suma+

revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

66

Febrero 2011

suma+

revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

Directores
Onofre Monzó del Olmo (SEMCV)
Tomás Queralt Llopis (SEMCV)
direccion@revistasuma.es
Administrador
Gregori García Ferri
administracion@revistasuma.es
Consejo de redacción
Salvador Caballero Rubio
(CEFIRE d'Alacant)
Marisa Fernández Villanueva
(IES Veles e Vents, Torrent)
Bernardo Gómez Alfonso
(Universitat de València Estudi General)
Floreal Gracia Alcaine
(IES Politècnic, Castelló)
José Antonio Mora Sánchez
(IES San Blai, Alacant)
Luis Puig Espinosa
(Universitat de València Estudi General)
Consejo Editorial
Serapio García Cuesta
(Presidente de la FESPM)
Francisco Martín Casalderrey
(IES Juan de la Cierva, Madrid)
Inmaculada Fuentes Gil
(IES Ágora, Madrid)
Ricardo Luengo González
(Universidad de Extremadura)
Edita
FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS (FESPM)
Web
Antonio Alamillo Sánchez
www.revistasuma.es

Diseño de la portada: *O. Monzó*
Fotografía de la portada:
***Apilaments** - O. Monzó*
Maquetación
T. Queralt y O. Monzó
Revista Suma
Apartado 498
E-46900-Torrent (España)
Fax:*+(34) 912 911 879*
Tirada: *6700 ejemplares*
Depósito legal: *Gr 752-1988*
ISSN: *1130-488X*

66 *Febrero 2011*

actividades de la FESPM

SUMA es una revista de didáctica de las matemáticas de periodicidad cuatrimestral, cuyo objetivo es tratar sobre aquellos aspectos relacionados con su enseñanza y aprendizaje, destinada al profesorado que trabaja en educación infantil, primaria, secundaria y universitaria.

La revista SUMA se edita en Torrent (Valencia) - ESPAÑA

suma+ 66
Febrero 2011

¿Está peor preparada la juventud de hoy que la del siglo pasado?

Suele oírse comentar que la juventud estaba mejor preparada hace 40, 70 o 100 años, no como la de ahora, que sale de nuestros centros educativos sin saber nada. Quisiéramos justificar qué no estamos de acuerdo con esas afirmaciones.

Si comparamos el alumnado de bachillerato de 1930, 1970 y 2010 podríamos darnos cuenta de que la enseñanza formal en los años 30 se realizaba en los institutos: el aprendizaje se basaba en el esfuerzo y la memoria, sólo tenía acceso a lo que memorizaba, no habían salido de su entorno y el conocimiento estaba en unos pocos libros.

Los alumnos de los años 70 ya tenían televisión, se movían de una ciudad a otra, convivían con los primeros turistas, su material didáctico era mejor y más diverso. Aunque el aprendizaje se debía también al esfuerzo y a la memoria (muchos se pueden sentir identificados con esa época), tenían mejores condiciones de estudio y mejoró el rendimiento.

Sin embargo, el joven actual dedica menos esfuerzo y utiliza poco la memoria, ¿acaso la necesita? Tiene todo a su disposición, al alcance de una tecla. Es capaz de hacer cosas impensables para nuestra generación o la de nuestros padres.

Los conocimientos han crecido exponencialmente, el joven de antes tenía pocas asignaturas, recogidas en unos pocos libros. En cambio el de ahora tiene más conocimientos que tratar, contenidos que aprender y problemas que resolver: medioambientales, energéticos, sociales, económicos, etc. Los conocimientos a estudiar, de cada asignatura, no caben en un libro, están dispersos en las redes de información.

Cómo podemos comparar a un joven de 16 años de los años 30 de un área rural, trabajador pero analfabeto, con uno actual que no haya terminado *la E.S.O., pero capaz de manejar un ordenador o un teléfono móvil, que ha viajado y conoce mundo. ¿Tiene menos capacidades? Lo que sí es seguro es que tiene menos necesidades.*

Si comparamos a los diez estudiantes con mejores resultados académicos de las tres generaciones mencionadas, utilizando cada uno las herramientas, tecnología y capacidades de la época, creo que ni nuestros padres ni nosotros tendríamos ninguna posibilidad de competir con los jóvenes actuales, ya que viven la vida de otra forma, y tienen unas capacidades y habilidades que ninguno de nosotros podríamos llegar ni a imaginar.

Los jóvenes que antes salían de su casa estaban obligados por la situación económica o social. Por contra, ahora viajan desde pequeños a cursos de verano para aprender idiomas, con becas Erasmus y muchos creando empresas en lugares insospechados. Los jóvenes de los años 30 ó 70 tenían ganas y se enfrentaban a todo principalmente por necesidad. Ahora los jóvenes son imaginativos, aventureros y son hombres y mujeres de mundo.

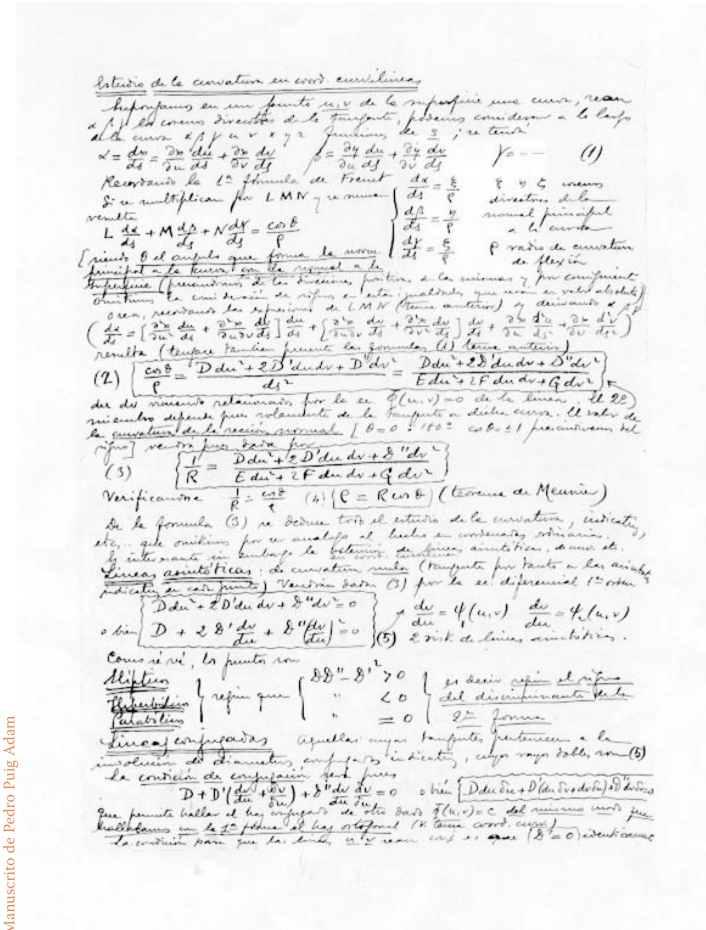
La revolución tecnológica cambia la forma de enseñar y aprender; ahora no podríamos memorizar toda la información existente. Si la metodología a utilizar hoy fuera la de los años 30, no se podría guardar toda esa información en unos pocos libros.

La comparación entre hoy y hace 70 ó 100 años, tal y como la realizan quienes desprestigian la educación actual, es al menos discutible. No se puede comparar la media de los rendimientos del 5% de la población que estudiaba con la media del 100% de la población que estudia actualmente. Podemos apostar que la media del 5% de los mejores estudiantes actuales sería como mínimo tan buena como la de entonces.

La segunda cuestión indiscutible es la mejora que supone que el 100% de la población tenga la posibilidad (mejor o peor aprovechada) de acceder al sistema educativo, frente al 5% de hace años (al menos en secundaria).

Y todo esto en un contexto social (por muchas y diversas razones) en el que cada vez más (o al menos recientemente) el aprendizaje escolar, como preparación para una vida futura, está desprestigiado.

Lo expuesto no es óbice para que no exista la posibilidad de mejorar algunas (muchas) cosas, pero esto no es excusa para afirmar con rotundidad que cualquier tiempo pasado fue mejor. ■



Manuscrito de Pedro Puig Adam

artículos

suma+ 66
Febrero 2011, pp. 7-15

Presencia y ausencia del número natural en la Educación Infantil

En este artículo analizaremos el tratamiento que se ha dado al número en los currículos españoles de Educación Infantil desde 1973 tomando como marco de reflexión los distintos accesos escolares al número natural. Criticaremos la argumentación sobre la que se apoya la construcción psicológica del número según Piaget y señalaremos los posibles efectos que han tenido estas ideas en la Educación Infantil. Por último, pondremos de manifiesto las consecuencias de limitar la enseñanza del número a los nueve primeros y de centrar la atención en su representación escrita.

Palabras Clave: Educación infantil, accesos al número natural, currículo educativo.

Presence and Absence of Natural Number in Early Chilhood Education

This paper examines the treatment that has been given to the number in the Spanish Early Childhood Education curriculum since 1973 using the different school approaches to the natural number as a reflection framework. We criticize the argument that rests on the psychological construction of the number according to Piaget and point out the possible effects that these ideas have had in Early Childhood Education. Finally, we show the consequences of restricting the teaching to the nine first numbers and focusing on their written representation.

Key words: Early childhood education, approaches to natural number, educational curriculum

Introducción

En 1959 la Organización Europea para la Cooperación Económica (la actual Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico) organizó en Royaumont un seminario con la intención de marcar las líneas de una reforma radical en la enseñanza de las matemáticas. Las propuestas de este seminario se orientaban hacia la educación secundaria y, fundamentalmente, tenían la intención de preparar a los futuros estudiantes universitarios. Sin embargo, en posteriores reuniones se convino la necesidad de extender la reforma a la educación primaria. Esta reforma de la enseñanza de las matemáticas encontró el apoyo de la escuela bourbakista en el campo de las matemáticas y de las ideas de Jean Piaget sobre el desarrollo de las estructuras mentales en el terreno de la psicología.

La conexión entre las matemáticas bourbakistas y la psicología genética piagetiana surgió en el coloquio sobre estructuras matemáticas y estructuras mentales que tuvo lugar en Melun en el año 1952. La reunión se inició con dos conferencias pronunciadas por Jean Dieudonné y Jean Piaget: la primera trataba sobre las estructuras bourbakistas; la segunda, sobre las estructuras mentales. Como explica Piaget (Beth y Piaget, 1961/1968), la convergencia entre las dos conferencias sorprendió a los autores y, posiblemente, señaló un camino a seguir.

> Sin conocer en aquel entonces la obra de Bourbaki, habíamos encontrado precisamente, simplemente tratando de clasificar las distintas estructuras operatorias observadas empíricamente en el desarrollo de la inteligencia del niño, tres tipos de estructuras irreductibles entre sí en su punto origen, pero que se combinan luego de diversas formas [...] Aquella convergencia entre las dos charlas iniciales, que eran enteramente independientes, sorprendió a los miembros del coloquio, empezando por los mismos autores. (Beth y Piaget, 1961/1968, p. 210)

Posiblemente, la intención de Piaget a la hora de identificar y describir el desarrollo de las estructuras mentales en el niño no era influir sobre la reforma del sistema educativo. De hecho, Piaget sostenía que cualquier análisis genético podía verse contaminado por la enseñanza y, en consecuencia, las conclusiones desde un análisis genético no podrían exportar-

David Arnau
Universitat de València Estudi General

se al mundo de la enseñanza. Sin embargo, la reforma, o la creación en el caso español, de los currículos de Educación Infantil, a lo largo de la década de los 70, se vio influida por las ideas de Piaget sobre el desarrollo de las estructuras mentales y la génesis de los conceptos matemáticos.

Pero, ¿qué postulaba la teoría de Piaget respecto a la construcción de la idea de número? Su tesis principal era que los niños de estas edades no disponían de las estructuras mentales necesarias para hacer un uso operatorio del número. Al exportar su teoría al currículo de Educación Infantil, las actividades numéricas se sustituyeron por las prenuméricas y, aunque la enseñanza de los números volvió a formar parte del currículo oficial, se instaló una sombra de duda sobre la capacidad para usarlos por parte de los niños.

