bx + c$. Al-Tūsī comienza demostrando que es posible tener efectivamente un tesoro que sea la suma de raíces y números. La demostración utiliza una figura similar a la que al-Khwārizmī usa para demostrar el algoritmo de esta forma canónica, pero al-Tūsī no ha dado ningún algoritmo y no está por tanto demostrando algoritmo alguno sino sólo la posibilidad de existencia de esa forma canónica. Tras hacer esto, continúa diciendo:

> Para determinar la raíz, sea *AE* el cuadrado [*muraba*[c]][9] de *AD*. Tracemos *BG* paralela a *DE* y pongamos *DB* una cosa, es decir, la raíz de un tesoro desconocido, y *AB* el número de raíces mencionado en el problema. (al-Tūsī, 1986, p. 31)

Al-Tūsī quiere determinar la raíz, que es lo que hemos representado por x en nuestro lenguaje algebraico en $x^2 = bx + c$, y designa con el nombre de "cosa" no a la raíz que tiene que determinar, sino a otra "raíz de un tesoro desconocido". En la figura, la raíz que hay que determinar es el lado del cuadrado *AE*, es decir, *AD*, la cosa es el segmento *DB*, de manera que como dice al-Tūsī

> *AD* es, por tanto, el número de raíces y una cosa.

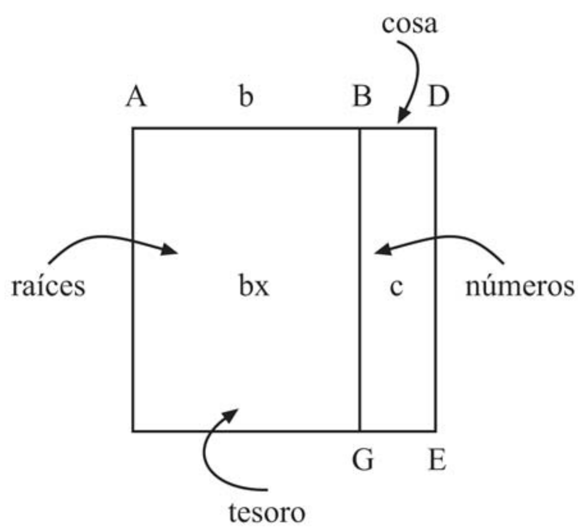


Figura 1

es decir que la raíz que hay que determinar es el número de raíces más una cosa. La cosa no se identifica aquí con la raíz que hay que determinar, sino con otra raíz de otro tesoro. Si queremos expresar lo que al-Tūsī hace en nuestro lenguaje algebraico, tendremos que usar para representar la cosa una letra distinta de la x, ya que la x la hemos usado para representar la raíz; pongamos una y. Entonces, lo que acaba de decir al-Tūsī es que $x = b + y$.

Podríamos pensar que al-Tūsī está haciendo un cambio de variable. En efecto, si substituimos en la forma canónica x por $b + y$, obtenemos

$$(b + y)^2 = b(b + y) + c$$
$$b^2 + 2by + y^2 = b^2 + by + c$$
$$by + y^2 = c$$

es decir, que obtenemos la forma canónica "tesoro y raíces igual a números", que es lo que al-Tūsī quiere obtener. Sin embargo, al-Tūsī no desarrolla un cálculo algebraico con las expresiones hasta obtener la ecuación que quiere, sino que busca obtener esa ecuación en las relaciones que tienen las partes de la figura que ha construido. En efecto, al-Tūsī continúa su demostración así:

> el rectángulo *BE* proviene pues del producto del número de raíces y una cosa por una cosa, pero el producto de una cosa por una cosa es el tesoro desconocido y el producto del número de raíces por una cosa es cosas en número igual al número de raíces, pero esta suma es igual al rectángulo *BE*, que es el número mencionado en el problema. Se tiene pues un tesoro y raíces en número igual al número mencionado en el problema iguales al número mencionado en el problema. (al-Tūsī, 1986, p. 31).

Lo que ha hecho pues al-Tūsī es mostrar que el rectángulo *BE*, que representa el número (c), también representa el producto de sus lados, que son *BD*, que representa la cosa (y) y *DE*. Pero *DE* es igual a *AD*, ya que *AE* es un cuadrado, y *AD* representa la suma del número de raíces y una cosa ($b + y$). De manera que el único cálculo que ha hecho al-Tūsī es el equivalente a $(b + y)y = by + y^2$: "el producto de una cosa por una cosa es el tesoro desconocido y el producto del número de raíces por una cosa es cosas en número igual al número de raíces".

En esta demostración de cómo una forma canónica puede transformarse en la otra está patente una de las deficiencias que tiene el sistema de signos del álgebra árabe medieval, que no se resolverá hasta Viète: sólo hay un nombre para lo desconocido y los términos raíz y tesoro no son potencias de una incógnita, sino especies de números. En el curso de esta demostración "raíz" y "tesoro" se han referido a dos raíces y dos tesoros distintos, que con nuestro lenguaje del álgebra actual hemos podido diferenciar: la primera raíz con x, la segunda con y; el primer tesoro con x^2, el segundo con y^2.

En términos de lo que ha hecho al-Tūsī no hay cambio de variable, no ha substituido una cantidad desconocida por otra, lo que ha probado ha sido más bien que si una ecuación tiene la forma "raíces y números igual a tesoros", se puede transformar en otra que tiene la forma "tesoros y raíces iguales a números". La primera está representada en la figura 1 por el hecho de que el cuadrado *AE* (que representa un tesoro) es el resultado de pegar los rectángulos *AG* (que representa raíces) y *BE* (que representa un número); la segunda está representada en la misma figura 1 por el hecho de que el rectángulo *BE* (que representa un número) es también el resultado de pegar un cuadrado de lado *BD* (que representa un tesoro) y un rectángulo (que representa raíces) de lado *BD* (que representa una raíz).

As-Samaw'al (ca. 1130- ca. 1175)

As-Samaw'al era hijo de un judío nacido en Fez en el Magreb, que emigró a Bagdad y allí se casó con una judía de Basora (Iraq). Según Djebbar (2005) su familia era de gran cultura y él publicó libros de medicina ("*El paseo de los compañeros*, que es esencialmente un tratado de sexología y de historias eróticas", Djebbar, 2005, p. 54), de teología ("publicó, después de su conversión al islamismo, varios panfletos contra el judaísmo[10] y el cristianismo", Djebbar, 2005, p. 54). Para lo que aquí nos interesa su libro fundamental de matemáticas es el *Kitāb al-bāhir fī l-jabr*, el *Libro resplandeciente sobre álgebra* (Ahmad & Rashed, 1972).

Ese libro de as-Samaw'al se sitúa en una línea de desarrollo del álgebra que es diferente a la que representan los libros de Abū Kāmil, al-Khayyām y al-Tūsī, en los que el objetivo principal del libro es lo que en la entrega anterior de estas historias (Puig, 2010) hemos llamado el proyecto algebraico de Viète, la resolución del problema de los problemas, y para ello se construye la teoría algebraica, su lenguaje, y se estudian las formas canónicas y sus soluciones. Lo que hace as-Samaw'al en este libro es estudiar lo que podríamos llamar ahora una teoría de polinomios, siguiendo los trabajos de al-Karajī, y facilitándolo gracias a la introducción de una representación de los polinomios en forma de tablas, encabezadas por los nombres de las especies, en las que se escriben sólo lo que llamamos ahora los coeficientes, de manera que en la tabla lo que aparece escrito es la sucesión de los coeficientes.

مرتبة كعب كعب	مرتبة مال كعب	مرتبة مال مال	مرتبة الكعب	مرتبة المال	مرتبة الشيء	مرتبة الاحاد	مرتبة جزء شيء	مرتبة جزء مال	مرتبة جزء كعب	مرتبة جزء مال مال
٢٠	٢	٥٨	٧٥	١٢٥	٩٦	٩٤	١٤٠	٥٠	٩٠	٢٠
٢	٠	٥	٥	١٠						

Figura 2

En la figura 2 (tomada de Ahmed & Rashed, 1972, p. 45 del texto árabe) puede verse un ejemplo de la disposición en una tabla de los coeficientes de los polinomios

$$20x^6+2x^5+58x^4+75x^3+125x^2+96x+94+\frac{140}{x}+\frac{50}{x^2}+\frac{99}{x^3}+\frac{20}{x^4}$$

y

$$2x^3+5x+5+\frac{10}{x}$$

preparados para ejecutar en la tabla un algoritmo para la división de polinomios (por lo que el divisor está desplazado ya tres lugares hacia la izquierda).

La primera palabra que aparece en todas las casillas de la tabla significa "rango", "orden", es decir que indica lo que ahora llamados el grado del monomio. Las palabras que aparecen debajo son los nombres de las especies. Como puede verse, no sólo se consideran lo que para nosotros son monomios de exponentes positivos, sino también monomios de exponentes negativos. Éstos no están expresados, sin embargo, como posiciones negativas en una serie ordenada, sino que están expresadas como fracciones: el nombre de esas especies se forma añadiendo la palabra "parte" a los nombres de las especies. Así, en esta tabla, debajo de la palabra que significa "rango" u "orden", aparecen las especies "parte de tesoro tesoro", "parte de cubo", "parte de tesoro", "parte de cosa", "número", "cosa", "tesoro", "cubo", "tesoro tesoro", "tesoro cubo" y "cubo cubo".

مرتبة مال كعب كعب	مرتبة مال مال كعب	مرتبة كعب كعب	مرتبة مال كعب	مرتبة مال المال	مرتبة الكعب	مرتبة المال	مرتبة الاشياء
٦	٢٨	٦	إلا ٨٠	٣٨	٩٢	إلا ٢٠٠	٢٠
٢	٨	٠	إلا ٢٠				

Figura 3

En la figura 3 (tomada de Ahmed & Rashed, 1972, p. 48 del texto árabe) se puede ver la representación en la tabla de los polinomios

$$6x^8+28x^7+6x^6-80x^5+38x^4+92x^3-200x^2+20x$$

y

$$25x^5+8x^4-20x^2$$

también dispuestos ya para ejecutar el algoritmo de la división. Puede verse que los coeficientes negativos también están representados en la tabla escribiendo antes de los números la palabra que significa "menos" (que es la misma que significa "no").

En estas tablas, gracias a las cuales as-Samaw'al desarrolla su cálculo con polinomios, la raíz ha desaparecido de la lista de los nombres de las especies y ha sido reemplazada por la cosa. De esta manera, as-Samaw'al está usando "cosa" en el sentido en que al-Khwārizmī usaba "raíz", como una especie de número. Sin embargo, eso no quiere decir que as-Samaw'al identifique totalmente la cosa con la raíz, ya que parece querer diferenciar dos usos cuando afirma

> se dice que la cosa es un lado de cada una de sus potencias, pero no se dice que es raíz más que del tesoro (Ahmed & Rashed, 1972, p. 19)

Al-Karajī (ca. 953- ca. 1029)

Menciono a al-Karajī sin entrar en grandes detalles sobre su uso de los términos "cosa" y "raíz", ya que as-Samaw'al partió de sus trabajos. Se sabe poco de su vida, lo que ha hecho que los historiadores hayan discutido si nació en Bagdad o si era de Karaj, con lo que sería persa, e incluso a que también se haya discutido sobre cuál era exactamente su nombre. En cualquier caso, los libros más importantes que se conservan de él los escribió en Bagdad: el libro *al-Fakhrī*, que es un libro de álgebra que lleva ese nombre porque está dedicado al visir Fakhr al-Mulk, gobernante de la época en Bagdad, *al-Kitāb al-Badīᶜ*, el *Libro maravilloso*, otro tratado de álgebra, y el libro *al-Kāfī fī l-hisāb*, *El suficiente sobre cálculo*, un libro de cálculo mercantil en el que aparece también el álgebra aplicada[11].

Al comienzo de *al-Fakhrī*, si confiamos en el resumen de Woepcke (1853, p. 48) al-Karajī coloca sin más la cosa con la raíz, e incluso con el lado, cuando expone en una lista los nombres de las especies; y habla en especial de la cosa, en términos similares a como lo hace al-Khwārizmī en un capítulo titulado "Sobre los seis problemas":

> El autor explica que el objetivo del álgebra es la determinación de las incógnitas mediante las premisas conocidas; que se nombra al asunto del problema "cosa", y se la somete a las operaciones enseñadas en los capítulos precedentes de este tratado, de acuerdo con lo que aparece en el enunciado del problema. (Woepcke, 1853, p. 63).

Ibn al-Yāsamīn (muerto en 1204)

Al comienzo de este apartado ya he indicado que el historiador tunecino Mohamed Souissi dice que Ibn al-Yāsamīn era de los que identificaba "cosa" y "raíz". Según el historiador argelino Ahmed Djebbar,

> ᶜAbdallah Ibn al-Yāsamīn nació en el Magreb Extremo de madre negra y padre bereber de esa región. [...] Algunos biógrafos dejan entender que estudió las ciencias en Sevilla, que era en esa época la verdadera capital política y cultural de la España musulmana. Igualmente en esa ciudad y en Marrakech habría sido donde enseñó y donde habría publicado sus escritos matemáticos" (Djebbar, 2005, p. 132).

Souissi añade que murió degollado en Marrakech porque "su conducta dejaba que desear" (Souissi, 2001, p. 117).

Su nombre completo, según el historiador tunecino Mahdi Abdeljaouad era Abū M. ᶜAbd Allah b. M. b. Hajjāj Al-'Adrīnī, conocido como Ibn al-Yāsamīn.

El poema sobre álgebra ya mencionado antes es el texto que lo hizo más famoso. En la edición de Adbeljaouad (2005) tiene 54 versos y lleva el título de *al-Urjūza fi'l-jabr wa'l-muqābala*. El poema corresponde a un estilo de textos de enseñanza en los que se presentaban de forma sucinta las cuestiones fundamentales de alguna disciplina en verso para que el verso hiciera más sencilla su memorización.

Este poema sobre álgebra de Ibn al-Yāsamīn tuvo tanto éxito que se escribieron muchos comentarios sobre él, de los que se conservan veinte "incluyendo los de Ibn Qunfudh (muerto en 1404), Ibn Al-Hā'īm (muerto en 1412), Al-ᶜIrāqi (muerto en 1423), Al-Qalasādī (muerto en 1486), Al-Māradīnī (muerto en 1506) y Al-Ansāri (muerto en 1661)" (Adbeljaouad, 2005, p. 3), es decir, que aún en el siglo XVII se seguían escribiendo comentarios al poema, cuatro siglos después de su composición.

Cito la parte del poema en que introduce las especies de números y la cosa, y el comienzo de la lista de las formas canónicas, a partir del verso 11:

11. Sobre tres gira el álgebra:
los tesoros y los números y luego las raíces
12. El tesoro es cualquier número cuadrado
y la raíz uno de sus lados
13. El número absoluto no está relacionado
ni con los tesoros ni con las raíces. ¡Compréndelo!
14. Y la cosa y la raíz significan lo mismo,
igual que los términos padre y progenitor.
15. Pueden ser iguales a un número aislado
o añadidos a otras especies.
16. Hay seis ecuaciones bien ordenadas
la mitad compuestas, la mitad simples.
17. La primera, según la terminología actual, consiste
en igualar los tesoros y las raíces.

(Abdeljaouad, 2005, p. 5, en inglés, y p. 15, en árabe)

Efectivamente, como dice Souissi, Ibn al-Yāsamīn identifica cosa con raíz: el verso 14, para dejar claro que significan lo mismo, utiliza dos palabras sinónimas del lenguaje natural. Sin embargo, cuando Ibn al-Yāsamīn enumera las formas canónicas no usa "cosa" sino "raíz". De hecho la palabra "cosa" sólo aparece una vez más en el resto del poema en una de las reglas algorítmicas en la que dice que hay que "dividir por dos las cosas", en vez de decir "dividir por dos las raíces" como hace en las otras dos reglas algorítmicas en que hay que dividir por dos las raíces. Sin embargo, aunque sólo sea en una de tres, ya está el término "cosa" también en las reglas algorítmicas.

11. على ثلاثة يدور الجبـــــر — المال والأعداد ثم الجذر .
12. فالمال كل عدد مربـــــع — وجذره واحد تـــلك الأضلع .
13. والعدد المطلق ما لم ينسب — للمال أو للجذر فافهم تصب .
14. والشيء والجذر بمعنى واحد — كالقول في لفظ أب و والد .
15. فبعضها يعدل بعضا عددا — مركبا مع غيره أو مفردا.
16. فتلك ست نصفها مركـــبة — ونصفها بسيطة مرتبة .
17. أولها في الاصطلاح الجاري — أن تعدل الأموال للأجذار .

Figura 4. Versos 11 a 17 del poema de Ibn al-Yāsamīn, en árabe.

Ibn Badr (s. XIII)

Según Djebbar, muy poco se sabe de Muhammad Ibn Badr, del que sólo se conoce el *Libro que contiene un resumen del álgebra*. "Como según los biobibliógrafos árabes, hubo, en el siglo X en Córdoba, un matemático llamado ᶜAbd ar-Rahmān Ibn Badr, es posible que nuestro algebrista del siglo XIII sea uno de sus descendientes. En ese caso sería originario de la España musulmana. Pero ningún otro elemento permite confirmar esta hipótesis" (Djebbar, 2005, p. 133).

Ese libro fue editado y traducido al castellano en 1916 por José A. Sánchez Pérez, con el titulo de *Compendio de álgebra de Abenbéder* (Sánchez Pérez, 1916), a partir de un manuscrito que se conserva en la biblioteca escurialense. Sánchez Pérez también fue muy cauto a la hora de afirmar si Ibn Badr, a quien él llamó Abendéder, era nacido en la península ibérica. En efecto, tras decir que Suter y Casiri indican que el autor del manuscrito del Escorial en cuestión era de Sevilla, continúa:

> Esta afirmación de Suter y Casiri acerca de la patria de Abenbéder, a quien hacen sevillano, fue, sin duda, el principal motivo que nos decidió a emprender el estudio de su compendio de Álgebra. Sinceramente debemos confesar, sin embargo, que no poseemos más datos que las noticias de Suter y Casiri, para suponer que Abenbéder fuera español (Sánchez Pérez, 1916, pp. xvii-xviii).

Figura 5. Primera página del manuscrito del Escorial del álgebra de Ibn Badr

Ibn Badr habla de las especies número, raíz y tesoro en el comienzo del libro, como ya hemos visto en otras ocasiones, y, en su caso, la cosa hace su aparición como en el libro de al-Khwārizmī en el capítulo de la multiplicación, sin que se moleste Ibn Badr siquiera en decir que cosa y raíz sean lo mismo; simplemente titula el capítulo "de la multiplicación de las cosas, los tesoros, los cubos y los números", y en la lista de lo que ahora va a enseñar a multiplicar las raíces han desaparecido y han sido substituidas por las cosas.

Al-Qalasādī (1412-1486)

Al-Qalasādī nació en Baza y, aunque después de pasar algún tiempo en Tlemcen en el Magreb se instaló a trabajar en Granada durante un buen número de años, abandonó el reino nazarí por su inestabilidad política y su debilidad ante los reinos cristianos, para acabar en Béja, en el actual Túnez. Al-Qalasādī es citado normalmente en las historias del álgebra por su uso de un simbolismo propio de la matemática árabe occidental, de al-Andalus y el Magreb, que durante tiempo se pensó que había desarrollado él, pero que ahora se sabe que ya se usaba siglos antes. Sin embargo, lo que me interesa aquí es el libro que escribe como comentario a un álgebra de Ibn al-Bannā (1256-1321), en el que la cosa ya toma el lugar de la especie raíz. El libro de Ibn al-Bannā se titula *Compendio de las operaciones del cálculo*, y se convirtió en el manual de base de la enseñanza de las matemáticas en el Magreb entre los siglos XIV y XVII, según Djebbar (2005, p. 130). En su comentario, al-Qalasādī presenta así las especies de números:

> Él dice: el álgebra gira en torno a tres especies: el número y las cosas y los tesoros. Las cosas son las raíces. El tesoro es el resultado de multiplicar la raíz por sí misma. (Bentaleb, 1999, p. 249 del árabe, 285 de la traducción francesa).

La cosa pues, en el texto que va a ser el más usado en el Magreb hasta el siglo XVII, ya ha pasado a ser una especie de número y ha substituido a la raíz. Y el comentario de al-Qalasādī continúa:

> Él ha comenzado por el número, porque es absoluto y no tiene relación con la raíz o el tesoro, no tiene exponente. Ha hablado luego de la cosa, ya que su exponente es uno. Ha hablado después del tesoro ya que es el producto de la cosa por sí misma y su exponente es dos. La cosa y la raíz son dos términos sinónimos, por eso él ha dicho: las cosas son las raíces. Dicho de otra manera, es lo esencial de lo que compone el tesoro, el cubo y los demás. (Bentaleb, 1999, pp. 249-250 del árabe, 286 de la traducción francesa).

La cosa se ha convertido pues en "lo esencial de los que compone el tesoro, el cubo y los demás", es decir, en el término central del álgebra.

La regla de la cosa

Al desplazar a la raíz, la cosa acaba convirtiéndose en el centro del álgebra, que se identifica como cálculo con la cosa o *Regla de la cosa*, y se incorpora al nombre de la disciplina, como alternativa al nombre bárbaro de álgebra. Incluso, en las primeras álgebras alemanas, el álgebra se llama simplemente *Die Coss*, por un curioso fenómeno de adopción de la palabra italiana, en su ortografía del norte de Italia "cossa", sin traducirla al alemán ("Ding", es la palabra alemana que traduce "cosa"). El libro de *Die Coss* de Christoff Rudolff de 1553 es el primer ejemplo. Pero esa es otra historia, de la que hablaré en una próxima entrega.

HISTORIAS ■

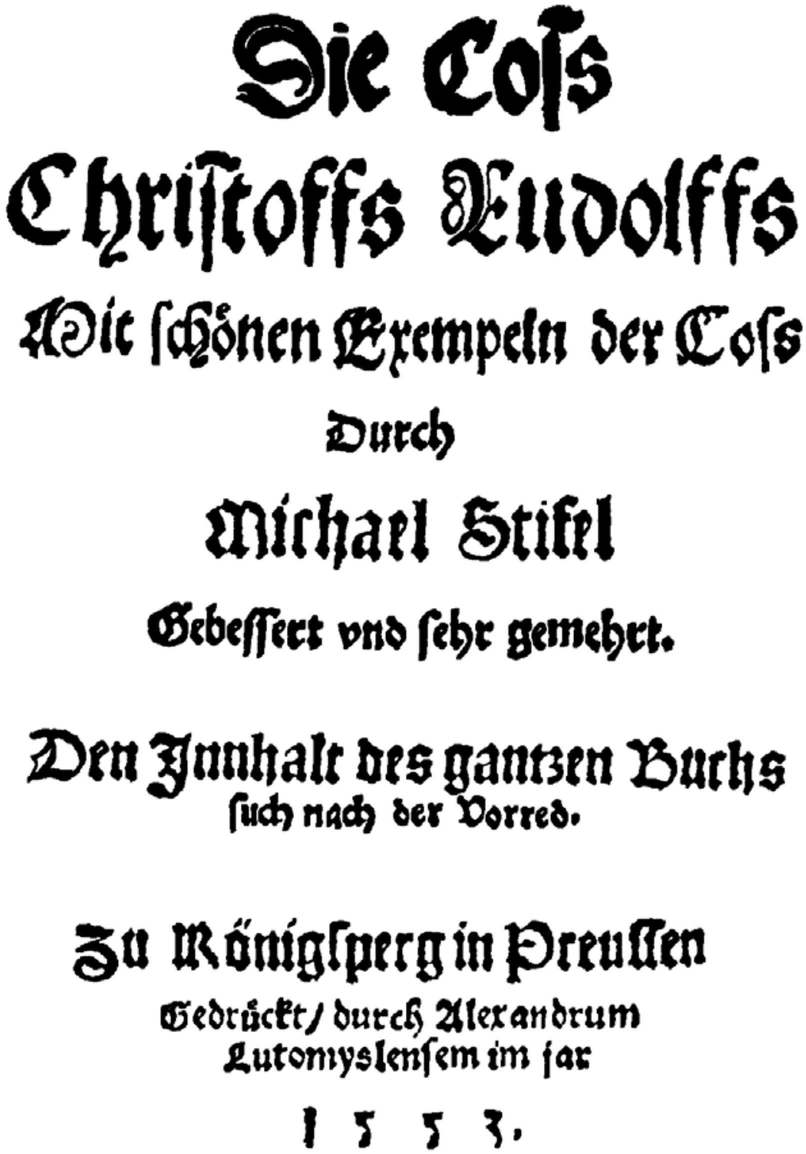

Die Coss
Christoffs Rudolffs
Mit schönen Exempeln der Coss
Durch
Michael Stifel
Gebessert vnd sehr gemehrt.
Den Innhalt des gantzen Buchs
such nach der Vorred.
Zu Königsperg in Preussen
Gedrückt / durch Alexandrum
Lutomyslensem im jar
1553.

Figura 6. Portada del libro *Die Coss* de Christoff Rudolff

NOTAS

[1] La referencia es a la página del original de Freudenthal publicado en inglés por Kluwer como primer volumen de la ya clásica colección *Mathematics Education Library*, dirigida por Alan Bishop. Yo traduje una selección de capítulos de este libro, que publicó en 1994 el *Centro de Investigación y de Estudios Avanzados* de México, en la que figuraba este capítulo sobre el lenguaje algebraico, junto a los capítulos “El método” y “Fracciones”. En esa edición, el texto que cito aparece en la página 68 (Freudenthal, 1994, p. 68). Unos años después incluí también el capítulo “Razón y proporcionalidad” en una segunda edición ampliada de la selección de textos. En esa segunda edición, el texto aparece en la página 124 (Freudenthal, 2001, p. 124).

[2] Ver en la tercera entrega de estas historias la discusión sobre si el libro de Ibn Turk es anterior o no al de al-Khwārizmī (Puig, 2009).

[3] En Puig & Rojano (2004) presenté sucintamente, siguiendo una indicación que aparece en Høyrup (1994), cómo esta hipótesis puede apoyarse en el hecho de que esos términos aparecen en dos partes distintas, y separadas por doscientas páginas, del *Liber Abacci* de Leonardo de Pisa, sin que Leonardo de Pisa relacione ambas partes de forma alguna.

[4] Rashed no duda en atribuirle a al-Khwārizmī la paternidad del término. Høyrup por el contrario apunta que el término probablemente venga de una tradición anterior, que, hasta ahora, no ha dejado rastro escrito. El historiador egipcio Rashed suele ser muy contundente en sus afirmaciones, en particular cuando se trata de atribuir prioridades a los autores que edita.

[5] Ver la lista de las veinticinco formas canónicas en la anterior entrega de estas historias (Puig, 2010). Diré de paso que nada de esto puede observarse en el libro de Moreno dedicado a ^{c}Umar al-Khayyām, publicado por Nívola: en él, Moreno escribe la lista de formas canónicas con la cosa en vez de la raíz, cuando no aparece así en el texto árabe.

[6] En la traducción latina de Gerardo de Cremona, los nombres de las cantidades son “pretium et appretiatum secundum positionem, et pretium et appretiatum secundum querentem”.

[7] Souissi no translitera estas dos palabras árabes así, porque usa la transliteración “centroeuropea”, que es la habitual en los países del ámbito cultural francés, en vez de la transliteración que yo estoy usando. He preferido no ser fiel en la cita y mantener la misma transliteración que estoy usando en estas historias.

[8] El álgebra de Abū Kāmil está disponible en tres ediciones: una edición de la traducción hebrea del siglo XV del judío probablemente español Mordecai Finzi, con traducción al inglés del texto hebreo de Martin Levey (Levey, 1966); una edición de la traducción latina del siglo XIV (Sesiano, 1993), y una edición del texto árabe con traducción al alemán (Chalhoub, 2004).

[9] Obsérvese que al-Tūsī utiliza aquí la palabra *muraba*^{c} y no la palabra *māl*, porque se refiere al cuadrado figura geométrica y no al cuadrado algebraico, que como sabemos se denomina *māl*, “tesoro”, en el lenguaje algebraico de la época.

[10] Su libro contra los judíos se titula *Ifhām al-Yahūd*, *Confundir a los judíos*, y fue muy popular en la Edad Media a raíz de su traducción al latín en el siglo XIV, por lo que ha sido traducido también al alemán, el italiano, el inglés, el español y el ruso (Ahmed & Rashed, 1972, p. 3).

[11] Del *al-Fakhrī* hay una edición resumida y comentada en francés por Franz Woepcke (Woepcke, 1853). Del *Libro maravilloso* hay una edición de Adel Anbouba del texto árabe con un comentario y un resumen en francés (Anbouba, 1964). De *El suficiente sobre cálculo* hay una traducción alemana de Adolf Hochheim (Hochheim, 1878).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abdeljaouad, M. (2005). *12th Century Algebra in an Arabic Poem : Ibn Al-Yāsamīn's Urjūza fi'l-jabr wa'l-muqābala*. Tunis. Descargable en enero de 2011 de: http://membres.multimania.fr/mahdiabdeljaouad/Urjuza.pdf

Ahmad, S. & Rashed, R. (Eds.) (1972). *Al-Bāhir en algèbre d'as-Samaw'al*. Damas: Université de Damas.

Al-Tūsī, S. (1986). *Œuvres mathématiques. Tome I et II.* Texte établi et traduit par R. Rashed. Paris: Les Belles Lettres.

Anbouba, A. (Ed.) (1964). *L'algèbre al-Badī*ᶜ *d'al-Karagī.* Beyrouth: Publications de l'université libanaise.

Bentaleb, F. (Ed.) (1999). *Abū al Hasān al-Qalasādī. Sarh talhīs a'māl al hisāb. Œuvre mathématique en Espagne musulmane du XV*ᵉ *siècle.* Beyrouth: Dar al-Gharb al-Islami.

Chalhoub, S. (Ed.) (2004). *Die Algebra Kitab al-Gabr wal-muqabala des Abu Kamil Soga ibn Aslam.* Aleppo: Aleppo University.

Djebbar, A. (2005). *L'algèbre arabe. Genèse d'un art.* Paris: Vuibert/ Adapt.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: Kluwer.

Freudenthal, H. (1994). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados.* (L. Puig, Introducción, traducción y notas.) México: CINVESTAV.

Freudenthal, H. (2001). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. (2ª edición ampliada).* (L. Puig, Introducción, traducción y notas.) México: CINVESTAV.

Hochheim, A. (ed., trans.), (1878). *Kâfî fîl Hisâb (Genügendes über Arithmetik) des Abu Bekr Muhammed ben Alhusein Alkarkhi. I-III.* Halle: Louis Nebert.

Høyrup, J. (1994). The Antecedents of Algebra, *Filosofi og videnskabsteori på Roskilde Universitetcenter. 3.* Række: Preprint og Reprints 1994 nr. 1.

Hughes, B. (1986). Gerard of Cremona's translation of al-Khwārizmī's al-jabr: A critical edition. *Mediaeval Studies 48,* pp. 211-263.

Levey, M. (ed.) (1966). *The Algebra of Abū Kāmil, in a Commentary by Mordecai Finzi. Hebrew text and translation, and commentary.* Madison, WI: The University of Wisconsin Press.

Puig, L. (2009). Historias de al-Khwārizmī (3ª entrega). Orígenes del álgebra. *Suma, 60,* pp. 103-108.

Puig, L. (2010). Historias de al-Khwārizmī (4ª entrega). El proyecto algebraico. *Suma, 65,* pp. 87-94.

Puig, L., y Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. In K. Stacey, H. Chick, y M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 189-224). Boston / Dordrecht / New York / London: Kluwer Academic Publishers.

Rashed, R. (Ed.). 1984. *Diophante. Tome III. Les Arithmétiques. Livre IV, et Tome IV, Livres V, VI et VII.* Texte de la traduction arabe de Qustâ ibn Lûqâ établi et traduit par Roshdi Rashed. Paris: Les Belles Lettres.

Rashed, R. (Ed.). (2007). *Al-Khwārizmī. Le commencement de l'algèbre.* Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.

Rashed, R., y Vahebzadeh, B. (1999). *Al-Khayyâm mathématicien.* Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.

Sánchez Pérez, J. A. (1916). *Compendio de álgebra de Abenbéder.* Madrid: Junta para la ampliación de estudios e investigaciones científicas.

Sayili, A. (Ed.). (1962). *Abdülhamid ibn Türk'ün Katışık denklemlerde Mantıkî Zuruetler adlı yazısı ve Zamanın Cebri (Logical necessities in mixed equations by* ᶜ*Abd al-Hamîd Ibn Turk and the algebra of his time).* Ankara: Türk Tarih Kurumu Basımevi.

Sesiano, J. (1993). La version latine médiévale de l'Algèbre d'Abū Kāmil. In M. Folkerts, and J. P. Hogendijk (eds.) *Vestigia Mathematica. Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H. L. L. Busard* (pp. 315-452). Amsterdam and Atlanta, GA: Editions Rodopi B. V.

Souissi, M. (2001). *Feuilles d'automne ou En souvenir des Congrès et Colloques du patrimoine scientifique Maghrébo-arabe.* Beyrouth: Dar al-Gharb al-Islami.

Woepcke, F. (1853). *Extrait du Fakhrî, traité d'algèbre par Aboû Bekr Mohammed ben Alhaçan Alkarkhî; precede d'un mémoire sur l'algèbre indéterminé chez les Arabes.* Paris: L'Imprimerie Impériale.

Este artículo fue solicitado por *Suma* en diciembre de 2010 y aceptado en enero de 2011 para su publicación

suma+ 66
Febrero 2011, pp. 101-106

Évariste Galois: un genio en la base del álgebra moderna

Hace doscientos años nacía en Bourg-la-Reine, cerca de Paris, Évariste Galois, una de las personas más singulares que ha proporcionado el mundo de la matemática. Considerado como uno de los fundadores de la teoría de grupos, su principal trabajo se centró en estudiar las condiciones bajo las cuales podía resolverse una ecuación por medio de radicales. En la actualidad, la teoría de grupos, más allá del dominio de las ecuaciones, sirve para estructurar campos tan diversos como la aritmética, la física de partículas elementales, la cristalografía… y hasta las posibles posiciones del cubo de Rubik. Teniendo en cuenta que Galois no empezó a interesarse por las matemáticas hasta la edad de 15 años y que se murió a los 21, solo cabe admirar la genialidad de semejante portento de la matemática.

Los primeros pasos

Évariste era hijo de Nicolás Gabriel Galois y Adélaïde-Marie Demante. Su padre, un intelectual culto, liberal y antimonárquico, fue un gran defensor de la libertad. Tras la marcha de Napoleón a la isla de Elba, es elegido alcalde del pueblo Bourg-la-Reine donde residía la familia. Debido a las múltiples ocupaciones del padre, el niño Évariste vivió durante sus primeros años al cuidado de su madre, mujer culta así mismo, descendiente de afamados juristas, que se ocupó intensamente de la educación de su hijo, proporcionándole una sólida formación en latín y griego. Es bastante probable que no hubiera pasado de unas nociones básicas en aritmética, ya que por entonces no se daba importancia a la formación matemática.

Santiago Gutiérrez
Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo*
hace@revistasuma.es

En 1823, comienza la educación reglada de Évariste, cuando ingresa en el *College Royal de Louis-le-Grand* de París, escuela preparatoria por donde pasaron hombres tan eminentes como Robespierre y Victor Hugo. Allí empieza Évariste a sensibilizarse políticamente, ya que las ideas liberales y antimonárquicas de la mayoría de sus compañeros coincidían con las que había percibido siempre en su casa. Por aquellos años, Francia aun sentía la nostalgia de la revolución, se producían conspiraciones y tumultos, y todo ello encontraba eco en los jóvenes estudiantes, en particular en Évariste que se iba radicalizando cada vez más en sus ideas liberales, ahora ya en contra de toda autoridad. Debido a su formación humanista, durante este su primer año, destaca en el aprovechamiento de sus estudios de humanidades. En el tercer año, sin embargo, su trabajo en retórica decae notablemente, viéndose obligado a repetir curso.

Galois descubre su vocación

En este momento, con 15 años, recibe Évariste Galois su primer curso serio de matemáticas. El profesor, Hippolyte Jean Vernier, consigue despertar el genio matemático de Galois. En poco tiempo devora los textos habituales y ataca las obras maestras de la época, empezando por los *Éléments de Géométrie* de Legendre y, entusiasmado con el campo que se le estaba abriendo, sigue con las memorias originales de Lagrange: *La resolución de ecuaciones algebraicas*, *La teoría de funciones analíticas* y las *Lecciones sobre el cálculo de funciones*, y más tarde lee las obras de Abel. No debió tardar el profesor Vernier en darse cuenta del talento de su joven discípulo, a juzgar por los elogios que de él hace en los informes trimestrales, tales como "celo y éxito" o "celo con muy sobresalientes progresos".

Sin embargo, esta pasión desbordada va a tener de momento algunas consecuencias negativas. Sus profesores de humanidades se quejan de la bajada de rendimiento que perciben en el todavía un simple estudiante de *Collège*, calificándolo en sus informes de "disoluto", "excéntrico", "introvertido y reservado", aunque, eso sí, "original". El mismo Vernier lo ve un tanto alocado en su dedicación a las matemáticas y le insiste en que debe trabajar con más orden y sistema. Galois galopa por campos muy profundos pero carece de parte de la formación matemática fundamental. No sigue los consejos de su profesor, y decide presentarse al examen de ingreso en la *École Polytechnique* un año antes de lo debido y sin haber hecho el curso de preparación correspondiente. El resultado era de esperar, resulta rechazado.

Naturalmente, para Galois, se trata de una injusticia, que refuerza, aun más si cabe, su oposición a toda autoridad. Así que, de vuelta al *Collège*, se matricula en el curso superior de matemáticas. Su profesor es ahora Louis-Paul-Émile Richard, uno de los más distinguidos profesores del *Collège*, que no tarda en percatarse del talento de Galois, hasta el punto que se atreve a solicitar que sea admitido en la *École Polytechnique* sin examen previo. Evidentemente, Richard no es atendido en su petición, pero semejante prueba de aprecio produce en Galois resultados espectaculares.

Los primeros trabajos

En marzo de 1829, con 17 años y siendo todavía un estudiante, Galois publica en los *Annales de mathématiques pures et apliqués* su primer trabajo. Se trata de la demostración de un teorema sobre fracciones continuas periódicas. Pero, ya entonces está trabajando sobre el problema central de la teoría de ecuaciones, a saber, cuales son las condiciones bajo las cuales puede resolverse una ecuación de una incógnita y grado n por medio de radicales, problema este que lleva más de un siglo de intentos por parte de los matemáticos sin resultados positivos. La cuestión en esta época estaba resuelta para algunos casos particulares: para la ecuación de segundo grado por los babilonios, y, en el siglo XVI, para la de tercer grado por los italianos Scipione dal Ferro y Tartaglia, así como para la de cuarto grado por el también italiano Ferrari. Incluso, cuando solo contaba con 16 años, el propio Galois creyó por un momento haber resuelto la ecuación de quinto grado, aunque pronto se dio cuenta de su error, como ya le ocurriera poco antes al otro joven genio contemporáneo suyo, Abel, cuya vida tuvo más de un parecido con la de Galois. El problema pues, quedaba abierto para cualquier grado superior al cuarto.

> *El primer trabajo que había presentado a la Academia en mayo (1829), debía ser examinado e informado por Augustin Louis Cauchy.*

Una vez más, como tantas que ha ocurrido y ocurre, el intento de resolver un determinado problema lleva a idear una teoría que ensancha el horizonte de la matemática, abre nuevos campos y contribuye a dar solución a otros nuevos problemas. Esto es precisamente lo que ocurrió con los estudios de Galois sobre la teoría ecuaciones.

El primer trabajo lo presenta Galois a la Academia de Ciencias de Francia a finales de mayo de 1829, a menos de dos meses de presentarse de nuevo a los exámenes de ingreso de la *École Polytechnique*. Poco después, el 2 de julio de ese año, un nuevo revés sacude la vida del joven Galois. Su padre, acosado por las intrigas y bulos de las autoridades clericales de su pueblo del que era todavía alcalde, pone fin a su vida. Una semana después, Évariste debe presentarse al examen de la *École Polytechnique*. Bien porque su estado de ánimo no se lo permitía o bien por la incomprensión de sus examinadores, que no lograban entenderle, el caso es que vuelve a ser rechazado. En vista de ello, Galois decide presentarse a los exámenes de bachillerato en la *École Preparatoire* (hoy *École Normal*). Aquí sí es admitido por la excepcional calificación obtenida en matemáticas. Pero, el cúmulo de desgracias que durante este año azotaron la vida de Galois no ha terminado. El primer trabajo que había presentado a la Academia en mayo, debía ser examinado e informado por Augustin Louis Cauchy. Aunque, según la leyenda, aceptada y difundida por E. T. Bell, Cauchy pudo haber perdido, olvidado, o simplemente despreciado el escrito de Galois, la cuestión sigue sin aclararse del todo. En una carta descubierta por Taton en los archivos de la Academia en 1971, Cauchy, refiriéndose a la sesión del 18 de enero de 1830, escribía lo siguiente:

> Estaba previsto que yo presentase hoy a la Academia… un informe sobre el trabajo del joven Galois… Me encuentro indispuesto, en casa. Lamentando no poder asistir a la sesión de hoy, me gustaría figurar en el orden del día de la próxima reunión…para (tratar) los temas indicados.

Las dudas sobre las intenciones de Cauchy surgen debido a que en la siguiente reunión, a la que sí asiste el propio Cauchy, éste no hace referencia en ningún momento al trabajo de Galois, y, en cambio, presenta un trabajo propio. ¿Por qué? Según Taton, Cauchy habría leído y valorado el escrito de Galois, y le habría insistido en que lo desarrollase más profusamente, con el fin de poder presentarlo al Gran Premio de Matemáticas de la Academia. Pero, no se sabe a día de hoy hasta qué punto es verídica o no la hipótesis de Taton. Lo cierto es que Galois presenta una monografía al Gran Premio, un mes después, y este nuevo trabajo es entregado a J. B. J. Fourier, en su calidad de secretario perpetuo de la Academia. ¿Qué nueva desgracia sobrevino al infortunado Galois? Pues, que Fourier se muere en mayo, y entre sus papeles no pudo encontrarse el manuscrito de Galois.

Ante tanta mala suerte, Galois llega a pensar que lo que le ocurre es debido a su nombre y a su tierna edad. Sin embargo, no decide abandonar sus trabajos matemáticos, y comienza a publicar en el *Bulletin des sciencies mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques* del Barón de Férussac, a pesar de que aquí no tiene tanta repercusión como a través de la Academia. En 1831, llega ya a conclusiones interesantes, y, a petición de Siméon D. Poisson, somete a juicio de la Academia una nueva memoria, considerada como la más importante de las obras de Galois. Poisson, después de ímprobos esfuerzos, no logra comprender el contenido de la memoria, critica incluso una de sus demostraciones, recomienda su rechazo por parte de la Academia, y anima a Galois a que desarrolle y explicite más su trabajo. Siempre la misma cuestión, no se entienden las ideas de Galois, en parte por lo novedoso, pero también por la forma tan concisa de exponer sus razonamientos.

La obra de Galois

Su fallida experiencia con la ecuación de quinto grado debió provocar en Galois una seria reflexión: ¿Y si resulta que esta ecuación no tiene solución, y yo estoy aquí perdiendo el tiempo en tratar de encontrarla? Quizá es esto lo que le lleva a cambiar el punto de vista, y en lugar de intentar resolver casos particulares de ecuaciones, prefiere tratar de averiguar primero si tienen solución o no. En este cambio estriba la genialidad de Galois. Así pues, lo que ahora le preocupa es encontrar unos criterios generales que permitan saber si una ecuación polinómica de cualquier grado es resoluble o no por radicales.

En 1831, llega ya a conclusiones interesantes, y, a petición de Siméon D. Poisson, somete a juicio de la Academia una nueva memoria, considerada como la más importante de las obras de Galois

En esta época, ya Abel había demostrado que la ecuación polinómica general de grado superior a cuatro no era soluble por radicales. Sin embargo, se sabía de la existencia de algunas ecuaciones especiales que sí podían resolverse mediante radicales, como, por ejemplo, las ecuaciones binómicas de la forma $x^n = a$, con n primo, además de todas las llamadas ecuaciones abelianas. La cuestión entonces era determinar qué ecuaciones de grado superior a cuatro podían resolverse por radicales y cuáles no. A esto dedicaron no pocos esfuerzos matemáticos de la talla de Lagrange, Gauss, Abel y Cauchy. Como quiera que ninguno de ellos dio solución definitiva al problema, toma el testigo el joven Galois, y se dedica al tema con toda la pasión que en él es proverbial. Comienza por leer los trabajos de los cuatro matemáticos citados, especialmente los de Lagrange, su gran inspirador, y de quien toma la idea de considerar las permutaciones de las raíces de la ecuación.

Galois introduce tres nociones clave para demostrar que no existe un método general para resolver las ecuaciones de grado superior al cuarto por medio de radicales.

Primera noción: El grupo de Galois

A partir de las permutaciones de las raíces de una ecuación, considera Galois todas las formas posibles de pasar de una de ellas a todas las demás, lo que denomina como *sustituciones*. Así, para la ecuación de tercer grado, de raíces x_1, x_2, x_3 hay seis permutaciones posibles, que dan lugar a las siguientes seis sustituciones:

$$P_1=\begin{pmatrix}x_1\,x_2\,x_3\\x_1\,x_2\,x_3\end{pmatrix}\quad P_2=\begin{pmatrix}x_1\,x_2\,x_3\\x_1\,x_3\,x_2\end{pmatrix}\quad P_3=\begin{pmatrix}x_1\,x_2\,x_3\\x_2\,x_1\,x_3\end{pmatrix}$$

$$P_4=\begin{pmatrix}x_1\,x_2\,x_3\\x_2\,x_3\,x_1\end{pmatrix}\quad P_5=\begin{pmatrix}x_1\,x_2\,x_3\\x_3\,x_1\,x_2\end{pmatrix}\quad P_6=\begin{pmatrix}x_1\,x_2\,x_3\\x_3\,x_2\,x_1\end{pmatrix}$$

En este conjunto, que llamaré P, de sustituciones, define la operación que consiste en aplicar sucesivamente dos sustituciones, operación que se puede llamar producto y la designaremos por el símbolo ⊗. Por ejemplo:

$$P_3\otimes P_5=\begin{pmatrix}x_1\,x_2\,x_3\\x_2\,x_1\,x_3\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}x_1\,x_2\,x_3\\x_3\,x_1\,x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\,x_2\,x_3\\x_1\,x_3\,x_2\end{pmatrix}=P_2$$

Su fallida experiencia con la ecuación de quinto grado debió provocar en Galois una seria reflexión: ¿Y si resulta que esta ecuación no tiene solución, y yo estoy aquí perdiendo el tiempo en tratar de encontrarla?

La aplicación sucesiva de dos sustituciones del conjunto da otra sustitución del mismo conjunto, esto es, se trata de una operación interna. Además es asociativa, posee elemento neutro (P_1), y para cada sustitución existe el elemento simétrico ($P_2\otimes P_2 = P_3\otimes P_3 = P_4\otimes P_5 = P_6\otimes P_6 = P_1$).

Lo mismo puede decirse si el grado de la ecuación es n. En ese caso, habrá $n!$ sustituciones. Al conjunto de las sustituciones que proporcionan las permutaciones de las raíces de una ecuación, con la operación indicada, lo llama Galois *grupo de sustituciones*. Pero, introduce este concepto de grupo solamente para referirse a las sustituciones, y de ningún modo aporta una definición abstracta de grupo. Es a mediados de siglo cuando Cayley generalizará la idea de grupo definiéndolo en abstracto, sobre cualquier colección de objetos con una operación interna que verifique las propiedades anteriores.

Para un grupo finito, como los considerados por Galois, llama *orden* del grupo al número de elementos que contiene. El grupo anterior es de orden 6. Puede ocurrir que un subconjunto B de un grupo A forme a su vez un grupo con la operación de A, entonces B es un subgrupo de A, y el orden de B es divisor del orden de A. En ese caso, el cociente entre el orden de A y el de B se llama *índice* del subgrupo B. En el ejemplo anterior, las sustituciones (P_1, P_3, P_5) constituyen un subgrupo, C_1, de P, de orden 3 y de índice 6:3 = 2.

Sin embargo, no todas las sustituciones sirven para encontrar un criterio de solubilidad de una ecuación, según la teoría de Galois. Solamente aquellas que dejan invariante todas las relaciones de las raíces en R y de valor racional. Consideremos, por ejemplo, la ecuación utilizada por Verriest para exponer la teoría de Galois (ed. 1897):

$$x^4+px^2+q=0$$

Sea R el cuerpo formado por las expresiones racionales de p y q con coeficientes racionales. Las raíces de esta ecuación según se sabe son:

$$x_1=\sqrt{\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}}\qquad x_2=-\sqrt{\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}}$$

$$x_3=\sqrt{\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}}\qquad x_4=-\sqrt{\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}}$$

Para esta ecuación hay 4! = 24 sustituciones posibles entre las raíces. Por otro lado, es evidente que se cumplen las siguientes relaciones: $x_1+x_2=0$ y $x_3+x_4=0$. Pues bien, no todas las 24 sustituciones dejan invariantes estas relaciones entre las raíces. Solamente lo hacen las ocho siguientes:

$$A_1=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3&x_4\\x_1&x_2&x_3&x_4\end{pmatrix}\quad A_2=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3&x_4\\x_1&x_2&x_4&x_3\end{pmatrix}\quad A_3=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3&x_4\\x_2&x_1&x_3&x_4\end{pmatrix}$$

$$A_4=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3&x_4\\x_2&x_1&x_4&x_3\end{pmatrix}\quad A_5=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3&x_4\\x_3&x_4&x_1&x_2\end{pmatrix}\quad A_6=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3&x_4\\x_3&x_4&x_1&x_2\end{pmatrix}$$

$$A_7=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3&x_4\\x_4&x_3&x_1&x_2\end{pmatrix}\quad A_8=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3&x_4\\x_4&x_3&x_2&x_1\end{pmatrix}$$

Este grupo de ocho sustituciones es el de máximo orden que verifica todas las relaciones en R entre las raíces. Es el grupo que Galois asocia a la ecuación anterior. De ahí que se le conozca con el nombre de *grupo de Galois* de la ecuación, o, más brevemente, grupo G de la ecuación.

Segunda noción: Subgrupo normal

Tras la primera noción de grupo de sustituciones, Galois introduce la noción de *subgrupo normal*.

Dado un grupo A, se dice que un subgrupo B de A es normal en A si y solo si para cualquier elemento b de B y un elemento cualquiera a de A, se verifica: $a \otimes b \otimes a^{-1}$ es un elemento de B. Por ejemplo, puede comprobarse que el subgrupo anterior, $C_1 = (P_1, P_3, P_5)$, es normal en P. Si en P no hay otro subgrupo normal de mayor orden que el de C_1, entonces este recibe el nombre de *maximal*, y puede haber más de un grupo normal maximal. A su vez, C_1 tiene un subgrupo normal maximal que es $C_2 = (P_1)$, de orden 1, y, por tanto, de índice 3:1= 3. En general, para una ecuación de grado n se producen así una sucesión de subgrupos, C_i, cada uno normal maximal en el anterior, de órdenes iguales o descendentes y, en consecuencia, de índices iguales o ascendentes.

Tercera noción: grupo soluble

La tercera idea importante que introduce Galois en el desarrollo de su discurso es la de *grupo soluble*. Llama *soluble* a un grupo si los índices de los distintos subgrupos normales maximales, aludidos en el proceso anterior, son todos ellos primos. En el ejemplo citado, los índices de C_2 y C_3 son respectivamente 2 y 3, ambos primos. Según eso, el grupo P es soluble.