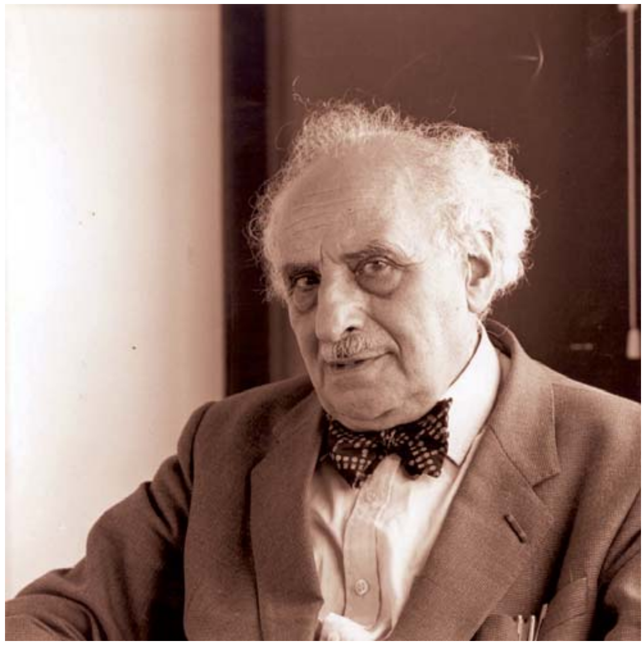
En este artículo describiremos los accesos escolares al número natural y los utilizaremos para analizar el tratamiento (o la ausencia) que se ha dado al número en los currículos españoles desde 1973. Mostraremos las consecuencias que han tenido las ideas de Piaget en la enseñanza del número en la Educación Infantil y criticaremos el análisis sobre el que apoyó la construcción del número. A modo de conclusión, ofreceremos una propuesta de aquello que debería atenderse en la enseñanza del número en el segundo ciclo de Educación Infantil.

Antes de iniciar la exposición hemos de aclarar que no se puede responsabilizar a Piaget de las implementaciones curriculares que se ampararon en su nombre o sus ideas, pues, como se ha señalado, él mismo reconocía el papel transformador de la enseñanza. Más bien al contrario, debemos reconocer la importancia y calidad de la obra de Piaget así como el esfuerzo de otros autores que, de una forma u otra, aparecerán citados.

Accesos escolares al número natural

Como señala Freudenthal (1973) el singular "concepto de número" es engañoso y depende del punto de vista desde el que se estudie. Así, si nuestra intención es dar cuenta de los distintos usos cotidianos que podemos hacer del número, nos encontraremos con: número para contar, número de numerosidad, número para medir y número para calcular. Sin embargo, desde el punto de vista de la matemática formal podríamos distinguir: número natural, número entero, número racional, etc.

Si asumimos que una intención primera de cualquier sistema educativo es conseguir una alfabetización matemática de la población, deberemos asegurar la posibilidad de alcanzar la competencia en los usos cotidianos que podemos hacer del número en los distintos contextos en los que aparece. Así, si nos encontramos en una situación de juego donde debemos contar hasta un número, nos hallaremos en un contexto de secuencia numérica y usaremos el número para contar. Si la intención es determinar el número de objetos que componen un conjunto, nos encontraremos en un contexto cardinal y usaremos el número de numerosidad.



Hans Freudenthal

Desde un punto de vista escolar, podemos partir de dos accesos para dar cuenta de los distintos usos del número: el acceso ordinal y el acceso cardinal. El primero de estos dos accesos se apoya en la actividad de contar y tendría su soporte formal en la construcción del número según Peano. El acceso cardinal, por su parte, se basa en la operación de coordinar conjuntos y respondería a la construcción del número natural según Cantor.

Podríamos considerar una supuesta tercera vía que combina el acceso cardinal y los resultados obtenidos por Piaget y sus colaboradores sobre la construcción psicológica del número. La actividad de coordinar conjuntos vuelve a ser la que permite la construcción de la idea de número, pero se considera que el niño debe recurrir a las estructuras de seriación para poder realizarla en cualquier situación. Como la construcción del número exige la participación simultánea de estructuras de clasificación (necesarias para llegar a la idea de número como la clase de equivalencia de todos los conjuntos que se pueden coordinar) y seriación, los defensores de este acceso concluyen que el número supone la construcción simultánea del número cardinal y ordinal.

A continuación, desarrollaremos con mayor profundidad[1] cada uno de estos accesos para así poder llevar a cabo un análisis del tratamiento que ha recibido el número en los distintos currículos españoles de Educación Infantil.

El acceso ordinal

En el acceso ordinal, el aprendizaje de la secuencia numérica y de la acción de contar ocupan un papel primero que contrasta con el lugar terminal en el que se ubica dentro del acceso cardinal. De acuerdo con los estudios de Fuson (1988), en el aprendizaje de la secuencia numérica se distingue la adquisición y la elaboración.

La adquisición exige de la memorización de los números con nombre no algorítmico (en español serían uno, dos… quince; pues el dieciséis ya se obtendría de la combinación de diez y seis); la producción de los nombres de las decenas a partir de las unidades y, por último, las reglas de generación algorítmica de los nombres de los nuevos números a partir de las decenas y unidades. Podemos distinguir tres fragmentos dentro de la secuencia numérica que emite un individuo que la está aprendiendo: una primera parte estable y convencional, una segunda parte estable y no convencional y una tercera parte inestable.

En la fase de elaboración se establecen relaciones entre los numerales de la parte estable y convencional que permitirá pasar de un emisión en bloque a una emisión reflexiva que convertirá a la secuencia numérica en el instrumento sobre el que construir la aritmética. Mientras se aprende de manera reflexiva la secuencia numérica, los individuos demuestran distintos niveles de elaboración: cuerda, cadena irrompible, cadena fragmentable, cadena numerable y cadena bidireccional. Por ejemplo, una característica del nivel de cadena irrompible es la necesidad de iniciar el conteo desde el uno, mientras que en el nivel de cadena fragmentable es posible iniciarla desde otro número.

Cuando optamos por un acceso ordinal, la secuencia numérica se convierte en la herramienta que nos permitirá usar el número en cualquier contexto. Así, cuando utilizamos la secuencia numérica para contar, debemos establecer una correspondencia uno a uno entre los numerales y una serie de objetos. El último numeral emitido al contar una colección de objetos nos proporciona su cardinal. Por otro lado, al contar una serie de objetos les asignamos etiquetas que les confieren una ordenación importada desde la secuencia numérica. Desde el acceso ordinal, la actividad de sumar se convierte en contar hacia delante; la actividad de restar, en contar hacia atrás; la de multiplicar en contar hacia adelante a saltos y la de dividir en contar hacia atrás a saltos.

El nivel de elaboración de la secuencia numérica será uno de los factores que condicionará la posibilidad de usarla con un determinado propósito. Así, un estudiante que ha alcanzado el nivel de cadena irrompible no podrá emplear la secuencia numérica para sumar utilizando la estrategia de contar a partir de un sumando, pues esta técnica exigiría poder iniciar el conteo desde un número distinto al uno.

El acceso cardinal

El acceso escolar al número natural a la manera de Cantor se apoya en la actividad de coordinar conjuntos. La coordinación de conjuntos supone hacer corresponder a un elemento de un conjunto, al que llamaremos conjunto inicial, un único elemento del otro conjunto, al que llamaremos conjunto final. El resultado de la acción de coordinar dos conjuntos puede ser:

a) agotamos los elementos de ambos conjuntos;
b) agotamos los elementos del conjunto inicial, pero no del final;
c) agotamos los elementos del conjunto final, pero no del inicial.

En el primer caso diremos que los conjuntos tienen igual cardinal, mientras que en los otros dos casos tendrán un cardinal distinto. Un número será la clase de equivalencia formada por todos los conjuntos que se pueden coordinar. La actividad de coordinar y sus posibles resultados nos permite establecer una relación de orden entre los números. Así, el número m será menor que el número n si al coordinar un conjunto de la primera clase de equivalencia con un conjunto de la segunda quedan elementos de este último sin correspondencia. En este acceso podemos construir la secuencia numérica mediante dos procedimientos: 1) a partir de la relación de orden definida anteriormente; 2) identificando "el siguiente de" con el incremento de un elemento en el conjunto. Sin embargo, en el acceso cardinal las operaciones no se realizan entre números, sino sobre conjuntos. Así, por ejemplo, para sumar dos números construimos dos conjuntos que tengan esos cardinales, aplicamos la operación unión de conjuntos y lo integramos dentro de una clase de equivalencia que nos proporcionará el número resultante.

¿Es adecuado centrar la construcción del número en la idea de número cardinal? Para Freudenthal (1973) el número cardinal es matemática y didácticamente insuficiente. Desde un punto de vista matemático, su crítica se basa en la imposibilidad de definir las potencias finitas de forma independiente a la inducción completa en el conjunto de los naturales. La escasa importancia matemática del número cardinal se observa en el hecho de que, aunque fue el que inicialmente empleó la humanidad, en el campo de las matemáticas no recibió atención hasta los trabajos de Cantor y, en este caso, la intención fue la de dar cuenta de la potencia de los conjuntos infinitos.

Desde un punto de vista didáctico, Freudenthal apunta que la capacidad de contar surge en edades tempranas en los niños y que gracias a esto pueden reconocer numerosidades.

> La secuencia numérica es la primera piedra de las matemáticas, históricamente, genéticamente y sistemáticamente. Sin la secuencia numérica, no hay matemáticas. Si algunos textos de la matemática moderna sugieren otro punto de vista, es porque sus autores malinterpretan las matemáticas. (Freudenthal, 1973, pp. 171-172)

El supuesto acceso al número desde la teoría de Piaget

Piaget creyó encontrar una convergencia entre las investigaciones genéticas y las axiomáticas centradas en la reducción del número a clases de equivalencia en la línea de Cantor, Frege, Russell, etc. Sin embargo, para la construcción lógica del número desde un punto de vista psicológico consideró necesario adoptar algunas matizaciones al acceso cardinal como consecuencia de lo que podríamos llamar *problema de las correspondencias biunívocas cualesquiera*.

> Parece muy 'natural' semejante reducción [la del número a clases de equivalencia], dado el carácter al mismo tiempo muy elemental y muy precoz de la operación de hacer corresponder término a término, tan espontánea y extendida entre los niños pequeños. [...] La dificultad fundamental que este modelo de reducción presenta desde el punto de vista psicológico (y tal vez desde el punto de vista lógico) es, en efecto, que hay dos formas muy distintas de correspondencia término a término: [...] una correspondencia biunívoca cualificada [...] una correspondencia biunívoca cualquiera[2]. (Beth y Piaget, 1961/1968 p. 325)

Escultura de Jean Piaget en Ginebra

Para Piaget las correspondencias biunívocas cualificadas serían correspondencias entre elementos de dos conjuntos establecidas en función de las semejanzas cualitativas. Por ejemplo, a un elemento de un conjunto inicial que tiene la característica de ser el más grande, le haríamos corresponder el elemento más grande del conjunto final. Sin embargo, en una correspondencia biunívoca cualquiera se hace abstracción de las cualidades y únicamente se atiende a que a un elemento de la colección inicial se le haga corresponder un único elemento de la final.

¿Qué problema psicológico introducían las correspondencias biunívocas cualesquiera? Según Piaget como las correspondencias biunívocas cualesquiera exigen la abstracción de las cualidades, los elementos individuales se convierten para el sujeto en equivalentes. Pero si son equivalentes, ¿cómo puede el usuario distinguirlos para establecer la correspondencia? La respuesta que da Piaget es la de ordenarlos de una u otra manera. La necesidad de recurrir a las estructuras de clasificación y seriación (el orden) para lograr la construcción lógica del número le llevó a realizar una de las proclamas que mayor repercusión tuvieron en la construcción de algunos currículos de Educación Infantil en las décadas de los 60, 70 y 80 del siglo pasado.