Finalmente, Galois demostró que una ecuación se puede resolver por radicales si y solo si el grupo G de la ecuación es soluble.

El Galois revolucionario

Galois es un liberal, heredero de las ideas de la revolución francesa y, en consecuencia, republicano y antimonárquico a ultranza. Posee un carácter fuerte y un gran sentido de la justicia. Eso le lleva desde la más tierna adolescencia a constituirse en líder de las causas nobles. En estos momentos, se halla Francia sumida en un proceso convulso, de manifestaciones y protestas contra el restaurado rey Carlos X de Borbón. La cosa llega a límites insospechados cuando Calos X, el 26 de julio de 1830, publica el *Monitor*, desdichadas ordenanzas que pretendían anular el reciente triunfo de los liberales a favor del reaccionario Polignac. El pueblo se echa a la calle, en lo que más bien parece una segunda revolución, para defender sus libertades amenazadas. Al fin, expulsado el rey Carlos, los republicanos celebran el triunfo como lo que consideran la gran victoria contra la institución monárquica. Pero lo único que ocurre es la sustitución de la Casa de Borbón por la Casa de Orleáns, en la persona de Luis Felipe, nombrado a la sazón rey de Francia el 9 de agosto de ese mismo año.

Galois, no ha podido intervenir en la breve revolución, bien a su pesar, pues el director de la *École Préparatoire*, los había encerrado a él y a sus compañeros, durante esos agitados días, sin dejarles manifestarse como hubieran deseado. Galois, entonces, finalizados los sucesos políticos, escribe una violenta carta al director, partidario de Luis Felipe, tildándolo de traidor, y, naturalmente, es expulsado de la *École*. Se traslada a vivir a casa de su madre en París, pero la convivencia resulta tan difícil que su propia madre lo echa de casa.

Poco después, ingresa en la artillería de la Guardia Nacional. Pero, acusados los artilleros de haber querido entregar los cañones a los republicanos, es disuelto el Cuerpo, a pesar de haberse puesto en un principio del lado de Luis Felipe. Una vez más se distingue el fogoso Galois, y, arengando a sus compañeros, llega a decirles:

> Si hace falta un cadáver para amotinar al pueblo, contad conmigo.

En el proceso correspondiente, son absueltos los artilleros, y deciden celebrarlo con un banquete, a cuyo final, Galois se levanta para brindar. Lo hace con la copa en una mano y un cuchillo en la otra: *Para Luis Felipe!* Galois es conducido a prisión, pero el abogado defensor logra su libertad aduciendo que en realidad las palabras de su defendido fueron: *Para Luis Felipe! …si traiciona a la patria*, si bien esta última parte de la frase, señala el abogado, no pudo oírse a causa del ruido producido por los aplausos de los asistentes al acto.

El dramático final

Inmerso en algaradas políticas, alternando periodos de cárcel con periodos de libertad, transcurren los últimos días de

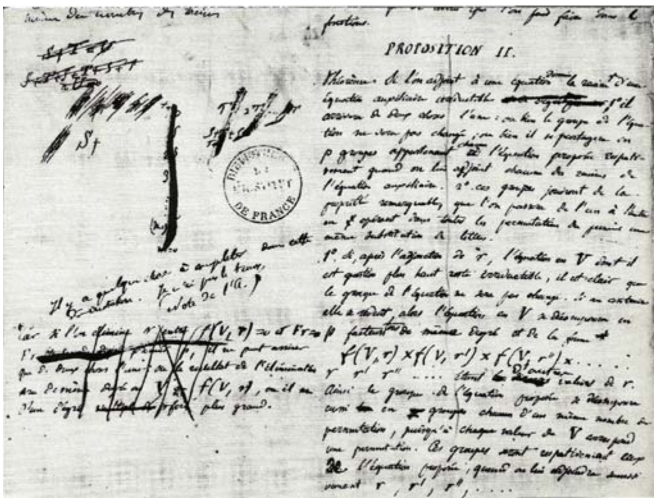
Galois. A final de mayo de 1832, es retado en duelo por unos presuntos conocidos, quizá amigos, como señala Taton, no está claro si por motivos políticos o por motivos de honor, ante una supuesta relación amorosa, o por ambas cosas a la vez.

En carta dirigida a sus amigos Napoléon Lebon y V. Delauney, en la noche del 30 de mayo, anterior al duelo, les dice:

> He sido provocado por dos patriotas…Me ha sido imposible negarme. Os pido perdón por no habéroslo dicho. Pero mis adversarios me han obligado a jurar por mi honor guardar el secreto. Sólo os hago un sencillo encargo: probar que me he batido en contra de mi voluntad, es decir, después de haber agotado todos los medios de reconciliación posibles; sabéis que no soy capaz de mentir ni siquiera en lo más baladí. Por favor, recordadme, ya que el destino no me ha dado vida bastante para ser recordado por mi Patria. Muero amigo vuestro.
>
> Evariste Galois

La noche anterior al duelo, se ha revestido de una leyenda especial, acaso porque su romántica vida, tan repleta de avatares, excitara la imaginación de los biógrafos, o, simplemente, por la falta de información. Así E. T. Bell, en una de las versiones que más influencia ha tenido, escribía en 1937, lo siguiente:

> Aquella noche, empleó las horas que pasaban rápidamente en escribir febrilmente su última voluntad científica y su testamento, añadiendo, en su lucha contra el tiempo, algunas de las grandes ideas que su cerebro albergaba, antes de que la muerte, que preveía, las borrara. De cuando en cuando, suspendía la escritura para garrapatear en el margen del papel: No tengo tiempo, no tengo tiempo; y luego seguía planteando nuevos problemas. Lo que escribió en estas últimas y desesperadas horas, antes de alumbrar la aurora, ha mantenido atareados durante siglos a varias generaciones de matemáticos.



La leyenda señala dos puntos que en recientes investigaciones han sido precisados. El primero, consistía en suponer que la noche del 30 de mayo, anterior al duelo, Galois se habría dedicado a escribir lo que supondría prácticamente toda su obra. El segundo punto, que de vez en cuando escribiría al margen las palabras: no tengo tiempo, no tengo tiempo… ¿Qué hay, cuando menos, de exacto en todo ello?

Lo cierto es que en una carta dirigida a su amigo Auguste Chevalier, escrita esa misma noche, le dice:

> He hecho algunos descubrimientos nuevos en análisis. El primero concierne a la teoría de ecuaciones; los otros, a las funciones enteras. En teoría de ecuaciones he investigado las condiciones de solubilidad de ecuaciones por medio de radicales; con ello he tenido ocasión de profundizar en esta teoría y describir todas las transformaciones posibles en una ecuación, aun cuando no sea posible resolverla por radicales. Todo ello puede verse aquí en tres memorias… Haz petición pública a [Carl Gustav Jacob] Jacobi o a [Carl Friedrich] Gauss para que den su opinión, no acerca de la veracidad, sino sobre la importancia de estos teoremas. Confío en que después algunos hombres encuentren de provecho organizar todo este embrollo.

Según investigaciones sobre sus manuscritos, muy posteriores a la biografía de Bell, se ha podido deducir lo siguiente: que las memorias, a que aludía Galois en la carta a Chevalier, se referían al trabajo rechazado por Poisson, una de ellas; a una nueva versión de un artículo ya publicado en el Bulletin de Férussac, otra; y a un trabajo sobre las integrales de las funciones algebraicas enteras, no encontrado, la tercera memoria.

Lo que en realidad hizo Galois esa fatídica noche se redujo no tanto a redactar las memorias cuanto a corregir su redacción y, si acaso a resumir algunos de sus contenidos, pero en modo alguno se trataría de poner por escrito ideas que tenía en su cabeza sin haberlas trasladado aun al papel. En cuanto a las famosas palabras: no tengo tiempo, no tengo tiempo… la verdad es que aparecen pero solo una vez en una nota al margen y como parte de una frase:

> Il y a quelque chose à completer dans cette demostration. Je n´ai pas le temps. (Note de l´A.)
> [Hay cosas que terminar en esta demostración. No tengo tiempo. (Nota del autor.)]

Al amanecer, Galois abandona la pensión y se dirige a las orillas de un estanque cercano, donde se ha citado en duelo a pistola con sus contrincantes. Estos le disparan, dejándolo abandonado y herido, con una bala en el vientre. Un transeúnte que pasaba por allí, un poco más tarde del suceso, lo recogió y lo llevó al Hospital Cochin. Murió al día siguiente, el 31 de mayo de 1832, tras declarársele una peritonitis.

HACE ■

Este artículo fue solicitado por *Suma* en octubre de 2010 y aceptado en diciembre de 2010 para su publicación.

suma+ 66
Febrero 2011, pp.107-112

Música y matemáticas en educación primaria

La especialización, aunque no deja de ser un rasgo necesario de nuestra civilización, debe complementarse con la integración a través del pensamiento interdisciplinario. Uno de los obstáculos que siguen oponiéndose a dicha integración es la línea divisoria entre los que se sienten cómodos con las matemáticas y los que no.

Murray Gell-Mann (1929 –), premio Nobel de Física en 1969.

Aunque la cita la he elegido porque tiene mucha relación con lo que trataremos aquí, lo cierto es que en esta ocasión está dedicada a Eliseo Borrás, un amigo que nos dejó hace poco. Cuando no estaba tan de moda el carácter multidisciplinar de las Matemáticas, Eliseo siempre me animó a potenciar esta faceta. Por eso y por los buenos momentos que hemos compartido, me gustaría que éste y gran parte de mis trabajos de Música y Matemáticas fuesen un modesto homenaje a su gran labor dentro de la docencia y la didáctica de las Matemáticas.

Hace unos meses, en una charla en la Universidad Rey Juan Carlos, en la que intenté mostrar algunas de las Matemáticas que hay en la Música, parte de los asistentes eran alumnos del Grado de Educación Infantil y Primaria. Al llegar el turno de preguntas, resultó muy alentador comprobar que la revista *Suma* se ha convertido en una referencia habitual tanto en las clases como en los trabajos de los estudiantes. Pero además, cuando acabó la charla, pude hablar con varios de estos estudiantes y me comentaron la posibilidad de hacer propuestas aplicables en Educación Primaria siguiendo la línea que, junto con Tomás Queralt, emprendimos en el manual del Día Escolar de las Matemáticas 2008.

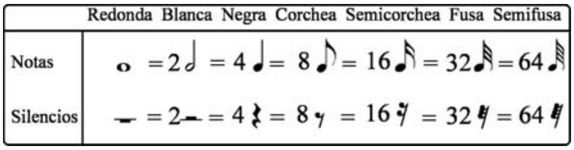
Sin duda, estos alumnos tenían razón, porque muchas de las ideas que lanzamos desde Musymáticas no tienen una aplicación directa a las clases de primaria. Consciente de esta deficiencia, y sobre todo agradecido por la sugerencia, me decidí a proponer algunas actividades que tendrían cabida en primaria y que podrían vincular las asignaturas de Música, Matemáticas y Conocimiento del Medio, ésta última en la parte de Historia.

A pesar de que las actividades que presentamos en este trabajo se basan en dos conceptos muy sencillos de música: los valores de las figuras (las notas y sus silencios) y el compás, hemos preferido no destinarlo a ningún nivel educativo concreto porque debería ser el maestro (o el grupo de maestros) quien decida cuál es el momento más adecuado para llevar a cabo su puesta en marcha.

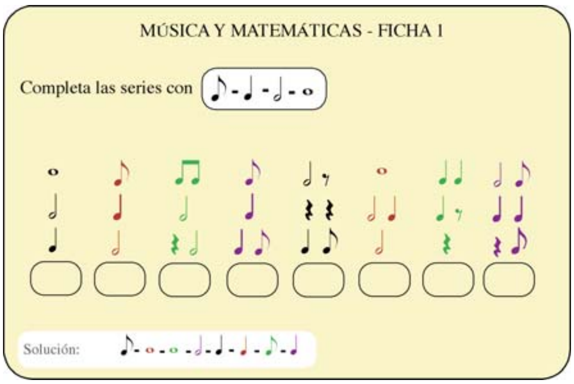
Vicente Liern Carrión
Universitat de València Estudi General
musymaticas@revistasuma.es

Operando con las figuras de la música

Los alumnos de primaria reciben clases de Música y de Matemáticas desde el primer curso. Esto significa que, mucho antes de saber que existen las potencias del 2 o las fracciones, en las clases de música están manejando de forma inconsciente estos conceptos y algunas reglas muy elementales de su aritmética. Por ejemplo, las figuras con las que se escriben las notas musicales guardan entre sí una relación que viene dada por potencias de 2. Así, las notas y sus respectivos silencios, verifican las equivalencias siguientes:

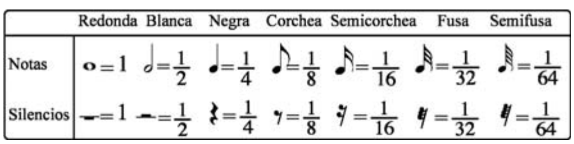


Haciendo referencia solamente a los valores de las notas, ya podemos plantear actividades para nuestros alumnos. Por ejemplo, pueden completar series como las que se muestran a continuación.



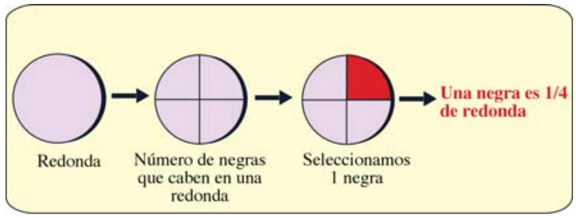
Ejemplo de serie lógica basada en los valores de las notas musicales

Pero además, los valores relativos de las notas, nos proporcionan una buena excusa para trabajar con fracciones. Si, como es habitual en música, a la redonda le damos el valor 1, los valores para las notas son:



Uno de nuestros objetivos es que el alumno interiorice la capacidad de las fracciones para expresar la relación (proporción) entre dos cosas. Así, por ejemplo, si a los alumnos les preguntamos ¿Cuántas negras caben en una redonda?, lo cierto es que no tienen dificultades para decir que son 4. Sin embargo, si hacemos la pregunta al revés, ¿Qué parte de redonda hay en una negra?, la respuesta ya no es tan inmediata, porque el niño debe plantearse la siguiente secuencia lógica:

PASO 1: En la redonda caben 4 negras.
PASO 2: Divido la redonda en 4 partes iguales.
PASO 3: A una negra le corresponde una de esas partes.



Esquema del proceso para calcular la fracción que representa una nota

Utilizando este proceso, resulta interesante plantear al estudiante cuestiones como:

1. ¿Qué parte de negra es una semicorchea?
2. ¿Qué parte de blanca es una corchea?

Y cuando el alumno ya ha interiorizado el algoritmo, podemos no dar pistas de si el resultado será una fracción o un número natural. Por ejemplo:

3. ¿Cuántas negras caben en una blanca?
4. ¿Cuántas negras caben en una corchea?

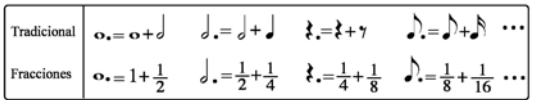
Al principio, la respuesta más habitual es que en una corchea no cabe ninguna negra, porque saben que se les está preguntando por un número y no atribuyen a las fracciones esa entidad. Sin embargo, si junto con el profesor de música hacemos habitualmente preguntas como estas, estaremos contribuyendo no sólo a que interioricen el concepto de fracción, sino que estaremos dando un paso más para derribar esa línea que separa a los que están cómodos con las matemáticas y los que no, con la esperanza de que nuestros alumnos asuman que las matemáticas les resultan útiles en otras asignaturas y lo que es mejor: en su vida cotidiana.

Una ayuda para perder el miedo a las fracciones

En Música hay un concepto relacionado con el valor de las figuras, que los estudiantes jóvenes asimilan con dificultad. Se trata del puntillo, que se representa con un punto situado a la derecha de la figura.

El **puntillo** es un signo de prolongación con forma de punto, que se coloca a la derecha de la figura, aumentando la mitad del valor de la misma.

La dificultad para asimilar la noción de puntillo puede encontrarse en que se trata de un signo que implica el uso de fracciones y además tiene valor relativo. En los primeros cursos de música, a los niños les resulta desconcertante que el puntillo no tenga un valor concreto, sino que depende de la nota a la que acompaña. Veamos a continuación algunos ejemplos.



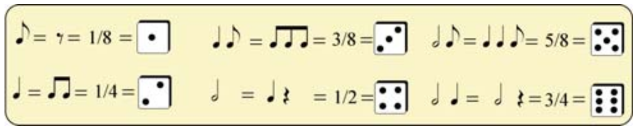
Aunque el puntillo está asociado a la suma de dos fracciones de denominador diferente y para esta operación el alumno ya debe tener cierta soltura con las fracciones, al principio se les puede plantear que expresen diferentes notas con puntillo como suma de dos fracciones. Con esto pueden ir asimilando la equivalencia 'nota-fracción' y ejercitando mentalmente el cálculo de la mitad de una fracción (nota) dada.

Juegos con Música y Matemáticas

En el cuaderno del *Día Escolar de las Matemáticas* del año 2008, propusimos algunos juegos con Música y Matemáticas. Entre ellos presentamos dos dominós que aún podéis obtener solicitando el cuaderno al Servicio de Publicaciones de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas o directamente en internet en la dirección http://perso.wanadoo.es/csap/html/musica.pdf. Además, por si queréis utilizarlos en el aula, en la dirección:

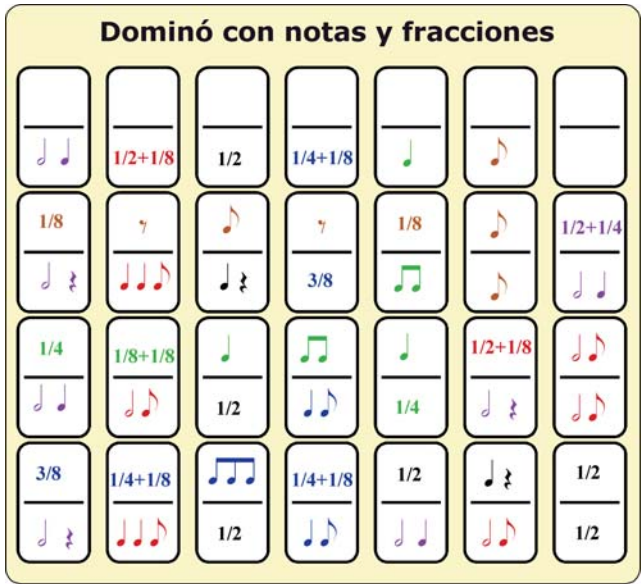
www.fespm.es/web2009/documentacion/diaescolar/dominos-plantilla.pdf
podéis encontrar las plantillas de los dominós que sólo tendréis que recortar.

La propuesta que os hacemos es que utilicéis los valores de las notas para elaborar vuestros propios dominós para el aula. Aquí os muestro un dominó en el que aparecen de forma explícita las fracciones. La idea es sencilla: tomamos como unidad la corchea y a partir de ahí obtenemos el resto de valores hasta el 6. Así, por ejemplo, dos corcheas o una negra será el 2, tres corcheas será el tres y así sucesivamente. Con esto podemos diseñar un dominó con el que podremos jugar con las mismas reglas que en un dominó normal. Simplemente hay que tener en cuenta cuál es la equivalencia entre notas, fracciones y puntos del dominó.



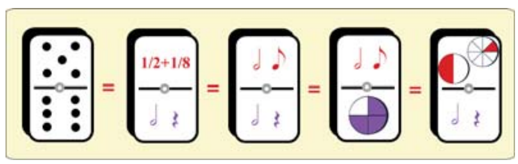
Equivalencia entre los valores de las figuras musicales y los puntos del dominó.

Para facilitar el desarrollo del juego, las fracciones o figuras que tienen el mismo valor están representadas con el mismo color. Por ejemplo, el cinco siempre aparece en rojo. Aunque pudiera parecer que con esto el juego se hace excesivamente fácil, lo cierto es que los jugadores están obligados a utilizar las equivalencias entre figuras, fracciones y puntos, porque cuando acaba el juego, los jugadores que no han ganado tienen que contar con cuantos puntos se han quedado.



Ejemplo de dominó con notas y fracciones.

Cuando los alumnos ya han jugado con alguno de estos dominós, además de los propuestos, en el aula se pueden elaborar[1] por grupos otros dominós teniendo en cuenta diferentes maneras de expresar las equivalencias. A continuación os pongo un ejemplo.



Ejemplo de equivalencia entre los valores de las figuras musicales, las fracciones y los puntos del dominó.

Si planteáis la experiencia en el aula, resulta muy interesante que sean los grupos de alumnos quienes determinen las equivalencias que van a considerar sin que el resto de grupos lo sepa. Cuando un alumno juegue con un dominó que no ha elaborado él mismo, la primera tarea será determinar cuáles son las equivalencias, es decir, saber si el cinco aparece como un gráfico, una nota o una fracción. Por otro lado el juego puede complicarse más si eliminamos la condición de que un mismo color significa el mismo valor de puntos.

Las matemáticas y el compás musical

Como ocurre en otras muchas disciplinas, nuestros alumnos muchas veces tienen las sensación de que las cosas siempre han sido como son ahora y, por ejemplo, que la música siempre se ha escrito igual. Para sacarlos de este error resulta interesante invitarlos a hacer una búsqueda en internet (por ejemplo poniendo "compás musical" en Google) y que comprueben que esto no es así.

El concepto de compás como espacio de tiempo comenzó a establecerse durante el siglo XV. Sin embargo, el sistema de líneas divisorias para delimitarlo gráficamente no se utilizó hasta el siglo XVI[2]. Hasta entonces, las líneas divisorias no delimitaban compases, sino que indicaban diferencias entre lo que iba delante o después de ellos, sin marcar ninguna regularidad. Pero aún así, hubo que esperar hasta el barroco para que el compás se utilizase habitualmente y se estableciese de modo definitivo.

> El **compás** es la entidad métrica musical que se coloca entre dos líneas verticales, llamadas *líneas divisorias* o *barras de compás*. Su estructura se indica al comienzo de la obra o de los fragmentos que la componen, mediante una fracción cuyo denominador marca las partes en que dividiremos la redonda (que se toma como valor de referencia) y el numerador indica el número de estas partes que entran en el compás.

Por ejemplo, el compás[3] de 3/4 está formado por tres cuartos de una redonda, es decir tres negras. Esto significa que en el fragmento musical que esté compuesto en 3/4 todos los compases tendrán la misma duración, tres cuartos de redonda.

Existen muchos tipos de compases 2/4, 3/4, 4/4 (con subdivisión binaria), 6/8, 9/8 y 12/8 (con subdivisión ternaria) y otros muchos que responden a diferentes clasificaciones como 2/2, 3/2 (que se utilizan muy poco actualmente), 5/8, 7/8, 8/8, 5/4, 7/4, etc.

Nosotros aquí no estamos interesados en cómo se clasifican los compases, ni siquiera en cómo deberían marcarse con el brazo cada uno de ellos. Sin embargo, sí que son necesarias algunas aclaraciones a casos que pueden sorprender desde el punto de vista estrictamente matemático. Me estoy refiriendo al hecho de que aparezcan compases diferentes representados por dos fracciones equivalentes, por ejemplo, 3/4 y 6/8. En el primero caben tres negras por compás, mientras que el segundo indica que caben seis corcheas. Está claro que en ambos compases caben la misma cantidad de notas, pero lo cierto es que responden a realidades rítmicas muy diferentes. El tres por cuatro tiene tres tiempos (ocupados cada uno de ellos por una negra) mientras que el seis por ocho consta de dos tiempos ocupados cada uno por una negra con puntillo. Hay muchas más diferencias entre estos compases[4], pero aquí nos conformaremos con advertir que reducir la fracción que representa un compás musical no es una buena idea desde el punto de vista musical.

El concepto de compás como espacio de tiempo comenzó a establecerse durante el siglo XV. Sin embargo, el sistema de líneas divisorias para delimitarlo gráficamente no se utilizó hasta el siglo XVI.

A continuación veamos algunas actividades relacionadas con el compás. La más inmediata, que no necesita ningún comentario, sería representar gráficamente qué fracción de redonda ocupa cada compás. Pero hay otras propuestas en las que nos detendremos algo más.

Ejemplo 1: Escribe tres compases de manera que los valores de sus notas se correspondan con la suma de fracciones

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$$

La primera cosa que debemos hacer es sumar estas fracciones para saber a qué compás nos estamos refiriendo:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{4}$$

En realidad no haría falta sumar las fracciones para saber que se trata del compás de 2/4, porque sabemos que se completa con una negra y dos corcheas o sus silencios. Una vez sabemos esto, una posible solución sería la que ponemos a continuación, aunque, por supuesto, la respuesta no es única.

Pero la pregunta del ejemplo 1 también podría hacerse al revés, partir de un pentagrama y que el alumno escriba las fracciones. Veámoslo en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2: Expresa como suma de fracciones las notas que aparecen en el pentagrama siguiente:

Como el compás que aparece es 2/4, el alumno debe comprobar que las fracciones que aparecen en cada compás suman 2/4. Las fracciones asociadas al pentagrama anterior son las siguientes:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} \;\Big|\; \frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16} \;\Big|\; \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}$$

Un aliciente de estas actividades es que, una vez resueltas, los alumnos podrían cantar sus respuestas (quizás sin necesidad de entonarlas) con la ayuda del profesor de Música si fuese necesario.

Teresa, estudiante de cuarto de primaria, calculando algunas de las fraccciones que aparecen en dos compases de la Quinta Sinfonía de Beethoven.

Nada más lejos de nuestra intención que trivializar la Música, pero creo que podríamos contribuir bastante al gusto por las fracciones si el alumno asimilase que la Música puede verse como una forma bellísima de operar con fracciones.