> No encontramos que el desarrollo del número se adelante con respecto a las clases (estructuras de clasificación) o a las relaciones asimétricas transitivas (estructuras de seriación), sino, por el contrario, una construcción simultánea de las estructuras de clases, de relaciones y de números [...] Por consiguiente, vamos a considerar como condiciones mínimas del número, no que el sujeto sea capaz de efectuar una numeración verbal (que es siempre muy equivoca desde el punto de vista operatorio), sino 1) que sepa igualar dos colecciones pequeñas (de cinco a siete elementos) por correspondencia biunívoca entre sus términos, y 2) que piense [sic] que tal equivalencia se conserva en caso de que, sin añadir ni retirar ningún elemento, simplemente se modifique la disposición espacial de una de las colecciones. (Beth y Piaget, 1961/1968, p. 321)

Como los estudios empíricos llevados a cabo por el autor situaban la consolidación de las estructuras de clasificación y seriación en el etapa de las operaciones concretas (6-11 años), se podía concluir, como así se hizo, que los niños en la etapa de Educación Infantil no podían acceder a la idea de número. La difusión de estas ideas hizo que los currículos y los libros de texto pasaran a proponer actividades de clasificación, seriación y conservación de la cantidad. Se sustituyeron, al menos sobre el papel, las actividades numéricas por las prenuméricas y, en muchas ocasiones, la diversidad de la idea de número se acabó reduciendo al número cardinal.

Podríamos recurrir nuevamente a la argumentación de Freudenthal contra el acceso cardinal para criticar la construcción de la idea de número según Piaget, pues la actividad de coordinar y la potencia de un conjunto vuelven a ocupar un papel central. Ahora bien, se podría responder a la crítica anterior diciendo que la intención de Piaget no era realizar una construcción matemática o didáctica del número, sino psicológica. Sin embargo, algunas de las hipótesis de partida de Piaget se asientan sobre ideas matemáticas y sobre observaciones experimentales llevadas a cabo por el autor y sus colaboradores y, por lo tanto, pueden ser objeto de análisis desde fuera de la psicología.

Un aspecto criticado en los experimentos es el recurso a respuestas verbales, ya que pueden introducir un nuevo factor que sea el responsable real de las características de la respuesta. El propio Piaget es consciente de esta posible objeción: “¿Pero no podría objetarse entonces que hay un malentendido en el uso de las palabras?” (Piaget y Szeminska, 1964/1987, p. 64). En lugar de analizar la dependencia o independencia entre razonamiento y lenguaje, se limitó a señalar que “para responder a esta objeción, y porque es difícil rechazar con palabras un malentendido verbal, multiplicaremos las situaciones y los ejemplos” (Piaget y Szeminska, 1964/1987, p. 64). Sin embargo, diversas investigaciones coetáneas o posteriores vinieron a demostrar esa independencia. Por ejemplo, Siegel (1978/1983) encontró que los conceptos relacionados con la cantidad no pueden valorarse como adquiridos o no adquiridos basándose únicamente en las respuesta verbales, lo que ponía en tela de juicio los resultado de los experimentos piagetianos. Los estudios de Donaldson y Balfour (1968) mostraron que los niños de entre tres y cuatro años tomaban como sinónimas las palabras *más* y *menos*, siendo dominante el significado de la primera sobre la segunda; lo que sembraba de dudas los resultados de los experimentos piagetianos en los que se analizaba la conservación y la comparación de cantidades para lo que se ponían en juego expresiones como *igual que*, *más que* o *menos que*[3].

Por otro lado, las conclusiones que obtienen Piaget y sus colaboradores son en muchos casos gratuitas, pues más que poder dar unas conclusiones generales sobre la construcción (o génesis) del número en el niño, se deberían limitar a señalar que los problemas que se proponen se pueden resolver a partir de una determinada edad, que, por otro lado, coincide con la del inicio de la escolarización obligatoria de los sujetos experimentales. Parece que Piaget, en este caso, no parece prestar importancia a la influencia de la educación recibida en las respuestas que ofrecen los estudiantes (que, como ya hemos dicho, él mismo señala como una importante distorsión en el desarrollo de las estructuras mentales).

Sin embargo, nuestra crítica se centrará en el recurso innecesario a la unidad numérica que llevó a Piaget a considerar precisa la participación de las estructuras de seriación para poder pasar de realizar correspondencias biunívocas cualificadas a correspondencias biunívocas cualesquiera y así conseguir, finalmente, la construcción mental del concepto de número. Ya hemos señalado que según Piaget los niños, en unos primeros estadios, son capaces de realizar espontáneamente correspondencias biunívocas cualificadas conectando elementos que comparten una determinada característica de dos conjuntos distintos. Pero, ¿qué pasa cuando los elementos de ambos conjuntos carecen de las cualidades que los hacen coordinables? Los niños no tendrán más remedio en este caso que hacer la conexión abstrayendo las cualidades, si las tienen, y limitándose a unir los elementos uno a uno. Para Piaget esta abstracción de las cualidades haría iguales todos los elementos desde un punto de vista lógico. Dejemos que hable Piaget para evitar una posible interpretación incorrecta por nuestra parte:

> Como es natural, lo consigue procediendo a abstraer de todas las cualidades; pero entonces los elementos individuales se vuelven, ipso facto, equivalentes entre sí, por más que sigan siendo distintos, y ese doble carácter de equivalencia generalizada y de distinción mutua es lo que los transforma en unidades aritméticas (ya que la sola utilización de la identidad lógica aboliría las distinciones, puesto que éstas, desde el punto de vista de la los sistemas de clases, no reposan más que sobre las diferencias cualitativas, de las que precisamente se había hecho abstracción). (Beth y Piaget, 1961/1968, p. 326)

En la afirmación de Piaget de que los elementos individuales se convierten en equivalentes encontramos un error ligado a la idea de conjunto y de sus posibles representaciones. Los elementos de un conjunto podemos representarlos entre llaves o mediante diagramas de Venn. Como señala Freudenthal (1973), el hecho de que en los diagramas de Venn aprovechemos las posibilidades espaciales, nos permite representar conjuntos formados por elementos que no tienen diferencias cualitativas, más allá de ocupar posiciones distintas en el espacio (ente lógico), lo que no podría hacerse en una diagrama de llaves, pues en estos más que representar los elementos, se representan los nombres de los elementos. En consecuencia, y como en las experiencias de Piaget los conjuntos se representan mediante diagramas de Venn de forma implícita, la ausencia de cualidades que los distingan no produce dificultad a la hora de diferenciar a los elementos como distintos. Es decir, ni tan sólo desde un punto de psicológico podríamos considerar los elementos como equivalentes de forma generalizada.

La necesidad ficticia de recurrir a las unidades aritméticas llevó a Piaget a suponer el desarrollo previo de las estructuras de seriación para poder construir el concepto de número desde un punto de vista psicológico.

> Desde la óptica psicológica, pues, habría un círculo vicioso si se pasase de la clase al número recurriendo simplemente a la correspondencia cualquiera, ya que ésta supone la unidad aritmética, de modo que el número se introduce ahora en la clase, en lugar de sacarse de ella. […] en caso de que se hayan abstraído las cualidades diferenciales o que falten, no hay más que un medio de distinguir los elemen-

> tos individuales, que es el de ordenarlos de una u otra manera. (Beth y Piaget, 1961/1968, pp. 326-327)

El número en el currículo español de Educación Infantil

En este apartado trataremos de sustanciar los distintos accesos escolares al número que se proponían, de manera implícita o explícita, en los currículos españoles de Educación Infantil desde 1973, poniendo de manifiesto las contradicciones en la estructuración de los contenidos que en algunos casos se observan.

Las primeras disposiciones curriculares que organizaban en España los contenidos de lo que en aquel momento se llamó Educación Preescolar se publicaron al inicio de la década de los setenta (MEC, 1973), durante la dictadura franquista. En las instrucciones para la enseñanza y aprendizaje en el caso de niños de cuatro y cinco años se establecía: "Introducción funcional de la idea de número mediante los conjuntos coordinables. [...] Aprendizaje de las cifras. [...] Introducción a la ordenación mediante conjuntos no coordinables" (MEC, 1973, p. 15904). La referencia a la actividad de coordinar conjuntos nos permite concluir que se proponía un acceso cardinal al número, característico de las matemáticas modernas que en aquel momento eran la base sobre la que se organizaba el currículo de primaria. Las ideas de Piaget sobre la enseñanza del número (o prenúmero), que ya se habían integrado en los currículos de algunos países europeos, no fueron tenidas en cuenta, como pone de manifiesto la propia presencia de la enseñanza del número o la instrucción de que los estudiantes debían aprender a contar de distintos modos (desplazando, agrupando, tocando...).

En los Programas Renovados (MEC, 1981a, 1981b), propuestos desde el gobierno de la Unión de Centro Democrático, la influencia de las ideas de Piaget se reflejó en la presencia del bloque *Experiencias Prenuméricas*, donde la clasificación, la seriación y la coordinación de conjuntos ocupaban un papel central. "Se irá profundizando en las actividades de clasificación para una comprensión del número. Tanto las seriaciones como las clasificaciones son tipos de experiencias a realizar en el periodo prenumérico." (MEC, 1981b, p. 46)

Sin embargo, aunque en cierta manera se asumía el discurso piagetiano, dentro del bloque de *Experiencias Prenuméricas* se incluyó el subapartado *Numeración* en el que se precisaban unas instrucciones que hacían necesaria la idea de número. Se planteaban como objetivos que los niños fueran capaces de utilizar los números hasta el nueve; reconocer los símbolos de los números de una cifra; la composición y descomposición de números de una cifra como una forma de introducir la adición y la sustracción; la asignación del cardinal a un conjunto como resultado de la actividad de contar; la ordenación de las cinco primeras cifras; o resolver problemas numéricos sencillos gráficamente.

Tras la victoria del Partido Socialista Obrero Español en 1982, se emprendió una profunda reforma del sistema educativo que se plasmó (MEC, 1991) en la Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE). Esta ley proponía un cambio radical respecto al tratamiento del número en la Educación Infantil (nombre que se dio a la Educación Preescolar en esta ley). Se volvió a introducir de manera explícita la enseñanza del número y desaparecieron las referencias a la idea piagetiana del número como se puede observar en el tipo de actividades que se pretendía que los estudiantes pudieran realizar al acabar la Educación Infantil:

> 6. Comparación de colecciones de objetos: Igual que, menos que, más que.
> 7. Aplicación del ordinal en pequeñas colecciones ordenadas.
> 8. Construcción de la serie numérica mediante la adición de la unidad.
> 9. Utilización de la serie numérica para contar elementos y objetos de la realidad.
> 10. Representación gráfica de la cuantificación de las colecciones de objetos mediante códigos convencionales y no convencionales.
> 11. Resolución de problemas que impliquen la aplicación de sencillas operaciones (quitar, añadir, repartir). (MEC, 1991, p. 29725)

En estas instrucciones se especificaba la necesidad de recurrir a la secuencia numérica para contar objetos, lo que sería propio de un acceso ordinal. Ahora bien, se proponía construir la secuencia numérica de una de las formas en que se hace en el acceso cardinal. Otro aspecto a destacar es el tratamiento que se daba al número para operar. Mientras en el currículo de 1981 las actividades de suma y resta se ligaban a la acción abstracta de componer y descomponer números y se introducía una resolución gráfica de problemas verbales sencillos; en el currículo de 1991 la resolución de problemas verbales se enlazaba, explícitamente, a las acciones de añadir y quitar, es decir, a situaciones de cambio que tienen un referente en las acciones de seguir contando hacia adelante o hacia atrás, respectivamente.