La unión hace la fuerza

A continuación presentamos una propuesta que, inicialmente, relaciona las asignaturas de Música, Matemáticas y Conocimiento del Medio. En esencia, la actividad consiste en seleccionar un compositor famoso y analizar algunas de sus composiciones desde diferentes puntos de vista. La elección debe hacerse de manera que sea fácil conseguir material (grabaciones, películas, documentos en internet, etc.) para trabajar en el aula.
Las actividades que podríamos realizar deberían considerar, al menos, los tres aspectos siguientes:

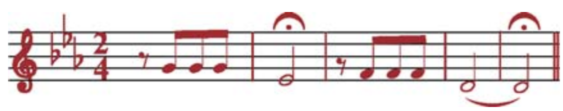
- Analizar muy brevemente el periodo histórico en el que vivió el personaje. Para esto, poder disponer de películas favorece mucho la labor, sobre todo si se tiene en cuenta que en la mayoría de centros la parte de Historia que se trabaja en Conocimiento del Medio es muy reducida.

- Escuchar pequeños fragmentos de música conocida del autor y analizar los instrumentos para los que componía, cómo son los ritmos e incluso si son capaces de cantar fragmentos de algunas de sus obras.

- Aprovechar los conocimientos musicales del alumno para operar con fracciones.

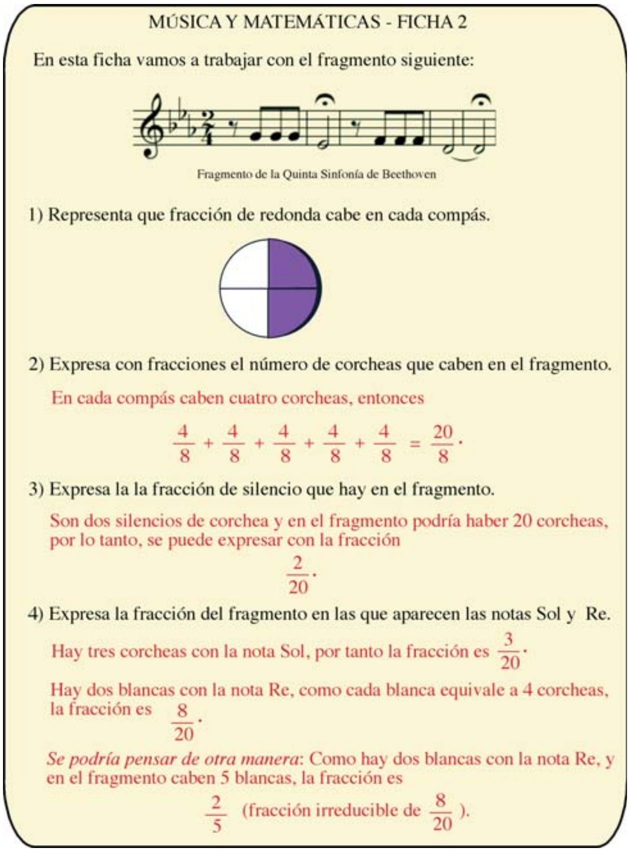
Como no podía ser de otra manera, para que este trabajo tenga una extensión razonable, aquí sólo trataremos la parte matemática de la propuesta. En nuestro caso hemos seleccionado a Ludwig van Beethoven (1770 – 1827) y algunos fragmentos de su Quinta Sinfonía. Podéis encontrar mucha información, incluso documentos sonoros, en:
http://es.wikipedia.org/wiki/Sinfonía_n.º_5_(Beethoven)

La obra empieza con un conocidísimo motivo de cuatro notas que se repiten dos veces:



Fragmento de la Quinta Sinfonía de Beethoven

A partir de este fragmento podemos plantear varias preguntas como la representación gráfica del compás como fracción de una redonda, o el cálculo de diferentes fracciones que nos dan, por ejemplo, la proporción de tiempo en que hay silencios, o la proporción en que aparece una determinada nota, etc. A continuación mostramos una ficha con algunas de las cuestiones que podrían plantearse al alumno.



MÚSICA Y MATEMÁTICAS - FICHA 2

En esta ficha vamos a trabajar con el fragmento siguiente:

Fragmento de la Quinta Sinfonía de Beethoven

1) Representa que fracción de redonda cabe en cada compás.

2) Expresa con fracciones el número de corcheas que caben en el fragmento.

En cada compás caben cuatro corcheas, entonces

$$\frac{4}{8}+\frac{4}{8}+\frac{4}{8}+\frac{4}{8}+\frac{4}{8}=\frac{20}{8}.$$

3) Expresa la la fracción de silencio que hay en el fragmento.

Son dos silencios de corchea y en el fragmento podría haber 20 corcheas, por lo tanto, se puede expresar con la fracción

$$\frac{2}{20}.$$

4) Expresa la fracción del fragmento en las que aparecen las notas Sol y Re.

Hay tres corcheas con la nota Sol, por tanto la fracción es $\frac{3}{20}$.

Hay dos blancas con la nota Re, como cada blanca equivale a 4 corcheas, la fracción es $\frac{8}{20}$.

Se podría pensar de otra manera: Como hay dos blancas con la nota Re, y en el fragmento caben 5 blancas, la fracción es

$\frac{2}{5}$ (fracción irreducible de $\frac{8}{20}$).

Ejemplo de actividades basadas en la Quinta Sinfonía de Beethoven.

Una vez se ha trabajado algún ejemplo en clase, lo aconsejable es que los alumnos respondiesen por grupos a otras fichas con otros fragmentos y que fuesen capaces de exponer los resultados en el aula, entendiendo también como resultados los aspectos musicales e históricos de los compases que han analizado.

Siempre que hablo de Matemáticas a los niños, me viene a la cabeza la crítica que Antoine de Saint-Exupéry (1900 – 1994), hacía de los adultos en *El principito*:

> A los mayores les gustan las cifras. Cuando se les habla de un nuevo amigo, jamás preguntan sobre lo esencial del mismo. Nunca se les ocurre preguntar: *¿Qué tono tiene su voz? ¿Qué juegos prefiere? ¿Le gusta coleccionar mariposas?* Pero en cambio preguntan: *¿Qué edad tiene? ¿Cuántos hermanos? ¿Cuánto pesa? ¿Cuánto gana su padre?* Solamente con estos detalles creen conocerle.

Quizás algo de razón sí tenía *El principito*. Cómo cambiaría todo si preguntásemos ¿cómo se llaman los hermanos de tu amigo? o ¿va al mismo curso que tú?, etc. Tendríamos incluso más información que preguntado por un número y posiblemente la sensación sería muy distinta.

Por eso, los docentes deberíamos aceptar otro consejo del principito, porque “todos los mayores han sido primero niños. (pero pocos lo recuerdan)”. No podemos desperdiciar la oportunidad que nos ofrece la Música para que el niño vea que las Matemáticas no son aburridas. Experiencias como las que aquí se proponen y otras muchas en las que se ve mira con ojos matemáticos elementos que provienen de la vida real, incluso de las más divertidas como la música, los juegos o el deporte, pueden hacer que en el futuro el niño que tenemos en el aula sea de aquéllos que, como dice Murray Gell-Mann, se sienta cómodo con las matemáticas.

MUSYMÁTICAS ■

NOTAS

1 Las fuentes que he utilizado para escribir las figuras musicales en Microsoft Word son Rhythms y Sonata.

2 El primer caso que se conoce es en el año 1536, cuando Sebald Heynen la nombra en su tratado de música De arte canendi.

3 En Música, la forma normal de leer los compases no es la habitual para las fracciones, sino como un producto. Por ejemplo, el compás de 3/4 se lee como “tres por cuatro”.

4 Podéis consultar estas diferencias en http://es.wikipedia.org/wiki/Compás_(música).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Gell-Mann, M. (1995). *El quark y el jaguar*. Barcelona: Tusquets Editores.

Liern, V. (2008). Las fracciones de la Música. *Suma*, 59, pp. 129 – 134.

Liern, V., Queralt, T. (2008). *Música y Matemáticas. La armonía de los números* (Cuaderno del Día Escolar de la Matemáticas 2008). Badajoz: Servicio de Publicaciones de la FESPM.

Randel, D. (1999). *Diccionario Harvard de música*. Alianza Editorial, Madrid.

De Saint-Exupéry, A. (2008). *El principito*. Barcelona: Editorial Salamandra.

Zamacois, J. (1986). *Teoría de la música. Libro I*. Barcelona: Editorial Labor.

Internet

http://enciclopedia.us.es/index.php/Compás_(música)

http://es.wikipedia.org/wiki/Compás_(música)

http://es.wikipedia.org/wiki/Sinfonía_n.º_5_(Beethoven).

http://perso.wanadoo.es/csap/html/musica.pdf.

http://www.fespm.es/web2009/documentacion/diaescolar/dominos-plantilla.pdf

Este artículo fue solicitado por *Suma* en octubre de 2010 y aceptado en diciembre de 2010 para su publicación.

suma+ 66
Febrero 2011, pp. 113-116

Matemática emocional

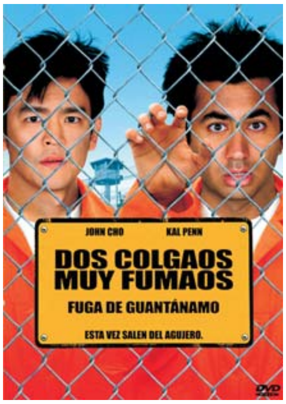
Al hablar de una película se suele decir que es de amor, de risa, de miedo, de suspense, etc. Se la identifica con una emoción. No ocurre tal cosa si hablamos de un teorema, las matemáticas son el reino de la abstracción.

Decía Pablo Ruíz Picasso (1881 – 1973): “El arte es una mentira que nos hace conocer la verdad, al menos la verdad que nos quieren dar a entender. El artista debe saber la manera de convencer a otros de la veracidad de sus mentiras”. Nada tiene esto que ver con la verdad matemática, sea en sus vertientes pitagórica, práctica o logicista.

Cine y matemáticas parecen dos medios de conocimiento no sólo diferentes, sino bien distantes: lo subjetivo frente a lo objetivo, la pasión frente a la precisión lógica, lo discutible frente a lo inapelable, lo humano frente a lo abstracto[1]. Y sin embargo, el cine también explora ocasionalmente el uso (y, como veremos, hasta la ausencia) de lo matemático como vehículo portador de emociones y de sus expresiones. Nos referimos a algo tan universal como el amor, el llanto (figurado), la ambición, el consuelo o la risa.

Es anecdótica la aparición en las pantallas de títulos como *Aritmética emocional*[2] (Paolo Barzman, 2007), *La ecuación del amor y la muerte* (Cao Baoping, 2008), ya citada en un artículo anterior, o *Las matemáticas de las lágrimas* (capítulo 12 de la teleserie *Andómeda* 2000). Los tres títulos han sido puestos sin guardar relación con el contenido de las películas, explotando la colisión semántica de los términos utilizados. Tal vez, buscando hacerse eco y participar del boom de la *Inteligencia emocional*, que comenzara en 1996 con el libro del mismo título (Daniel Goleman, Ed. Kairos) y que promueve como paradigma “armonizar la cabeza y el corazón”. Este artículo se refiere a otros usos más explícitos de elementos matemáticos en películas nada científicas.

Para amar



Habíamos visto en el cine a matemáticos ante problemas amorosos[3]. También, metáforas matemáticas del amor[4]. Pero en una película reciente encontramos una declaración de amor con enunciado matemático. Esta rareza aparece en *Dos colgaos muy fumaos. Fuga de Guantánamo* (Jon Hurwitz y Hayden Schlossberg 2008), cuyo título hace temer lo peor.

José María Sorando Muzás
IES Elaios, Zaragoza
decine@revistasuma.es

Kumar, uno de los dos protagonistas, intenta conquistar a su chica, justo al pie del altar en que se va a casar con otro. Se declara mediante un poema donde compara a ambos con sendas raíces cuadradas de tres[5]. Para ello, muy seguro debiera estar sobre los conocimientos de su amada acerca de las raíces inexactas... Dice:

Temo que siempre seré un número solitario, como la raíz de tres.
Un tres es todo lo justo y bueno.
¿Por qué debe esconderse mi tres bajo un vil signo de raíz cuadrada?
Quisiera mejor ser un nueve.
Un nueve evitaría este mal truco con aritmética elemental.
Yo sé que jamás veré la luz del sol como 1,7320...
Esta es mi realidad, mi triste irracionalidad.
Cuando, ¡escuchad! ¿Qué es esto que veo?
Otra raíz cuadrada de tres. Ha llegado sin avisar.
Juntos nos debemos multiplicar para formar un número aún mejor, regocijándonos como un entero.
Nos liberamos de nuestras cadenas y con una varita mágica
Nuestros signos de raíces se desbaratan.
Y el amor para mí se renueva.

¡Y tiene éxito! En el Cine todo es posible... Enlace:
http://www.vimeo.com/18168940

Para llorar

En *El mejor* (Shana Feste 2006), película donde sólo se salva el gran trabajo de los actores (Susan Sarandom y Pierce Brosnan), encontré un error matemático tremendo, tal vez ignorado por muchos espectadores pero que me pareció no ridículo, sino para llorar (lo cual, aunque involutariamente, está a tono con el dramón que se narra). La película nos habla de Beneth, un muchacho de 18 años que muere en un accidente de tráfico viajando con su chica, Rose. Semanas después, el gran dolor de sus padres se ve conmocionado por la visita inesperada de Rose: está embarazada de Beneth. Esta situación pondrá a prueba a la familia como tal y a cada uno de sus miembros.

¿Qué tienen que ver las Matemáticas en este drama? En realidad, nada. Pero resulta que el padre (Pierce Brosnan) es el Profesor Brenner, profesor universitario de Matemáticas, y eso conduce a que, sin necesidad alguna, haya varias referencias matemáticas que no aportan otra cosa que un resumen de tópicos bien conocidos:

- *La apabullante dificultad de las Matemáticas reflejada en una pizarra llena de símbolos*. Símbolos (raíces cuadradas, logaritmos, límites, el número pi varias veces repetido, etc) que no están escritos siguiendo líneas, con igualdades o esquemas que formen una continuidad o razonamiento en la pizarra, sino "salpicados" por doquier, sin relación alguna entre si, como si de un estampado textil se tratase.
- *El matemático deslumbra como gran calculista*. Brenner sorprende a Rose, embarazada, diciéndole su edad en años, en meses, en semanas, en días, en horas y en minutos. Y lo mismo, al expresar de igual forma el tiempo que le falta para salir de cuentas.
- *El matemático está obsesionado por las Matemáticas en cualquier circunstancia*. El embarazo de Rose está muy avanzado y en una fiesta sus amigos han escrito sobre su gran tripa palabras de afecto. Rose le dice a Brenner si quiere escribir él también algo. Éste accede y el cariñoso mensaje que escribe es... $4 \cdot \log(2 + \sqrt{3}) - 2\cdot\pi/3$

Y añade: "Es una de las integrales más difíciles que he solucionado en mi vida, tardé 3 años en hacerlo..."

Esta ocurrencia es realmente patética y tiene un sitio destacado en la "Antología de disparates matemáticos del Cine".¿Será posible que nadie del equipo de rodaje supiese qué es una integral, qué es un logaritmo y cómo su cálculo hoy con la calculadora no dura tres años sino lo que se tarde en teclear las instrucciones?

Otra vez, la realidad no se aleja de la ficción. En una reciente campaña publicitaria de automóviles se decía: *Que no te compliquen. Operación Diesel.* Detrás, como tantas veces, la "complicación" que se aconseja eludir viene dada por un fondo de símbolos matemáticos. El más visible: log_a (0/16%) = 2.000 E. Si esa es la cuota a pagar, no hay complicación porque no existe.

Para soñar

Cielo de Octubre (Joe Johnston 1999) es una película que merece ser difundida en Educación Secundaria. Narra una historia real y es muy recomendable para adolescentes; por ejemplo, en el ámbito de la Tutoría. Exalta los valores de la constancia en el esfuerzo y el respeto sin sumisión.

El 4 de octubre de 1957, la Unión Soviética lanza con éxito el Sputnik, primer satélite en órbita terrestre. El hecho causa conmoción en los Estados Unidos, al verse superados por la potencia enemiga. La población escudriña el cielo nocturno con curiosidad y temor para observar la novedad. En Colworth, un poblado minero, Homer Hickam, un adolescente, queda fascinado ante su visión y toma una firme decisión: "Construiré un cohete". Homer contagia su ilusión a tres amigos. El ambiente que les rodea no estimula en absoluto sus anhelos científicos. Son otros los valores socialmente apreciados:

– ¿Por qué se llevan las becas universitarias los malditos deportistas?

– Y también se llevan a las chicas.

Sólo la Srta. Railly, su profesora de Ciencias, les alienta para que perseveren en su propósito y concurran a la Feria Científica del Condado, trampolín para la Feria de la Ciencia Nacional: "Las universidades van allí y dan becas".

Se muestra una sucesión de lanzamientos fallidos de cohetes caseros a cargo de los cuatro amigos; también de problemas y enfrentamientos con el padre, el director del colegio y la policía, quienes no entienden que en aquel lugar se pueda aspirar a otra cosa que bajar a la mina o, en algún caso excepcional, ser un afortunado futbolista. Su determinación vence todos los escollos hasta alcanzar el premio, la beca y el reconocimiento de familiares y vecinos.

Especialmente emotivo es el personaje de la profesora, empeñada en que los alumnos desarrollen sus capacidades e inquietudes, dándoles el apoyo que todos les niegan.

– Mi vida entera es la enseñanza. Y yo creía que si vosotros ganabais en esa Feria Científica, os daban becas y emprendíais algo importante en vuestras vidas, de algún modo, la mía habría servido para algo.

Fatalmente enferma, en sus últimos días vive la felicidad de observar a través de la ventana del hospital el poderoso ascenso del último cohete de sus alumnos. Se proyecta una imagen de admiración hacia quienes se entregan a la profesión docente en su lado más humano. ¿Y qué hay de Matemáticas? Hay referencias breves pero cargadas de significado e intención:

1. Cuando Homer comunica a la Srta. Railly su propósito de preparar un cohete con el que concursar en la Feria de la

Ciencia, ella le dice, intentando "picarle":

– Homer, tú eres inteligente, pero la Ciencia requiere Matemáticas, que nunca han sido uno de tus temas favoritos. No sueñes con salir de Colworth, Homer.

2. En su cumpleaños, Homer recibe un regalo de su profesora: un libro sobre diseño de misiles teledirigidos. Ella le comenta:

– Ya sé que son Mates muy avanzadas, para mí también. Hay Cálculo, Ecuaciones Diferenciales...

– Ya aprenderé Matemáticas. Es fantástico, Srta. Railly. Lo aprenderé todo. Es el mejor regalo que me han hecho en mi vida.

3. Los jóvenes experimentadores han sido acusados de provocar con un cohete un incendio en un bosque cercano. Homer pasa la noche entregado al estudio, estudiando la trayectoria y alcance del lanzamiento. Recibe la admiración de su amigo Quentin:

– Homer, ¿has resuelto esta ecuación tú solo?

– Bueno, si las operaciones están bien, esto demuestra...

– ¡Que no provocamos aquel incendio!

– El tiempo calculado de caída fue de unos 14 segundos. Si me ayudas con la Trigonometría, Quentin, podemos hacer un cálculo de dónde cayó el cohete.

Tras largos cálculos...

– 1.929 metros.

Gracias a ese cálculo, localizan el cohete perdido y queda claro que no provocó el incendio. Regresan a clase con la noticia. Aparece el Sr. Turner, el incrédulo director, y Homer toma la tiza para dar su explicación en la pizarra, mientras dibuja la trayectoria parabólica:

– Aquel incendio fue a 5 km de nuestra rampa de lanzamiento y en aquella época nuestro máximo alcance era de 1,9 km, que es exactamente donde hemos encontrado este cohete. Verá, Sr. Turner, aquel cohete cayó durante unos 14 segundos, lo que significa que llegó a una altura de 900 m, según la ecuación de

$s = 1/2 \cdot a \cdot t^2$

siendo s la distancia, a la constante de gravedad y t el tiempo que tardó el cohete en volver al suelo. ¿Me sigue vd. Sr Turner?

En los tres pasajes comentados, un alumno inicialmente distanciado de las Matemáticas se dedica a ellas con intensidad como medio necesario para alcanzar su sueño espacial. Hay un doble mensaje: no hay Técnica sin Ciencia; y el esfuerzo decidido consigue sus fines, por difíciles que parezcan a priori.

Cielo de Octubre no se encuentra en los comercios, fue descatalogada. Pero la podemos ver on line. Enlace:
www.megavideo.com/?s=seriesyonkis&v=RGRDU6W0&confirmed=1

Consuelo matemático

En *El incidente* (M. Night Shyamalan 2008), un trastorno misterioso se propaga entre la población de la Costa Este de EE.UU. Los afectados quedan como hipnotizados y desarrollan conductas suicidas. Se desata el pánico y la gente huye de la ciudad creyendo que se trata de un ataque químico terrorista. Dos profesores de instituto, Elliott, de Ciencias Naturales, y Julian, de Matemáticas, escapan con sus familias. Poco a poco irán comprendiendo qué está sucediendo.

Se trata de una película más del género de catástrofes. Si la traemos a esta sección es porque en tres escenas los profesores protagonistas utilizan recursos matemáticos, con mayor o menor rigor, para afrontar la difícil situación.

En dos ocasiones se usan las Matemáticas para apaciguar a individuos aterrorizados. Tras hablar por teléfono, dice Julian:

– Me ha llamado mi madre y está histérica. Le he explicado que las probabilidades de que ocurra algo en Filadelfia son escasas. Le he soltado algunas cifras. Es la ventaja de ser profe de Mates, a la gente le tranquilizan los porcentajes.

Ante la visión de unos ahorcados, la hija de Julian grita horrorizada y éste la intenta tranquilizar proponiéndole un problema matemático:

– ¿Cuánto dinero tendrás si te doy el primer día 1 centavo, el segundo día 2 centavos, el tercero 4 y así hasta el final de mes?

Entre sollozos, la hija va respondiendo:

– ¿10 dólares?

– No.

– ¿20 dólares?

– No. Tendrías 10 millones de dólares.

El cálculo es básicamente correcto y aún se queda corto. Para un mes de 30 días, resultan: 10.737.418,23 dólares.

Aunque el episodio con base matemática y de más sentido en la resolución del caso lo protagoniza Elliott. Encabeza un grupo de fugitivos por el campo que le reclaman qué hacer. En una situación de extrema presión, Elliott reflexiona para sí:

– Debo pensar como un científico, analizar esto como un experimento, aislar variables.

De esa forma detecta los factores comunes a los diversos incidentes observados: presencia de plantas, viento y víctimas agrupadas. Deduce que alguna toxina liberada por las plantas en presencia de una mayor densidad de seres en movimiento es transportada por el viento. De donde concluye la estrategia a seguir... El método científico le va a salvar la vida.

En el próximo artículo conoceremos escenas de cine donde las matemáticas conducen a la más liberadora expresión de las emociones: la risa.

CineMATeca

NOTAS

1 José María Sorando: *Matemáticas de cine*, Taller de Talento Matemático. Universidad de Zaragoza 03-11-06.
http://catedu.es/matematicas_mundo/CINE/MATEMATICAS%20DE%20CINE.pdf

2 *Aritmética emocional* trata sobre el reencuentro de personas que coincidieron años atrás en las dramáticas circunstancias de los campos de exterminio nazis. La Aritmética no aparece ni en sentido figurado.

3 Entre el amor y el humor. *Suma* 48, pp. 117 a 124, febrero 2005.

4 Metáforas matemáticas. *Suma* 64, pp. 119 a 123, junio 2010.

5 Curiosamente, existe otro poema amoroso titulado *Raíz de tres*, cuya autora es Tamara Velásquez. Enlace:
http://catedu.es/matematicas_mundo/POESIA/poesia_con_mates_velasques.htm

Este artículo fue solicitado por *Suma* en octubre de 2010 y aceptado en diciembre de 2010 para su publicación

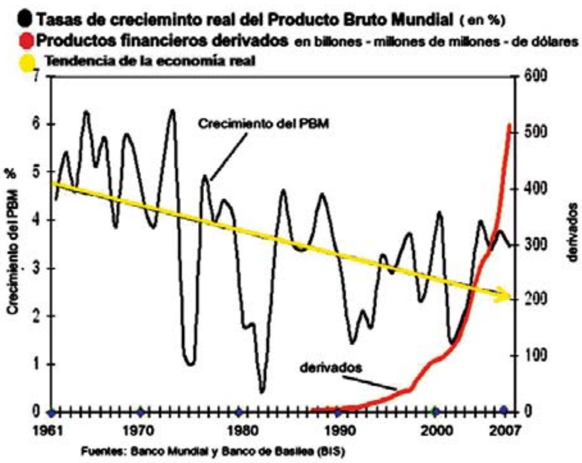
suma+ 66
Febrero 2011, pp.117-129

Los anillos de Anchuria

- "¿Debía el señor Espiritión entender que la Compañía no pasaba de 25.000.- pesos?"
- "Nada de eso, 25 pesos justos. Y en plata, no en oro". El señor Espiritión se levantó
-"¡Ese ofrecimiento es una burla a mi Gobierno!"- exclamó con indignación
- "Entonces -dijo el señor Franzoni, con tono de advertencia- lo cambiaremos"
Y en efecto, lo cambiaron....(al Gobierno)

O. Henry, en "Reyes y Berzas"

En este Gran Casino que es hoy nuestro mundo, los sistemas educativos con sus planes y sus reformas, sus sistemas evaluativos y sus programas, no son una parte menor. Conviene pues que hagamos un esfuerzo por analizar su historia, por si acaso fuéramos capaces de aprender alguna cosa útil de ella y construir así futuros menos volátiles.