En definitiva, en el currículo de 1991 se asumió la enseñanza del número y, aunque de forma vaga y en ocasiones contradictoria, se proponía un acceso al número natural basado en la actividad de contar. En algunos casos, las disposiciones de los gobiernos autonómicos que en aquel momento habían asumido las competencias educativas profundizaron y aclararon la línea a seguir. Por ejemplo, en el desarrollo de la ley que decretó el Gobierno Valenciano (Conselleria de Cultura, Educació i Ciència, 1992) se establecían como contenidos el uso del número en su contexto social, el conocimiento de la serie numérica y la utilización de las estrategias de conteo en diferentes situaciones del quehacer cotidiano. Y se fundamentaba:

> El niño, desde muy pronto, comienza a contar oralmente y lo hace por la fuerte exposición social que se encuentra y que posibilita que memorice números. Contar oralmente es equivalente, en este caso a "contar de memoria" como primera técnica oral que utilizan los niños, pero no es una descripción adecuada de las posteriores intenciones de contar, sobre las cuales se basan las reglas fundamentales para construir la serie numérica.
>
> Tal como va adquiriendo más experiencia y en el uso que hace en las diferentes actividades cotidianas, en el que contar y recitar números están presentes, los niños y las niñas aprenden a utilizar su representación mental de la serie numérica de manera más elaborada y flexible, y se dan cuenta de las relaciones que existen entre los números. (Conselleria de Cultura, Educació i Ciència, 1992, p. 1409)

Un desarrollo adecuado de la LOGSE hubiera situado a la enseñanza del número en la Educación Infantil en una dirección adecuada; pero la ley tuvo una duración escasa y muchas dificultades en su implantación. De hecho, el Partido Popular propuso como acción principal de gobierno una contrarreforma que se plasmó en la Ley Orgánica de la Calidad de la Educación (LOCE). Esta ley planteaba una vuelta al pasado y criticaba abiertamente el espíritu de la LOGSE.

> Los valores del esfuerzo y de la exigencia personal constituyen condiciones básicas para la mejora de la calidad del sistema educativo, valores cuyos perfiles se han ido desdibujando a la vez que se debilitaban los conceptos del deber, de la disciplina y del respeto al profesor. (MECD, 2002, p. 45189)

Pero la involución no sólo se produjo en las orientaciones metodológicas, sino que también se observó en la descripción de los contenidos que en ocasiones era asombrosamente similar a la de los Programas Renovados, como podemos constatar si comparamos los párrafos siguientes:

> Antes de llegar a la idea de número, que el niño realice actividades de formación de conjuntos, correspondencia entre conjuntos, clasificaciones, hasta llegar a la coordinabilidad de conjuntos. (MEC, 1981b, p. 49)
>
> Antes de llegar a la idea de número tiene que realizar actividades de formación de conjuntos, correspondencias y clasificaciones. (MECD, 2004, p. 5048)

Ahora bien, en el regreso al espíritu de las instrucciones de los Programas Renovados se perdió la fundamentación que proporcionaban las ideas de Piaget y se ofreció una organización de contenidos que planteaba un acceso cardinal.

> Conocer, utilizar y representar la serie numérica para contar elementos. [...] Cuantificadores básicos. Conocer los aspectos cardinales y ordinales del número. La serie numérica. Los primeros números. [...] La serie numérica: los nueve primeros números. Su representación gráfica. Construcción de la serie numérica mediante la adición de la unidad. [...] Iniciación al cálculo con las operaciones de unir y separar por medio de la manipulación de objetos. Resolución de problemas que impliquen operaciones sencillas. (MECD, 2004, pp. 5048-5049).

Así, tras afirmar la necesidad de realizar correspondencias y clasificaciones antes de acceder a la idea de número, se proponía la construcción de la secuencia numérica; pero limitada a los nueve primeros números, estableciendo una fusión de número y su representación escrita. Por último, se pretendía ligar las operaciones de suma y resta a las acciones de unir y separar, lo que era típico del acceso cardinal.

El regreso al gobierno del Partido Socialista Obrero Español en 2004 trajo consigo una reforma de la contrarreforma que se materializó en la Ley Orgánica de Educación (LOE). Esta ley, en el caso de la Educación Infantil, suponía una vuelta a las instrucciones de la LOGSE, lo que se tradujo en una apuesta por el acceso ordinal. Así, se podía leer:

> Identificación de cualidades y sus grados. Ordenación gradual de elementos. Uso contextualizado de los primeros números ordinales.
>
> [...]
>
> Estimación cuantitativa exacta de colecciones y uso de números cardinales referidos a cantidades manejables. Utilización oral de la serie numérica para contar. Observación y toma de conciencia del valor funcional de los números y de su utilidad en la vida cotidiana. (MEC, 2008, p. 1024)

Se establece la necesidad de utilizar la secuencia numérica para contar y no se señala una limitación en la longitud de la misma y de los números que se pueden enseñar y aprender, pues el legislador en este caso sí que diferencia entre representación escrita y oral del número y da importancia a ésta última.

> Se valorará si el niño observa y puede verbalizar algunos de los usos y funciones que los números cardinales y ordinales cumplen en nuestra cultura así como si los utiliza funcionalmente en sus juegos y en situaciones propias de la vida cotidiana. (MEC, 2008, p. 1025)

A modo de conclusión

Hemos puesto de manifiesto el error sobre el que se apoyaba la argumentación piagetiana que exigía la introducción del orden para conseguir la construcción psicológica del número. También hemos presentado resultados de investigaciones contemporáneas a Piaget que mostraban la escasa solidez sobre la que se soportaban sus propuestas. Sin embargo, esto no fue un obstáculo para que fuera la base de una pedagogía para la enseñanza del número que se institucionalizó en el currículo de 1981. Podríamos pensar que las arbitrariedades que organizaban la idea de número según lo concebía Piaget tuvieron poca repercusión en la enseñanza del número en Educación Infantil y que se extinguieron junto a ley que les dio cuerpo. Sin embargo, de alguna manera se generó una desconfianza en las posibilidades de los niños de estas edades para aprender matemáticas. Así, la secuencia numérica, tan denostada por Piaget, ha pasado, en algunos casos, e independientemente del currículo en vigor, a ocupar un papel secundario en la práctica docente.

De hecho, es recurrente la limitación al estudio de los nueve primeros números[4] en los currículos que se basan en el aspecto cardinal del número. Una explicación plausible a esta restricción es la relación necesaria que el legislador establece entre número y su representación simbólica escrita y los conocimientos necesarios para representar de manera escrita un número mayor que nueve. Sin embargo, no parece tenerse en cuenta las posibilidades que proporciona la representación verbal donde los números mayores que nueve no plantean dificultad alguna más allá que la de su memorización.

Como consecuencia de estas instrucciones, en algunas ocasiones la enseñanza del número se ha centrado en que los niños "dibujaran" e identificaran la grafía de los números. En estos casos, se ha acabado confundiendo actividad numérica con representación escrita, lo que ha limitado las posibilidades para la enseñanza y aprendizaje del número. Nos tomaremos la licencia de parafrasear a Luis Radford, para presentar las consecuencias que tiene la representación escrita de la actividad matemática (el autor se refería a la enseñanza y aprendizaje del álgebra), lo que pondrá de manifiesto los efectos que tendría una introducción prematura:

> Poco a poco, a medida que los estudiantes se internan en el mundo de [los números], la palabra se hace menos presente. A veces lentamente, otras de manera más rápida, el lápiz se mueve sobre el papel, línea tras línea […] Los signos, que produce la mano solitaria que sujeta el lápiz, entran en una especie de territorio mudo, ocasionalmente interrumpido por un murmullo –el vestigio de los tumultuosos intercambios sociales previos que cristalizan ahora en la letra silenciosa. (Radford, 2002, p. 54)

Por otro lado, podemos concluir que la enseñanza del número en la Educación Infantil siempre ha estado presente en el currículo español, incluso cuando, al amparo de las ideas de Piaget, las actividades numéricas se sustituyeron, teóricamente, por las prenuméricas. No obstante, la continuidad en la enseñanza del número contrasta con la alternancia en el acceso propuesto. En este sentido, hemos puesto de manifiesto que existe una relación entre la ideología del gobierno instructor del currículo y el acceso escolar al número que se propone. Así, los currículos promovidos por los gobiernos conservadores planteaban accesos basados en el aspecto cardinal del número, mientras que los gobiernos socialistas proponían un acceso ordinal. Más que una toma de postura por un determinado modelo, podríamos apuntar como causa de esta tendencia a que los encargados de elaborar el currículo recurrían a los documentos que generaron aquéllos que tenían una misma ideología política.

Para finalizar, ¿acceso cardinal o acceso ordinal? Estudios ya clásicos, como los de Rochel Gelman y Randy Gallistel (1978) o Karen Fuson (1988), pusieron de manifiesto que los estudiantes de entre tres y seis años pueden aprender y usar la secuencia numérica de manera operatoria. Se ha observado que los niños utilizan la actividad de contar para determinar el cardinal de un conjunto o suman continuando la secuencia numérica a partir de un número. De hecho, la espontaneidad con la que los niños utilizaban el conteo era una de las dificultades que debían vencer las propuestas metodológicas basadas en el acceso cardinal.

> Para impedir que el niño contara los objetos señalándolos con el dedo, se solía emplear un enmascaramiento [...] pues el gran temor de los pedagogos era que los niños recitaran la lista de las palabras-número de forma automática, como una lista de 'números' (el 'uno', el 'dos'...), sin comprender que a cada uno de ellos se le puede hacer corresponder una cantidad. (Brissiaud, 1989/1993, pp. 11-12)

Como señala Freudenthal (1973), la actividad de contar es la base sobre la que se construye la aritmética. Los autores que proponen un acceso cardinal malinterpretan la matemáticas: "Incluso los niños están mejor informados que ellos" (Freudenthal, 1973, p. 172).

NOTAS

[1] Una descripción más precisa de los accesos ordinal y cardinal se puede encontrar en Maza (1989) o Fernández (2004).

[2] En Piaget y Szeminska (1964/1987) se les da los nombres de correspondencia serial o similitud cualitativa y correspondencia ordinal o similitud generalizada, respectivamente.

[3] En estos experimentos se hacían preguntas del tipo *¿Dónde hay más?*. Por ejemplo, "HOC (4;3): –Estamos en un café. Tú eres el mozo y tienes que sacar del armario un vaso para cada una de esas botellas. El niño coloca con exactitud un vaso delante de cada botella sin tener en cuenta los vasos que quedan: –¿Hay lo mismo? –*Sí*. Amontonamos ahora las botellas en un grupo: –¿Hay lo mismo de botellas y de vasos? –*No*. –¿Dónde hay más? –*Hay más vasos*." (Piaget y Szeminska, 1964/1987, p. 62)

[4] Sin embargo, Fuson, Richards y Briars (1982) señalan que todos los niños analizados de entre cuatro y seis años podían contar más allá del diez. El 94% de los niños de entre cinco y seis años podía superar el 14 y el 44% podía alcanzar un valor entre el 30 y el 72.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Beth, E. W. y Piaget, J. (1968). *Relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real* [Traducido por Víctor Sánchez de Zabala]. Madrid: Ciencia Nueva. (Trabajo original publicado en 1961.)

Brissiaud, R. (1993). *El aprendizaje del cálculo: más allá de Piaget y de la teoría de los conjuntos* [Traducido por Celina González]. Buenos Aires: Visor. (Trabajo original publicado en 1989.)

Conselleria de Cultura, Educació i Ciencia. (1992). Decreto 19/1992, de 17 de febrero, del Gobierno Valenciano, por el que se establece el currículo de Educación Infantil en la Comunidad Valenciana. *DOGV*, *1727*, 1378-1409.

Donaldson, M. y Balfour, G. (1968). Less is more: a study of language comprehension in children. *British Journal of Psychology*, *59*(4), 461-471.

Fernández, C. (2004). *Análisis Didáctico de la Secuencia Numérica*. Málaga: Dykinson.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Fuson, K. C. (1988). *Children's Counting and Concepts of Number*. New York: Springer-Verlag.

Fuson, K. C., Richards, J. y Briars, D. J. (1982). The Acquisition and Elaboration of the Number Word Sequence. En C. Brainerd (Ed.), *Progress in Cognitive Development Research: Children's Logical and Mathematical Cognition*. New York: Springer-Verlag.

Gelman, R. y Gallistel, C. R. (1978). *The Child's Understanding of Number*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Maza, C. (1989). *Conceptos y numeración en Educación Infantil.* Madrid: Editorial Síntesis.

Ministerio de Educación y Ciencia. (1973). Orden de 27 de julio de 1973 por la que se aprueban las orientaciones pedagógicas para la Educación Preescolar. *BOE*, *186*, 15899-15906.

Ministerio de Educación y Ciencia. (1981a). Orden de 17 de enero de 1981 por la que se regulan las enseñanzas de Educación Preescolar y del Ciclo Inicial de la Educación General Básica. *BOE*, *18*, 1384-1389.

Ministerio de Educación y Ciencia. (1981b). *Programas Renovados de Educación Preescolar y Ciclo Inicial*. Madrid: Editorial Escuela Española, S. A.

Ministerio de Educación y Ciencia. (1991). Real Decreto 1333/1991, de 6 de septiembre, por el que se establece el currículo de la educación infantil. *BOE*, *216*, 29716-29726.

Ministerio de Educación y Ciencia. (2008). ORDEN ECI/3960/2007, de 19 de diciembre, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la educación infantil. *BOE*, *5*, 1016-1036.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2002). LEY ORGÁNICA 10/2002, de 23 de diciembre, de Calidad de la Educación. *BOE*, *307*, 45188-45220.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2004). REAL DECRETO 114/2004, de 23 de enero, por el que se establece el currículo de la Educación Infantil. *BOE*, *32*, 5041-5050.

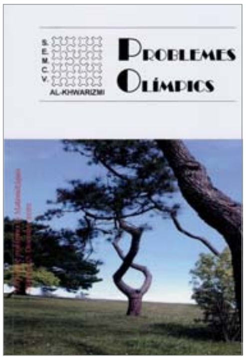
Piaget, J. y Szeminska, A. (1987). *Génesis del número en el niño* [Traducido por Sara Vasallo]. Buenos Aires: Editorial Guadalupe. (Trabajo original publicado en 1964.)

Radford, L. (2002). Algebra as tekne. Artefacts, Symbols and Equations in the classroom. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *1*(1), 31-56.

Siegel, L. S. (1983). La relación entre lenguaje y pensamiento en el niño del estado preoperatorio: una nueva consideración de las alternativas no verbales a las pruebas propuestas por Piaget [Traducido por Mercedes Valcárcel]. En L. S. Siegel & C. J. Brainerd (Eds.), *Alternativas a Piaget*. Madrid: Ediciones Pirámide. (Trabajo original publicado en 1978.)

Este artículo fue recibido en SUMA en diciembre de 2009 y aceptado en enero de 2011

Publicaciones recibidas



Problemes olímpics
SEMCV Al Khwārizmī
N.º 57, desembre 2010
Valencia
ISSN: 1578-1771

Losanges
SBPMef
N.º 10, Octobre 2010

La Gaceta de la RSME
RSME
Vol.13, n.º 4, 2010
Madrid
ISNN 1138-8927

Investigación y ciencia
Prensa Científica, S.A.
Enero 2011
Barcelona
ISSN: 0210136X

PNA. Revista de Investigación en Didáctica de las Matemáticas
Universidad de Granada
Vol. 5 n.º 2, enero 2011
ISSN 1886-1350

Grand N
Irem de Grenoble
N.º86, Décembre 2010
Saint Martin d'Hères Cedex
ISSN: 0152-4682

LLULL
SEHCYT
Vol. 33 (nº72) 2010
Zaragoza
ISSN: 0210-8615

Xla Tangente
Kangourou Italia
N.º 24, dicembre 2010
Monza. Italia
ISSN: 1971-0445

suma+ 66

Febrero 2011, pp. 17-26

Picos y mesetas en los aprendizajes matemáticos en Educación Primaria: el caso de la multiplicación

En el presente artículo se pretenden identificar los puntos críticos que entrañan mayor dificultad para los alumnos dentro de los contenidos numéricos en Educación Primaria. La finalidad didáctica de este trabajo reside en ser capaces de saber dónde se sitúan esos puntos críticos para proponer tratamientos educativos que los superen. También se proporcionan unas indicaciones para la enseñanza basadas en el carácter visual y espacial de los números, así como un conjunto de actividades abiertas, susceptibles de ser empleadas en el trabajo con los alumnos.

Palabras Clave: Experiencia de aula, aritmética, números, enseñanza-aprendizaje, primaria.

Peaks and plateaus in learning mathematics in primary education: the case of multiplication

This paper shows some of the most critical issues that primary education students have to face when they solve numerical problems. If all these important facts are identifyed, we will be able to define solutions to improve the learning process. This document also provides some indications to work with visual and spatial teachings. Some interesting activities are also proposed to make the education process easier.

Key words: Classroom experience, arithmetic, numbers, teaching and learning, primary.

Introducción

Siendo alumno en la escuela de mi pueblo escuché a mi maestro D. José Guerra, que imagino que no había leído a Piaget, esta frase de los picos y mesetas en los aprendizajes. Se refería a la mayor dificultad que entrañan unos contenidos en relación a otros. Una meseta se correspondería con un tramo de aprendizajes de similar dificultad, no existe propiamente una mayor exigencia cognitiva entre los requerimientos de un aprendizaje y el siguiente; un pico se correspondería con un desafío nuevo, un aprendizaje que exige de capacidades superiores para ser adquirido.

La metáfora es adecuada, situados en una meseta del conocimiento se avanza por un tiempo sin mayores dificultades y pueden ser adquiridos un grupo importante de contenidos, luego, lo natural es que venga un pico, que da acceso a otra meseta en la que están situados un nuevo grupo amplio de aprendizajes, pero que supone un escalón cognitivo, y por tanto, un mayor esfuerzo para ser superado.

Esta secuencia de picos y mesetas, que se produce en todas las materias, y de un modo más acusado en el aprendizaje de las matemáticas, es importante de identificar. Permite conocer dónde se encuentran los lugares en los que algunos alumnos van a encontrar más dificultades, y por tanto, seleccionar con anterioridad las estrategias metodológicas más adecuadas, a la vez que colocar las ayudas necesarias, para que, si es posible, los obstáculos puedan ser superados por todos o casi todos.

Nos referiremos en este artículo a un pico y a su meseta subsiguiente, relevantes en el conjunto de contenidos que tienen que adquirir los alumnos de Educación Primaria, se trata de la multiplicación, y más concretamente, del aprendizaje de las tablas de multiplicar. La multiplicación constituye un pico por la importante dificultad que supone para algunos alumnos y da inicio a su vez a una meseta porque es un contenido básico a partir del cual se construyen otros contenidos importantes. Pero no es un pico cualquiera, un alumno puede prescindir de otros supuestos picos matemáticos como el álgebra o la combinatoria, pero la no adquisición con soltura del

José Antonio Redondo González
Junta de Extremadura
José Luis Redondo García
Universidad de Extremadura

automatismo de la multiplicación cercena en buena medida cualquier posibilidad de desarrollo matemático, e incluso de desenvolvimiento en su vida cotidiana.

La suma como meseta de partida

El comienzo del aprendizaje numérico se inicia cuando a un grupo de elementos se le asigna un número. En los primeros intentos de contar, el alumno va señalando con el dedo cada uno de los elementos de un conjunto, a la vez que va recitando la serie numérica, de modo que cuando finaliza con los elementos ha obtenido el cardinal del conjunto. En una segunda etapa, esta tarea se puede llevar a cabo mediante una estrategia más potente, con lo que se vuelve más rápida y automática, se reconocen configuraciones de elementos como un todo, tres, cuatro, cinco, seis puntos, tal como vienen situados en un dado. Así, de un solo golpe de vista, se le asigna un cardinal al conjunto.

Adquirido el concepto de número, un número se puede añadir a otro y así se crea la operación suma, 5+3 = 8; con ella se inicia la primera meseta del aprendizaje numérico. En una meseta hay muchos pasos (contenidos procedimentales) de parecido nivel, cada paso supone un conocimiento nuevo, pero no un esfuerzo cognitivo significativamente superior al paso anterior, así 8+7 es más complicado que 5+3 porque los números son mayores y hay que saltar de la primera a la segunda decena, pero no hay una ruptura radical con el paso anterior. La suma de números en los que intervienen las decenas, por ejemplo 15+13, necesita de mayores conocimientos, saber que por un lado hay que sumar las decenas y por otro las unidades, también de un poco más de memoria de trabajo, hay que retener las suma de las decenas mientras se suman las unidades, pero no exige una diferencia radical de representación con respecto al paso anterior. Otro contenido dentro de las misma meseta es 5+9+3 =, sobre un resultado obtenido volver a aplicar de nuevo el procedimiento de la suma.

La resta se sitúa en esta misma meseta que la suma, 9– es sencillamente contar desde 3 hasta 9, en los dos casos es el mismo mecanismo de ir progresivamente de un número a otro, por lo que todos los ejercicios de restar, por ejemplo 17–9 se sitúan en la misma meseta que la suma.

Los algoritmos tradicionales de la suma y de la resta están también situados en esta misma meseta, 345+297 no es más que una serie de sumas sencillas, es el mismo proceso repetido con el añadido de la preocupación de las llevadas, pero si la suma de cada par de números se realiza de forma automática, no entrañan mayor problema. El algoritmo de la resta aparece como más difícil porque tiene algunos impedimentos que no posee la suma, como que el número mayor debe situarse arriba, o que las llevadas deben agregarse inexcusablemente al sustraendo mientras que en la suma es indiferente al sumando que se añadan, pero no exige mayor carga de memoria, y por tanto, tampoco mayores dificultades de representación.

El territorio sobre el que se producen todas estas operaciones es el sistema de numeración, muy especialmente los números hasta el 100. Las operaciones de suma y resta no son más que desplazamientos en el territorio de los números del 1 al 100, por eso es de especial importancia tener una representación mental completa y ajustada de este tramo numérico.

La multiplicación como pico

La multiplicación como pico se manifiesta tanto en el concepto mismo de la operación como en los cálculos necesarios para llevarla a cabo.

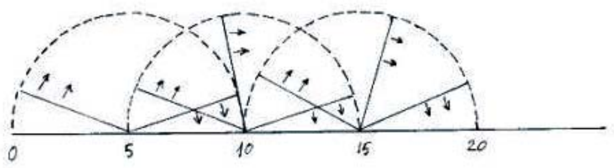
La dificultad del concepto de multiplicación

El concepto de multiplicación es más difícil que el de suma o resta, crear una película mental de la suma o de la resta es relativamente fácil: dos colecciones de objetos que se juntan o se separan, se trata de un solo movimiento mental. Para imaginar la multiplicación se necesitan varias colecciones iguales, o una colección que reiteradamente se repite, se trata pues de varios movimientos. La multiplicación es ya una operación construida sobre otra operación, de ahí su mayor nivel de abstracción y dificultad.

En la multiplicación los números crecen rápidamente y la cantidad de información que se maneja es mayor. Diversos autores (Nesher y Katriel, 1977; Luriya, 1969 y Hart, 1981) han señalado que la comprensión del significado de la multiplicación y la división es considerablemente más difícil que el de la adición y la sustracción. Añadir o quitar son acciones concretas y fáciles de visualizar, “tantas veces” no tiene una referencia activa tan obvia.

La multiplicación como la suma y la resta puede ser representada en la recta numérica mediante las metáforas de la longitud y el movimiento. Los papeles que juegan en la multiplicación los dos números son distintos, el primer número es la longitud del segmento que se considera, el segundo número indica las veces que el primero se lleva sobre la recta numérica. Surge la idea intuitiva de que con la multiplicación se avanza más rápidamente sobre la recta numérica, con el 5 y el 4 se avanza hasta el 20.

La representación de la multiplicación como una suma reiterada, al igual que otras formas de representación, puede adoptar formas idiosincrásicas, un alumno expresaba que visualizaba la multiplicación como un segmento que girando sobre sí mismo avanzaba sobre la recta numérica.

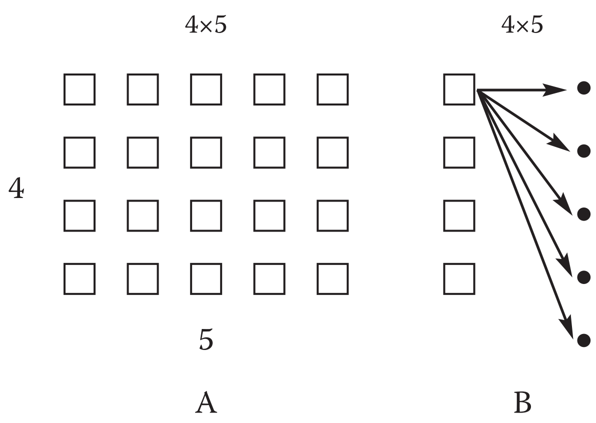


Representación idiosincrásica de la multiplicación

La información conceptual es que se suma cuatro veces la misma cantidad y se manifiesta espacialmente rotando un segmento. Este ejercicio mental necesita de mayor capacidad de representación que el de juntar dos colecciones.