Tendencia de la economía real[1]

Tengo en las manos la monografía "Ideas de *em*matemática Castelnuovo" que la FESPM dedicó a la profesora Emma Castelnuovo, la de las "nervudas y adorables manos". En ella se recoge, en las páginas 51-60, la conferencia con que nos deleitó e instruyó en las IX JAEM, celebradas en Lugo en 1999

La he releído en varias ocasiones, la he subrayado y vuelto a subrayar, pero hoy le saco más jugo, tal vez gracias a las sugerencias que me llegan de dos lugares tan diversos como el correo de mi hja Xaro y el del Profesor Antoni Montes, amigo entrañable de Eliseo Borrás. Xaro me envía un enlace y un texto escueto: "Mamá, estoy segura de que te gustará", el segundo me insiste en que las citas, entresacadas del Manifiesto que el Grupo Cero publicó en Escuela 75 para el número anterior de esta sección, no reflejan todo el espíritu de aquel Manifiesto. ¡Hay que volver a publicarlo completo!, se oye en su mensaje.

Xaro Nomdedeu Moreno
Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi"
ariadna@revistasuma.es

Ambos mensajes y las palabras de Emma me sugieren un nuevo texto, estructurado en tres epígrafes, que intentaré compartir.

1.- En el extremo más antiguo, el grito de Dieudonné ¡Abajo Euclides! que tan bien contextualiza Emma en su conferencia, en la página 51 de su monografía: "Pero es cierto que el propósito de Euclides (300 a. C.) no era el de usar su obra con los jóvenes de la escuela; en efecto, sus *Elementos* nunca fueron introducidos en las escuelas griegas de su tiempo." Fueron los monasterios medievales quienes empezaron a utilizar, como texto para los jóvenes ricos, la traducción simplificada en latín de Boecio; los árabes hicieron traducciones más rigurosas a su lengua; la imprenta facilitó la extensión del uso de esta obra como libro de texto para los jóvenes de las familias pudientes, hasta que Comenius en el siglo XVII y Claireaut en el XVIII publican sendos **manifiestos**[2] donde denuncian el carácter antipedagógico de los Elementos como libro de texto. Tras la Revolución Francesa el problema se agudiza, pues la educación ya no se pretende sólo para las minorías de la nobleza. Pero siempre fueron "voces que se pierden en el mundo de los que no quieren escuchar". Y así llegamos a la conferencia organizada por la OCDE en Royaumont en el 59, donde Dieudonné pronunció su famosa frase de protesta *"¡Abajo Euclides!*, acompañada de otra como propuesta alternativa *"...acercar el estudio de la matemática secundaria a los cursos de las Facultades de Matemáticas."*

2.- En los años setenta, la matemática moderna, que a la sazón era la estrella en las Facultades de Matemáticas, se introdujo en las aulas no universitarias, y la autoridad de Dieudonné se

Emma Castelnuovo

alió con las circunstancias por lo que distintas voces se alzaron contra ello. La monografía antes citada de Emma Castenluovo está en vuestro poder, nos la obsequió *Suma* con motivo del 90 aniversario de la profesora. En la página 58 dice Emma: "No, la oposición (a la enseñanza de la matemática moderna en niveles no universitarios) no llegó de la base. En el mes de agosto de 1976, durante el congreso del ICME en Karlsruhe, el gran geómetra inglés Michael Atiyah, en una conferencia plenaria, se lanzó contra los colegas universitarios con estas palabras:

> Habéis destronado a Euclides, y estoy de acuerdo. Pero ¿de qué manera habéis sustituido la enseñanza de la geometría? La matemática que se enseña hoy en día en la mayoría de los países está aún más alejada de la realidad..."

Pero yo sostengo que el artículo-**manifiesto** del Grupo Cero de Valencia fue publicado en 1975, y nacía de la base, de la mejor base posible y desde las aulas de secundaria. No podían competir en capacidad de influencia con Atiyah, pero la fecha de su publicación indica que en la base ya había profesionales con formación muy profunda y de absoluta actualidad. La edición del manifiesto está agotada y la revista desaparecida, por lo que siguiendo la sugerencia de Antoni Montes transcribimos su texto íntegro en el anexo de este artículo. Entre sus conclusiones destacamos la siguiente: "dar una información específica real y no ficticia sobre el mundo y la sociedad en la que el estudiante y el profesor viven."

3.- En el extremo más moderno el excesivo énfasis que se ha puesto en el uso de las TIC (Tecnologías de la Información y de la Comunicación) para el aprendizaje de las matemáticas, parece que repite de nuevo esa situación en la que un gran avance, esta vez tecnológico, invade las aulas de secundaria sin dejar apenas resquicio para nada más. Puede que necesitemos un **manifiesto** contra la tendencia a considerar las TIC como *la herramienta* del aprendizaje de las matemáticas. Esta vez el peligro viene implícito en las propias TIC, pues no son una herramienta más, son atractivas, motivadoras y poderosas, pero ¡cuidado!, no pueden anular al profesor, al creador de situaciones didácticas, al facilitador del aprendizaje, al transmisor de la pasión por la belleza de las matemáticas, presente en cada actividad bien elegida para cada nivel.

Emma Castelnuovo nos avisa en la pág. 60 de su monografía: "la informática gráfica ha llamado la atención sobre una geometría dinámica. Pero se trata de un dinamismo *dirigido*, no estimulado por la intuición". Notemos la tensión que Emma introduce entre los términos dinámico y *dirigido,* calificando respectivamente a geometría y enseñanza, es decir, es dinámica la geometría, pero es pasivo su aprendizaje ¡cuidado!.

Nuestro alumnado corre serios peligros: el de la adicción ya no es discutido por nadie; el de la confusión entre el encantamiento que producen las imágenes y la comprensión profunda que deseamos facilitar con el uso de procesadores dinámicos (sólo el profesor puede intervenir para salvar este peligro); en otro aspecto, la abundancia de información no equivale a información contrastada, de nuevo es necesaria la intervención del profesorado; también es responsabilidad del profesorado la elección de la herramienta TIC a utilizar, valorando la relación tiempo de aprendizaje de matemáticas-tiempo de aprendizaje de la herramienta TIC y su eficacia didáctica. El uso en el aula de sencillos lenguajes de programación, como winLOGO, facilita la actividad de resolución de problemas, revela la dependencia del ordenador respecto al alumno programador y no al revés, como suele ocurrir entre el alumno usuario y el ordenador dotado de software sofisticado y atractivo.

En definitiva, pensamos que las TIC pueden prestar un gran servicio al aprendizaje de las matemáticas, pero el peligro ya está aquí, pues, ya se ha instalado su uso como artilugio de entretenimiento y búsqueda trivial de información, así como la idea de que TODO ESTÁ EN LA RED y ya no son necesarios los profesores.

Y un peligro peor: el de la brecha que separa cada vez más a las personas alfabetizadas en las nuevas tecnologías y aquellas para las que resulta imposible, por diversas razones, el acceso a ellas.

Según Eliseo Borrás[3]:

> Nadie discute hoy que las nuevas tecnologías son un poderoso instrumento para el desarrollo de las matemáticas. El ordenador ha cambiado el rumbo de muchas investigaciones, cuantitativa y cualitativamente. Pero las matemáticas también han tenido influencia decisiva en el desarrollo de las herramientas para el ordenador. La influencia ordenador-matemática ha sido mutua.
>
> Pero no parecen tan brillantes los logros de la informática en la mejora de la enseñanza de las matemáticas: después de un tiempo tan dilatado desde su aplicación, no ha modificado sustancialmente la calidad de la enseñanza ni sus contenidos. Tal vez por tres razones principales: la falta de medios en los centros; la falta de preparación de los profesores y la dificultad añadida al aprendizaje de las matemáticas que representa la utilización del ordenador por parte del alumnado."

Y, en línea con su proverbial visión optimista, aporta aspectos positivos "tres ejemplos de posibles interacciones ordenador-matemáticas":

1. El ordenador puede actuar como *catalizador* del aprendizaje: al intentar explicar las sombras que un objeto produce sobre distintas superficies para obtenerlas sobre la pantalla de nuestro ordenador, nos vemos obligados a acudir a la geometría analítica. El instrumento, el ordenador, puede avivar nuestro deseo de aprender matemáticas.

2. Con el ordenador podemos *construir y ensayar modelos* basados en distintas ramas de la ciencia para buscar soluciones a problemas matemáticos: utilizando las leyes de la reproducción mendeliana se pueden construir algoritmos genéticos para la resolución de problemas matemáticos.

3. Con el ordenador podemos realizar *simulaciones*: si generamos una recta al azar en una región del plano, ¿cuál es la longitud esperada de la cuerda determinada por la recta sobre la región?

Por su parte, Andrea Goldsmit pone un ejemplo de su experiencia como profesora universitaria en Standford. Viene a decir que por mucho que haya que repensar cómo y qué se enseña y cómo se pueden aprovechar las nuevas herramientas (TIC), hay ocasiones para las que todavía no ha "encontrado nada mejor que escribir en una pizarra", porque el cerebro humano sigue aprendiendo del mismo modo y hay cosas concretas que necesitan un pensamiento pausado y profundo, dos características que no descansan en el estilo de aprendizaje superficial TIC. Os "reenvío" el enlace:

www.rtve.es/mediateca/videos/20101031/cientificos-frontera-agoldsmith-311010/917097.shtml

porque creo que también os gustará.

ANEXO

¿Para qué las matemáticas?

Artículo-manifiesto publicado en *Escuela 75.* nº 2. septiembre 1975

Un grupo de profesores de Matemáticas decidió poner en cuestión colectivamente los planteamientos habituales de la enseñanza de su materia. El trabajo que sigue puede ser considerado como expresión de sus actuales posiciones, de los problemas que se plantean y de las líneas de investigación que se proponen seguir desde ahora.

1. Introducción

Frecuentemente ocurre en la historia de las ciencias que, cuando emerge un poderoso nuevo método, el estudio de aquellos problemas que pueden tratarse con el nuevo método avanza rápidamente y los focos se concentran en él, mientras que lo demás tiende a ser ignorado o incluso olvidado, y su estudio es menospreciado[4]

En las matemáticas, ese nuevo método tiene sus raíces en el siglo XIX y se instaura con solidez desde comienzos de nuestro siglo con Hilbert. Desde 1950-55 el nuevo estilo tiene primacía en las universidades. En la enseñanza secundaria comienza a tomar fuerza hace poco más de 15 años y se desarrolla rápida y vigorosamente: se trata de la *reforma* de la enseñanza de las matemáticas.

Sin embargo, ya en 1962, Alhfors, Morris Kline, Wittemberg, Polya y otros, hasta 65 matemáticos, publicaron un artículo manifiesto en el "American Mathematical Montly", en el que criticaban los nuevos programas.

Debido a carecer de una información adecuada y múltiple que nadie nos ha dado -¿quienes han sido nuestros maestros?-, durante años hemos seguido muchos de nosotros el que creíamos que era el único camino a seguir: el camino de los reformadores. Papy, Sutter, Calame, etc., eran en la enseñanza media el reflejo de lo que habían sido nuestras lecturas universitarias y profesionales. Durante años no hemos hecho más que explicar-reflejar lo que íbamos leyendo, pensando que la enseñanza de las matemáticas en el bachillerato debía ser una pequeña enseñanza universitaria.

En este sentido es una desgracia que Bourbaki haya nacido tan próximo a nosotros y, además, hablando francés, la lengua que nos era más accesible.

Todo venía tan bien preparado, tan bien empaquetado, ya listo para su uso inmediato, que se tenía la doble sensación de estar haciendo una revolución y de no correr ningún riesgo. Esta rara limpieza debiera haber sido suficiente para ponernos alerta; pero lo cierto es que no lo fue: hemos tardado en hacernos preguntas. Nos ha faltado reflexionar sobre nuestro trabajo. En particular sobre:

- las limitaciones, la polarización de nuestras fuentes;
- la conexión entre lo que enseñábamos y la realidad próxima;
- la conexión con las otras ciencias;
- el cambio que en la "misión" de la enseñanza media se estaba y se está produciendo ante nuestros ojos.

1.1. Ahora nos reconforta oír a grandes matemáticos, como Thom y Dieudonné, poner en duda determinados planteamientos:

> Es razonable preguntarse -dice Thom- si las necesidades de los matemáticos profesionales deben ser tenidas en cuenta en el nivel de la enseñanza secundaria. Imbuidos de espíritu bourbakista, los matemáticos de la generación actual han tenido la tendencia muy natural de hacer admitir en las enseñanzas superior y secundaria las teorías, las estructuras algebraicas que les habían sido tan útiles en sus propias investigaciones y que triunfan en el espíritu de la matemática de la época. Pero debemos preguntarnos si, en la enseñanza secundaria al menos, deben admitirse en los programas los últimos hallazgos de la técnica del momento[5]

Y afirma Dieudonné en la revista de la Asociación de Profesores de Matemáticas de Francia:

> Los profesores de enseñanza secundaria, al igual que sus colegas de la Universidad, han descubierto que es mucho más fácil enseñar a manipular conceptos abstractos, incluso a los niños, que hacerles captar las realidades que se ocultan bajo esas abstracciones. De ahí su exagerada admiración por la lógica en particular, y la importancia anormal que tiene la tendencia a darle en su enseñanza.

Pero Thom escribía ésto en 1970 y Dieudonné lo hace refiriéndose precisamente al artículo de Thom. Los franceses han llegado con retraso, y, con ellos, nosotros. No obstante, llegar tarde no es faltar. Confiemos en ello.

1.2. En el manifiesto de Ahlfors, Polya... de 1962 se criticaban los nuevos programas. Se quejaban específicamente de que:

a. Los nuevos programas dejaban de seguir principios pedagógicos tales como éste:

> La introducción de términos y conceptos nuevos debe ir precedida de una preparación concreta suficiente. No se debería esperar que jóvenes inteligentes aprendan reglas arbitrarias.
>
> En los programas modernos -dice Kline- las matemáticas son una colección de estructuras deductivas. El tratamiento correcto, en mi opinión, no es deductivo, sino constructivo. Deberíamos empezar con situaciones simples y concretas y con argumentos heurísticos y sólo gradualmente llegar a una organización deductiva.

En las demostraciones el procedimiento debe ser tan intuitivo como sea posible, adoptar axiomas que signifiquen algo para el estudiante y demostrar sólo aquello que el estudiante piensa que requiere demostración. La verdadera función de la demostración no es demostrar lo obvio con objeto de lograr unos objetivos y alcanzar unos standards sofisticados y puramente profesionales, sino demostrar lo que no es obvio.

Lo que es necesario para la validez de la deducción -dice Polya- es una penetración intuitiva en cada paso, que muestre que la conclusión obtenida en ese paso se sigue evidente y necesariamente del conocimiento adquirido anteriormente (adquirido directamente por la intuición o indirectamente por pasos previos en la deducción).

Otro punto fundamental de la crítica es que:

b. Los nuevos programas no hacen suficiente uso de sistemas físicos a partir de los cuales los estudiantes puedan descubrir intuitivamente relaciones matemáticas. No se trata de desarrollar un cuerpo de ideas matemáticas y sólo después introducir varias aplicaciones físicas.

Las aplicaciones deben surgir de modo natural, simplemente porque las ideas matemáticas elementales tengan una importancia práctica y un significado práctico.

La teoría debe ser reinventada en lo posible y por ello no puede preceder a la práctica.

1.3. La respuesta dada por los reformadores es ésta:

Cuenta a nuestro favor el éxito que profesores adecuadamente preparados han tenido en mantener el interés de los alumnos en una materia que tiene la reputación de ser a menudo extremadamente aburrida y a veces muy abstrusa. Las enormes mejoras se consiguen en proveer de una base intelectual que permita entender las ideas matemáticas. Las notaciones son más claras: las definiciones son elegidas con más amplitud; la participación del estudiante es mayor y se dirige hacia lo más esencial; la ordenación de las materias se mejora; se han añadido nuevos e importantes temas, otros relativamente poco importantes (o incluso erróneos) se han suprimido, las relaciones con otros temas son tratadas más adecuadamente y un aire más creador e incitante campea por el programa[6].

Es innegable que la respuesta es atractiva y prueba de ello es el éxito que ha tenido –tiene– entre los profesores de matemáticas, y no sólo entre ellos. Hay, no obstante, contrarréplicas de tres tipos, al menos: *una, técnica,* que tiene que ver con la sistematización:

La inclinación natural de un matemático es dar una instrucción matemática para futuros matemáticos. Para preparar una lección de matemáticas el profesor imagina el alumno al que le gustaría enseñar, y es muy probable que este alumno imaginario se parezca un poco al propio profesor. Pero un matemático nunca debería olvidar que las matemáticas son algo demasiado importante para limitar su enseñanza a adecuarse a las necesidades del futuro matemático.

La mentalidad matemática se expresa en la tendencia a matematizar las matemáticas. Desde luego que los estudiantes deben aprender a matematizar, pero para empezar deben matematizar situaciones reales. Matematizar situaciones matemáticas puede ser el final, pero no el comienzo. Para muchos el objetivo de la enseñanza de las matemáticas es introducir a los muchachos en un sistema de matemáticas, sistema que innegablemente irradia encanto estético, el cual, sin embargo, no puede ser captado por personas que no tengan un profundo conocimiento de las matemáticas. La sistematización como objetivo final es un objetivo para futuros matemáticos. Pero jamás debe ser el objetivo de una instrucción matemática general. Si es la sistematización la que determina la tabla de materias, invariablemente incluirá materias carentes de interés y excluirá otras muy valiosas. Si el sistema está bien construido desde el punto de vista del autor, puede entusiasmar a éste por su rigor lógico, y si otros matemáticos comparten su punto de vista (lo cual es raro) puede que también les entusiasme a ellos. Pero que la enseñanza siga el sistema es antididáctico (por ejemplo, la anticipación de lo afín sobre lo métrico dictada por el sistematismo) (Freudenthal)[7].

Otra, ideológica y social: La enseñanza de las matemáticas es un hecho social como cualquier otro y no debe ni puede escapar a ello. Esta primavera se han celebrado elecciones para designar el Comité Nacional de la Asociación de Profesores de Matemáticas de Francia. Un grupo de diez candidatos se ha presentado con unos objetivos comunes. He aquí algunos de los puntos expuestos en sus candidaturas:

– La petición nacional para aligerar programas no cambia el estado mental que, bajo un vocabulario ultramoderno oculta un pensamiento escolástico muy próximo al de la Edad Media por su desprecio de las ciencias experimentales. Parece de buen tono defender a los muchachos procedentes de las capas sociales más desfavorecidas; pero, ¿quién puede creer que los nuevos programas de matemáticas, por su construcción lógica, ayudan a los muchachos procedentes de medios no intelectuales? La filosofía oculta de los nuevos programas no hace sino contribuir a una selección feroz que no tiene nada de democrática.

– El esfuerzo necesario de modernización de las matemáticas debe continuarse; pero ese trabajo no debe perder de vista la adaptación a nuestra época. Es precisa una enseñanza matemática que no pierda el contacto con la realidad tangible para evitar descorazonar a cierto número de alumnos (¡e incluso a cierto número de profesores!).

– Desde el comienzo de siglo, los matemáticos han tratado de poner en pie un formalismo y una axiomática que permitan unificar los resultados de las distintas ramas matemáticas. Este trabajo, partiendo de resultados concretos, ha sido realizado en Francia por la escuela bourbakista. Sería vano negar la aportación de estos matemáticos a la matemática de nuestra época. De este trabajo, en lo que respecta a la enseñanza de las matemáticas, la tendencia actual no es otra que la de conservar sólo el vocabulario. Se llega así a una matemática encantatoria, con sus grandes sacerdotes, sus templos, sus corifeos.

– Es la hora de hablar claro. Se va a matar a todos los niveles la enseñanza de las matemáticas creando una desgana en quienes la utilizan, una desgana en los alumnos y una desgana en los enseñantes, por ese parloteo esterilizante[8].

–*Y una tercera, didáctica*: Que "la participación del estudiante es mayor" y que "un aire más creador campea por el programa" es algo que sólo puede ser cierto bajo la hipótesis de que la creación formalizadora y la participación en la elaboración de reglas son los modos arquetípicos de la creación y participación en una clase de matemáticas. La participación y la creación pueden ser conseguidas también –y, en nuestra opinión, en un grado más alto– en una enseñanza en la que no prevalezca la sistematización.

1.4 Para nosotros es un hecho cotidiano, y para los rectores de la enseñanza una consigna, la gran presión existente para enseñar más matemáticas a los estudiantes a una edad cada vez más temprana, debido al rápido crecimiento de las aplicaciones de las matemáticas.

Si ése es el cometido que se nos asigna a los profesores de matemáticas, no nos parece que lo llevemos a buen término. Nos preguntamos si es *realmente* al rápido crecimiento de las aplicaciones de las matemáticas a lo que se debe el que enseñemos más matemáticas, y *precisamente* las matemáticas que enseñamos, que estamos obligados a enseñar.

¿No se nos debe exigir que sometamos a crítica la enseñanza que damos?: ¿Cómo se aprende? ¿Hasta dónde la sistematización? ¿Con qué rigor? ¿A quién interesan las matemáticas? ¿Qué papel desempeña nuestra enseñanza en una sociedad de clases? ¿Es la nuestra una enseñanza de clase? ¿A quién beneficia? ¿Podemos ofrecer una alternativa?

Es muy difícil considerar las matemáticas, en cuanto a fenómeno científico, social e histórico, desde un punto de vista unitario. Incluso el planteamiento de esa unidad puede que sea ya idealista o, yendo un punto más allá, religioso. Pero sí creemos que la consideración de *la enseñanza de las matemáticas del bachillerato en nuestro país* cabe hacerla desde una perspectiva unificadora. Por eso, en los apartados que siguen, unas tesis se solapan con otras.

No será preciso decir que estas tesis no son teoremas, ni pueden serlo. Las matemáticas no lo son todo. Esperamos poder justificar algunas de ellas en posteriores números de esta revista.

2. Etapas de aprendizaje y estudio. La sistematización

Los libros de texto presentan por lo común el teorema del binomio como una consecuencia del principio de inducción completa. En el proceso de la invención matemática esto sería un círculo vicioso. Un principio como el de inducción completa no puede ser formulado salvo que previamente se haya experimentado, y el teorema del binomio es la experiencia decisiva que conduce a este principio. Para formular la inducción completa es indispensable saber lo que es la inducción completa y para conocerla es preciso haberla ejercitado, por ejemplo, con el teorema del binomio. El proceso deductivo es obtener de los axiomas de Peano el principio de inducción completa y aplicarlo después a varios ejemplos. Éste es un ejemplo patente de inversión antididáctica. En verdad, el análisis del proceso de aprendizaje muestra que el camino didáctico es precisamente el opuesto. Primeramente debe haber ejemplos que obliguen al estudiante a inventar la inducción completa; en estos ejemplos el estudiante reconoce el principio común; luego lo aplica a casos más complicados. Si ha captado el principio, el profesor tratará de que el estudiante lo formule (cosa que puede no ser fácil); y finalmente éste será puesto en la vía de los axiomas de Peano, con tal de que haya tenido previamente alguna experiencia en axiomatizar. Los niveles del proceso de aprendizaje aparecen aquí en claro relieve. En el más bajo de ellos la inducción completa se ejercita. En el nivel siguiente se la hace consciente como principio organizador y puede convertirse en objeto de reflexión. En el mismo nivel o a un nivel más alto se le da forma lingüística. (Freudenthal: "Mathematics as an educational task")[9]

TESIS

2.1 Querer agotar un tema en un asalto (ahora todo sobre espacios vectoriales; ahora todo sobre máximos y mínimos; ahora todo sobre integración) además de ser imposible en la enseñanza media, es una herencia Idealista, Inmovilista y Conservadora que oculta y anula todo el verdadero proceso de creación en matemáticas y que obliga a un alejamiento de la realidad sensible y de las ciencias empíricas, al tiempo que ayuda a desarrollar en el estudiante una perspectiva antihistórica.

2.2. Lo que criticamos es la exposición de un tema de tal manera que pretenda servir como primera y única "lectura" posible: la pretensión de sistematización y de perfección formal como objetivo de la enseñanza de las matemáticas en el bachillerato; la idea de que no hay otra manera de trabajar en un curso de matemáticas que sistematizar; la aberración de enseñar matemáticas a estudiantes de 15 años del mismo modo que a personas que llevan quince años estudiando matemáticas.

O todo o nada

En las clases de física aparece muy pronto la ley de la refracción, aunque no puede ser formulada matemáticamente porque la tradición matemática no proporciona el seno de un ángulo hasta uno o dos años más tarde. ¿No prueba esto, que el seno debería introducirse más temprano? Es imposible –objeta el matemático– porque la trigonometría lleva tal y tal número de semanas que yo no puedo malgastar, pues la trigonometría no puede empezar hasta haber dado tales y cuales nociones de álgebra. Ésta es una reacción característica del fanatismo por la sistematización. Se pide que el seno sea introducido antes; pero el seno, de acuerdo con la sistematización, cae dentro de la trigonometría y por ello debe explicarse en trigonometría; junto a senos y cosenos están tangentes, cotangentes, fórmulas de adición y duplicación, el teorema del seno y el teorema del coseno, las fórmulas de Nepper y Briggs... O todo o nada. ¿No podría ser el seno un magnífico ejemplo de función matemática introducida gráficamente, a partir de la circunferencia, en lugar de serlo algebraicamente? Yo diría incluso que es uno de los primeros ejemplos de función que un estudiante debería aprender.(Freudenthal: “Mathematics as an educational task”)[10].

3. Niveles de rigor

El proyecto idealista típico es reducir las matemáticas a un texto riguroso, sus reglas a las de un lenguaje. El proyecto materialista es tratar de determinar lo que las matemáticas hacen conocer –lo que hace de ellas algo distinto a un texto– y cómo lo hacen conocer –lo que hace de ellas algo distinto a un lenguaje–. (Raymond: “Le passage au matérialisme”)[11].

No hay un método fiable único que pueda ser empleado siempre para encontrar una primera aproximación de una raíz de una ecuación, pero una combinación de sentido común y de intuición gráfica será por lo común suficiente. (S.M.P.)[12]

La tarea del rigor es convencer; pero las matemáticas presentadas como lo *ya hecho* nunca convencen. Para progresar en rigor, el primer paso es poner en duda el rigor en el que uno cree en éste momento. (Freudenthal)[13].