Al hilo de las nuevas situaciones problemáticas que se les van planteando los alumnos van construyendo otras representaciones.

A: ¿Cuántas baldosas hay en una habitación que tiene 5 baldosas a lo largo y cuatro baldosas a lo ancho?
B: ¿De cuántos modos pueden combinarse cuatro pantalones y cinco camisetas?



Representaciones de la multiplicación

En el diagrama A las dos cantidades se colocan al mismo nivel, el modo más abstracto de representación de la operación multiplicación. En él participan numerosos elementos visuales, los elementos están organizados en varias hileras con el mismo número de elementos y por tanto de la misma longitud, columnas paralelas que encajan verticalmente unas sobre otras completando así la figura de un rectángulo.

Aunque ambos diagramas responden a la misma operación, el diagrama B es más fácilmente comprensible por los alumnos, quedan explicitados de manera más clara el tipo de relación que se establece entre los datos: cada pantalón puede combinarse con cada una de las cinco camisetas. Este diagrama o forma de representación de la multiplicación podría considerarse el estándar, en cuanto que es muy utilizado por los profesores y resulta de los más eficaces para ser comprendidos y asimilados por los alumnos.

La dificultad del algoritmo de la multiplicación

El afán de las matemáticas es la búsqueda de regularidades. La regularidad de una suma en que los sumandos son iguales, situación por lo demás bien frecuente en los cálculos cotidianos, puede ser aprovechada para buscar una forma más ágil, rápida y sencilla de buscar el resultado, así surge el algoritmo de la multiplicación.

Cawley et al., (1998), mostraron que sólo el 85% de la población de 14 años desarrolla una buena fluidez con la operación de la suma; el 81% con la resta; el 54% con la multiplicación; y el 54% con la división.

En la suma existen unas combinaciones básicas que es necesario manejar con soltura 8+6; 6+3; 9+5... de igual modo en la operación multiplicación existen unas combinaciones básicas 7×5; 8×9; 4×3; etc, lo que constituyen las tablas de multiplicar, que también es necesario dominar. Ambos tipos de combinaciones se realizan en el tramo del sistema de numeración que va del 1 al 100, sin embargo, existe una diferencia notable entre ellas, las combinaciones básicas de la suma pueden realizarse con ayuda de los dedos elemento a elemento, las de la multiplicación no. Esta imposibilidad de servirse de apoyos concretos y que la multiplicación necesita de una mayor capacidad de representación –los números se hacen más grandes, los desplazamiento en la recta numérica son más largos– son lo que la hacen más difícil.

Todas las combinaciones básicas de las tablas de multiplicar y sus extensiones son aprendizajes que pertenecen a la meseta de la multiplicación. Unas tablas, por ejemplo la del 5, son más sencillas de visualizar y retener que otras, por ejemplo la del 7. Un cálculo que supone un avance en la misma meseta de la multiplicación puede ser por ejemplo 8×7+5, añade una suma a una multiplicación previa lo que supone mayor carga de la memoria de trabajo, si se resuelve la multiplicación de modo automático la suma no debe suponer una dificultad mucho mayor. Los algoritmos tradicionales de la multiplicación y división se resuelven por aplicaciones sucesivas de este tipo de mecanismos en los que un componente esencial es el dominio de las combinaciones básicas multiplicativas. Muchas personas tienen almacenados en la memoria otras combinaciones, como por ejemplo 4 por 15, o 4 por 25 o 5 por 12; pertenecen a su red de conocimiento individual en cálculo mental que puede ser más o menos extensa.

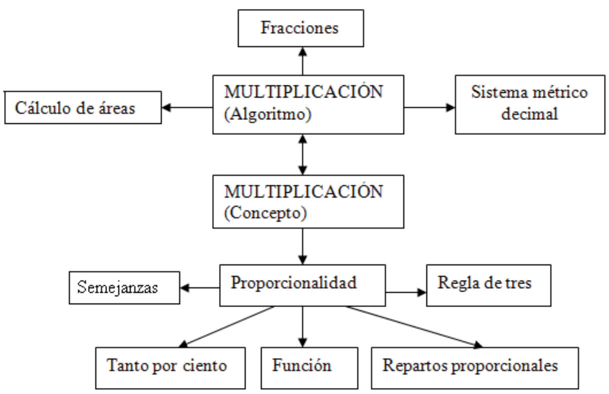
La multiplicación como meseta: contenido básico alrededor del cual se construyen otros contenidos importantes

La mayoría de los profesores coinciden en señalar, que la comprensión del concepto de multiplicación y la automatización de su algoritmo, abren una gran vía de progreso en los alumnos, suponen la culminación del aprendizaje numérico en primaria, y dotan a los alumnos de la competencia necesaria para su progreso en secundaria.

El algoritmo de la multiplicación está omnipresente en numerosos cálculos: cálculo de áreas, fracciones, sistema métrico decimal, problemas en los que están implicadas las operaciones de la multiplicación y división etc. Es una herramienta universal aplicable a multitud de situaciones matemáticas.

En cuanto al concepto de multiplicación muchos de los contenidos posteriores de las matemáticas se basan de una u otra manera en él, el concepto de razón construido sobre esta operación, es nuclear a una gran cantidad de contenidos matemáticos, está subyacente a conceptos tales como proporcionalidad, tanto por ciento, regla de tres, semejanzas, función, que la mayoría de lo que los alumnos deben después aprender. Si por incapacidad del alumno, o por cualquier otro motivo, no se interioriza este aprendizaje, los alumnos ven interrumpidos de forma drástica sus posibilidades de comprensión y asimilación de casi todos estos conceptos y por tanto su fracaso en la asignatura resulta casi asegurado.

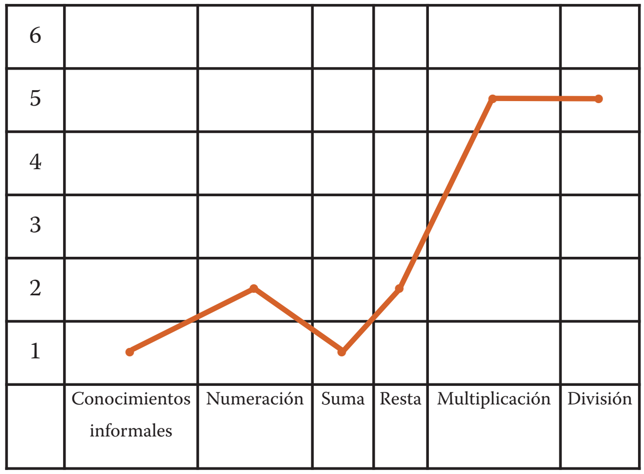
De modo sucinto la meseta de la multiplicación tanto en lo relativo a su algoritmo como a su concepto se extendería por los siguientes contenidos:



Meseta de la multiplicación

Lo que expresan los profesores

Los profesores saben, por su propia experiencia, de aquellos contenidos que suponen un mayor esfuerzo para sus alumnos. Los resultados obtenidos en la entrevista (anexo I) en cuanto a nivel de dificultad quedan resumidos en la siguiente tabla:



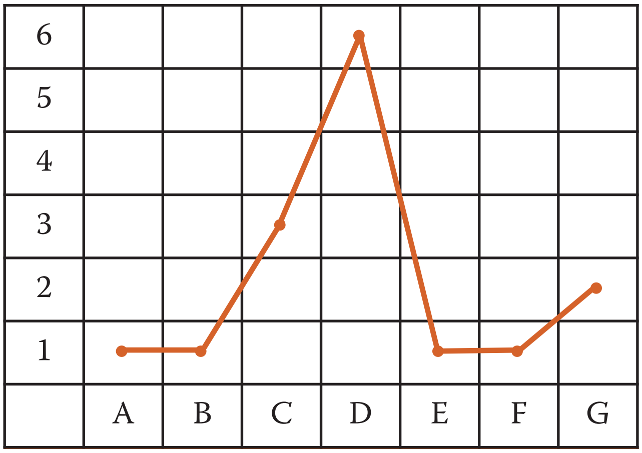
Abcisas: Contenidos de Educación Primaria
Ordenadas: Niveles de dificultad atribuido a esos contenidos

Niveles de dificultad según los profesores

Los conocimientos informales aparecen como aquellos contenidos adquiridos en un ambiente menos estructurados que el escolar, pero importantes porque son fruto de la comprensión y porque preparan al alumno para un buen abordaje del sistema de numeración.

Para los profesores la suma es un poco más fácil que la resta y la multiplicación ligeramente más fácil que la división, pero en niveles diferentes. De la suma y la resta a la multiplicación y división marcan un escalón muy pronunciado. La suma y la resta se sitúan en una meseta común, y la multiplicación y la división, en otra meseta de altitud y dificultad superior.

Aquilatando un poco más los profesores expresan que el escollo mayor para dominar los algoritmos de la multiplicación y división se encuentra en la retención y automatización de las combinaciones que componen las tablas de multiplicar. Consideran que los otros tipos de errores que aparecen son sólo expresiones de descuido que los alumnos suelen superar sin inconveniente mayor, eso sí, una vez que las combinaciones numéricas de las tablas son automatizadas y la memoria de trabajo queda descargada de esa exigencia. Su opinión sobre la frecuencia y relevancia de los tipos de errores más comunes en los alumnos queda reflejada en la siguiente tabla



Errores cometidos por los alumnos

A: Colocar los números en su posición.
B: Errores en las llevadas.
C: Fallos en la suma y la resta que participan en la multiplicación y división.
D: Errores en las tablas multiplicar.
E: Omitir ceros en el cociente.
F: Dejar restos intermedios mayores que el divisor.
G: Saber qué número cabe.

Una observación importante extraída de la práctica es que los alumnos que fallan en los algoritmos de la multiplicación o división, cuando se les permite abordarlos con plantillas con las tablas de multiplicar a la vista, apenas cometen errores y los realizan correctamente. Estos datos coinciden con los aportados por Buswel y John (1926) en un estudio acerca de los métodos de trabajo de los escolares de 3º a 6º grado en el que muestran que el error más frecuente y el obstáculo cognitivo más importante es la falta de conocimiento sobre las combinaciones de las tablas de multiplicar.

Lo que saben los alumnos

Con el objetivo de indagar sobre la dificultad expresada en la automatización de las combinaciones básicas en el aprendizaje numérico en Educación Primaria, se ha elaborado una prueba de cálculo mental (anexo II) que consta de ejercicios con las operaciones básicas, graduadas en cuatro niveles de dificultad.

Nivel de dificultad I: sumas dentro de la misma decena 2+3=; 4+4=; 23+5=; Los niños pequeños más aventajados las captan rápidamente de un sólo golpe de vista, la mayoría de los alumnos de 2º y 3º curso de primaria las suelen dominar con facilidad. Dentro de este nivel –como en los otros– hay unas sumas sencillas que otras, bien por simetría 3+3 =; o porque encajan de modo perfecto en la decena 6+4=; lo que facilita su visualización.

Nivel de dificultad II: sumas del tipo 8+7=; 9+5=. El salto de la decena y el tener que utilizar números más grandes ya supone un nivel de dificultad añadido. Para realizarlas con soltura es necesario aplicar una habilidad fundamental que es la capacidad de segmentación, que supone partir los números y agrupar las partes de forma sabia. Es básico el conocimiento de las decenas.

Nivel de dificultad III: sumas en las que hay que sumar decenas y unidades 19+19 =; 14+17=; supone un mayor grado de dificultad, los apoyos concretos con los dedos si se aplican al número completo no sirven –no hay suficientes dedos– y es más difícil abarcar los números mentalmente. Las decenas deben ser agrupadas por un lado y las unidades por el otro. Se hace ineludible la capacidad de partir los números en decenas y unidades.