Las demostraciones de nuestros predecesores no nos satisfacen, pero los hechos matemáticos que ellos han descubierto permanecen y nosotros los demostramos por métodos infinitamente más rigurosos y precisos e los que la intuición geométrica, con su carácter de evidencia mal analizada, ha sido barrida totalmente. (Lichnerowicz)[14].

Todo matemático que cuide su integridad intelectual, tiene la absoluta necesidad de presentar su razonamiento en forma axiomática. (Dieudonné, en 1939)[15].

El objeto de la enseñanza de las matemáticas será siempre alcanzar el rigor lógico, lo mismo que la comprensión de un formalismo suficiente. (Piaget)[16].

El papel de la formación matemática en la enseñanza secundaria consiste casi exclusivamente, en mi opinión, en familiarizar a los alumnos con el método deductivo. (Beth)[17].

TESIS

3.1 Las afirmaciones de Lichnerowicz, Dieudonné y Piaget, que tal vez sean válidas en la enseñanza universitaria, no lo son en la enseñanza secundaria, en la que uno de los objetivos, pero no el único, es *progresar* en el rigor. No creemos que lo que haya que hacer, “casi exclusivamente”, sea familiarizar a los alumnos con el método deductivo.

3.2 No hay un sólo nivel de rigor, sino varios niveles. Lo que en un estadio de desarrollo de las matemáticas ha sido considerado riguroso, se ha estimado *después* que no lo era. Lo que es riguroso para estudiantes de 2º de BUP, puede no serlo para estudiantes de 3º de la Facultad de Ciencias, y lo que es riguroso para éstos puede ser bizantino para aquellos.

3.3. La construcción científica de un fragmento dado del conocimiento matemático, no puede y no debe ser totalmente identificada con su construcción pedagógica.

3.4 Hay un permanente peligro de hacer creer al estudiante que sólo las demostraciones *plenamente* rigurosas de las matemáticas son racionales; y que fuera de las matemáticas no hay racionalidad: que no hay opciones racionales en la gestión de una empresa, o en la adhesión a un partido político, o en la decisión de socializar la medicina, por ejemplo.

El sentido del rigor en las demostraciones puede aprenderse mucho mejor en ejemplos en los que la demostración presente genuinas dificultades que con la sutil e inacabable demostración de trivialidades. (Manifiesto de Ahlfors, Kline...).

Hace algún tiempo leí algo a propósito de los esfuerzos para mejorar la enseñanza del análisis elevando los standards de rigor. Yo creo que el análisis en el bachillerato sólo puede mejorarse poniéndolo más en contacto con la realidad (Freudenthal)[18].

Las matemáticas experimentales, esto es, las matemáticas de descubrimiento libre, son mucho más importantes que las matemáticas confinadas a axiomas impuestos por el profesor o el libro de texto, y no hay razón para pretender que son menos rigurosas. Hay niveles de rigor y para cada materia hay un nivel de rigor adaptado a ella; el estudiante debe recorrer esos niveles y adquirir su rigor:

- *rigor ejercitado sin saber lo que es;*
- *rigor como criterio consciente que se aplica a argumentos aislados;*
- *Noción global de rigor que puede aplicarse a las matemáticas como un todo.* (Freudenthal)[19].

4 El interés de los estudiantes por las matemáticas

TESIS

4.2 Para la mayoría de los estudiantes, las matemáticas aparecen como un conjunto de rígidas reglas que se aprenden para los exámenes y luego se olvidan.

4.3 Gran parte del interés que muchos estudiantes tienen por las matemáticas se basa en el hecho –que ellos no ignoran, aunque no siempre sean conscientes de su significado social– de que es la disciplina a la que la política educativa asigna el papel más importante de la selectividad, cosa que la mayoría sienten como represiva y otros como trampolín de reconocimiento de una superioridad intelectual que a la larga esperan que sea social.

4.4. Numerosos estudiantes ven las matemáticas, cuando no las comprenden, como un instrumento de humillación, que poco a poco les va haciendo perder el gusto por el conocimiento.

4.5 El papel receptivo que generalmente el profesor asigna al alumno genera inevitablemente aburrimiento, “forma suprema de la represión intelectual”.

4.6 A la falta de interés que los alumnos sienten por las matemáticas contribuye en gran medida el profesor que cree que cumple su tarea informando al alumno, olvidando que informar al estudiante de ciertos hechos no garantiza que éste los conoce.

4.7 Por otra parte –algo que no es opuesto a lo anterior, sino complementario–, contribuye igualmente a la pérdida de interés un punto que a veces es simplemente una omisión y a veces una premisa didáctica: la falta de atención que se pone en la elaboración de reglas de correspondencia entre la teoría matemática y el campo a matematizar (“estos alumnos han aprendido matemáticas y no saben poner en ecuaciones el menor problema real”), olvidando el enorme esfuerzo que a la mayoría de nosotros –y a la mayoría de los científicos a lo largo de la historia– nos cuesta hacer eso que exigimos que el alumno haga como una mera “aplicación” de lo que sabe.

5 La enseñanza de las matemáticas en España

¿Qué finalidad se persigue en las sociedades modernas con la enseñanza de las matemáticas a los muchachos? Ciertamente no es la de hacerles conocer una colección de teoremas más o menos ingeniosos sobre las bisectrices de un triángulo o la sucesión de los número primos, de los que no harán después ningún uso (a menos que se conviertan en matemáticos profesionales), sino la de enseñarles a ordenar y encadenar sus pensamientos con arreglo al método que emplean los matemáticos y porque se reconoce que este ejercicio desarrolla la claridad del espíritu y el rigor del juicio. El objeto de esta enseñanza debe ser por tanto, el método matemático, y las materias de enseñanza no sean más que ilustraciones bien elegidas del mismo. (Dieudonné)[20].

La matemática pura es una creación libre del espíritu y no tiene en sí misma ninguna relación con los hechos de la experiencia. (Heyling)[21].

TESIS

5.1. “La filosofía clásica se ha aprovechado de las matemáticas para elaborar sistemas de valores que sirven para sostener los intereses sociales de la clase dominante” (Raymond: “Le passage au materialisme)[22].

5.2. En nuestro país, las Facultades de Matemáticas tienen como filosofía dominante precisamente esa filosofía clásica. En ellas hemos aprendido a reproducir las relaciones de clase existentes. Los profesores de matemáticas somos, en general, en este país, aliados objetivos de la clase dominante.

5.3. Las matemáticas en la enseñanza media están en gran manera supeditadas a las necesidades y los programas de la enseñanza universitaria.

5.4. La enseñanza actual es una enseñanza de clase destinada a reproducir la división social, y es en esos términos en los que es preciso analizar la enseñanza de las matemáticas.

5.5. Tanto profesores como estudiantes sufrimos la contradicción existente entre las matemáticas como centro de interés científico y las matemáticas como instrumento de selección social.

5.6. Distinguir entre matemáticas “nobles” -las que enseñamos nosotros- y matemáticas “útiles y prácticas” -las que enseñan profesores de otras ciencias- no es más que cumplir la misión que nos asigna la clase dominante.

5.7. Todos creemos en la tesis de Dieudonné: “No se trata de hacer conocer una colección de teoremas más o menos ingeniosos sobre bisectrices de un triángulo o sobre la sucesión de los números primos”; sin embargo, hemos tardado en ver que el objetivo fundamental de la enseñanza de las matemáticas en el bachillerato no debe ser “enseñar a pensar” o “desarrollar la claridad del espíritu y el rigor del juicio”, sino:

I. Dar una información específica real y no ficticia sobre el mundo y la sociedad en la que el estudiante y el profesor viven.
II. Elaborar un modelo matemático para entender la realidad.
III. Utilizar el modelo para actuar y buscar soluciones que los alumnos puedan *colectivamente* dar a conocer en su medio.

El objetivo fundamental de nuestra enseñanza de las matemáticas no es, pues, otro que *enseñar a pensar qué hay que hacer.*

5.8. Todo trabajo individual debe enmarcarse en un trabajo colectivo previamente planeado.

5.9. La tarea es larga: no basta con introducir en la enseñanza media tal o cual materia –cosa que puede hacerse por Decreto– para modernizar la enseñanza. Se trata de algo más difícil: se trata de una “enseñanza moderna de las matemáticas” , como pide Freudenthal, y no solamente de una “enseñanza de las matemáticas modernas”.

5.10. Para ello es necesario modificar la estructura de la clase y la estructura del centro de enseñanza. Desde ahora mismo.

5.11. La posibilidad de realizar un cambio efectivo en la enseñanza de las matemáticas en el bachillerato, pasa necesariamente por el trabajo de muchos y no por el de unos pocos, por mucha energía que éstos pongan.

Eliseo Borrás, María Elisa Carrillo, Joaquín D’Opazo,
Francisco Hernán, Adela Salvador, José Luís Tomás

Problemas propuestos

¡La bolsa o la vida!

La bolsa

Lucifer en Las Vegas (problema propuesto por Martin Gardner en "*Mathematial puzzle tales*"

> *Desde que fue expulsado del paraíso, Satán vio que la eficacia de sus poderes paranormales estaba en función de la convicción que la humanidad tenía en ellos. Al disminuir la fuerza de esta creencia con el paso del tiempo, el Maligno, hacia mediados del siglo XXI, había visto sus poderes psíquicos reducidos de tal manera que no podía ya echar maldiciones cuyo efecto durase más de veinticuatro horas. Para romper la monotonía del infierno, el Diablo, disfrazado de mortal, se puso a frecuentar regularmente los casinos de Las Vegas. Un día a guisa de magnate tejano del petróleo se acercó a un robusto y campechano hombre de Omaha que estaba junto a una mesa de ruleta.*
>
> *- ¿Amigo, le gustaría hacer conmigo una apuesta un poco especial?*
> *- Habría que ver de qué se trata; gruñó el hombre de Omaha.*
> *- Enseguida se lo digo. Lo que le propongo es esto. Vamos a jugar con los colores de la ruleta, el rojo y el negro. Elige usted cualquier terna de colores, por ejemplo rojo-rojo-negro, la que quiera. Entonces elegiré yo una terna diferente. Nos pondremos de acuerdo sobre el momento de comenzar y observaremos la ruleta para ver cuál de nuestras ternas ha salido primero. Si sale antes la suya, usted gana, si es la mía la primera, gano yo. Prescindiremos del cero. Apuesto 5 contra 4, es decir, si usted gana le pagaré cinco "pérsicos", y si gano yo me pagará usted 4. Cada vez que repitamos la apuesta, usted puede elegir la terna primero.*
> *- Hmmm... (reflexionó el hombre de Nebraska) cada vez que gire la ruleta hay una probabilidad 1/2 de que salga rojo, y también 1/2 de que salga negro. La probabilidad de obtener una terna cualquiera es 1/2 por 1/2 por 1/2, o sea 1/8, y todas las ternas tienen la misma probabilidad de salir. Ninguno de los dos tiene ventaja.*
> *- Exacto, dijo sonriendo el diablo, y le estoy ofreciendo una apuesta mejor que a la par.*
> *-...Su propuesta es diabólicamente tentadora; vamos a jugar.*

La vida

El juego de la vida de Conway. Propuesto por Eliseo Borrás en múltiples ocasiones.

> *Inventado en 1970 por el matemático inglés John Conway, es uno de los autómatas celulares más famoso. Las reglas de nacimiento y muerte de cada célula de una retícula cuadrada son sencillas: Cada célula (cuadradito) de la retícula está rodeado (vecinas) de ocho células. Cada célula puede estar viva o muerta. Una célula viva permanece viva si sólo tiene como vecinas 2 o 3 células vivas, en otro caso muere de soledad o de sobrepoblación. Una célula muerta nace cuando está rodeada exactamente por tres células vivas.*
>
> *El comportamiento de estos autómatas es increíblemente complejo, a pesar de las sencillez de las reglas de funcionamiento. El caos aparece de nuevo. No hay forma de predecir de antemano, y de forma general, cuando una configuración inicial de células será estable, morirá, será oscilante...*

Seguramente, para obtener una semilla que produzca una configuración estable tendremos que dedicar bastante tiempo a pensar con papel cuadriculado y lápiz al lado. Jugar sólo a cambiar la semilla y observar los distintos resultados puede convertirse en un pasatiempo trivial si no se utiliza esta información como retroalimentación de un trabajo más reflexivo.

Soluciones a los problemas del número anterior

¿Difícil viajar? O las bodas en Anchuria

El enunciado es equivalente a la primera parte del que aparece en *Probabilidad y Estadística* de Arthur Engel, tomo I, página 59, con el título "El casamiento de las muchachas de Anchuria", que presenta rasgos sexistas y el contexto es más exótico, con las consiguientes consecuencias antipedagógicas. Dice el enunciado de Engel:

4. Algunos ejemplos interesantes

4.1. El casamiento de las muchachas de Anchuria

Cuando una muchacha de Anchuria cumple 18 años, pide permiso para casarse. El alcalde le pone en la mano seis trozos de cuerda fina. Por cada lado del puño cerrado sobresalen seis cabos, que se agrupan al azar por pares y se anudan (figura 4.1). Si se obtiene un anillo, como el de la figura 4.2, la muchacha recibe autorización para casarse. En caso contrario, repite la experiencia un año después.

¿Cuál es la probabilidad de obtener un anillo? ¿Cuál es la probabilidad de que una joven fracase 10 años seguidos?”

El problema de Engels continúa:

“El nuevo presidente de Miraflores decide que, en adelante, se anudarán los cabos de arriba con los de abajo. De esta forma, espera reducir la tasa de nacimientos. ¿Cuál es ahora la probabilidad de obtener un anillo?

Al cabo de cierto tiempo, Miraflores decide reducir todavía más la natalidad. Con este fin, decreta que cada extremo se anudará, al azar, con un extremo libre de arriba o de abajo. ¿Cuál es ahora la probabilidad de obtener un anillo? ¿Y si tenemos 2n cuerdas?

¿Cuál es ahora la probabilidad de obtener un anillo? ¿Y si tenemos 2n cuerdas?

En “¿Difícil viajar?”, propuesto por Eliseo en *Es posible*, el contexto es actual y el sesgo androcéntrico ha desaparecido. Sólo propone la primera parte, las restantes, recién enunciadas más arriba, las ofrecemos para que vuestras alumnas y alumnos les cambien el contexto, de forma acorde a “¿Difícil viajar?” y para que las resuelvan durante el próximo periodo. Las soluciones aparecerán en el apartado de “problemas resueltos” en el nº 67, en esta sección.

Recordemos el enunciado de *¿Difícil viajar?*

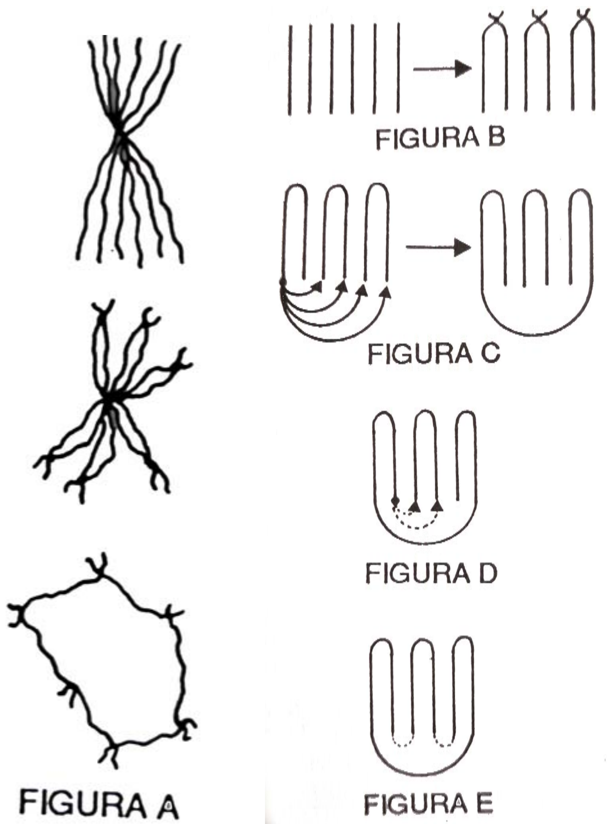
En cierto país andan escasos de divisas y, el Ministerio de Turismo, para restringir los viajes al exterior, somete a una prueba de azar a quienes quieren viajar.

A cada candidato le ofrecen seis cuerdas iguales, de la misma longitud, que alguien tiene cogidas por la mitad con la mano cerrada, dejando ver los extremos superiores y los inferiores de las cuerdas.

El aspirante a viajero tiene que atar las cuerdas, al azar, de dos en dos por arriba y también de dos en dos por abajo (figura A). Recibe permiso para salir del país solamente si después de haber hecho los seis nudos, al abrir la mano, las seis cuerdas quedan formando un solo anillo.

¿Crees que es muy difícil que una persona reciba autorización para viajar? ¿Qué porcentaje de personas podrán salir del país?”

En primer lugar pedimos al alumnado que haga una predicción y, generalmente, la mayoría contesta que una figura tan especial es muy difícil que se produzca anudando al azar.



Hecho esto, se procede a realizar la experiencia y se pide a las alumnas y alumnos que han conseguido el anillo que levanten la mano (Fgura A). Se repite varias veces y el resultado es abrumadoramente sorprendente: casi siempre salen más de la mitad premiados. ¿Por qué? La explicación es sencilla[23].

Los nudos que haga cada viajero con los cabos sueltos que asoman por arriba (o por abajo) no alteran el resultado. Lo interesante viene cuando analizamos qué puede pasar al anudar los del otro lado: el primer cabo puede anudarse a cualquiera de los restantes. Sólo en una ocasión se anudará con el mismo cabo que lo hizo en el lado opuesto, formando un pequeño anillo de dos cordeles, independiente del resto, impidiendo el anillo total. En caso contrario, la cosa va bien, el primer nudo es favorable (figura C); con los cuatro cabos restantes ocurrirá algo parecido:

a) elegimos un cabo de los dos cordeles que han quedado independientes del proceso anterior, entonces uno de los nudos hará coincidir los dos cabos que ya estaban anudados en el lado opuesto haciendo fracasar al aspirante y otro encadenará el cordel con los anteriormente encadenados (figura D);

b) elegimos uno de los anteriormente encadenados: si se anuda con el extremo que cierra el círculo de los cuatro cordeles implicados en el proceso hasta ahora tampoco ganará el premio. Sólo queda pues una posibilidad. Los dos cordeles restantes cierran el anillo total necesariamente (figura E). Así que 4/5 favorables del primer nudo por 2/3 del segundo nos da 8/15 que es mayor que 0,5, por lo que la expectativa inicial de que es muy difícil que te toque el premio es falsa. La respuesta a la última pregunta es obvia, aproximadamente un 53 %

Desintegración radiactiva

La desintegración de los átomos de las sustancias radiactivas es un fenómeno estadístico: no se puede saber de antemano qué átomos se van a desintegrar en un instante determinado, aunque cuanto más tiempo transcurra mayor es la probabilidad de que se desintegren los átomos existentes. Además la cantidad que se desintegra en cada momento es proporcional a la materia que existe en ese momento.

Este fenómeno puede simularse mediante el lanzamiento de cierto número de dados, cada uno de los cuales representará un átomo.

Si consideramos que un átomo se desintegra cuando sale 6, podemos lanzar 100 dados cúbicos y retirar el dado en el que haya salido un seis . Repetimos la operación con los dados restantes.
¿Cuántos dados quedan después de 1, 2, 3..., lanzamientos?

¿Cuántos lanzamientos hay que efectuar para que se reduzca a la mitad, o menos, la cantidad inicial de dados?

¿Y para que se reduzcan a la tercera parte?

¿Pueden desintegrarse todos los átomos?

Antes de comenzar las pruebas pedimos a los alumnos que conjeturen sobre el número de lanzamientos necesarios para que el número de dados sea menor que 50 y justifiquen sus opiniones.

Realizamos la simulación por parejas de forma que los mismos alumnos controlan las condiciones de la experiencia. Tras cada lanzamiento las parejas retiran los dados en los que aparece un seis. Recogen los resultados en una tabla.

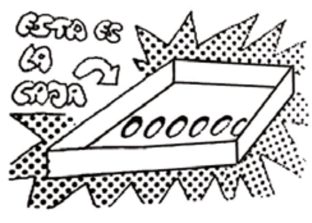
Lanzamiento	Nº de átomos	Átomos desintegrados	Átomos no desintegrados

Se sigue jugando hasta que quedan la mitad de dados. Se resalta este resultado en la tabla. Id para la tercera parte y también cuando ya no quede ningún dado.

Una vez termina el proceso, cada pareja anota sus resultados en una tabla en la pizarra. A partir de ella, además de poder comprobar y discutir si la simulación se ha efectuado correctamente, comentaremos los datos estadísticos obtenidos, calcularemos los tiempos medios de espera para que se reduzca a la mitad y la moda.

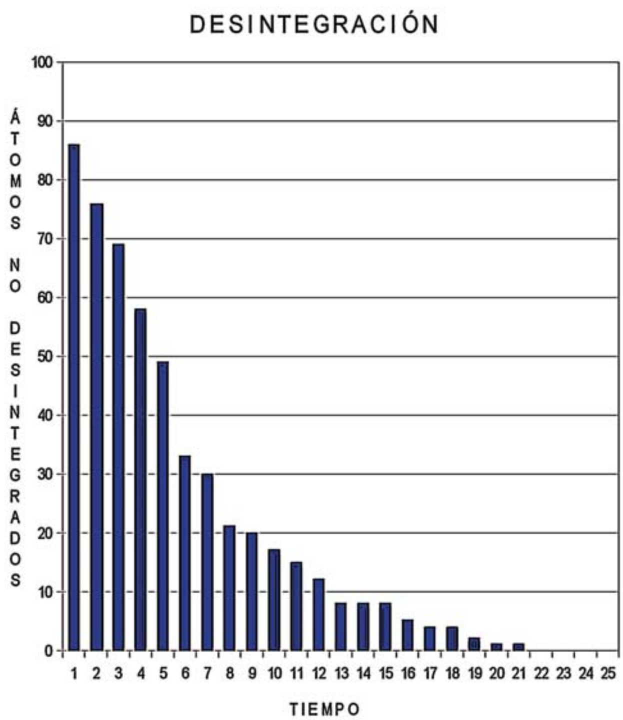
Después repetiremos el experimento individualmente, en el ordenador, con una hoja excel y la función random entre 1 y 6. Así reduciremos el tiempo de las tiradas e introduciremos y/o afianzaremos el trabajo con números aleatorios para simular juegos de azar. Las alumnas y alumnos se iniciarán en el método de Monte Carlo con ordenador. Además podrán obtener el gráfico que les aproxima a la función que modeliza el fenómeno de la desintegración y tantos otros similares como el crecimiento de la concha de una caracola, la capitalización a interés compuesto o el crecimiento de una población.

Podemos simular la desintegración no sólo mediante dados, sino también con ruletas, urnas, monedas o mediante una caja perforada en la que se dejan caer un número determinado de bolas. Se cuentan las que han caído, "se han desintegrado", se repite el proceso varias veces (al menos 15) con las que quedan y se tabulan los resultados.



Lanzamiento	Nº de átomos	Átomos desintegrados	Átomos no desintegrados
1	100	14	86
2	86	10	76
3	76	7	69
4	69	11	58
5	58	9	49
6	49	16	33
7	33	3	30
8	30	9	21
9	21	1	20
10	20	3	17
11	17	2	15
12	15	3	12
13	12	4	8
14	8	0	8
15	8	0	8
16	8	3	5
17	5	1	4
18	4	0	4
19	4	2	2
20	2	1	1
21	1	0	1
22	1	0	0
23	0	0	0
24	0	0	0
25	0	0	0

Con estos diferentes tipos se obtienen resultados similares al siguiente:



El tiempo que aparece en el eje de abscisas esta medido en tiradas. Los valores en ordenadas son los que aparecen en la cuarta columna de la tabla anterior.

Para que el procedimiento resulte ágil, se puede automatizar el conteo de los seises y los no seises, en una hoja de cálculo de Open Office, de 26 por 100, en la que la primera columna es de unos y por tanto suma100 e indica el número de lanzamientos o de átomos no desintegrados antes de comenzar la simulación, las celdas de las restantes columnas valen uno o cero y éstas suman una cantidad igual al número de átomos no desintegrados, gracias a la orden:

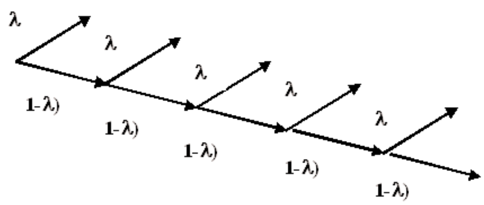
=SI(ALEATORIO.ENTRE(1;6)=6;0;A1)

copiada a todas las celdas de las 25 columnas siguientes a la primera.

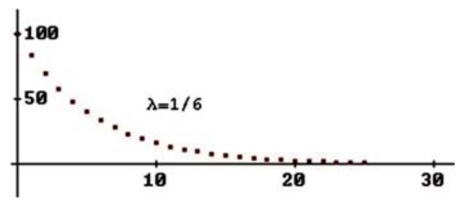
Si N es el número de átomos no desintegrados, después de n pruebas, N_0 el número inicial de átomos y λ la probabilidad de desintegración de un átomo, la probabilidad de no desintegración de cada átomo en cada tirada será 1-λ.

Del árbol siguiente se deduce que tras n tiradas y N_0 átomos iniciales, el número N de átomos presentes será:

$$N=N_0(1-\lambda)^n,\ n=0,\ 1,\ 2...$$



y la gráfica de esta experiencia discreta tendrá este aspecto:



Para pasar al caso continuo, usando la variable tiempo t en lugar del número de tiradas n, podemos dividir el intervalo de tiempo t en n subintervalos de de tamaño t/n con n suficientemente grande. Siendo λ la probabilidad de que un átomo se extinga en una unidad de tiempo, la probabilidad de que se produzca la extinción en uno cualquiera de dichos n subintervalos es $\lambda t/n$ si n es suficientemente grande. Ahora es como si hiciésemos un sorteo para cada uno de esos pequeños subintervalos en los que la probabilidad de extinción es $\lambda t/n$ y por lo tanto la de supervivencia $1-\lambda t/n$.