Nivel de dificultad IV: son ítems que evalúan el aprendizaje de las tablas de multiplicar 9x8 =; 6x7 =; suponen menos referencias visuales y manipulativas, mayor nivel de abstracción y por lo tanto mayor nivel de dificultad.

En los criterios de corrección (anexo III) se tienen en cuenta los errores cometidos y necesariamente también el tiempo empleado. Con tiempo suficiente y los métodos que se quiera –conteo con los dedos– cualquier alumno podría finalizar la prueba correctamente.

Datos cuantitativos extraídos de la aplicación de la prueba de cálculo mental (anexo II)

Los resultados son que de 91 alumnos de tercer ciclo de Educación Primaria de tres colegios de ámbito rural a los que se les pasó la prueba, 67 mostraron tener perfectamente automatizadas las combinaciones básicas de las tablas de multiplicar y por añadido el algoritmo de la multiplicación, 15 dejaban ver algunas lagunas que con un mayor entrenamiento podían ser superadas y 9 manifestaban tener dificultades serias en la automatización y aprendizaje de las tablas de multiplicar.

Datos cualitativos

El nivel I se corresponde con las combinaciones básicas más sencillas, las más fáciles de aprehender y memorizar y que por tanto su respuesta es inmediata en un grupo importante de alumnos.

En el nivel II al tener que saltar de decena y que los números sean más grandes hace que aparezcan más errores y que el tiempo de respuesta aumente. Los alumnos que resuelven bien este apartado se desenvuelven bien en los algoritmos tradicionales de la suma y de la resta, en ambas operaciones deben manejarse mentalmente números menores que 20.

El nivel III de la prueba exige respecto del nivel II el uso de estrategias apropiadas de cálculo mental, agrupar las decenas por un lado y las unidades por otro, para poder resolver sus ítems. En sumas del tipo 12+17 es muy frecuente que los alumnos se inclinen por aplicar mentalmente el algoritmo de cálculo del mismo modo que si pudieran utilizar lápiz y papel. Es decir, apenas intentan utilizar otras estrategias más flexibles. A algunos incluso se les observa un intento de escribir con los dedos sobre la mesa los resultados de las operaciones mentales para poder retenerlas. Ello es indicativo de que en las aulas se enseñan los algoritmos de cálculo repetidamente de forma tradicional, lo que supone un empobrecimiento para los alumnos, con la consecuencia de que muy pocos se inclinan por utilizar estrategias variadas que les haga más fácil el cálculo mental de la operación.

De los alumnos a los que se les pasó la prueba los que manifestaron dificultades en el nivel II también las manifestaron en el nivel IV. Ambos apartados, II y IV, deben de mantener algún tipo de relación clara, porque los alumnos que fracasan en uno de ellos también lo hacen en el otro. Es decir, que quienes no realizan las sumas con soltura tampoco aprenden con facilidad las tablas de multiplicar.

La experiencia de aplicación de la prueba muestra que la evaluación del nivel II de dificultad es fundamental, importante no es tanto si el alumno lo ha resuelto sino más aún saber cómo lo ha resuelto; si se ha servido de los dedos para realizar las sumas –lo que indica que necesita de apoyos concretos– la velocidad o soltura con que las lleva a cabo, en definitiva, el grado de automatización que ha conseguido. La deficiencia más frecuente es el contar paso a paso al hacer la operación, con algunos alumnos es difícil percibir que están contando, lo hacen casi a escondidas, con los labios, los dedos de las manos bajo su mesa, o incluso mentalmente.

Todavía en 6º curso de primaria, para determinados alumnos, el sumar a grupos con soltura es una actividad compleja, algunos de ellos suman elemento a elemento, lo que significa situarse en los primeros estadios del aprendizaje del sistema de numeración. Son incapaces de aprehender la estructura de grupo de elementos, que proporciona una estrategia mucho más flexible, la capacidad de agrupar de una forma sabia según convenga a la situación. No tienen una visión integrada del número como una totalidad que a su vez consta de una serie de elementos, tratar el número siete como una unidad que a su vez consta de siete elementos, el número ocho como una unidad que consta de ocho elementos es una habilidad que se les escapa. Su conocimiento del sistema de numeración es muy reducido y carecen de muchas unidades de información sobre el mismo que les permitiría actuar de forma más flexible.

Se observa en la prueba que algunos alumnos con dificultades conocen mejor las combinaciones más pequeñas porque son más fácilmente abarcables mentalmente o porque se han utilizado con mayor asiduidad y por tanto las han aprendido de memoria, pero realmente no las sacan provecho porque no son capaces de generalizarlas a otros tramos de la recta numérica. Por ejemplo pueden contestar que 5+3 son ocho pero no son capaces de contestar con rapidez que 25+3 son 28.

Los alumnos que resuelven con facilidad la prueba se apoyan en los números nudo (decenas) para realizar un cálculo más rápido. Esta estrategia, presente en sus verbalizaciones, es de extraordinaria importancia. Se basa en una de las virtualidades que posee el sistema de numeración, que un fragmento de la recta numérica, la decena, se repite con regularidad a lo largo de la recta numérica. Todo se reduce a operar dentro de una decena (apartado I de la prueba) o saltar de una decena a otra (apartado II de la prueba). Si por ejemplo se hace la suma 52+3 se está dentro de la misma decena, sería una generalización de 2+3; en la suma 57+8 lo que se hace es saltar de una decena a la siguiente, con 3 llegar hasta 60 y con las 5 restantes hasta 65. Los números nudos (10, 20, 30, etc.) juegan un papel fundamental en esta representación, a partir de ellos utilizados como hitos o mojones en el camino se pueden realizar los cálculos y situar los demás números.

Del modo de proceder de los alumnos en los ítems de la prueba de cálculo mental (anexo II) se desprende que las estrategias de conteo, el saber desplazarse en la serie numérica, juegan un papel destacado, aquellos alumnos que las realizan adecuadamente pueden aprender con rapidez las tablas de multiplicar. Para construir la tabla del 7 se va sumando de 7 en 7, pero si esta suma se realiza uno a uno significa que los alumnos no visualizan la serie numérica, su conocimiento es demasiado particular, no manejan tramos más amplios de ella, no se representan aspectos generales y fallan al tratar de retenerlas. Como se ha señalado, para sumar 56+7 primero debe sumarse 4 e ir hasta el número nudo que es 60 y después añadir 3 y obtener el resultado 63. Esta estrategia de suma a trozos o saltos es fundamental para manejarse en la serie numérica, que a su vez es imprescindible para retener el contenido de la tabla de multiplicar. Esto explicaría la relación que aparece entre los apartados II y IV de la prueba.

Los alumnos que resuelven con rapidez y eficacia la prueba se valen de estrategias tales como:

- Contar a saltos y no contar paso a paso.
- Apoyarse para las sumas en los números nudos.
- Partir un número y utilizar los trozos con los que se puede operar más fácilmente. Por ejemplo 12+16 se puede hacer como 10+10 más 8.
- Utilizar estrategias variadas. Por ejemplo 15+17 se puede hacer como el doble de 15 y añadir 2 al resultado.
- Manejan muchos ítems de información sobre el sistema de numeración, saben por ejemplo que 7 puede des-

componerse como 5 + 2 o 4 + 3 o 6 + 1; que de 25 a 30 hay la misma distancia que de 35 a 40; que para hacer 38 + 7 pueden servirse de la suma 8 + 7 etc.

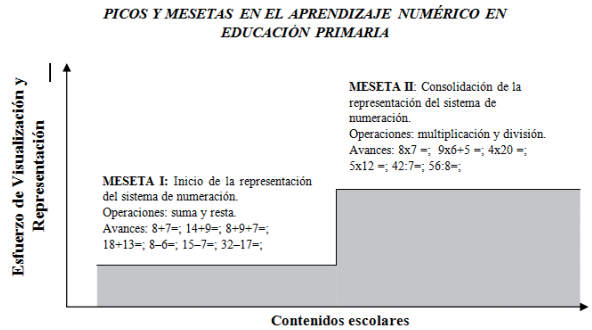
Los alumnos que fallan en la realización de la prueba no es un grupo muy numeroso, (9 de 91 alumnos) pero con un gran significado, porque constituyen el grueso de lo que podría denominarse fracaso escolar en base a causas cognitivas. Son alumnos que no han sabido manejarse con soltura en los apartados II y III de la prueba del cálculo mental y no contestan o cometen errores en el apartado IV.

Las causas se encuentran en la incapacidad para formarse una representación eficaz de los contenidos numéricos.

- Suman elemento a elemento, ayudándose en la mayoría de las ocasiones de los dedos de las manos. Se muestran incapaces de desprenderse de este asidero concreto.
- Falta de capacidad de representación, no son capaces de visualizar tramos más amplios de la recta numérica, dan la sensación de encontrarse perdidos de tener que caminar a tientas, apoyándose en ayudas.
- No se apoyan en las decenas y números nudo para realizar un cálculo más flexible.
- No son capaces de automatizar la suma a saltos. Consecuencia de ello es que a pesar de sus esfuerzos tienen muchas dificultades para memorizar las tablas de multiplicar.
- No conocen con soltura las combinaciones numéricas más usuales.
- Dificultades para generalizar, si de 2 a 10 hay 8, desde 32 hasta cuarenta también debe haber 8.
- Dificultades para realizar inferencias a partir de los conocimientos que se poseen: por ejemplo si un número termina en cinco hasta la decena siguiente hay cinco y apoyándose en ese conocimiento saber rápidamente que de 34 hasta 40 hay 6.
- Les cuesta descomponer un número de diversas formas.
- No utilizan con flexibilidad las estrategias de análisis y síntesis pasando de una modalidad a otra.
- Apenas se sirven de las propiedades de los números, doblar un número, utilizar los ceros, realizar la resta como suma, la división como multiplicación, la propiedad distributiva etc.
- Pueden manifestar dificultades espaciales, en ocasiones confundir la posición de los dígitos en un número, 91 con 19, realizar alguna escritura de números con la direccionalidad equivocada, comenzar el cálculo con lápiz y papel de una suma o resta por la izquierda, realizar una suma en vez de una resta y viceversa.

Para que se produzca la memorización de las combinaciones básicas de la multiplicación, por ejemplo 6×3 = 18 hace falta que la operación y el resultado estén de forma simultánea en la memoria de trabajo. Como la memoria de trabajo de los alumnos con dificultades es de menor capacidad, y como utilizan con preferencia procedimientos algorítmicos más lentos (la estrategia sumar o contar todo, la estrategia de sumar elemento a elemento), es posible que hayan olvidado uno de los dos sumandos cuando alcanzan el resultado. En este caso, al no estar todos los números de la combinación a la vez en la memoria de trabajo tienen menos posibilidades de ser almacenados y posteriormente recuperados.

Cuando las operaciones aritméticas se transforman con relativa facilidad cualquier cálculo matemático adquiere un sentido más atractivo, semejante al de un juego de números y ello puede derivar en una actitud positiva hacia las matemáticas. Pero cuando esto no es posible los cálculos más sencillos pueden convertirse en una tarea excesivamente ardua y árida.



Picos y mesetas

La situación es que algunos alumnos quedan retenidos en la meseta primera de la suma y la resta, sin un dominio y automatización de los cálculos de la meseta de la multiplicación, lo que les imposibilita el acceso a contenidos básicos para un posterior desarrollo matemático e incluso personal de desenvolvimiento en la vida corriente.

Indicaciones para la enseñanza: la naturaleza espacial y visual de los cálculos numéricos

La multiplicación ocupa un lugar crucial dentro de los contenidos matemáticos, pero para poder multiplicar es necesario aprender las tablas. Bastantes alumnos tienen dificultades para memorizarlas. Esta incapacidad es debida a que no son capaces de elaborar una representación mental adecuada que les permita visualizarlas y situarlas en la recta numérica. Cuando lo que pretenden es aprenderlas de memoria, sin haberlas construido mentalmente, fallan en su propósito.

En el aprendizaje de las tablas de multiplicar se observa que la práctica repetitiva por si misma no asegura el dominio de las combinaciones básicas numéricas, hasta que no se “hace la luz” de manera significativa en la mente del alumno, no se consiguen progresos. Memorizar hechos que no se comprenden, aparentemente aislados, constituye una tarea dura y por ello muchos alumnos abandonan estos aprendizajes.