Tomando límites cuando n tiende a infinito, obtenemos:

$$\lim N_0(1-\lambda t/n)^n = N_0\, e^{-\lambda t}$$

Así pues, $N=N_0\, e^{-\lambda t}$, $t\geq 0$, donde N_0 es la cantidad inicial de átomos y N la cantidad de átomos supervivientes al cabo de un tiempo t, cuya gráfica ajusta muy bien a la anterior pero es continua.

De la última fórmula se desprende que para que el número de átomos se reduzca a la mitad,

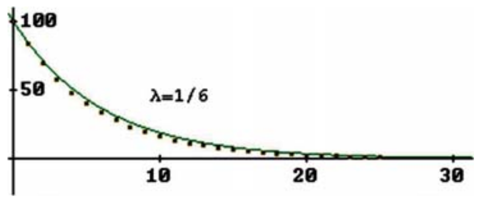
$$N_0/2=N_0\, e^{-\lambda t}$$
$$1/2= e^{-\lambda t}$$

Tomando logaritmos neperianos

$$\ln(1/2)=\ln e^{-\lambda t}$$
$$-\ln 2 = -\lambda t$$
$$t=\ln 2/\lambda$$

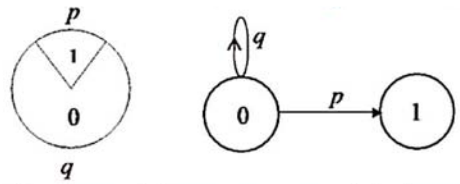
Así pues:
Semivida= $\ln 2/\lambda = 0.693/\lambda = 0.693/(1/6) = 6\cdot 0.693 = 4{,}518$

Para que se desintegren más de la mitad será necesario un valor superior a 4,518 unidades de tiempo. Para que el número de núcleos se reduzca a 1/3, procederemos análogamente, obteniendo $\ln 3/\lambda=6\cdot\ln 3$.



Como se puede apreciar, la gráfica de la simulación, la de la probabilidad y la de la función de desintegración, son muy aproximadas.

Por otro lado, mediante el ábaco probabilístico podemos calcular la probabilidad de que un átomo se desintegre en n lanzamientos, así como el número de lanzamientos necesarios para que esta probabilidad sea 0,5.



T = número de lanzamientos antes de la desintegración

$$Prob(T=n) = p_n = q^{n-1}\, p \qquad \mu = E(T) = \frac{1}{p}$$

$$Prob(T>n) = q_n = q^n\,,\ n=1,2\ldots \qquad \sigma^2 = V(T) = \frac{q}{p^2}$$

$$\frac{1}{2} = q^n \Rightarrow \qquad n = \frac{\log\frac{1}{2}}{\log\frac{5}{6}} \approx 3{,}802 \approx 4$$

EL HILO DE ARIADNA

Este artículo ha visto la luz gracias a la inestimable ayuda de Vicente Calixte Juan, Pilar Moreno y Juan Carlos Orero.

Este artículo fue solicitado por *Suma* en octubre de 2010 y aceptado en diciembre de 2010 para su publicación.

NOTAS

1 La tendencia es la dirección general de los picos y valles de la gráfica del producto mundial bruto que da cuenta de la marcha (descendente) de la economía real.

El crecimiento exponencial acelerado que se observa en la gráfica de productos derivados, comparada con el descenso progresivo de la economía real, explica la gravedad y las causas de la actual crisis en su nivel económico: desplazamiento de la inversión del mundo productivo a la especulación financiera.

2 Las negritas no aparecen en el texto de E. Castelnuovo, son una licencia para enfatizar el tema del artículo.

3 Borrás Veses, Eliseo. (2002). “Tres algoritmos en busca de autor” en Jornadas “Las Matemáticas y sus aplicaciones. Un reto en la enseñanza actual”. IES Ferrer y Guardia.

4 Lakatos explica este hecho en un magnífico trabajo: "Proofs and Refutations", en el que, siguiendo paso a paso un problema (en un poliedro, ¿es el número de caras, mas el de vértices, igual al número de aristas aumentado en 2?), muestra que las matemáticas no son, a lo largo de su historia una cadena de demostraciones aceptadas enseguida por los matemáticos, sino un complejo campo de demostraciones y refutaciones, a través del cual el avance no es en línea recta con pequeñas detenciones para reflexionar, como a veces se nos ha hecho creer y como, en cierta manera, la enseñanza de las matemáticas transparenta.

5 En "L'age de la science", vol. 3, núm. 3, 1970.

6 En "Problems in the Philosophy of Mathematics". Ed. Lakatos. Hay un trabajo de Jack A. Easley en el que trata la polémica reformadores-críticos y aporta ideas que ilustran una tercera vía.

7 "Mathematics as an educational task", pag. 69.

8 Revista de la A.P.M.E.P. de Francia, núm. de abril de 1975.

9 Pág.122,

10 Pág. 138.

11 Pág. 229.

12 S.M.P. "Advanced Mathematics", libro 2, ág. 458.

13 L.c. Pág. 151.

14 "Logique et connaisance scientifique". Ed, Gallimard, pág. 475

15 "Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathematiques", citado por Lakatos en "Proofs and Refutations"

16 "La enseñanza de las matemáticas". Piaget, Beth, Choquet y otros. Ed. Aguilar, pág. 27.

17 Mismo sitio, pág. 40

18 "Mathematics as an educational task", pág. 513.

19 L.c. pág, 148

20 "La enseñanza de las matemáticas". Ed. Aguilar, pág. 43.

22 Citado por Raymond: I. c. Pág. 368.

22 Pág. 325.

23 Los gráficos proceden de la versión publicada por José Colera en el nº 37 de *Apuntes de educación*, Pág. 9.

XXIX Concurso de Resolución de Problemas

Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas
Colegio de Doctores y Licenciados en Filosofía y Letras y en Ciencias

Bases del Concurso

Primera: Los alumnos podrán participar en el Concurso en tres niveles:
a) *Primer nivel*: alumnos de 3º de E.S.O.
b) *Segundo nivel*: alumnos de 4º de E.S.O.
c) *Tercer nivel*: alumnos de 1º Bachillerato

Segunda: Las pruebas consistirán en la resolución de Problemas de Matemáticas (los mismos para todos los concursantes de un mismo nivel) y se realizarán en la mañana del sábado *11 de junio del 2011* a partir de las 10 horas en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

Tercera: A los mejores de cada nivel, se concederán diplomas y premios.

Cuarta: Los Centros que deseen presentar alumnos (hasta un máximo de seis) deberán realizar la preinscripción antes del día 20 de Mayo del 2011, dirigiéndose por correo electrónico, carta o fax al presidente de nuestra Sociedad:

Prof. Javier Etayo Gordejuela
Departamento de Algebra
Facultad de Ciencias Matemáticas
28040-Madrid *Fax: 91 394 4662*
Correo electrónico: jetayo@mat.ucm.es

En la preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados. Si algún centro desea presentar más de seis alumnos, debe solicitarlo antes de la fecha mencionada anteriormente.

Quinta: Los centros entregarán a los alumnos que envíen, credenciales individuales en las que se haga constar que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas, así como el curso en que están matriculados en el año académico 2010-2011.

V Concurso de Proyectos Educativos en Estadística e Investigación Operativa para Profesores de Enseñanza Secundaria y Bachillerato

Bases del Concurso

1. Podrán participar todos los profesores que en el curso 2010-11 realicen tareas docentes en los niveles de Educación Secundaria y/o Bachillerato. Los concursantes podrán participar a nivel individual o en grupo.
2. Los trabajos se enmarcarán preferentemente en alguna de las dos siguientes líneas:
   - Material didáctico en relación con alguno de los temas o tópicos de Estadística o Investigación Operativa incluidos en los programas de los niveles señalados.
   - Experiencias didácticas para divulgar y/o fomentar el interés en la Estadística y/o la Investigación Operativa.
3. Los trabajos deberán ser originales y no deberán haber sido premiados o publicados con anterioridad.
4. La extensión máxima del trabajo presentado será de 25 páginas, escritas en letra de tamaño 11 puntos y con interlineado de 1,5 líneas. Además, deberá tener una estructura similar a la siguiente:
   - Título y pseudónimo (portada del trabajo).
   - Presentación (incluyendo los objetivos del trabajo y el ámbito educativo al que va dirigido (ESO o Bachillerato, y curso).
   - Desarrollo del trabajo.
   - Experimentación en el aula y evaluación de la experiencia, en su caso.
   - Referencias, en su caso.

Los trabajos podrán acompañarse con una presentación en formato electrónico.

5. Los concursantes remitirán una copia del trabajo impresa en DIN-A4, un CD que incluya una copia del trabajo en formato PDF, en su caso la presentación electrónica, y un sobre cerrado indicando en el exterior el título del trabajo y el pseudónimo, y en el interior: nombre y apellidos del autor/es, nombre, dirección y teléfono del centro/s al que pertenece y un correo electrónico o teléfono de contacto.
6. Los trabajos se remitirán a la siguiente dirección:
   Sociedad de Estadística e Investigación Operativa. VI Concurso de Proyectos Educativos en Estadística e Investigación Operativa para Profesores de Enseñanza Secundaria y Bachillerato
   Facultad de Ciencias Matemáticas. Universidad Complutense
   Despacho 502, Plaza de Ciencias, 3
   28040-Madrid (Ciudad Universitaria)
7. La fecha límite de remisión de los trabajos será el 20 de julio de 2011.
8. Se otorgará un premio de 1.000 € al mejor trabajo presentado. El concurso podrá ser declarado desierto o compartido entre varios trabajos, sin que ello suponga una variación en su cuantía global.
9. El Comité encargado de la evaluación de los trabajos presentados al concurso y del fallo del mismo estará compuesto por todos los miembros de la Comisión de Educación y Divulgación de la SEIO y por la editora de BEIO (revista oficial de SEIO).
10. La fecha límite para la resolución del concurso será el 15 de octubre de 2011.
11. El trabajo ganador o trabajos ganadores será/n publicado/s en la página web de la SEIO (www.seio.es). Además se publicará/n en la revista BEIO (www.seio.es/BEIO/) previa adaptación a las normas editoriales de la misma. En cuanto al resto de los trabajos presentados podrán ser publicados en la página web de la SEIO a criterio de los miembros del Comité encargado de la evaluación de los trabajos.

15 JAEM
JORNADAS SOBRE EL APRENDIZAJE Y LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Gijón, del 3 al 6 de julio de 2011
www.15jaem.org

Segundo anuncio

Matemáticas, base de nuestra cultura

Una vez más, y ya vamos por la XV edición, estamos dispuestos a celebrar nuestras queridas JAEM.

Las JAEM nacieron antes de crearse la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. En diciembre de 1980, en una reunión celebrada en Sevilla, se decidió organizar "una serie de encuentros periódicos para profesores de EGB, BUP, FP y Universidad, destinados a potenciar el intercambio de experiencias, la renovación metodológica y la reflexión sobre su quehacer". Con este objetivo nacieron las Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, cuya primera edición tuvo lugar en Barcelona en mayo de 1981. Los años siguientes tuvieron lugar en Sevilla (1982), Zaragoza (1983), Tenerife (1984) y se produjo una interrupción hasta que en 1991 la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, que se había creado en Sevilla en 1988, propuso su reanudación con la quinta edición de Castellón y a partir de entonces se decidió celebrarlas bianualmente. Así, fueron llevándose a cabo las siguientes: Badajoz (1993), Madrid (1995), Salamanca (1997), Lugo (1999), Zaragoza (2001), Tenerife y Las Palmas (2003), Albacete (2005), Granada (2007), Girona (2009).

Posiblemente, nadie hubiera podido pensar en los inicios que 30 años después las JAEM seguirían vivas y con la consolidación e importancia que ahora tienen ya que podemos decir que son el más importante Congreso sobre enseñanza y educación matemática de los que se organizan en toda España.

Y ahora, en la XV edición recalarán por primera vez en Asturias. Esta vez tendrán lugar en Gijón del 3 al 6 de julio de 2011. Desde hace tiempo, el Comité de Programas, el Comité Organizador y toda la SADEM (Sociedad Asturiana de Educación Matemática Agustín de Pedrayes) están trabajando con esmero y dedicación para conseguir un evento con el máximo nivel profesional y seguro que conseguirán con su ilusión y esfuerzo que estas sean unas JAEM importantes y útiles para el profesorado y la sociedad.
Es para mí un honor, como presidente de la FESPM, el poder presentar a todo el profesorado estas Jornadas que constituyen una actividad emblemática de la Federación y que debemos utilizar como foro para la reflexión, el debate, la formación, así como lugar de encuentro e intercambio en la Educación Matemática.

La FESPM nos invita a todos a participar activamente en nuestras XV JAEM, las de todos los profesores que pensamos que las matemáticas han de jugar un papel fundamental en la formación de las personas. Animaos a participar con el convencimiento de que la ciencia que nos acoge y con cuya enseñanza tanto disfrutamos, crecerá.

Nos veremos en Gijón.

Serapio García Cuesta
Presidente de la FESPM

Saludo del Comité Organizador de las 15 JAEM

Vamos al norte, vamos a Gijón.

Ya sabes que el próximo mes de Julio van a tener lugar, en Gijón, las 15 Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas.

La verdad es que, aunque para visitar Asturias no se necesita ningún motivo especial, si además se celebran nuestras queridas Jornadas, se te va a hacer muy difícil no asistir.

En este sentido, queremos intentar contagiarte de la ilusión y el entusiasmo que todo el Comité Organizador de las 15 JAEM estamos poniendo en nuestra tarea.

Y queremos animarte a que participes, a que vengas a hablarnos de tus alegrías y decepciones, de lo bien que te sientes cuando percibes que "esa clase" ha salido preciosa y de ese nudo que se te pone en el estómago cuando intuyes que ha sucedido justo lo contrario; queremos que vengas a hablarnos de la magia que a veces aparece en el aula y también de esos días en los que "no puedo con ellos"; queremos que vengas y compartas con todos nosotros tu experiencia, tus estrategias didácticas, tus certezas y también tus dudas; queremos que vengas y compartas con nosotros, sencillamente, un trozo de tu vida.

Quedan apenas unos meses. El sentido de nuestro trabajo organizativo nos lo vas a proporcionar tú.

Queremos que en julio vengas al norte, que vengas al mar, que vengas a Gijón.

Comité Organizador de las 15 JAEM

Fechas y lugar de celebración

Las 15 JAEM se celebrarán del domingo 3 al miércoles 6 de Julio de 2011, en Gijón.

Los actos de las Jornadas tendrán lugar en "Laboral Ciudad de la Cultura", espacio situado en un magnífico entorno que contiene también el Campus Universitario y el Parque Científico-Tecnológico de Gijón.

Estructura de las 15 JAEM

Están articuladas en tres grandes bloques.

Primer bloque de actividades

- **Conferencias plenarias**. A cargo de personalidades de reconocido prestigio en el campo de la Educación Matemática, invitadas por el Comité de Programa de las Jornadas. Serán:
  - **Está pasando, lo estás haciendo.**
    José Luis Álvarez García, Rafael Losada Liste
  - **Investigación etnomatemática más allá de la línea de Wallace.**
    Miquel Albertí Palmer
  - **Matemáticas, Naturaleza y Arquitectura: tres mundos interconectados.**
    Mª Encarnación Reyes Iglesias
  - **Si hay matemáticas, esto es cultura.**
    Grupo Alquerque: José Muñoz Santonja, Antonio Fernández-Aliseda Redondo, Juan Antonio Hans Martín

- **Ponencias**. Se desarrollarán un total de 14 ponencias, a cargo de ponentes invitados por el Comité de Programa, en torno a los siguientes núcleos temáticos:

1. *Planteamiento y resolución de problemas*
   El planteamiento y la resolución de problemas es uno de los componentes esenciales de la actividad matemática y de su aprendizaje. Es importante que estén presentes de forma continuada a lo largo de todo el periodo formativo del estudiante y no constituir una pieza aislada de los diferentes currículos.
   - **Un paseo divertido por el currículum de Primaria a través de los problemas.**
     Xavier Fernández Berges
   - **El Aprendizaje basado en Proyectos en la Educación Matemática del siglo XXI.**
     Carlos Morales Socorro

2. *Pensamiento y razonamiento matemático*
La actividad matemática desencadena procesos que permiten desarrollar capacidades genéricas (explorar, clasificar, analizar, generalizar, estimar, inferir, abstraer, argumentar) y otras más específicas asociadas al pensamiento lógico y la capacidad de razonamiento (deductivo, inductivo, analógico). A su vez educa la percepción y visualización espacial, estimula la actitud crítica, agudiza la intuición, fomenta la creatividad, prepara para la toma de decisiones y el enfrentamiento con situaciones nuevas... Pero a pesar del tópico según el cual las matemáticas enseñan a pensar, estos procesos no se producen de forma espontánea.

– **¿De verdad crees que las matemáticas del Instituto ayudan a razonar?**
Jorge Fernández Herce
– **Matemáticas y razonamiento: miradas externas.**
Ángel Requena Fraile

3. *Simbolismo, formalización y demostración en matemáticas*
Los modos matemáticos de simbolización son métodos de representación utilizados intrínsecamente en las matemáticas, pero tales sistemas están también imbricados en los códigos de comunicación de nuestro entorno cultural.

Por otra parte, los sistemas lógico-matemáticos de abstracción, formalización y demostración, en los que aparecen procesos como definir, analizar, categorizar, conjeturar, razonar, generalizar o sintetizar, pueden ayudar, y ayudan, a la capacitación de nuestros ciudadanos en su propio proceso de inculturación.

– **La formación, desarrollo y construcción del número desde la interacción entre procesos y variables que lo integran.**
Pedro Berjas Sepúlveda
– **Programación lineal, método del símplice y Conjetura de Hirsch.**
Francisco Santos Leal

4. *Comunicar en, con y sobre las matemáticas*
Este bloque temático está dedicado a la comunicación matemática en el sentido más amplio del término y en los contextos más dispares que nos podamos imaginar.

– *Ni* **Hablando ~~se~~** me **entiende la gente.**
Rafael Ramírez Uclés
– **La voz de las matemáticas.**
Mª del Carmen Buitrón Pérez, Julio Rodríguez Taboada

5. *Modelización y representación en matemáticas*
La cultura es un modelo de pensamiento y acción, y en ese sentido las matemáticas nos ayudan a modelar e interpretar una gran variedad de situaciones de todo tipo mediante el análisis, interpretación, ámbitos de aplicación y validez del propio modelo.

– **Jugar y aprender usando modelos.**
Antonio Bueno Aroca
– **La competencia matemática de modelización. Una propuesta para la Educación Infantil.**
Luisa Ruiz Higueras

6. *Herramientas, materiales y otros recursos de apoyo para trabajar las matemáticas*
El desarrollo tecnológico pone a nuestra disposición múltiples y variadas herramientas digitales que pueden ser utilizadas para enseñar matemáticas que se añaden a la gran cantidad de materiales de calidad que a lo largo de la historia han estado presentes en las clases de matemáticas.

– **La matemática lúdica en el aula.**
Encarnación Sánchez Jiménez
– **Las matemáticas en el plan lector, escritor e investigador.**
Mª del Puerto Menéndez Prieto

7. *Conexiones y contextos*
Comprender significa hacer conexiones, relacionar nuevos conocimientos con otros ya conocidos. La matemática, aunque se presente a menudo en compartimentos estancos,

es un todo y está vinculada a aspectos de la vida cotidiana que a menudo pasan desapercibidos.

– **Los Simpson entran en el aula de matemáticas.**
  Abel José Martín Álvarez
– **Profe, ¿esto para qué sirve?**
  Daniel Ruiz Aguilera

- **Comunicaciones**. Un número limitado de intervenciones breves, enmarcadas en alguno de los núcleos temáticos anteriores, donde el profesorado participante en las Jornadas expone y comparte experiencias de aula, investigaciones, ideas o puntos de vista sobre educación matemática, etc.

  Los interesados en presentar una comunicación deberán remitir previamente el texto completo de la misma al Comité de Programa, el cuál decidirá sobre su aceptación o no. Están especificados los detalles al respecto en la página web de las 15 JAEM.

Segundo bloque de actividades

- **Talleres prácticos** de actividades que han sido llevadas a cabo por el profesorado en sus clases. Se trata de sesiones de hora y cuarto, cuyo objetivo principal es la manipulación interactiva de materiales, software, exposición de actividades concretas, etc.

- **Zoco matemático**. Se ofrece a todos aquellos asistentes que deseen disponer de un espacio físico en el cual puedan exponer y presentar materiales didácticos, recursos, programas informáticos, pósters, etc.

- **Clips de aula.** Vídeos de corta duración que recogen la realización in situ de las actividades de docentes y alumnado.

- **Espacios de debate,** consistentes en el encuentro físico de un grupo de docentes para la discusión y el intercambio de impresiones y experiencias respecto a un tema relacionado con la educación matemática.

  Cada espacio estará vinculado a un tema. Los distintos temas se abrirán con anterioridad a la celebración de las JAEM, organizándose en torno a espacios de debate por vía telemática. Sólo los asistentes que hayan participado en los espacios de debate virtuales podrán inscribirse en las sesiones de trabajo durante las JAEM.

Se ofrecen cinco espacios de debate:

a. **Calculadoras en el aula**
   Coordinador: Agustín Carrillo de Albornoz Torres
b. **Formación del profesorado de matemáticas**
   Coordinador: Antonio Mellado Romero
c. **Geometría dinámica**
   Coordinador: José Antonio Mora Sánchez
d. **Matemáticas 2.0**
   Coordinadora: Eva María Perdiguero Garzo
e. **Pizarra digital interactiva**
   Coordinador: Gregori García Ferri

Los interesados en organizar y presentar un taller, montar un zoco matemático, mostrar comunicaciones en formato **póster,** participar en un espacio de debate u ofrecer un clip de aula, así como las empresas interesadas en colaborar en las Jornadas, deberán consultar la página web de las 15 JAEM para conocer la forma en que pueden hacerlo.

Estudiantes participando en la exposición MathsLab, Taller de matemáticas y creatividad

Tercer bloque de actividades

- **Exposiciones no comerciales** vinculadas a la educación matemática. Durante las jornadas será posible visitar y participar activamente en el taller de matemáticas y creatividad *“MathsLab”,* así como las exposiciones *“Arte fractal”* e “*Imaginary”.*
- **Stands.** Exposición y venta de materiales didácticos por parte de la FESPM, de las diferentes Sociedades Federadas y de distintas empresas colaboradoras de las Jornadas.
- **Presentación de proyectos** relacionados con la educación matemática, de particulares, asociaciones, grupos de trabajo, Fundaciones…
- **Presentaciones comerciales** vinculadas a la educación matemática, a cargo de distintas empresas colaboradoras. La aportación de tales empresas a nuestras tareas profesionales es importantísima, y tendrán por ello la oportunidad de comunicarnos sus proyectos y desarrollos, en sesiones de una hora.

  Para la exposición y venta de materiales didácticos, para la presentación de proyectos, y para las presentaciones comerciales, se dispondrá de espacios y tiempos que deberán ser solicitados según las indicaciones que se encuentran publicadas en la página web de las 15 JAEM.

- Entrega del **Premio Gonzalo Sánchez Vázquez** convocado por la FESPM.
- Diferentes actividades culturales.

Normas de presentación de trabajos

Normas generales

Todos aquellos participantes en las 15 JAEM que quieran presentar una comunicación, taller, exposición en el zoco o clip de aula, habrán de tener en cuenta las siguientes consideraciones:

1. El plazo de envío finaliza el 15 de marzo de 2011.
2. La solicitud de participación y el envío de la documentación requerida tendrá que hacerse necesariamente desde la página web de las 15 JAEM.
3. La aceptación de los trabajos queda supeditada a la decisión inapelable del Comité de Programa. En caso de no aceptación, no se mantendrá comunicación alguna acerca de las causas de dicho rechazo.
4. La admisión de los trabajos queda condicionada también a que al menos uno de los autores o proponentes haya formalizado su inscripción en las 15 JAEM antes del 15 de mayo de 2011.
5. En caso de multiplicidad en la autoría de una comunicación o taller, o en la petición de participación en el zoco, el certificado acreditativo correspondiente emitido por las 15 JAEM será colectivo.
6. Las actividades aceptadas se publicarán en las Actas de las 15 JAEM, siempre que el formato del texto a publicar se adapte a los requerimientos de la plantilla que se encuentra en la página web de las 15 JAEM, y se remita antes del 15 de marzo de 2011.

Normas para las comunicaciones

1. Han de referirse a alguno de los siete núcleos temáticos citados anteriormente.
2. Han de ser inéditas, no habiendo sido publicadas con anterioridad.
3. Al solicitar la admisión de una comunicación deberá adjuntarse el texto completo de la misma.
4. Con la solicitud de la presentación se indicarán claramente las necesidades técnicas que se precisen. El Comité Organizador pondrá todo su empeño en dar respuesta a esas demandas, pero si no fuera posible satisfacerlas se pondrá en contacto con el interesado para consensuar una solución.
5. Las comunicaciones aceptadas se presentarán oralmente, en el lugar y el tiempo que fije el Comité Organizador. Se dispondrá de 15 minutos para la presentación, más otros 10 minutos para debate y puesta en común con los asistentes.

Normas para los talleres

1. Para solicitar la presentación de un taller se adjuntará una descripción detallada de las actividades a realizar en el mismo.
2. Con la solicitud de la presentación se indicarán claramente las necesidades técnicas que se precisen. El Comité Organizador pondrá todo su empeño en dar respuesta a esas demandas, pero si no fuera posible satisfacerlas se pondrá en contacto con el interesado para consensuar una solución.
3. Los talleres aceptados se desarrollarán en el lugar y el tiempo que fije el Comité Organizador. Dispondrá cada uno de una hora y quince minutos.

Normas para el zoco

1. Los interesados en participar en el zoco adjuntarán a su solicitud una descripción detallada de aquello que se quiere exponer.
2. Con la solicitud de la presentación se indicarán claramente las necesidades técnicas y de infraestructura que se precisen. El Comité Organizador pondrá todo su empeño en dar respuesta a esas demandas, pero si no fuera posible satisfacerlas se pondrá en contacto con el interesado para consensuar una solución.
3. Los solicitantes se comprometen a montar y desmontar su material en los espacios y tiempos asignados por el Comité Organizador, así como a estar presentes en el lugar de su

respectiva exposición en los períodos de tiempo que se les asigne, con el fin de que puedan dialogar con el resto de los congresistas acerca de los materiales expuestos.

Normas para los clips de aula

1. Los interesados en ofrecer un clip de aula deberán enviarlo por correo postal o indicar en qué URL está publicado.
2. Los clips de aula publicados lo estarán en alguna de las habituales plataformas distribuidoras de videos en línea.
3. Los clips de aula se mostrarán a través de la web de las JAEM.
4. Los videos se podrán mostrar con garantías de protección de la imagen de las personas que aparecen en el vídeo.

Normas de funcionamiento y participación en los espacios de debate

1. Los espacios de debate estarán abiertos a la participación, a través de la web de las 15 JAEM, a partir de mediados de enero de 2011
2. La inscripción a una comunidad es voluntaria, y requiere de la persona que lo hace el compromiso a participar de manera constructiva en aquella.
3. La organización del funcionamiento de cada comunidad es responsabilidad exclusiva del coordinador de la misma.
4. Durante la celebración de las 15 JAEM se proporcionará por la Organización un espacio y un tiempo a cada comunidad, para que los miembros de cada una de ellas puedan continuar de manera presencial los intercambios de opiniones previos realizados vía web.

Inscripciones

La inscripción se realizará en la web de las Jornadas http://www.15jaem.org

Por necesidades organizativas, para inscribirse será necesario registrarse previamente.

	Hasta el 15 de mayo de 2011	Desde el 16 de mayo y hasta el 15 de junio de 2011
Miembros de las Sociedades de la FESPM o de las Sociedades que han firmado convenio con la Federación	110 €	140 €
Cuota normal	170 €	210 €

Anulaciones

Sólo serán atendidas las solicitudes de devolución de la cuota de inscripción que se realicen antes del 15 de mayo de 2011.

Puntos de información y correspondencia

Dirección postal:
15 JAEM. Gijón 2011
Centro del Profesorado y de Recursos de Gijón
Camino del Cortijo, nº 17
33212 Gijón

Correo electrónico:
info@15jaem.org

Página web del congreso:
http://www.15jaem.org

Fechas importantes

15 de marzo de 2011: fecha límite para la presentación de comunicaciones, talleres, actividades de zoco matemático, pósteres y proyectos.

15 de mayo de 2011: fecha límite para el primer período de inscripción.

15 de junio de 2011: fecha límite para la inscripción a las JAEM.

suma+ 66
Febrero 2011, pp. 137-139

Seminario 2010 de la Comisión de Educación del Comité Español de Matemáticas CEMAT

Comité Español de Matemáticas

Organizado por la Comisión de Educación de CEMAT ha tenido lugar en Madrid los días 11 a 13 de noviembre de 2010 el Seminario ***Un año de experiencia en la especialidad de Matemáticas del Máster de Profesor de Secundaria: Evaluar y tomar decisiones***.

En el encuentro han participado 58 profesores de educación secundaria y de universidad, así como representantes de las administraciones públicas. Los participantes han impartido docencia y/o participado en la organización de esta especialidad del Máster durante el curso 2009–2010 en 28 universidades españolas, públicas y privadas.

Las actividades realizadas, mesas redondas y grupos de trabajo, han estado organizadas en torno a cuatro focos:

1. Valorar la política de formación inicial del profesorado de matemáticas de secundaria desarrollada por el Máster.
2. Intercambiar experiencias sobre los módulos teóricos de la especialidad.
3. Valorar la experiencia de las prácticas escolares en el nuevo plan de estudios.
4. Enjuiciar la realización, presentación y evaluación del trabajo de fin de Máster (TFM).

Los asistentes han debatido ampliamente esas cuestiones, analizado su complejidad, compartido sus experiencias, y valorado sus fortalezas y debilidades. Reconocen la necesidad de profundizar en el camino iniciado en esta nueva titulación, reclaman cambios administrativos, demandan recursos humanos y organizativos necesarios para su desarrollo y proponen reformular las líneas de trabajo emprendidas, manteniendo su marco general.

Pese a las deficiencias detectadas, los asistentes valoran positivamente la experiencia global del primer año de implantación del Máster en la especialidad de Matemáticas y el avance que supone respecto de la situación previa.

En relación con la formación inicial del profesorado de matemáticas de secundaria se considera muy conveniente una formación sólida en matemáticas para los estudiantes de esta especialidad y se destaca el valor profesional del título para el ejercicio de la profesión docente en matemáticas. Los asistentes expresaron su preocupación por algunas disfuncionalidades detectadas en el curso 2009–2010. En este sentido se hacen las siguientes recomendaciones.

Comisión de Educación de CEMAT
Sergi Amat, Antonio Campillo, Rafael Crespo, Jordi Deulofeu, Raquel Mallabibarrena, Francisco Martín Casalderrey, Juana Mª Navas, Adolfo Quirós, Luis Rico, Vicente Riviere y Joaquín Sánchez Soriano.

1. Garantizar una formación disciplinar previa suficiente en los aspirantes a la especialidad de Matemáticas del Máster. Un estándar satisfactorio deseable, considerado por varias universidades, contempla tener acreditados 50 créditos de matemáticas de un grado universitario. La presencia de alumnos con bajo nivel en su formación matemática dificulta y puede impedir el logro de las competencias profesionales requeridas por el título.

2. Establecer como requisito necesario para la admisión de aspirantes a los cuerpos docentes e imprescindible para ejercer como profesor de matemáticas haber cursado la especialidad en Matemáticas del Máster.

3. Incorporar en las pruebas de ingreso a los cuerpos docentes tareas y actividades que muestren la competencia profesional del futuro profesor de matemáticas, singularmente relativas a resolución de problemas y planificación didáctica.

4. Respetar el número mínimo de horas presenciales establecido en la realización del Máster, no inferior al 80% de las correspondientes a los créditos asignados por el vigente plan de estudios.

5. Promover la vinculación de la especialidad en Matemáticas del Máster con otros másteres afines, favoreciendo las dobles titulaciones.

6. Regularizar las convocatorias de oposiciones de manera que no impongan un retraso temporal para la participación en las pruebas de oposiciones de los egresados del Máster. Se recomienda abordar y resolver las dificultades que genere la proximidad entre la realización de las oposiciones y el fin del Máster.

En lo relativo a los módulos teóricos, destacan las siguientes consideraciones:

7. Valorar positivamente las diversas opciones desarrolladas en la organización de los 8 créditos optativos por distintas universidades, así como el reconocimiento de créditos cursados en otros másteres, con competencias y objetivos similares.

8. Reclamar de los profesores del módulo común una atención singular a la especialidad que cursan los estudiantes.

9. Profundizar en la coordinación entre los profesores de los distintos módulos, singularmente de los profesores especialistas de las materias de innovación y de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, con los tutores de las prácticas escolares.

10. Prestar una especial atención a los contenidos de la materia de complementos. Entre las experiencias positivas presentadas, destacan aquellas que han estado centradas en: historia de las matemáticas, en los grandes conceptos matemáticos y su evolución, en la consideración de los procesos matemáticos relevantes presentes en el currículo de secundaria (modelización, resolución de problemas, razonamiento y otros), así como en una visión aplicada de las matemáticas que destaca la relación entre éstas y el resto de las disciplinas.

11. Reconocer dos enfoques en el desarrollo de los créditos de la materia *Enseñanza y Aprendizaje de las matemáticas*:

    a. disciplinar, basado en la didáctica de cada uno de los bloques del currículo de matemática de secundaria, y

    b. transversal, distinguiendo niveles educativos y centrado sobre competencias y tareas profesionales. Los dos enfoques deben contemplarse como complementarios y no como alternativos.

12. Impulsar especialmente la coordinación entre profesores que imparten distintas materias del módulo específico.

13. Elaborar propuestas que aborden y fomenten la conexión entre la didáctica específica y la actividad práctica en los centros de secundaria. Una limitación preocupante detectada en este primer año es la escasa o nula coordinación entre teoría y práctica.

14. Recomendar encarecidamente el desarrollo y seguimiento de las competencias profesionales del futuro profesor de matemáticas mediante la vinculación entre los créditos teóricos y los prácticos.

En relación con la organización del prácticum, su realización y el reconocimiento a los profesores tutores de los centros de prácticas, se detecta una gran variedad de opciones que generan desigualdades considerables y dan lugar a agravios comparativos inadmisibles. Sobre este tema se enumeran las siguientes consideraciones:

15. La selección de los profesores tutores debe centrarse, de manera prioritaria, en el mérito y la experiencia profesional de los solicitantes. Estos criterios deberán conjugarse con la selección de los centros y no estar subordinados a las decisiones de los departamentos.

16. Regular el reconocimiento y compensación del trabajo de los profesores tutores, no puede ser una decisión discrecional que dependa de cada universidad.

17. Integrar a los profesores tutores en los equipos docentes y coordinar su trabajo contribuirá a mejorar la formación de profesores noveles.

El debate relativo al Trabajo de Fin de Máster (TFM) pone de manifiesto componentes básicos para su estructura y distintas modalidades para su realización. También se destacan criterios para la dirección, tutoría, presentación, defensa pública, evaluación, visibilidad y difusión de estos trabajos. Igualmente se ponen de manifiesto algunas limitaciones y contradicciones detectadas este primer año.

El TFM fue valorado como elemento clave para la formación inicial del profesorado de matemáticas e importante para el desarrollo de sus competencias profesionales. Parece altamente recomendable diversificar las temáticas tratadas para atender a las distintas competencias del título.

Los ponentes y asistentes destacan algunas ideas y recomendaciones:

18. Conjugar las exigencias académicas de rigor y profundidad, necesarias para superar el TFM, con el logro y desarrollo de competencias profesionales.

19. Conjugar el valor en créditos asignado al TFM con el tiempo y la dedicación disponibles para su realización por el estudiante.

20. Resaltar la defensa del TFM en su evaluación final.

21. Ajustar los créditos asignados al profesorado para la dirección y tutoría del TFM con el trabajo requerido.

22. Incentivar que el tutor del TFM sea también el orientador académico de las prácticas.

Los profesores asistentes quieren subrayar la singularidad de esta nueva titulación, la especial importancia de las competencias profesionales que se propone desarrollar y la imprescindible mejora del sistema educativo que debiera derivarse de su implantación.

Si bien se reconocen debilidades preocupantes, que suponen amenazas considerables para su desarrollo y para la consecución de sus fines, también destacan fortalezas notables en el nuevo plan.

El momento exige una permanente atención para evitar desviaciones o regresiones a modelos superados de formación. El esfuerzo realizado por el legislador para proveer de un perfil profesional al profesor de secundaria, singularmente al profesor de matemáticas, con una critica permanente de los sectores afectados, junto con una actitud positiva de revisión y corrección y una búsqueda sostenida de respuestas y soluciones a los lógicos problemas que surgen en la puesta a punto de esta nueva titulación.

Contactos

Rafael Crespo (Rafael.Crespo@uv.es)
Serapio García-Cuesta (serapiogarcia@telefonica.net)
Manuel de León (mdeleon@icmat.es)
Adolfo Quirós (adolfo.quiros@uam.es)
Tomás Recio (tomas.recio@unican.es, web: www.recio.tk)
Luis Rico, (lrico@ugr.es, web: fqm193.ugr.es/)

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Comisión Ejecutiva

Presidente: **Serapio García Cuesta**
Secretario General: **Francisco Martín Casalderrey**
Vicepresidente: **Manuel Torralbo Rodríguez**
Tesorera: **Claudia Lázaro del Pozo**

Secretariados:
Prensa: **Biel Frontera Borrueco**
Revista SUMA: **Tomás Queralt Llopis/Onofre Monzó del Olmo**
Relaciones internacionales: **Sixto Romero Sánchez**
Publicaciones: **Ricardo Luengo González**
Actividades y formación del profesorado: **Juana Mª Navas Pleguezuelos**
Actividades con alumnos: **Jordi Comellas i Blanchart**

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidenta: Iolanda Guevara Casanova
FME de la UPC
C/Pau Gargallo, 5
08028 Barcelona

Sociedad Andaluza de Educación Matemática *Thales*
Presidente: Manuel Torralbo Rodríguez
Facultad Matemáticas. Apdo. de Correos 1160. 41080 Sevilla

Sociedad Aragonesa *Pedro Sánchez Ciruelo* de Profesores de Matemáticas
Presidenta: Ana Pola Gracia
ICE Universidad de Zaragoza. C/ Pedro Cerbuna, 12. 50009 Zaragoza

Sociedad Asturiana de Educación Matemática *Agustín de Pedrayes*
Presidente: Juan Antonio Trevejo Alonso
Apdo. de Correos 830. 33400 Avilés (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas *Isaac Newton*
Presidenta: Ana Alicia Pérez
Apdo. de Correos 329. 38200 La Laguna (Tenerife)

Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática *Miguel de Guzmán*
Presidente: Antonio Bermejo Fuertes
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Víllalar, s/n. 09006 Burgos

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García Cuesta
Avda. España, 14, 5ª planta. 02002 Albacete

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidente: Bienvenido Espinar Cepas
CPR Murcia II. Calle Reina Sofía n.º1. 30007 Murcia

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas *Tornamira*
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea *Tornamira*
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática.
Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra. 31006 Pamplona

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Manuel Rodríguez Mayo
Apdo. de Correos 103. Santiago de Compostela

Sociedad Extremeña de Educación Matemática *Ventura Reyes Prósper*
Presidente: Ricardo Luengo González
Apdo. de Correos 590. 06080 Badajoz

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo*
Presidente: Juan A. Martínez Calvete
IES Villablanca. C/ Villablanca, 79. 28032 Madrid

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: María José Señas Pariente
Avda. del Deporte s/n. 39012 Santander

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidente: Luis Serrano Romero
Facultad de Educación y Humanidades. Ctra. Alfonso XIII, s/n. 52005 Melilla

Sociedad *Puig Adam* de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Facultad de Educación. (Sec. Deptal. Álgebra). Despacho 3005.
C/ Rector Rollo Villanova, s/n. 28040 Madrid

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas *A prima*
Presidente: Elena Ramirez Ezquerro
CPR. Luis de Ulloa, 37. 26004 Logroño

Sociedade Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)
Presidente: Manuel Díaz Regueiro
C/ García Abad, 3, 1ºB. 27004 Lugo

Societat d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana *Al-Khwarizmi*
Presidente: Onofre Monzó del Olmo
Departamento de Didáctica de la Matemática. Apdo. 22045. 46071 Valencia

Societat Balear de Matemàtiques *Xeix*
Presidente: Josep Lluís Pol i Llompart
C/ Martí Rubí 37/alts. 07141 Sa Cabaneta (Marratxí). Islas Baleares

Normas de publicación

1.- Para el envío de artículos o cualquier consulta sobre su contenido se utilizará el correo electrónico de la redacción de SUMA(articulos@revistasuma.es) o su dirección postal:

Revista SUMA, Apartado de Correos 498, 46900 Torrent.

2.- Si los trabajos, imágenes incluidas, ocupan más de 5Mb sólo se enviaran por correo postal en soporte magnético (CDRom, DVDRom o Pen drive).

3.- Los trabajos deben ser enviados como archivo en formato MS Word o rtf –tipo de letra Times New Roman y tamaño 12– adjunto a un mensaje de correo electrónico en el que deben figurar:

i. El título del trabajo, los nombres y apellidos de todos los autores, su lugar de trabajo y su dirección completa así como la sociedad federada a la que pertenecen (si se desea).

Y a efectos de comunicación:

ii. El correo electrónico, teléfono y dirección postal del autor de contacto.

4.- Se debe enviar una segunda versión del original en la que no aparezcan los nombres de los autores, ni información relativa a ellos o que pueda servir para identificarlos (e.g., institución a la que pertenecen, citas y referencias bibliográficas propias, agradecimientos, datos del proyecto en el que se enmarca el trabajo). En esta versión, reemplace las citas y referencias bibliográficas por "Autor, 2009" o "Autor et al., 2009". En las referencias bibliográficas propias se debe eliminar el título y el nombre de la revista o el título del libro donde se publica.

5.- Se admiten diversos tipos de trabajos: teóricos, informes de investigaciones, divulgación, innovación didáctica…

6.- Junto con el artículo se remitirá un resumen (máximo de 600 caracteres incluyendo espacios), una traducción del mismo y del título en inglés, cinco palabras clave jerarquizadas (en castellano e inglés).

Ejemplo: *Investigación didáctica, Álgebra, Modelización y dificultades, Enseñanza y aprendizaje, Secundaria y bachillerato.*

7.- El texto estará en una sola columna y tendrá una longitud máxima de 25000 caracteres sin incluir espacios pero incluyendo las tablas, las figuras y los anexos.

8.- Es imprescindible que los esquemas, dibujos, gráficas e imágenes sean guardados en formato **TIF, EPS** o **JPEG**, a una resolución de 300 ppp. y en color original. Éstos se adjuntarán en una carpeta aparte del documento del texto, ya que las imágenes incrustadas en el texto no son válidas para su posterior edición. Cada archivo debe estar claramente identificado y se debe indicar en el texto el lugar donde se ubica. De igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.

9.- Si alguna expresion no se puede escribir con los carácteres disponibles en la fuente Times New Roman, se incluirá, con un editor de equaciones, fuera del texto y si no fuera posible se incorporará como imagen.

10.-La bibliografía se dispondrá también al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, siguiendo las normas APA.

Ejemplos

Libros:

Apellido del autor, coma, inicial/es del nombre, punto, fecha entre paréntesis, punto, título en letra cursiva, punto, lugar de edición, dos puntos, editorial, punto.

Filloy, E., Rojano, T. & Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. New York: Springer.

Capítulos en libros

Cuando se cita un capítulo de un libro, el cual es una compilación (reading), se cita en primer lugar el autor del capítulo y el título del mismo, seguidamente el compilador (Comp.), editor (Ed.) o director (Dir.), coordinador (Coord.), título (las páginas entre paréntesis). Lugar de edición: y editorial, igual que en la referencia de cualquier libro.

Puig, L. (2006). La resolución de problemas en la historia de las matemáticas. En Aymerich, José V. y Macario, Sergio (Eds.) *Matemáticas para el siglo XXI* (pp. 39-57) Castellón: Publicacions de la Universitat Jaume I.

Artículos en revistas

Lo que va en letra cursiva, es el nombre de la revista. Se debe especificar el volumen de la revista y las páginas que ocupa el artículo separadas por un guión. Se especificará el volumen y el número de la revista, cuando cada número comienza por la página uno.

Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*, *26*(3), pp. 327-342.

Para consultar más ejemplos de citas bibliográficas, visitar:
http://www.revistasuma.es

11.-Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ... supone un gran avance (Hernández, 1992). Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ... según Rico (1993).

12.-Si durante el texto se cita una referencia de más de tres autores se puede citar el primero seguido de la expresión et al. (y otros). Por ejemplo, "Bartolomé et al. (1982)", "Gelpi et al. (1987)". Pero en la bibliografía deben aparecer todos los autores.

13.-Todas las referencias bibliográficas deben corresponder a menciones hechas en el texto.

14.-Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo y se incluirán al final del texto.

15.-Después de haber recibido el trabajo se enviará un correo electrónico como acuse de recibo.

16.-Cada trabajo será remitido a dos asesores para ser referenciado. Estos no serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, de acuerdo con las normas, criterios y recomendaciones propios de la revista SUMA.

17.-Si los dos informes son positivos el artículo será publicado. Si los dos informes son negativos se rechazará su publicación. Si existe discrepancia entre los informes, se solicitará un tercer informe que decidirá su publicación o su rechazo.

18.-Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como –en caso afirmativo– la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido.

19.-No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

Propuesta de categorias para las palabras clave

Teoría Innovación didáctica Divulgación Investigación didáctica Experiencia de aula ...	Álgebra Análisis Aritmética Estadística Probabilidad Geometría Resolución de problemas. Topología ...	Números (Naturales Enteros, ...). Resolución de problemas de ..., Ecuaciones, Figuras en el plano, en el espacio Funciones Modelización Lógica Errores, dificultades ...	Libros de texto Historia Cognición Metacognición Razonamiento Demostración Legislación y reformas(LOGSE, LOU, LOE ...) Actitudes Destrezas Procesos Conceptos Enseñanza, aprendizaje, educación ...	Infantil Primaria Secundaria Bachillerato Universidad ...

Convocatoria de los cargos de la Comisión Ejecutiva de la FESPM correspondientes a las siguientes secretarías:

- Secretaría de General
- Tesorero
- Secretaría de la revista SUMA
- Secretaría técnica adjunta

La Junta de Gobierno de la FESPM convoca los siguientes cargos:

– Secretaría General de la Federación (por finalización de mandato)
– Secretaría Técnica Adjunta (de nueva creación)
– Tesorería (por finalización de mandato)
– Dirección de la Revista Suma (por finalización de mandato)

La convocatoria se realiza en los siguientes términos, de acuerdo con sus estatutos:

1. Podrá presentar sus candidaturas cualquier socio o socia de una Sociedad federada, con una antigüedad de al menos un año. La solicitud, dirigida al Presidente de la FESPM, deberá ir acompañada de la siguiente documentación:

En el caso de la Secretaría General y de la Secretaría Técnica Adjunta:
- Proyecto en el que se exponga su línea de trabajo

En el caso de la candidatura a la Dirección de la Revista SUMA
- Proyecto en el que se exponga su línea de trabajo
- Relación nominal del Consejo de Redacción que propone para la realización de la Revista.
- Presupuesto económico de ingresos y gastos para el primer año de funcionamiento.

En todos los casos se presentará además un certificado en el que conste que es socio activo de una Sociedad federada, y su antigüedad.

2. Las funciones de los distintos cargos convocados, podrán ser consultadas en la página de internet de la Federación: www.fespm.es
3. Las candidaturas se podrán presentar hasta el 31 de mayo de 2011 por correo electrónico en la dirección: secretaria@fespm.es
4. Los candidatos elegidos ejercerán sus cargos por un periodo de cuatro años.
5. La Junta de Gobierno de la FESPM elegirá los candidatos que cubrirán los cargos, oído el actual Secretario General, en la reunión que tendrá lugar durante la celebración de las XV Jornadas sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas que tendrán lugar en Gijón del 3 al 6 de julio de 2011.
6. La toma de posesión en el caso de la Secretaría Técnica Adjunta, de nueva creación, será inmediata.

El candidato o candidata elegido para la dirección de la Revista Suma se hará cargo de la misma a partir del número 69 y por un periodo de 4 años (12 números).
Los candidatos elegidos para la Secretaría General y la Tesorería, tomarán posesión con fecha 1 de enero de 2012.

Francisco Martín Casalderrey
Secretario General de la FESPM

Boletín de suscripción

Tarifas	Suscripción anual	Número suelto	Monografía
Particulares	25 €	10 €	15 €
Centros	40 €	15 €	15 €
Europa	50 €	20 €	15 €
Resto del mundo	60 €	22 €	15 €

Fotocopiar esta hoja y enviar:

por correo a: Revista SUMA. Apartado de correos 498
46900-Torrent (Valencia)
por Fax al: (+34) 912 911 879
por correo-e a: administracion@revistasuma.es

Deseo suscribirme a la revista SUMA:

Nombre y apellidos: NIF/CIF:

Dirección: Teléfono:

Población: CP:

Provincia: País:

Correo electrónico: Fax:

Importe (€)

☐ Suscripción a partir del año (3 números) ______

☐ N.os sueltos ______

Total

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto)

☐ Transferencia bancaria (CCC 2077-0347-11-1101452547)

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista SUMA

☐ Giro postal dirigido a Revista SUMA

Fecha y firma:

Nombre y apellidos:

Código Cuenta Cliente: Entidad: Oficina: DC: Cuenta:

Banco/Caja:

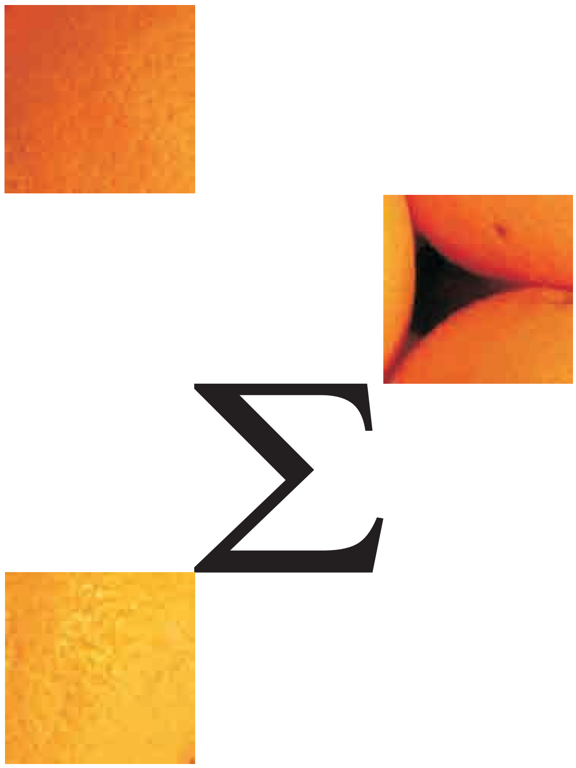
Agencia n.º: Dirección:

Población: Provincia:

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que, periódicamente, les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (fecha y firma):

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas



ISSN 1130-488X

SUMA. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.