Todos los algoritmos y operaciones, la mayoría de los conceptos que se trabajan en la etapa de primaria, máximo común divisor, mínimo común múltiplo etc. tienen como teatro de operaciones la serie numérica. Es muy conveniente representarla, bien dibujada sobre el suelo o construida con un modelo de madera, en la que estén marcados los números. Para crear una representación mental es necesario promover actividades de exploración y desplazamiento espacial a través de las serie de los números, situarse en referencia a los hitos o mojones, los números nudo, para a la hora de calcular, poder apoyarse en ellos. Conocer bien el terreno es básico para poder desplazarse bien a través de él. El uso de preguntas sobre la serie numérica contribuye a rellenar los huecos de una representación incompleta ¿Se va más lejos con la tabla del 3 o con la tabla del 7? ¿Cuántos pasos hay de 56 a 60? ¿Si de 35 a 40 hay cinco pasos, cuántos hay de 35 a 43? ¿Cuál es la decena que sigue a 62? Y a través de las verbalizaciones conocer los procesos de pensamiento de los alumnos. El uso del cálculo mental y de los procedimientos informales, aunque puede que menos rápidos y eficaces que los algoritmos tradicionales, tienen las ventajas de que son creados por los propios alumnos, y están siempre basados en la comprensión de quien los lleva a cabo.

Además de la recta numérica, disposiciones espaciales numéricas como la siguiente favorecen los aprendizajes:

7×1= 7	7×4=28	7×7=49
7×2=14	7×5=35	7×8=56
7×3=21	7×6=42	7×9=63

Disposición espacial de la tabla del 7

Esto se justifica teniendo presente las posibilidades de la visualización como favorecedora de la memoria. Del mismo modo que las diferentes partes de un discurso para ser mejor recordadas pueden situarse mentalmente en un espacio físico conocido, por ejemplo las estancia de una casa, en las tablas de multiplicar, dividiendo el espacio en fragmentos, es más sencillo organizar los contenidos y localizar la respuesta.

La tabla del siete puede ser considerada una de las más difíciles, dentro de ella unas combinaciones, las más fáciles de retener, pueden ser aprendidas antes y servir de apoyo para retener las demás. Por ejemplo, 7 por 5 en la segunda columna puede ayudar a memorizar 7 por 4 y 7 por 6. En la tercera columna 7 por 7 puede ayudar a memorizar 7 por 8 y 7 por 9.

Existen diferentes propuestas sobre el orden en que las tablas de multiplicar deben ser aprendidas (Maza, 1991), primero las más sencillas y las que funcionalmente desempeñen un papel importante. Una tabla es más sencilla cuanto más fácil es de visualizar la secuencia de los números que la componen. Puede comenzarse por la tabla de 10 que marca las decenas, seguida de la del 5 que parte justamente las decenas por la mitad y por ello es fácil de visualizar, seguidas de las del 2, 4, 3, 6, 8, 9 y 7. Este orden no debe ser rígido, ni es bueno quedar detenido en una tabla porque ésta no se retiene. Deben ser trabajadas en conjunto y sobre la base de un buen conocimiento del sistema de numeración, particularmente de los números del 1 hasta el 100. Las combinaciones que se sitúan antes del 50 son más fácilmente retenidas que las que se sitúan del 50 hasta el 100 porque ese primer tramo de la recta numérica es más conocido y familiar. Pueden relacionarse unas tablas con otras en base a las combinaciones básicas que comparten, 12 es 2 por 6 y también 4 por 3.

Algunas actividades tipo

Es posible y deseable una enseñanza basada en la selección por parte de los profesores de aquellas actividades que su práctica profesional diaria ha demostrado son más valiosas para el desarrollo de los alumnos. Actividades abiertas que puedan ser resueltas por diferentes caminos, que permitan diferentes niveles de dificultad y con impacto cognitivo sobre los esquemas de los alumnos.

Se trata de que los alumnos practiquen en la composición y descomposición de números en situaciones interesantes para ellos, partiendo de los conocimientos que ellos mismos pueden descubrir u observar, como fragmentación de un número, relaciones entre las operaciones, propiedades etc. No se trata de introducirlos de inmediato en los algoritmos tradicionales de la multiplicación y de la división, más bien que mediante la experimentación con cantidades, en solitario o pequeños grupos, puedan reflexionar y construir un conjunto amplio de experiencias que les haga posible el desarrollo y aplicación de un cálculo rico y flexible.

1. Con treses y cincos tengo que llegar a 180.
2. Construir en madera un modelo físico de la recta numérica y aprender a desplazarse a través de él.
3. Construir sobre el suelo mediante cintas adhesivas de colores un modelo de la recta numérica.
4. Con cincos y ochos ¿puedes ir de 87 a 149?
5. Números diana. Con los números 9, 8 y 5 conseguir el número 143 (con sólo cambiar los números y las opera-

ciones esta actividad puede realizarse de muy diferentes formas).

6. Los sellos: Si tenemos muchos sellos de 3 céntimos y 5 céntimos. ¿Se pueden conseguir hacer todos los valores hasta 50 céntimos?

7. Ajustar armarios de 5 y 7 dm en habitaciones de diferente longitud.

8. Realizar sumas mentalmente
   a) 3+6+8+9+5+4++3+2+8 =
   b) 7+4+5+8+9+1+4+5+6 =

9. Multiplicaciones y divisiones: 3×12 =; 4×15 =; 5×60 =; 3×45 =; 148:7 =; 225:25 =; etc.

10. ¿Cuántos balones de a 12 euros pueden comprarse con un billete de 50 euros.

11. Un mecánico debe colocar 100 tornillos en cajas de 15 tornillos cada una ¿Cuántas cajas necesita?

12. Imagina 120 ¿Cómo lo ves? Sobre el 120 que tenías imaginado, imagina ahora 75. ¿Cuánto hay de de 75 a 120? Explica como lo has hecho.

Conclusión

Los números, el sistema de numeración, constituyen un verdadero lenguaje, el lenguaje para calcular y operar, el lenguaje matemático por excelencia. Cualquier lenguaje debe ser no sólo aprendido, sino automatizado, lo que quiere decir que debe poder utilizarse con mucha facilidad y rapidez, sin aparente esfuerzo y con poco costo cognitivo, sin apenas ocupar espacio de la memoria de trabajo. La retención de las tablas de multiplicar es un punto de especial dificultad. Cuando se realiza una multiplicación o una división, si se tiene que comenzar a pensar cuánto son 9 más 6 u 8 por 9, por poner un ejemplo, se escapa el sentido general de lo que se está haciendo, se alarga la actividad en tiempo y consumo de energías, haciendo inviable la solución y las posibilidades de progreso del alumno.

Volviendo a la frase del inicio de mi maestro D. José Guerra, decía yo al principio que presumiblemente no debía haber leído a Piaget, ciertamente esta es una afirmación gratuita, porque yo no lo sé. Sólo, que su propuesta de picos y mesetas es más visual que la de Piaget. Quizás es posible que entonces hubiera menos pedagogismo que a veces cuesta sacarle utilidad, y sí había muchos maestros intuitivos, con un buen conocimiento de la estructura de la materia que enseñaban, y con un gran ascendiente sobre la conducta de sus alumnos. Que sirva este modesto artículo de pequeño homenaje a D. José Guerra, a las muchas cosas que nos enseñó, y por las que hoy le estamos agradecidos. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Buswell, G. T., & John, L. (1926). Diagnostic studies in arithmetic. *Supplementary Educational Monographs, 30*, pp. 138-140.

Fernández Bravo, J. A. (1994). ¿Es la multiplicación una suma de sumandos iguales*? Comunidad Educativa*. Mayo, 215, pp. 36-42.

Hart, K. M. (Ed.)(1981). *Children´s Understanding of Mathematics. 11-16* . London: John Murray.

Luriya, A. R. (1969). On the Pathology of Computational Operations. En J. Kilpatrick y I. Wirszup (Eds) *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics, vol I*, Stanford. California: School Mathematics Study Group.

Maza Gómez, C. (1991). *Enseñanza de la multiplicación y la división.* Madrid: Síntesis.

Nesher, P. & Katriel T. (1977). A Semantic Analysis of Addition and Subtraction Word Problems in Arithmetic. *Educational Studies in Mathematics* 8, pp.251-270

Este artículo fue recibido en SUMA en diciembre de 2009 y aceptado en diciembre de 2010

Anexo I

CURSO EN EL QUE IMPARTE SUS CLASES _______

1. Señalar con una cruz el nivel de dificultad asignado a cada uno de los siguientes contenidos de matemáticas:

CONTENIDOS	NIVEL DE DIFICULTAD					
	1	2	3	4	5	6
Conocimientos informales						
Sistema de numeración						
Algoritmo de la Suma						
Algoritmo de la Resta						
Algoritmo de la Multiplicación (aprendizaje de las tablas de multiplicar)						
División						

2. ¿Qué contenidos dentro de los que se imparten en la Educación Primaria en el área de Matemáticas considera son más trascendentales para un alumno que pueda progresar sin dificultad en cursos posteriores? Señale dos.

3. ¿Dónde se encuentran los cuellos de botella, es decir aquellos contenidos que son importantes pero que por su especial dificultad impiden el progreso del alumno? Señale alguno.

Anexo II

I) 3 + 2 =	**15 +7 =**	**3 × 9 =**
5 + 5 =	**24 + 7 =**	**4 × 7 =**
5 + 4 =	**36 + 8 =**	**6 × 9 =**
11 + 8 =	**77 + 6 =**	**9 × 8 =**
12 + 7 =	**43 + 8 =**	**6 × 3 =**
26 + 4 =	**84 + 9 =**	**6 × 8 =**
25 + 3 =	**17 + 8 =**	**7 × 4 =**
42 +6 =	**68 + 9 =**	**8 × 5 =**
II) 8 + 5 =	**59 + 6 =**	**7 × 9 =**
9 + 2 =	**III) 18 + 15 =**	**8 × 7 =**
6 + 5 =	**19 + 19 =**	**9 x 5 =**
8 + 3 =	**20 +16 =**	**9 × 6 =**
7 + 4 =	**4 +9 +3 =**	**7 × 6 =**
7 + 7 =	**5 + 9 + 2 + 7 =**	**5 x 7 + 9 =**
9 + 9 =	**8 +7 + 9 + 6 =**	**9 × 4 + 7 =**
8 + 6 =	**IV) 5 × 2 =**	**7 × 8 + 5 =**
8 + 9 =	**5 × 5 =**	**6 · 7 + 3 =**
8 + 7 =	**2 × 6 =**	**5 × 12 =**
12+9	**4 × 3 =**	**4 × 15 =**

Anexo III

NORMAS DE APLICACIÓN Y CORRECCIÓN

Información a los alumnos:

Haz las siguientes sumas mentalmente (de cabeza), sin escribir otra vez los números, pon sólo el resultado a la derecha. Concentraros en hacer la prueba y tratar de hacerlo en el menor tiempo posible.

Orientaciones para los profesores:

La prueba pretende medir el grado de automatización del lenguaje matemático en los alumnos.

Puede pasarse tanto de forma individual como colectiva, pasarla de modo colectivo para los alumnos que obtienen buenas puntuaciones en matemáticas y de modo individual para los alumnos con dificultades.

En la aplicación individual, tanto como evaluar si el alumno lo hace o no lo hace bien se trata de evaluar cómo lo hace, si cuenta elemento a elemento, si se apoya o no en la decena.

Es fundamental observar si se suma con los dedos, porque es el indicador de la necesidad de apoyo concreto y de dificultades en la capacidad de representación.

Permite saber también qué tipo de combinaciones básicas domina.

Para obtener una puntuación debe tenerse presenta el número de aciertos y el tiempo empleado, la ponderación de ambos dará el grado de automatización del lenguaje matemático.

ALUMNO______________________________CURSO_________

Nº ACIERTOS______TIEMPO EMPLEADO_________________

¿En qué apartado de la prueba se sitúan preferentemente los fallos?

¿Cuenta con los dedos, bien a las claras?

¿Cuenta con los dedos de modo encubierto, en alguna parte de la prueba?

OTRAS OBSERVACIONES: