suma+
revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas
72
marzo 2013

Edita
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM)

Web
Antonio Alamillo Sánchez
<www.revistasuma.es>

Portada
Àngels González Fernández
Josep Moreno Fernández

Maquetación y corrección
Miquel Albertí Palmer
Iolanda Guevara Casanova
Daniel Sierra Ruiz

Revista Suma
Apartado de correos 286
08911 Badalona (Barcelona)
Fax: *+(34) 912 911 879*
Tirada: *6250 ejemplares*
Depósito legal: *Gr 752-1988*
ISSN: *1130-488X*

sumario

editorial

artículos

secciones

FESPM & Cía

Suma es una revista de didáctica de las matemáticas de periodicidad cuatrimestral cuyo objetivo es tratar sobre los aspectos relacionados con su enseñanza y aprendizaje y destinada, sobre todo, al profesorado que trabaja en educación infantil, primaria, secundaria y universitaria.

La revista SUMA se edita en Badalona (Barcelona) — España

suma+ 72
pp. 3-6

Editorial

Más por menos es más

Si hay algo que caracteriza nuestro sistema educativo es el cambio incesante. Tanto es así que cabe plantearse si estamos realmente inmersos en un sistema, pues ¿puede un sistema ser considerado como tal si se modifica cada dos por tres? Por si esto no fuera poco, en esta época de crisis los profesionales de la educación trabajamos en condiciones más precarias, con más alumnos en clase (aunque este aspecto no sea tan determinante en el aprendizaje como creen algunos), más horas, con menos recursos, menos sueldo y menor reconocimiento social. Hacemos más por menos y damos más. Y aún así, hay muchos que nos tienen por privilegiados.

Los que llevamos ya algunas décadas en el mundo de la educación tuvimos una enseñanza marcada, en mayor o menor grado, por los últimos días del franquismo. Al terminar nuestra educación universitaria e incorporarnos a los cuerpos docentes nos dimos cuenta de que en la manera en la que habíamos aprendido no se podía enseñar ni, apenas, aprender. El paradigma matemático de entonces, tanto para el aprendizaje como para su enseñanza, estaba gobernado por una secuencia formal inmutable: axioma, teorema, demostración, corolario, ejercicio.

Aprendimos como pudimos. Sobre todo, escuchando, observando e imitando. Pero así no podíamos enseñar porque las matemáticas no se desarrollan ni se han desarrollado jamás de este modo. Además, entonces no todos los ciudadanos tenían la oportunidad de aprender. Quienes no valían para el «sistema» educativo imperante acababan exiliados a la fuerza a otro «sistema»: la FP. Por aquellos días, la Formación Profesional venía a ser la papelera de reciclaje del «sistema» formal basado en la transmisión de conocimiento.

Más tarde, cuando la educación se hizo más democrática, personas de la más diversa índole social, cultural y cognoscitiva entraron en nuestras aulas. Deberíamos estar orgullosos de un sistema que trata a todos por igual y ofrece las mismas oportunidades, pero el coste de semejante ideal nunca ha sido reconocido lo suficiente ni comprendido por todos. Menos todavía por la mayoría de los políticos que nos gobiernan hoy.

Entre las cuestiones que todo educador debería plantearse destacan las siguientes. ¿Cómo alguien cuya educación matemática ha sido tan eminentemente formal puede enseñar a otras personas a que desarrollen un aprendizaje propio fundamentado en el aspecto competencial? ¿Cómo pueden profesores educados en ámbitos universitarios, cuyo contexto es eminentemente teórico, fomentar un aprendizaje basado en aspectos mucho más prácticos como los requeridos en ámbitos más profesionales? La formación profesional no tendrá el respeto que merece mientras todos los estudiantes no tengan la oportunidad de saber qué es en realidad. Es decir, mientras no deje de representar un fracaso, una puerta trasera de salida de un sistema mediante la cual se accede al otro, mientras ambos sistemas no se reduzcan a uno solo. Ir a FP es abandonar la línea educativa ESO-Bachillerato que se recorre, por lo general, en un mismo centro. Apearse de ella resulta duro para muchos y se vive como un fracaso.

Hace tiempo que gran parte de la sociedad exigimos un sistema educativo con un marco ideológico independiente. Una sucesión de reformas no crea un sistema, sino algo que, de tantos parches, ha dejado de merecer el nombre propio que tenía. Al igual que otros derechos sociales, la educación no es algo con lo que se deba hacer negocio.

¿A quién o quiénes corresponde la creación de un sistema educativo con sentido? Se podrá discutir la presencia de determinados representantes sociales, pero consideramos indiscutible la de los profesionales de la educación. De lo contrario, se caerá en la tremenda contradicción de que la sociedad confíe sus hijos a unos profesionales para que les eduquen en unos conocimientos y valores y, sin embargo, desconfía de esos mismos profesionales en cuanto se trata de reflexionar sobre la organización y los objetivos del sistema educativo.

En el ámbito matemático, ¿es la competencia matemática algo cerrado y acotado o resulta tan diversa como la idea que de ella se hacen quienes se dedican a la educación matemática? La competencia matemática, ¿pasa inevitablemente por la capacidad de saber calcular castillos de quebrados o resolver complicados sistemas de ecuaciones? Se pueden resolver castillos de fracciones y sistemas de ecuaciones de forma mecánica sin tener ni idea de lo que representan verdaderamente. Lo hemos visto en clase. Quizá la respuesta no sea tan radical como un «sí» o un «no».

Antaño los cálculos eran el eje vertebrador de la enseñanza, la introducción de la calculadora y los ordenadores pusieron en entredicho este pilar. Hoy en día nadie cuestiona el uso de estos recursos, a pesar de que no haya unanimidad sobre cómo y cuándo utilizarlos. Las actividades significativas, los contextos en los que la matemática adquiría sentido como instrumento de conocimiento se fueron introduciendo en nuestras aulas mucho antes de hablar de competencia matemática. ¿Queremos enseñar ecuaciones? Planteemos entonces problemas en los que se haga evidente la necesidad de su uso. Busquemos el contexto adecuado. He ahí la parte creativa de la más necesaria de las profesiones, pues todo el mundo que es o que va a ser albañil, médico, barrendero, administrativo, operario, pintor, jardinero, electricista, deportista o político ha sido o será alumno nuestro.

Un año después…

…continuamos «sumando». En julio de 2011 asumimos el compromiso de dirigir la revista que es la carta de presentación de la FESPM. Se ha cumplido ya más de un año desde que comenzamos a trabajar auspiciados por Tomàs Queralt, Onofre Monzó y Gregori García. En ese período hemos publicado ya cuatro números de la revista. Digamos que hemos aprendido a «sumar». Sabemos cómo hacerlo, pero también reconocemos que hay margen para la mejora. Y en ello estamos.

Una vez que damos por consolidados el formato y diseño de la revista creemos necesaria la renovación de algunas secciones emblemáticas que la han caracterizado durante estos últimos años. Por ello entre este número y el siguiente los lectores apreciarán cambios, algunos de los cuales comentamos a continuación.

En este número despedimos la sección *MatemásTIC*. Desde Suma 57, en febrero de 2008, Mariano Real nos ha puesto al día de toda una serie de recursos disponibles y utilizables en las aulas de matemáticas, esos que muchos no nos hemos atrevido a probar sin tener un conocimiento previo de ellos o sin haberlos ensayado antes. Gracias Mariano por haber facilitado esa aproximación y por habernos informado de su existencia.

Un accidente, esa consecuencia real desagradable de lo que llamamos azar, impidió la redacción de la última entrega de la sección *Musymáticas* prevista para el número 71. Desde la celebración en 2008 del *Día escolar de las Matemáticas* dedicado a la relación de éstas con la Música, Vicente Liern ha sacado a la luz en trece entregas los detalles de una relación afectuosa entre ese arte y esa ciencia. Gracias Vicente por tu labor.

Hace ya 23 números, toda una década, que Santiago Gutiérrez se hizo cargo de la sección *Hace* abierta por Ana Millán, allá por el año 2003, en Suma 44. Santiago nos ha hablado de ilustres matemáticos que protagonizaron el desarrolló espectacular de las matemáticas de los últimos siglos. Quienes nos dedicamos a la educación matemática agradecemos a Santiago que nos haya hecho revivir y reencontrar esas mentes precursoras con las que convivimos también hace…

Despidiendo la sección *Hace* damos la bienvenida a la que, de forma natural, significa su continuación. Si Santiago nos ha hablado de matemáticos de los últimos siglos, en la nueva sección *En puertas del tercer milenio* que comienza en este número, Antonio Pérez dará a conocer a los matemáticos contemporáneos. Son esos que casi nunca se citan en nuestras aulas y a los que muchos profesionales de la educación matemática apenas conocemos o hemos oído nombrar pese a ser coetáneos nuestros o, al menos, de una parte de nuestras vidas. Antonio, quien ya ha llevado secciones en otros períodos de Suma, ha aceptado la propuesta de la dirección de la revista. Él será el coordinador de la sección en la que estará estará acompañado de diversos autores. A todos les damos la bienvenida.

La sección «La entrevista» se ausenta de este número, pero no porque no haya habido entrevista, sino porque el personaje entrevistado por Francisco Martín en esta ocasión tiene implicaciones directas con la efeméride que celebramos este año: los XXV años de la creación de la FESPM y de la revista Suma. Por todo ello la dirección considera que la entidad de dicha entrevista merece un espacio distinto que pondremos a disposición de Francisco en los próximos números.

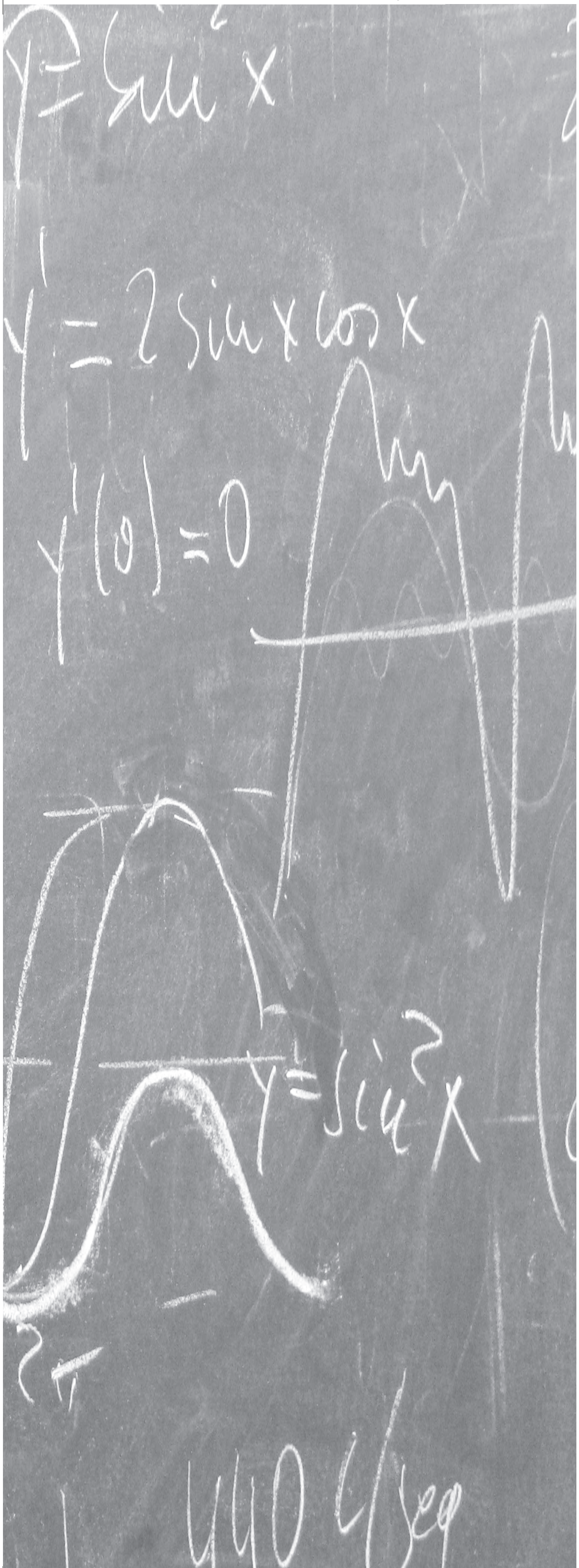
En este número se consolida también la autoría de Lluís Albarracín, miembro del Consejo de Redacción de Suma, en las reseñas que publicamos en la revista. Agradecemos a Lluís su colaboración y sus agudas lecturas. Sin embargo, esa sección, *Reseñas*, no está sujeta como otras a una continua presencia en todos y cada uno de los números publicados.

Nos complace el interés y la disposición que muestran los miembros del Consejo de Redacción a colaborar activa y alternativamente en los editoriales y secciones de la revista. Gracias a su apoyo la publicación va adquiriendo una unidad y coherencia que no hace sino confirmar la confianza que depositamos en ellos al asumir este proyecto.

Las bajas en las suscripciones como consecuencia de la crisis nos ha obligado a reducir la tirada de la revista, que ha pasado de 6.700 a 6.250 ejemplares. Esperamos y deseamos que la tan extendida tendencia de recortes no obligue a una reducción mayor.

Queremos manifestar un sincero agradecimiento al taller MEFRAM MECANITZATS de Sabadell su colaboración en la realización y montaje de los elementos que confeccionan la cubierta de este número 72 de Suma.

++



artículos

suma+ 72
Artículos
Marzo 2013
pp. 9-15

Las competencias matemáticas en el aprendizaje a lo largo de la vida

Pedro Plaza Menéndez

El tratamiento de las competencias matemáticas pasa por explicitar las necesidades matemáticas que tienen las personas adultas a lo largo de la vida. A partir de ahí se puede pensar en contenidos y metodologías específicas en este nivel de enseñanza.

Palabras clave: Investigación didáctica, Procesos de enseñanza-aprendizaje, Educación de Personas Adultas.

Mathematical Skills in the Life Long Learning

The treatment of Mathematical skills forces to specify which mathematical needs are owned by adults in their life long and personal progress. This matter should be the starting point in order to think of specific content and methodologies.

Key words: Educational research, Teaching-Learning process, Adults Education.

El tratamiento de las matemáticas en el aprendizaje a lo largo de la vida implica detectar las competencias matemáticas ineludibles en la vida adulta para poder estructurar el currículo en función de ellas. Para eso debemos explicitar las necesidades matemáticas concretas, y una vez hecho esto se puede pensar en contenidos y metodologías apropiados.

Competencia matemática. Definiciones

En una primera aproximación podemos acotar la competencia matemática dentro de la definición de Niss (2002), como «la habilidad de entender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una gran variedad de situaciones y contextos en los cuales la matemática juega, o podría jugar un papel importante». Hay otras definiciones similares[1], pero todas giran alrededor de la idea de que la competencia matemática debe ser capaz de poner en práctica los conocimientos aprendidos para resolver una situación cotidiana, lo que nos permitirá una vida más digna, autónoma, reflexiva y comprometida con nuestro alrededor.

No es difícil llegar a la conclusión sobre la necesidad de las matemáticas en un mundo exageradamente

Artículo recibido en *Suma* en marzo de 2012 y aceptado en mayo de 2012

matematizado. Basta echar un vistazo al periódico, pasear por la ciudad, vender, comprar, hacer deporte, viajar, pensar en los motivos de una huelga…, los números nos rodean. Tal es su importancia, que encontramos personas que no saben leer ni escribir pero no existen analfabetos matemáticos absolutos[2]. A pesar de lo anterior, los rudimentos matemáticos personales en la edad adulta suelen ser insuficientes, por eso es importante hacer a las personas más competentes en matemáticas.

Quizás entendamos mejor lo que significa la competencia matemática, si enumeramos las carencias que supone no tenerla[3]:

— Imposibilita entender la información o provoca distorsión en ella.
— Impide enfrentarse con libertad y racionalidad al consumo de bienes y a la utilización de servicios sociales.
— Dificulta la organización personal, familiar y social de las personas, ya que evita la creación de estrategias y la planificación de buenas decisiones donde los números aparezcan.
— Reduce sus pretensiones laborales en la búsqueda de empleo.
— Impulsa a *evitar* los números, lo que impide dar los pasos siguientes en la búsqueda de entendimientos de realidades y en la comprensión de problemas económicos, políticos y sociales.
— Favorece la falta de escepticismo reduciendo la capacidad crítica de las personas.

Estructuración del currículo por competencias (Las competencias a partir de las necesidades)

Pensar en competencias es tener en cuenta los contextos de aprendizaje, olvidar los contenidos como eje vertebrador del currículo y pensar más en la búsqueda de capacidades necesarias en la vida adulta. Dicho de otra forma, es entender las matemáticas como una actividad humana más que como una ciencia, con lo que ello implica en la selección y tratamiento de contenidos y en las formas de aprendizaje.

Con este pensamiento hay que elegir los aprendizajes según las necesidades matemáticas de la persona adulta, aprender debe estar rodeado de descubrimientos que pueden ocurrir por inducción y no por deducción sobre productos ya acabados, la generalización puede venir después, se puede redescubrir lo ya descubierto…, es decir, huir de los encorsetados modelos racionalistas que han invadido tradicionalmente la enseñanza de la matemáticas.

El aprendizaje en la edad adulta tiene unas características específicas, que hacen decantarse hacia este tipo de elección de currículo a partir de las competencias. Las personas adultas son personas en situación, no en expectativa[4], luego:

— Consideran cualquier situación, actividad, espacio y tiempo, como elemento didáctico fundamental, de ahí la importancia de enseñar con la cabeza puesta en esas situaciones y actividades.
— Prefieren adquirir técnicas, recursos y procedimientos que puedan utilizar en su vida diaria, y les permita mejorar sus condiciones de vida.
— Valoran la adquisición y desarrollo de capacidades, habilidades técnicas y destrezas que les faciliten su formación permanente autónoma posterior, piensan en «lo que les pueda servir».
— El aprendizaje es una actividad secundaria y pasan poco tiempo en la formación formal, por eso la urgencia de aprender lo que más y mejor puedan usar.
— Poseen conocimientos previos, adquiridos mediante la experiencia diaria, y buscan la posibilidad de ampliarlos, basados muchas veces en los anteriores. De ahí la importancia de rodear la enseñanza de situaciones relacionadas con la vida cotidiana.

Por todo lo anterior, la educación en competencias básicas y su enfoque metodológico, orientado a movilizar los conocimientos para resolver situaciones, dando relevancia y aplicabilidad a los conocimientos escolares, sería la mejor estrategia para desenvolverse en sociedades complejas donde los sujetos se verán forzados a aprender a lo largo de la vida.

Bajo este punto de vista deberíamos pensar en unas matemáticas cargadas de relaciones, contextualizadas, conectadas y, por supuesto, útiles. Ya en los años 70, Freudenthal apuntaba en esa dirección: «si no son útiles, las matemáticas no deberían de existir»[5].

El problema que nos quedaría ahora es decidir cuáles son las matemáticas útiles o, lo que es lo mismo, cuáles son las necesidades matemáticas que harían a las personas competentes en matemáticas. Antes de contestar a esta pregunta en el siguiente apartado hagamos una reflexión sobre ella.

Desde una perspectiva cultural y social de las matemáticas, Bishop (1988) describe una colección de actividades matemáticas necesarias y generalizadas por ser manejadas en todas las culturas. Aquí las utilizaremos como punto de partida para describir lo que serían las necesidades matemáticas cercanas de las personas:

— *Contar*. Conocer los números y las relaciones entre ellos se ha convertido en una necesidad transcendente dentro de una sociedad de consumo, el intercambio continuo de números (dinero) por objetos, obliga a todas las personas a ser conocedoras de la aritmética. Pero no sólo conocer la aritmética, también es necesario lo que Alsina llama «sensibilidad numérica» que nos deberá llevar en cada momento a preguntarnos sobre el cómo y el porqué de las operaciones que veamos, detectar los errores numéricos, y sobre todo, detenernos frente a las conclusiones expuestas que siguen a los cálculos.
— *Localizar*. No sólo codificar y simbolizar el entorno espacial (manejo de planos, mapas…) sino dominar (tener en la cabeza) las dimensiones, direcciones, extensiones.
— *Medir*. La idea de medir relacionada con comparar y ordenar cualidades, ya sea con magnitudes formales o con botes, partes del cuerpo, cuerdas… Esa necesidad de medir no se agota con la longitud, la superficie y el volumen, diariamente se miden y comparan cantidades de personas, de dinero, de tiempo…
— *Explicar*. Entendida como la aportación de las matemáticas en su faceta de código lingüístico, un lenguaje necesario, que nos permite explicarnos mejor, ser más precisos, ordenar los argumentos, ofrecer deducciones lógicas, dar información numérica, etc. Y en la otra dirección, para entender el discurso matemático que impregna, cada vez más, las conversaciones, noticias, discursos y argumentos.

Fuera de las necesidades matemáticas que tienen que ver con la *supervivencia inmediata,* también podemos hablar de otras necesidades relacionadas con la autonomía personal, la toma de decisiones y la vida democrática dentro de un mundo complejo, éstas serían:

— *Cuantificar lo general*. Cuando los números son grandes o muchos, es difícil tener una idea clara de lo que significan. Se hacen necesarias unas herramientas que nos ayuden a ordenar y tratar esas avalanchas de datos para poder comprender la verdadera causalidad de lo que ocurre y tener más percepción de lo general.
— *Comprender el mundo estocástico.* La aleatoriedad y la probabilidad forman parte, cada vez más, de nuestras vidas. Necesitamos acotar la incertidumbre o, al menos, saber en qué grado existe, distinguir «lo normal» de las coincidencias.

Entiendo que la búsqueda de necesidades matemáticas concretas en la vida adulta debe seguir este marco de referencia. Es preferible buscar las competencias desde las necesidades más que dar una relación formal de las líneas de trabajo que aparecen en la competencia matemática de los documentos oficiales[6].

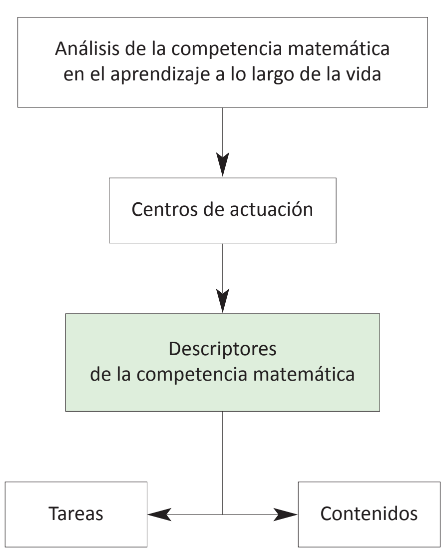
Operativizar la competencia (Centros de actuación)

Antes de dar unos descriptores concretos que acoten y concreten la competencia matemática, y con la idea de organizarnos para poder llegar a todos los campos sin olvidar ninguno, voy a enumerar unos centros de actuación que tienen que ver con la vida cotidiana de las personas adultas.

Según hemos visto en trabajos anteriores, si pensamos en las necesidades matemáticas de la vida adulta, hay necesidades que tienen que ver con un entorno inmediato, y los centros de actuación asociados con ese entorno podríamos llamarlos: matemática cotidiana, consumo, salud y mundo laboral. Aparentemente más alejados, pero también imprescindibles, estarían las necesidades relacionadas con el mundo social, y sus centros de actuación los llamamos: ocio, tecnologías, entorno democrático y economía-medio ambiente.

No olvidemos que estos centros de actuación sólo sirven para ordenar las necesidades matemáticas, se podrían haber elegido otros parecidos. Además habrá necesidades que pertenezcan a más de uno.

Así las cosas, la planificación docente para trabajar la competencia matemática estaría especificada en la siguiente tabla dónde la parte principal serían los descriptores que aparecerán en el siguiente apartado.



Descriptores de la competencia matemática

Asumiendo que en la madurez un concepto matemático viene avalado por lo que se pueda luego hacer con él, para concretar las competencias matemáticas básicas tendríamos que preguntarnos qué es lo que queremos hacer y en qué buscamos ser competentes, para luego decidir cuáles son las matemáticas que hacen falta para esas competencias. Daremos una lista de descriptores de la competencia matemática que nos ayudará a acotar esas capacidades.

No es fácil decidir cuáles son las capacidades que buscamos, por ejemplo, el descriptor «hacer un descuento en una compra» parece una necesidad obvia, pero «entender el reparto de la distribución de los votos en las elecciones generales» parecería una necesidad menos perentoria. No todo el mundo opinaría lo mismo del comentario anterior, ya que las necesidades varían en función de quien las necesita y cuándo las necesita.

Por lo tanto, estos descriptores en ningún caso pretenden ser definitivos ni universales si, como decía Pablo Freire, se piensa en el futuro como problema y no como inexorabilidad, las competencias varían y cada persona debe generar sus propias necesidades[7].

Los descriptores de la competencia matemática que aparecen más adelante (tabla 1), están pensados como una relación de capacidades necesarias para movernos con soltura y juicio en una sociedad como la nuestra, entre personas adultas que intentan participar en el mundo que les rodea con voz crítica[8].

La búsqueda personal de necesidades tiene algunos peligros relacionados con la diferenciación entre los imprescindible y lo deseable, esa búsqueda pasa por no quedarse como una simple solución de nece-

Centros de actuación	*Descriptores (ser capaz de...)*	*Contenidos Necesarios*
Matemática cotidiana	Leer y comparar los precios, caducidad y peso de los alimentos	1
	Elaborar el presupuesto del mes en tu casa	1
	Hacer una estimación de los gastos que quedan hasta acabar el mes	1
	Calcular menús para distintos número de personas	4, 6
	Saber establecer estrategias de ahorro	1, 6
	Calcular la pintura necesaria para pintar la casa	3, 4, 6
	Calcular la media mensual de los gastos a lo largo de un año	7
	Entender los conceptos fundamentales de la declaración de la renta	1, 6, 7
	Ser el tesorero de la comunidad de vecinos	1
	Hacer el plano de tu casa ideal o de la obra para enseñarlo al albañil	4
	Entender el reparto de una herencia	6
Salud	Entender las unidades de medida más frecuentes utilizadas en los medicamentos	4
	Calcular las cantidades de calorías, proteínas, hidratos, etc. en función de las necesidades de cada uno	6
	Entender las cantidades que aparecen en los análisis clínicos	1, 4
	Saber valorar el grado de fiabilidad de una prueba médica	7, 8
	Entender valores medios y percentiles de peso y altura	7
	Hacer una gráfica sobre cómo va cambiando su peso en una dieta de adelgazamiento	7
	Entender expresiones como: factores de riesgo, esperanza de vida, herencia genética…	8
	Entender el significado de correlación entre algunos factores y enfermedades relacionadas (tabaquismo y cáncer de pulmón, sida y relaciones homosexuales)	8
Consumo	Leer los horarios de los transportes en tablas de doble entrada	1, 7
	Hacer un cálculo aproximado de lo que va a suponer el total de la compra antes de que lo diga el tendero	1
	Poder calcular el precio más barato en función de capacidades y precios	1, 6
	Comprar un piso o decidir si es mejor alquilarlo	1, 3
	Calcular la diferencia entre lo que presta y lo que devolvemos al banco	6
	Entender el recibo de la luz	1, 7
	Verificar el precio de una compra con la calculadora	1
	Calcular un descuento	6
	Entender el significado de rédito, TAE, interés compuesto…	7
	Entender el concepto de vida media de los electrodomésticos	7
Mundo laboral	Interpretar y comprobar los distintos conceptos que aparecen en las nóminas	1, 6
	Calcular lo que ganas en una hora de trabajo o cada día del año	1
	Contestar preguntas de contenidos matemático en un test psicotécnico	
	Entender la normativa de seguridad que regula los espacios de los centros de trabajo	1, 4, 6, 7
	Interpretar planos de transporte urbano para escoger el recorrido más apropiado	6
	Calcular si me puedo jubilar antes	1, 6
	Deducir las probabilidad de éxito para acceder a un puesto de trabajo, en función del número de aspirantes y plazas vacantes	8
	Planificar los pasos que tendría que dar para conseguir un trabajo determinado	
	Calcular cuánto tendrían que darte ante un hipotético despido	1, 6
	Entender y usar palabras como plusvalía, valor añadido, impuestos directos…	7
Tecnologías	Utilizar el cajero automático	1
	Programar los electrodomésticos caseros	1
	Utilizar aparatos para medir longitudes, pesos, tiempo, temperatura	1, 4
	Comprender el esquema de la instalación eléctrica de tu casa	3
	Conocer y desarrollar las utilidades del ordenador	1
	Comparar los precios de distintas compañías telefónicas	1
	Entender el uso de las tarjetas de crédito (pagos aplazados, gastos, pagos internet, códigos de seguridad)	7
Ocio	Entender los folletos de las agencias de viajes	6
	Realizar presupuestos para posibles viajes	1
	Hacer un cambio en moneda extranjera	6
	Planificar recorridos sobre un mapa	6

Centros de actuación	Descriptores (ser capaz de...)	Contenidos Necesarios
Ocio	Usar las ideas básicas sobre proporcionalidad de la fotografía	3, 6
	Entender la probabilidad de los distintos juegos de azar	8
	Reconocer la parte de azar que contiene el deporte	8
	Entender tablas de clasificación y estadísticas deportivas	7
Entorno democrático	Entender con referencias conocidas los grandes números que aparecen en los medios de comunicación	1
	Entender los diagramas de distribución de votos y escaños	7
	Entender la ficha técnica de las encuestas de opinión y deducir su grado de fiabilidad	7
	Comparar beneficios de una multinacional con los presupuestos de las naciones	1
	Entender las reglas de la distribución de escaños en el congreso	6
	Calcular lo que te toca a ti del presupuesto de sanidad	1
	Comparar el gasto de alguna obra pública con lo que se utiliza en servicios sociales	1
	Entender y calcular cuestiones relativas a mayorías absolutas, pactos…	6, 7
	Evaluar la importancia de las noticias en función del lugar que ocupan	7
Economía y medio ambiente	Entender el significado de los índices de contaminación	1, 4
	Calcular el ahorro de combustible con relación al número de ocupantes	1, 6
	Saber que la media de los sueldos no es significativa si no conocemos la dispersión	7
	Utilizar referencias conocidas para estimar dimensiones de un incendio forestal	3, 4
	Entender la diferencia ente atlas clásicos y atlas de Peters	4, 6
	Entender y valorar los números que rodean la inmigración	1, 6
	Interpretar distintos diagramas de precipitaciones, temperaturas, demográficos…	7
	Calcular lo que te ahorras poniendo una botella en la cisterna de tu casa	1
	Entender el significado de ciclo de vida, nivel de desarrollo, PNB…	6, 7
	Saber calcular el ahorro de las bombillas de bajo coste	1, 6
	Entender el significado de acciones, productos financieros, bonos, inflación…	6, 7

Tabla 1

sidades personales cercanas e inmediatas, negando otras posibilidades presentes y futuras de la vida de cada individuo y reduciendo las posibilidades de comprender lo colectivo.

Pienso que la única forma de dar sentido a la competencia matemática y en definitiva tener claros los pasos, pasa por ofrecer unos descriptores breves, concretos y ubicados en un contexto específico. Esto no sería un problema para la transferencia de conocimientos, «ser capaz de leer el recibo de luz» debiera ser una competencia universal para el resto de los recibos y de muchos folletos informativos. Trabajar de lo particular a lo general es lo que ha dado su carácter a la ciencia, y aprender es hacer ciencia. La generalización (si tiene que llegar) se consigue incrementando los dominios de aplicación[9].

Teniendo en cuenta todos los comentarios anteriores planteo los descriptores de la competencia matemática, clasificados por centros de actuación y localizados en los contenidos, llamados tradicionales, con estos códigos:

1. Aritmética
2. Álgebra
3. Geometría
4. Unidades de medida
5. Funciones y gráficas
6. Proporcionalidad
7. Estadística (organización de la información)
8. Azar y probabilidad

Como se puede observar, no son demasiados los contenidos que precisan las competencias matemáticas básicas, todos son contenidos habituales dentro de los programas tradicionales de la enseñanza obligatoria en el nivel de educación de personas adultas (ver Orden Ministerial de junio de 2009).

En resumen, las competencias matemáticas, vistas como necesidades matemáticas, son las que tienen que marcar la elección de los contenidos en este nivel de enseñanza; así como el orden y la profundidad de ellos, teniendo en cuenta que el grado de complejidad y la capacidad de posibles avances de los conceptos matemáticos depende mucho de los conocimientos y la experiencia anterior que tengan las personas adultas.

Referencias bibliográficas

Allen Paulos, J. (1990), *El hombre anumérico,* Tusquets, Barcelona.

Alsina, C. (1994), «¿Para qué aspectos concretos de la vida deben preparar las matemáticas?», *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas,* n.º 1*,* 37-43.

Bishop, A. J. (1988), *Mathematical Enculturation*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. [Traducción al castellano: *Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural* (1999), Paidós Ibérica, Barcelona.]

Cabello, M. J. (coord.) (1997), *Didáctica y educación de personas adultas*, Aljibe, Málaga.

Carraher, T., D. Carraher y A. Schliemann (1995), *En la vida diez, en la escuela cero*, Siglo XXI, México.

D'Ambrosio, U. (1996), «Ethnomathematics: where does it come from? And where does it go?», en *Actas del 8ª ICME (Congreso Internacional de Educación Matemática),* S.A.E.M. THALES, Sevilla, 119-128.

Frankenstein, M. (1997), «La equidad en la educación matemática: el aula en el mundo exterior al aula», en W. G. Secada, E. Fennema y L. B. Adajian (comps.), *Equidad y enseñanza de las matemáticas: nuevas tendencias*, Morata/MEC, Madrid, 179-205.

Knijnik, G. (1996), *Exclusao e resistência. Educaçao matemática e legitimidade cultural*, Artes Médicas, Porto Alegre.

Lave J. (1991), *La cognición en la práctica*, Paidós, Barcelona.

Mariño, G. (1985), *¿Cómo opera matemáticamente el adulto del sector popular?*, Dimensión educativa, Bogotá.

Niss, M. (2002), «Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics», <http://www7.nationalacademies.org/mseb/Mathematical_Competencies_and_the:Learning_of_Mathematics.pdf>.

Plaza, P. (2002), *Las matemáticas en la educación de personas adultas,* Tesis doctoral leída en la Universidad Complutense, Madrid, Facultad de Educación, Madrid.

Plaza, P., M. J. González, B. Montero y C. Rubio (2004), *Matemáticas críticas y transformadoras en la educación de personas adultas,* Aljibe, Málaga.

Skovsmose, O. (1999), *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica,* Una empresa docente, Bogotá.

Pedro Plaza Menéndez
Universidad Politécnica de Madrid
Escuela Popular de Oporto de Madrid
<pedro.plaza@upm.es>

1 En el marco de evaluación de PISA 2003 la competencia matemática se define de una forma similar como «una capacidad del individuo para identificar y entender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados y utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que se puedan satisfacer las necesidades de la vida de estos individuos como ciudadanos constructivos, responsables y reflexivos» (OCDE, 2003). Otras definiciones similares se pueden encontrar en las Recomendaciones del Parlamento europeo sobre las competencias claves del aprendizaje permanente.

2 Conclusiones de este tipo se pueden encontrar en los trabajos de Mariño (1985) y Plaza (2002).

3 Autores como Bishop (1988), Skovsmose (1999) y Frankestein (1997) han estudiado en las últimas décadas estas ideas dentro de la corriente llamada Matemática Social.

4 Algunas de estas características de la persona adulta están en Cabello (1997).

5 Recordamos que la idea de contextualización en la formación del conocimiento en la etapa de madurez, es una idea ya estudiada y valorada por múltiples autores ajenos al ámbito matemático. Esa misma reflexión también se apoya, aunque con menos firmeza quizás, en otros niveles de enseñanza. Tampoco son nuevos los trabajos que postulan unas matemáticas más aplicables (más que aplicadas).

6 Para los niveles de enseñanza obligatoria la competencia matemática se concreta en: resolución de problemas, la realización de procesos mentales, la elaboración de modelos matemáticos con los que explicar o predecir la realidad, la representación de conceptos abstractos y de la información, el pensamiento convergente y divergente, el uso de instrumentos de diversos tipos, la formalización de conceptos y la comunicación mediante el uso de códigos con significado colectivo.

7 Por ejemplo, ser competente en el manejo de dinero diario se ha modificado en los últimos años con la entrada del euro, los números decimales han vuelto a aparecer. Algunas personas vaticinan que los algoritmos escritos de la multiplicación y división tienen sus días contados, luego las competencias relacionadas con ellos cambiarán. Las personas jóvenes que buscan empleo tienen necesidades matemáticas distintas que las personas ya jubiladas…

8 Muchos de los descriptores han aparecido en las encuestas y entrevistas que sobre este tema se han llevado a cabo en escuelas de personas adultas. También se ha completado con opiniones de otros colegas a partir de las propuestas iniciales.

9 Investigaciones al respecto se pueden encontrar en Carraher (1995) y Lave (1991).

XVI JAEM

Jornadas
para el aprendizaje
y la enseñanza
de las matemáticas

Palma 2013

2-5 julio

SBM Xeix
Societat Balear de Matemàtiques

Matemáticas y creatividad: un mundo en construcción

Federación
Española
de Sociedades
de Profesores
de Matemáticas

Núcleos temáticos

1 Infantil y primaria: ahí empieza todo
2 Didáctica y formación del profesorado
3 Modelización y formalización
4 Resolución de problemas
5 Materiales y recursos en el aula de matemáticas
6 Conexiones y contextos
7 Comunicación y divulgación

suma+ 72
Artículos
Marzo 2013
pp. 17-30

Introducción a la Estadística con *R*

José M.ª Barriuso, Virgilio Gómez,
M.ª José Haro y Francisco Parreño

Es remarcable que una ciencia que comenzó con el estudio sobre oportunidades de ganar en juegos de azar se haya convertido en el objeto más importante del conocimiento humano..., las preguntas más importantes sobre la vida son, en su mayor parte, en realidad, sólo problemas de probabilidad. (Pierre-Simon, Marqués de Laplace)

Generalmente, los estudiantes de bachillerato y universitarios tienen dificultades para comprender los conceptos más elementales de probabilidad y estadística. La presentación de conceptos abstractos de una forma visual y dinámica puede ayudar a comprenderlos mejor. La simulación de experimentos aleatorios ayudará a conseguirlo. Presentamos a continuación algunas de las actividades preparadas para ello.

Palabras clave: Probabilidad, Estadística, *software* libre, simulación.

Introduction to Statistics with *R*

High school and university students often have difficulties to understand basic ideas in probability and statistics. Introducing these new concepts in a visual and dinamic way can help to their better understanding. The simulation of random experiments will certainly help to achieve this goal. In this paper we present some exercises prepared for this purpose.

Key words: Probability, Statistics, Free software, Simulation.

A lo largo de nuestra experiencia como docentes en institutos de secundaria y universidad hemos podido comprobar que cuando los estudiantes han de aprender conceptos de Estadística y de Probabilidad adquieren la habilidad suficiente para saber utilizar adecuadamente los algoritmos de cálculo apropiados y para aplicar el modelo correspondiente de forma conveniente. Por ejemplo, saben cómo actuar cuando se encuentran delante de un determinado modelo de distribución de probabilidad, saben cuándo pueden aproximar la distribución binomial mediante la normal o cuándo han de aplicar un determinado tipo de contraste de hipótesis,…

Pero también hemos comprobado que no captan ni comprenden, en muchos casos, el sentido de lo que aprenden. Por ejemplo, ¿qué caracteriza a los valores que se distribuyen de una determinada forma?, ¿cuál es el significado del teorema central del límite y cuáles son sus implicaciones?, ¿cuál es la relación que existe entre el estadístico del contraste y el *p*-valor?…

Ver desde otro ángulo las ideas que existen detrás de cada concepto o procedimiento y manipularlas puede favorecer la comprensión de las mismas, promoviendo además el descubrimiento de relaciones entre ellas que permitan captar mejor su verdadero

Artículo recibido en *Suma* en marzo de 2012 y aceptado en enero de 2013

significado. La tecnología y determinado software hacen posible este hecho, al permitir la simulación de experimentos aleatorios con toda rapidez y fiabilidad. Si, además, ese software es gratuito los estudiantes podrán experimentar con él en cualquier lugar y momento y no será necesario limitarse al entorno del aula ni a la hora de clase. En este documento queremos presentar algunas de las actividades preparadas para trabajar con estudiantes de Bachillerato y Universidad. Para su diseño nos hemos apoyado en el material citado en la bibliografía al final de este documento.

El trabajo se ha realizado con el paquete estadístico *R*. Se descarga gratuitamente desde:

http://cran.r-project.org

R es un conjunto integrado de programas que permite trabajar con datos, cálculos y gráficos estadísticos. Incluye comandos para manejar y almacenar conjuntos de datos, operadores para desarrollar cálculos con vectores y matrices y comandos para análisis de datos y para representaciones gráficas. Además, permite trabajar con datos procedentes de diferentes sistemas de bases de datos. Inicialmente el programa consta de una serie de paquetes básicos que se pueden ampliar descargándolos desde la página web a la que hemos accedido para descargar el programa. Ello hace que la potencia y posibilidades del mismo sean muy considerables. Además, el lenguaje de programación es relativamente sencillo.

Comparacion de resultados al agrupar valores de una variable continua en diferente número de intervalos

Enunciado

Genera 100 valores correspondientes a una distribución normal *N(0,1)*. Represéntalos gráficamente mediante un histograma, agrupando los datos en un diferente número de intervalos de acuerdo a las reglas de Sturges, Scott y Freedman-Diaconis. ¿Qué observas? Haz lo mismo generando 1 000, 10 000, …

Objetivos

- Reconocer la importancia de las representaciones gráficas.
- Reflexionar sobre el papel que en un histograma desempeña el tamaño de los intervalos en la fiabilidad de la información ofrecida por la imagen visual obtenida.
- Comparar y comprender la potencia de cada una de las fórmulas más habituales utilizadas para obtener el número de intervalos en histogramas.

Metodología

Los estudiantes generan datos al azar correspondientes a una distribución normal de media 0 y desviación típica 1 con la orden:

```
x=rnorm(10000)
```

A continuación representan el histograma utilizando tres métodos diferentes: Sturges, Scott y Freedman-Diaconis. Con el primero de ellos calculan el número de intervalos, mientras que con los otros dos calculan la amplitud de los mismos. Para ello utilizarán las tres órdenes siguientes:

```
hist(x,main="Histograma según Sturges")
hist(x,breaks="Scott",main="Histograma
según Scott")
hist(x,breaks="FD",main="Histograma según
Freedman-Diaconis")
```

Inicialmente, se incluirá la instrucción:

```
set.seed(111)
```

con la finalidad de que todos los estudiantes obtengan los mismos datos y se pueda discutir sobre idénticas representaciones gráficas.

Después de hacer una primera discusión y reflexión conjunta obtendrán nuevos conjuntos de datos aumentando la cantidad de los mismos y se llevará a cabo una reflexión por parejas. Las conclusiones se recogerán en el cuaderno de prácticas entregado por cada estudiante.

Comentarios

Para $n = 100$ se obtendrán gráficas similares a las que se muestran en la figura 1 y los estudiantes podrán observar cómo aumentar el número de intervalos da una información más detallada, pero también puede que no aporte nada nuevo debido a que el número de elementos en cada intervalo es demasiado pequeño. Hay que tener en cuenta también que Sturges sólo es verdaderamente fiable cuando el número de datos es menor que 200 y que en su fórmula sólo se tienen en cuenta el número total de datos:

$$\text{n}^{\text{o}}\text{. de intervalos} = 1 + \frac{\log(n)}{\log(2)}$$

En cambio, las otras dos fórmulas tienen en cuenta otras características, como la cuasidesviación típica o el rango intercuartílico:

(Scott: amplitud=(3.5 s)/$\sqrt[3]{n}$; FD:amplitud=(2·IQR)/$\sqrt[3]{n}$)

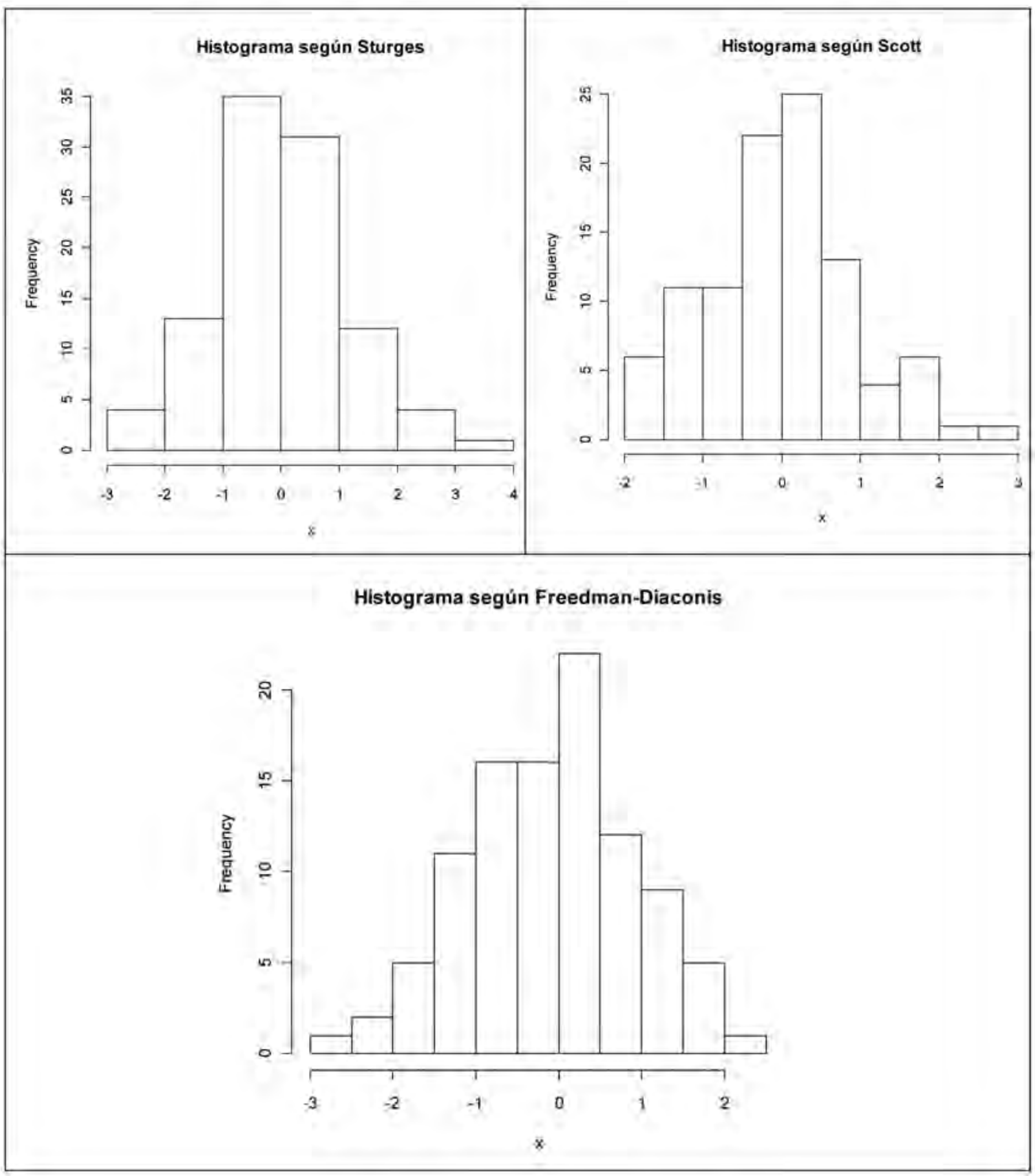


Figura 1

Simulación del lanzamiento de dos dados y cálculo de la suma de puntos

Enunciado

Utilizando los comandos apropiados simula el lanzamiento de un dado dos veces o de dos dados, y suma los puntos obtenidos. Representa gráficamente los resultados que obtendrías si realizaras el experimento 1 000 veces. ¿Cómo se distribuye la suma de puntos?

Simula otro experimento en el que lances 200 dados y sumes los puntos. Haz lo mismo que para el caso de los dos dados. ¿A qué conclusiones llegas?

Objetivos

— Razonar sobre el uso de comandos con el fin de cumplir tareas sencillas.
— Reproducir experimentos cotidianos en estadística.
— Aplicar los conceptos de experimento aleatorio, variable aleatoria y distribución de probabilidad a situaciones experimentales concretas.
— Aclarar los conceptos mencionados en el objetivo anterior y darles significado.

Metodología

Puesto que los estudiantes ya tienen conocimiento de los conceptos y procedimientos presentes en la actividad, así como de los comandos necesarios para llevarla a cabo, la actividad se presenta sin más preámbulos y se deja que trabajen por parejas. El profesor permanece atento para resolver las dudas que surjan y orientar a los que lo necesiten.

Comentarios

Para simular el lanzamiento de un dado un determinado número de veces podemos proceder de las dos formas siguientes. Una es:

```
sample(a:b,c,rep=T)
```

Con esta sencilla instrucción se generan al azar y con reemplazamiento *c* valores de entre los números enteros comprendidos entre *a* y *b* (si no se desea que haya reemplazamiento basta con omitir la opción *rep=T*). Por ejemplo:

```
sample(1:10,10,rep=T)
5 4 7 3 2 10 3 7 9 9
```

Con esta instrucción hemos generado esos 10 valores comprendidos entre 1 y 10.

La otrs forma es utilizar la instrucción:

```
ceiling(runif(c,a,b))
```

Con runif(c,a,b) generaremos *c* números reales al azar entre *a* y *b*. Estos números, con el comando ceiling se aproximarán al entero posterior (a no ser que ya sea entero, en cuyo caso se queda como estaba). Por ejemplo, con:

```
ceiling(runif(10,0,10))
```

hemos generado los 10 valores siguientes:

```
7 5 9 5 5 10 8 4 9 3
```

Si queremos simular el lanzamiento de un dado dos veces, o de dos dados, haríamos:

```
sample(1:6,2,rep=T)
```

o bien:

```
ceiling(runif(2,0,6)).
```

Para sumar los puntos podemos utilizar:

```
sum(sample(1:6,2,rep=T))
```

que genera los números y los suma.

Si lo que pretendemos es simular el mismo experimento 1000 veces utilizamos la siguiente instrucción:

```
t=sapply(1:1000,function(x)
{sum(sample(1:6,2,rep=T))})
```

Para representar gráficamente los datos procedemos con la instrucción:

```
barplot(table(t))
```

Los estudiantes deben reflexionar sobre el tipo de variable aleatoria con la que tra-

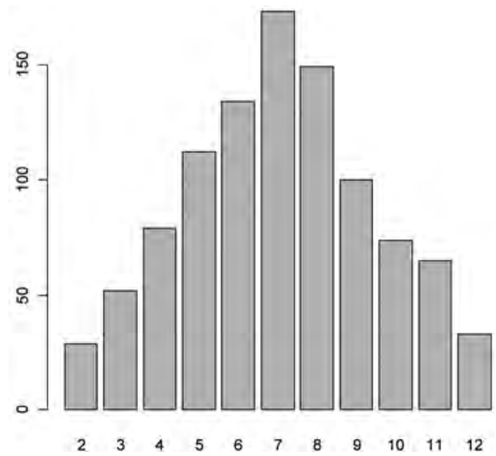


Figura 2

bajan, sobre cuál es la probabilidad de obtener cada uno de los resultados posibles, sobre la media de la distribución y su representatividad, sobre la dispersión de los datos, o sobre la mediana y la moda. La representación gráfica (fig. 2) puede ayudar a determinar la posible simetría de los datos o si la distribución se podría aproximar a una distribución normal o no.

R también permite calcular probabilidades de resultados concretos y valores de parámetros como la media, mediana o varianza, así como del grado y clase de asimetría.

En el segundo caso, en el que hay que lanzar 200 dados y sumar los puntos, al haber un gran número de resultados posibles interesa agrupar como si de una variable continua se tratara y obtener un histograma. Las instrucciones utilizadas son ahora:

```
t=sapply(1:1000,function(x){sum(sample(1:6,200,rep=T))})
hist(t,breaks="Scott")
```

Véase la gráfica obtenida en la figura 3.

Los estudiantes deben analizar los mismos conceptos y comparar resultados. Al igual que antes, sobre el histograma, han de reflexionar sobre si se ajusta a una distribución normal o no. Además de tener en cuenta nuestra impresión visual, podemos ser un poco más precisos y ayudarnos su-

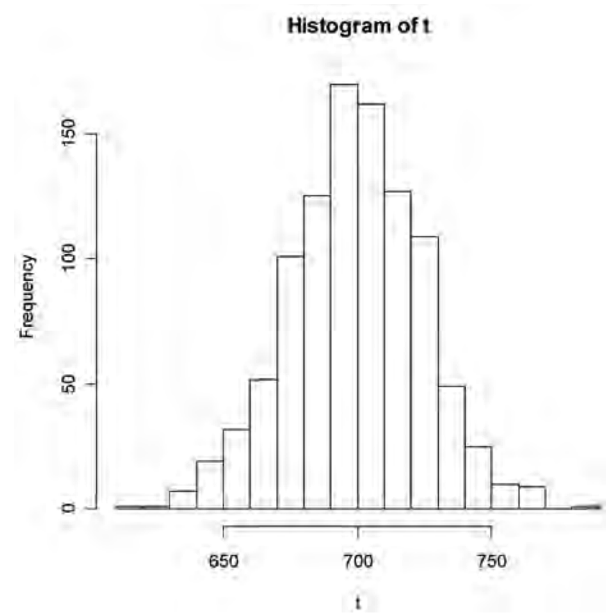


Figura 3

perponiendo a la gráfica una curva normal. Para ello es necesario, además de utilizar la instrucción correspondiente, modificar ligeramente el histograma haciendo que se representen densidades en lugar de frecuencias. Basta con introducir en la instrucción el parámetro *freq=F*. Es decir:

```
hist(t,breaks="Scott",freq=F)
```

Las densidades se calculan a partir de las alturas, considerando las frecuencias relativas equivalentes a las áreas de los rectángulos, con lo cual la densidad correspondiente a cada rectángulo se calculará con la expresión:

$$densidad = \frac{frecuencia \quad relativa}{amplitud \;\; del \;\; intervalo}$$

Para representar la curva que correspondería a una distribución normal de media y desviación típica correspondientes a la muestra introducimos la orden:

```
curve(dnorm(x,mean(t),sqrt(var(t))),add=T)
```

Con esta instrucción estamos diciendo que se dibuje la campana de Gauss que correspondería a la función de densidad de una distribución normal de media y desviación típica obtenidas a partir de los datos generados por el programa. Con *add=T* indicamos que la curva se superponga al histograma realizado previamente (fig. 4).

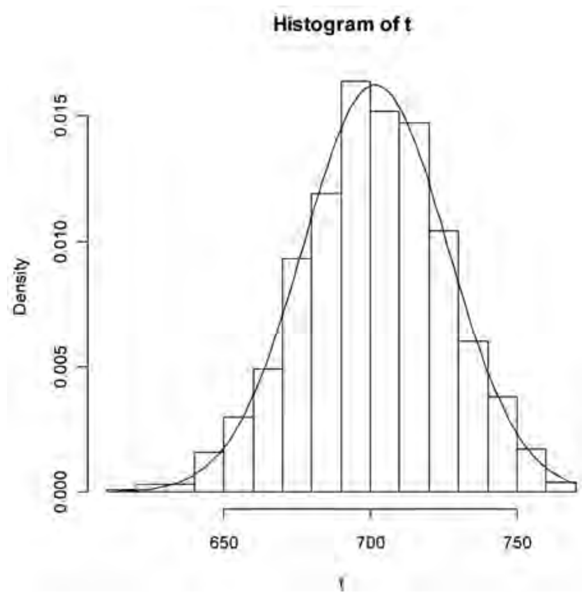


Figura 4

Simulación del lanzamiento de veinte dados (o veinte veces de un dado) y recuento de la frecuencia de un resultado

Enunciado

Simula el lanzamiento de 20 dados y calcula el número de veces que aparece el número 6. Repite el experimento 1000 veces. ¿Cuál crees que será el resultado más probable? ¿Cuál ha sido el resultado más probable? ¿Cuál crees que será el valor medio de la muestra? ¿Cuál es el valor medio de la muestra? ¿Y la desviación típica? ¿Cómo se distribuyen los datos en torno a la media? ¿Cuáles son las características de la distribución que obtienes? ¿Con qué tipo de distribución crees que estás trabajando? ¿Qué ocurriría si lanzaras 100 dados en vez de 20? (Responde las mismas preguntas que para un número de dados igual a 20) ¿Se distribuyen los datos de la misma forma?

Objetivos

— Utilizar la simulación de experimentos aleatorios particulares como forma de promover el razonamiento.
— Reconocer las características de los experimentos de Bernoulli en situaciones concretas.
— Identificar los parámetros y las propiedades más relevantes de la distribución binomial.
— Establecer relaciones entre la distribución binomial y la normal.

Metodología

Los estudiantes conocen los comandos e instrucciones que les serán útiles para simular la realización del experimento. Se trata de que reflexionen sobre cómo utilizarlos para lograrlo. Una vez hecho esto han de usar los datos procedentes de la experimentación para responder las preguntas del ejercicio e intentar llegar a conclusiones.

Comentarios

En cuanto a las instrucciones necesarias, la actividad se puede realizar de manera similar a la anterior. Podríamos utilizar:

```
t=sapply(1:1000,function(x)
{sum(sample(1:6,20,rep=T)==6)})
```

Con esta instrucción se simula el lanzamiento de 20 dados 1000 veces, contándose en cada caso el número de veces que en algún dado aparece el resultado 6.

Los resultados se pueden representar gráficamente (fig. 5) con la instrucción:

```
barplot(table(t))
```

Ayudándose de la gráfica los estudiantes han de reflexionar sobre cuál es el valor

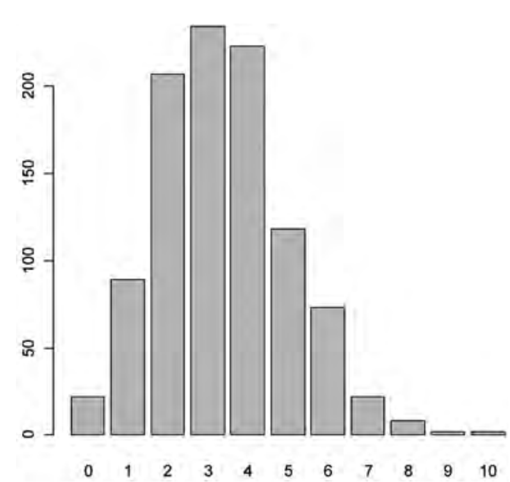


Figura 5

más probable y analizar si coincide con lo que les dicta la lógica. Pueden conjeturar sobre cuál será el valor de la media y considerar si los datos estarán muy dispersos o no, así como sobre la simetría. Pueden confirmar o refutar sus ideas utilizando las instrucciones siguientes. Para la media:

```
mean(t)
```

Para la desviación típica muestral:

```
sqrt(var(t))
```

Para la simetría:

```
skewness(t)
```

El experimento se repetirá simulando el lanzamiento de 100 dados.

Los estudiantes que hayan identificado el experimento con las pruebas de Bernouilli pueden haberse lanzado a utilizar directamente las instrucciones relacionadas con este tipo de pruebas. Para ello han debido identificar el valor de los parámetros n ($n=20$ o $n=100$) y p ($p=1/6$). Las instrucciones a utilizar serían:

```
t=rbinom(100,20,1/6)
barplot(table(t))
```

El resultado es muy similar.

Propiedad reproductiva de determinadas variables

Metodología

Esta actividad consta de diferentes enunciados relacionados con diversas distribuciones. En todos ellos se trata de analizar lo que ocurre cuando se trabaja la suma de variables aleatorias o la media de las mismas, con el fin de analizar el carácter reproductivo de diversas distribuciones y de introducirse en el teorema central del límite. Mediante el programa, los estudiantes generarán valores correspondientes a las diferentes variables, crearán las variables suma o media y observarán lo que ocurre con la distribución correspondiente a las nuevas variables. Apoyándose en la potencia visual de las gráficas generadas se reflexionará sobre los resultados con el fin de llegar a las conclusiones correctas. Este bloque de enunciados se expondrá a los estudiantes antes del desarrollo teórico y de la presentación formal de los contenidos correspondientes, con el fin de que puedan anticipar los resultados por ellos mismos.

Enunciado 1

Considera dos variables aleatorias binomiales $\chi \rightarrowtail B(10, 0.5)$ y $\eta \rightarrowtail B(20, 0.5)$ ¿Cómo se distribuye la variable aleatoria $\chi + \eta$?

Objetivos

Reflexionar sobre lo que ocurre con la suma de variables de distribuciones binomiales de igual parámetro p.

Comentarios

Con las instrucciones:

```
a=rbinom(10000,10,0.5)
b=rbinom(10000,20,0.5)
s=a+b
barplot(table(s))
```

se generarán y representarán valores correspondientes a la suma de las variables aleatorias $\chi+\eta$. A partir de la gráfica y del cálculo de valores como la media se podrá comprobar que la distribución binomial de parámetro p es reproductiva con respecto al número de experimentos de Bernoulli.

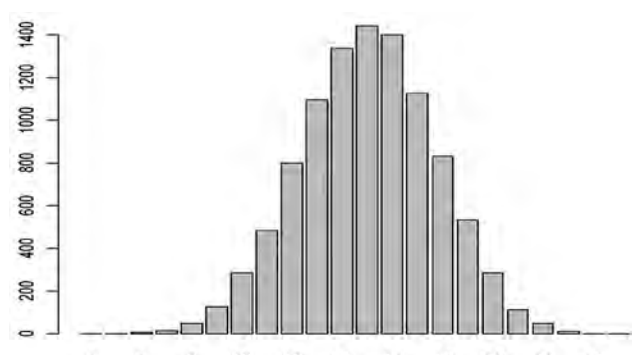


Figura 6

Sobre la misma gráfica (fig. 6), los estudiantes podrán observar que, dada la simetría de la distribución, la media es aproximadamente 15, aunque también se puede obtener la misma con la instrucción:

```
mean(a+b)
```

Al tratarse de una distribución binomial, al dividir la media entre el parámetro *n* (10+20), obtenemos el valor de *p* que va a coincidir con 0.5.

Para confirmar esta conjetura los estudiantes podrán generar y representar gráficamente valores correspondientes a una distribución binomial de parámetros $n=30$ y $p=0.5$ y ver que es muy semejante a la obtenida para la suma de variables (fig. 7).

```
k=rbinom(10000,30,0.5)
barplot(table(k))
```

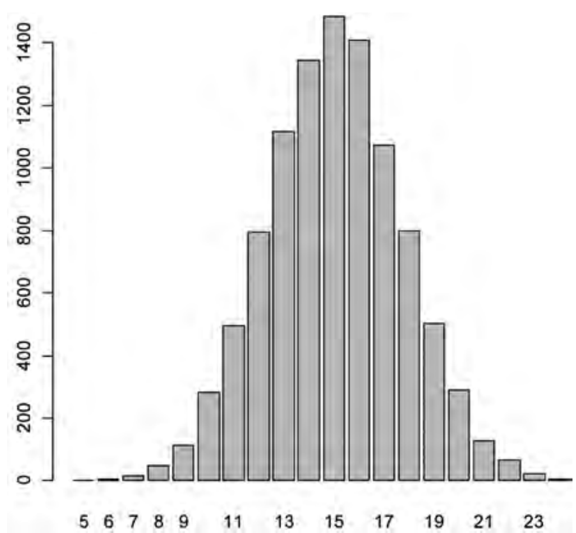


Figura 7

También podrán simular más experimentos cambiando los valores de los parámetros *n* y *p*.

Enunciado 2

Considera dos variables aleatorias independientes y con distribución de Poisson de medias 2 y 3. Genera 10 000 valores y represéntalos gráficamente. Calcula la media y la varianza de la suma de dichas variables y obtén una representación gráfica. ¿Cuál crees que es la distribución de la suma?

Objetivos

Conjeturar la propiedad reproductiva de la distribución de Poisson.

Comentarios

Se procederá de manera similar a la anterior, sólo que trabajando con las instrucciones

```
a=rpois(10000,2)
b=rpois(10000,3)
s=a+b
barplot(table(s))
```

Los estudiantes que lleguen a la conclusión de que la suma de variables se distribuye según un modelo de Poisson de media la suma de las medias podrán confirmar sus hipótesis generando los valores de la variable apropiada (fig. 8).

```
t=rpois(10000,5)
barplot(table(t))
```

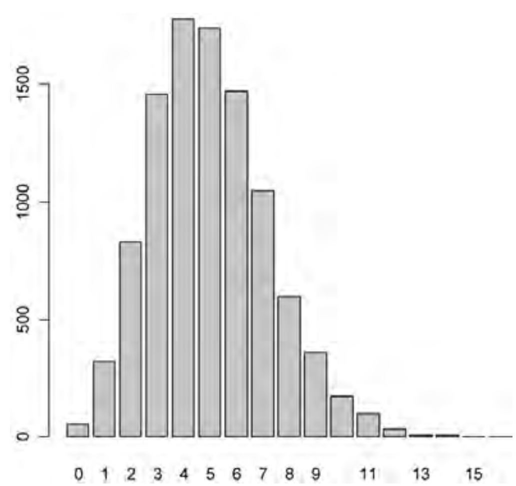


Figura 8

Enunciado 3

Considera tres variables independientes y distribuidas normalmente con media 3 y desviación típica 1, ¿cómo se distribuye la media muestral? ¿Qué pasaría si tuviéramos n variables?

Objetivos

— Estudiar la propiedad reproductiva de la distribución normal.
— Introducir en el estudio de las distribuciones en el muestreo.

Comentarios

Se generarán 10000 valores para cada una de las tres variables aleatorias normales independientes de media 3 y desviación típica 1. Se creará una nueva variable sumando las tres anteriores. Se representarán gráficamente los datos (fig. 9) y se estudiará el tipo de distribución que se obtiene, deteniéndose en la media y en la desviación típica. Así se comprobará la propiedad reproductiva viendo que la media de la variable suma es la suma de las tres medias y la varianza es la suma de las varianzas.

```
a=rnorm(10000,3,1)
b=rnorm(10000,3,1)
c=rnorm(10000,3,1)
s=a+b+c
hist(s,freq=F,breaks=»Scott»)
```

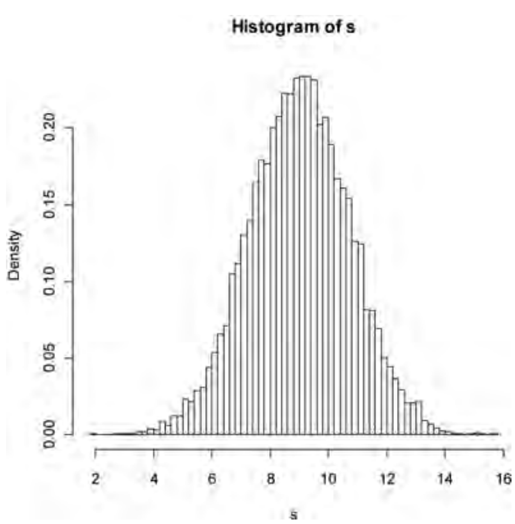


Figura 9

Podrán comprobar sus suposiciones con las instrucciones siguientes:

```
mean(s)
var(s)*10000/9999
```

Se iniciará a continuación el estudio del estadístico media muestral, calculando la media de los valores de las tres variables y representando gráficamente los resultados (fig. 10).

```
a=rnorm(10000,3,1)
b=rnorm(10000,3,1)
c=rnorm(10000,3,1)
m=(a+b+c)/3
hist(m,freq=F,breaks=»Scott»)
```

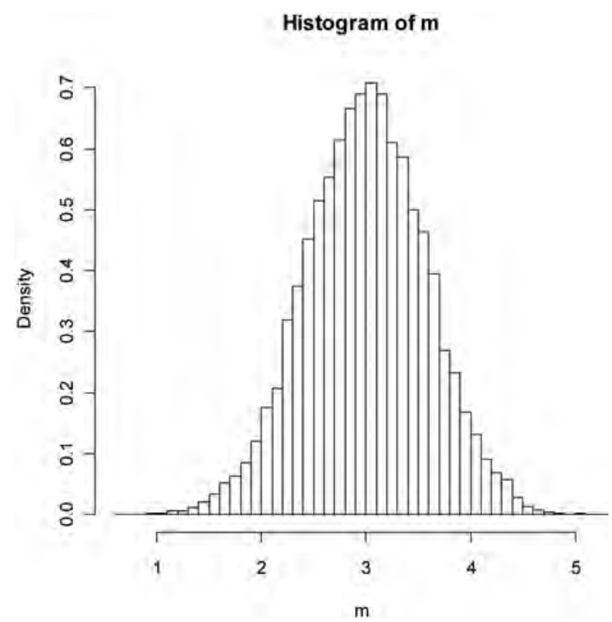


Figura 10

Se puede observar que el valor de la media ha cambiado, siendo la misma de las distribuciones iniciales. También ha cambiado la varianza y se puede obtener su valor, al igual que el de la media, con las mismas instrucciones anteriores. Gráficamente (fig. 11), podemos comparar las dos distribuciones superponiendo curvas normales que nos permitan ver qué ocurre con la media y varianza de la variable media muestral.

```
m=(a+b+c)/3
hist(m,freq=F,breaks=»Scott»)
curve(dnorm(x,3,1),col=»blue»,add=T)
curve(dnorm(x,mean(m),sqrt(var(m)*10000/9999)),
col=»red»,add=T)
```

El ejercicio se debe repetir con más variables. Se puede simular, por ejemplo, la suma de 20 variables. Para ello resulta más cómodo utilizar la instrucción:

```
m=sapply(1:10000,function(x){mean(rnorm(20,3,1))})
```

Esta instrucción generará 10 000 muestras de tamaño 20, calculando la media para cada una de ellas.

Los estudiantes también podrán observar que cuanto mayor es la desviación típica, más aplanada es la curva normal.

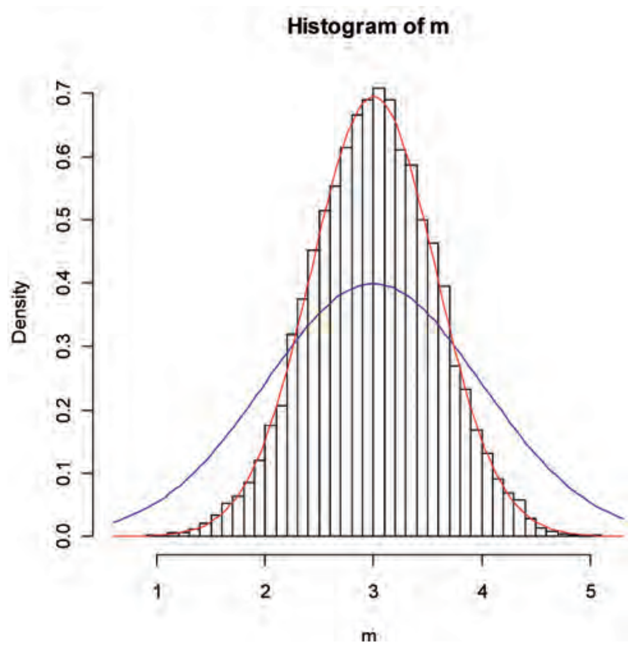


Figura 11

Enunciado 4: Teorema Central del Límite

Analiza el siguiente resultado «La media de n variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas, se distribuye según una normal cuando n tiende a infinito».

Objetivos

- Aplicar los resultados parciales obtenidos en las anteriores actividades a un problema más general y de importantes consecuencias.
- Profundizar en el significado de uno de los teoremas más importantes de la teoría de la probabilidad.
- Profundizar en los conceptos de función de densidad, de distribución, de media y de desviación típica.

Comentarios

Para trabajar sobre la afirmación de este teorema se considerarán poblaciones con distribuciones continuas habituales como, por ejemplo, la uniforme y la exponencial. Posteriormente, se trabajará con otra distribución con función de densidad no nula en intervalos disjuntos con el fin de poder apreciar la potencia de este teorema.

Tomaremos, por ejemplo, 10 000 muestras de tamaño 30 de una distribución uniforme y calcularemos las 10 000 medias:

```
x=sapply(1:10000,function(x){mean(runif(30,
0,1))})
```

Representamos el histograma:

```
hist(x,freq=F,breaks=»Scott»)
```

Representamos la distribución uniforme original:

```
curve(dunif(x),col=”blue”,add=T)
```

Se puede observar en el dibujo que la gráfica es una recta de altura 1 (figura 12).

La curva normal teórica correspondiente al teorema central del límite se calcularía a partir de los valores de la uniforme, es decir, una media igual a μ, y una desviación típica igual a σ:

$$\mu = \int_0^1 x \frac{1}{1-0} dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{\int_0^1 x^2\,dx - \mu^2}}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - \frac{1}{4}}}{\sqrt{30}} = \\ = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{12}}}{\sqrt{30}} = \frac{1}{\sqrt{12\cdot 30}}$$

```
curve(dnorm(x,.5,1/(sqrt(12*30))),col=”red”,
add=T)
```

Podemos simular de nuevo el experimento considerando muestras de mayor tamaño,

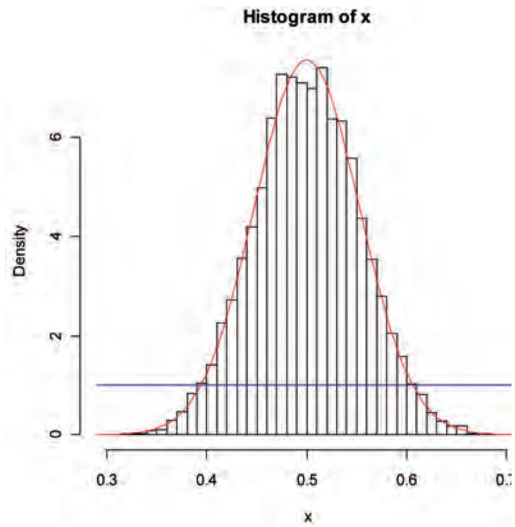


Figura 12

por ejemplo $n = 100$, para observar el comportamiento de la distribución y acercarnos más al significado del teorema.

Se puede repetir el experimento con otro tipo de distribuciones, incluso un tanto llamativas, como la una población con la siguiente función de densidad:

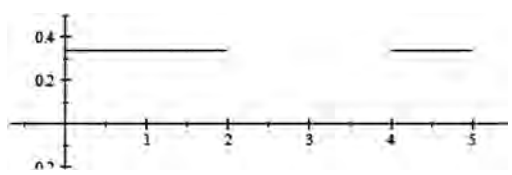


Figura 13. Función de densidad

En este caso se pide a los estudiantes que calculen la función de distribución y que representen gráficamente ambas, la de función de densidad y la de distribución (figs. 13 y 14). De esta forma pueden observar mejor sus características.

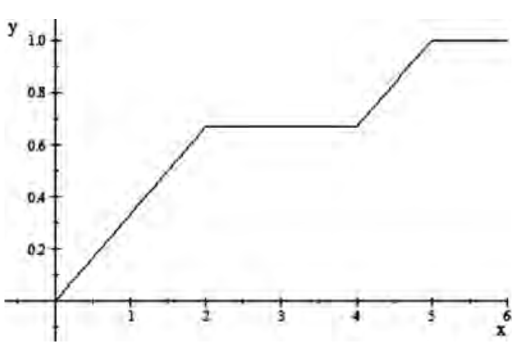


Figura 14. Función de distribución

Simular este tipo de distribución es algo más complejo y los estudiantes han recibido las instrucciones necesarias para poder hacerlo.

```
f=function(x){if(x<2/3)return(3*x)else return(2+3*x)}
b=sapply(1:10000,function(x){mean(sapply(runif(30),f))})
hist(b,freq=F,breaks="Scott")
curve(dnorm(x,(13/6),sqrt(107/(36*30))),add=T)
```

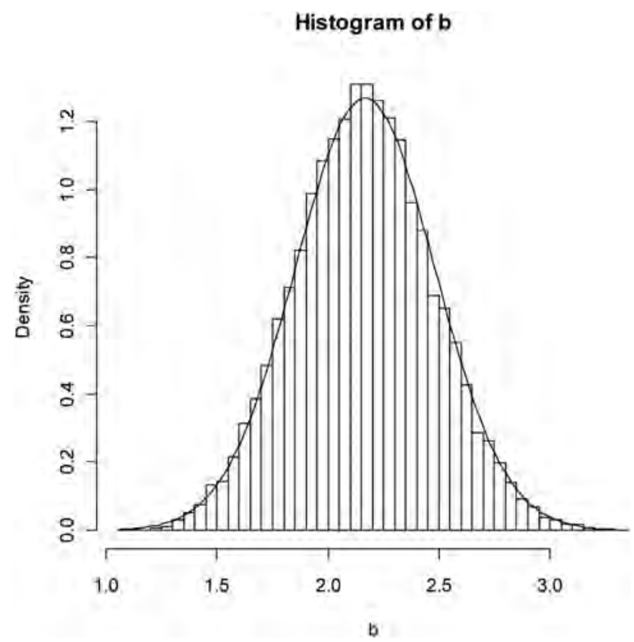


Figura 15

Se puede observar cómo tomando muestras de sólo 30 elementos, el histograma se ajusta muy bien a una curva normal de media la de la distribución y de desviación típica la de la distribución dividida por $\sqrt{n}$ (fig. 15).

Intervalos de confianza

Enunciado

Construir intervalos de confianza al 95 %, significa que de cada 100 intervalos que construimos con el método elegido, en promedio, 95 contendrán la media de la población.

Comprobémoslo para la media de una distribución uniforme en $[0,1]$ a partir de muestras de tamaño 30 con un nivel de confianza del 95 %.

Objetivos

Profundizar en el significado de intervalo de confianza.

Metodología

Los estudiantes han adquirido en clase los conocimientos necesarios relativos al sentido y utilidad de los intervalos de confianza como entornos que, con una alta fiabilidad, contienen al parámetro poblacional que está siendo estimado. Se trata de que profundicen más en el carácter de los intervalos de confianza analizando el papel de éstos. Los estudiantes procederán de la siguiente forma. Recordando que el intervalo es:

$$\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

construirán primero la función intervalo que genera los intervalos de confianza (siendo n el tamaño de la muestra y *alpha* el nivel de significación):

```
intervalo=function(n,alpha){
```

Generarán un vector con n valores aleatorios de la distribución uniforme:

```
x=runif(n)
```

Hallarán su media:

```
m=mean(x)
```

y la estimación del error estándar de la media:

```
et=sd(x)/sqrt(n)
```

La siguiente instrucción devuelve el intervalo calculado a partir de z:

```
c(m-qnorm(1-alpha/2)*et,m+qnorm(1-alpha/2)*et)}
```

A continuación, construirán la base del gráfico, donde representarán la media con una línea roja, utilizando la instrucción

```
plot(c(0.5,0.5),c(1,100),type=“l”,col=“red”)
```

Después, con un ciclo *for*, mostrarán 100 intervalos de confianza para la media a alturas crecientes:

```
for(i in 1:100){lines(intervalo(30,0.05),c(i,i),col=“blue”)}
```

Los intervalos vienen representados por líneas azules horizontales (figura 16) y contando los que contienen a la media poblacional podrán entender mejor este otro aspecto de los intervalos de confianza reflejado en el enunciado.

Comentario

Será conveniente repetir el experimento diversas veces y para diferentes niveles de significación. Esta actividad se debe repetir para obtener intervalos de confianza correspondientes a diversos parámetros, como la proporción, varianza, el cociente de varianzas, diferencia de medias o de proporciones, suponiendo que se trabaja con muestras grandes y pequeñas y que se conoce o desconoce el valor de la varianza o varianzas poblacionales.

También es importante presentar situaciones problemáticas en las que se haya de dar respuesta a problemas reales, próximos al entorno del estudiante.

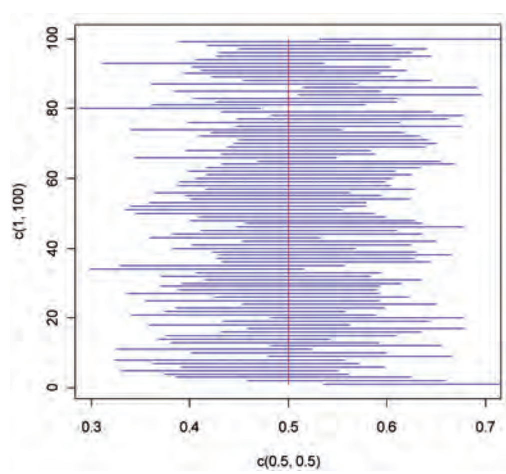


Figura 16

Contraste de hipótesis

Objetivos

— Trabajar con diversos test de hipótesis para comprender su sentido y utilidad.
— Analizar y entender el sentido de los diversos elementos de un test de hipótesis.

- Ver la relación entre test de hipótesis e intervalo de confianza.
- Establecer la relación que existe entre estadístico del contraste y *p*-valor.

Metodología

Después de haber completado en clase el desarrollo teórico de los conceptos y procedimientos más habituales en el contraste de hipótesis se utilizarán las posibilidades gráficas y la potencia de cálculo del programa *R* para profundizar en el sentido de los elementos integrantes de un test de hipótesis. La potencialidad de *R* se utilizará también para realizar contrastes no paramétricos, así como para comprobar si se cumplen las hipótesis necesarias para poder realizar test paramétricos. Mostramos algunos ejemplos.

Enunciado 1

Consideremos una encuesta en la que preguntamos por la calle a 100 personas, elegidas al azar, sobre cierta cuestión a la que responden sí 42 personas. ¿Es este dato compatible con la hipótesis de que la proporción de síes en la población es del 50%? ¿Cuál sería la respuesta si hubiéramos obtenido 420 síes de 1 000 encuestados?

Comentarios

Para realizar este test se utilizará la función *prop.test*, concretamente la instrucción:

```
prop.test(42,100,p=0.5)
```

En ella indicamos que los resultados de la muestra han sido 42 de 100 y que contrastamos la hipótesis nula de que la proporción es 0.5.

La respuesta del programa es la siguiente:

```
1-sample proportions test with continuity correction
data: 42 out of 100, null probability 0.5
X-squared = 2.25, df = 1, p-value = 0.1336
alternative hypothesis: true p is not equal to 0.5
95 percent confidence interval:
0.3233236 0.5228954
sample estimates:
p
0.42
```

La primera línea de la respuesta nos indica que es una prueba para una proporción. La segunda línea contiene los datos que hemos introducido. De la tercera línea nos interesa el *p*-valor que es el mínimo valor de significación que podríamos tomar para rechazar H_0, es decir, el *p*-valor, nos indica que si H_0 fuera verdadera, la probabilidad de extraer una muestra cuya proporción esté tan lejos de H_0 como el valor observado de 42, es el *p*-valor, en este caso es 0.1336.

Este valor del *p*-valor, nos está diciendo que con los valores de significación habituales no deberíamos rechazar la hipótesis nula.

La cuarta línea nos indica cuál es la hipótesis alternativa.

La quinta línea nos dice que el nivel de significación ha sido de 0,05. Si hubiéramos querido tomar otro nivel de significación, deberíamos haber introducido la orden:

```
conf.level=1−α
```

La sexta línea nos da un intervalo de confianza para la proporción y podemos ver que el valor 0,5 está dentro de él, lo que nos confirma la decisión de aceptar la hipótesis nula. Las dos últimas líneas nos dan el porcentaje obtenido en la muestra.

Para responder la siguiente pregunta la instrucción sería:

```
prop.test(420,1000,p=0.5)
```

y los resultados proporcionados por el programa:

```
1-sample proportions test with continuity correction
data:  420 out of 1000, null probability 0.5
X-squared = 25.281, df = 1, p-value = 4.956e-07
alternative hypothesis: true p is not equal to 0.5
95 percent confidence interval:
 0.3892796 0.4513427
sample estimates:
p
0.42
```

Obsérvese que aunque la proporción en la muestra es la misma (42%) el *p*-valor ha descendido mucho (0,0000004956) a causa del mayor tamaño muestral. En este caso, los datos ofrecen evidencia en contra de H_0, con los niveles de significación habituales.

Enunciado 2

Si otro encuestador realizó 200 encuestas y obtuvo 110 síes en otra población, ¿es la proporción de síes la misma en las dos poblaciones?

Comentario

Se trata de un contraste de dos proporciones. La instrucción que debemos utilizar es:

```
prop.test(c(42,110),c(100,200))
```

Enunciado 3

Un investigador desea comprobar que la cantidad de ingesta diaria de fibra en una determinada población es inferior a la cantidad habitualmente recomendada de 20 g diarios. El investigador sabe que la desviación estándar de dicha variable es aproximadamente de 10 g y considera que una ingesta inferior en 5 g a la cantidad recomendada es clínicamente relevante. ¿Cuál será el mínimo número de individuos objeto de estudio que garantice una potencia del 80% en la detección de las diferencias deseadas con una prueba bilateral y un nivel de significación del 5%?

Comentarios

Utilizaremos la instrucción:

```
power.t.test(delta=5,power=0.8,sig.level=0.0
5,sd=10,type=»one.sample»,alternative=»tw
o.sided»)
```

Se puede observar que hemos introducido la potencia del contraste esperando recoger el número mínimo de elementos en la muestra. Los resultados son:

```
One-sample t test power calculation
n = 33.36720
delta = 5
sd = 10
sig.level = 0.05
power = 0.8
alternative = two.sided
```

Concluimos que el número mínimo de individuos debe ser 34.

Referencias bibliográficas

GARCÍA PÉREZ, A. (2005), *Métodos Avanzados de Estadística Aplicada: Métodos Robustos y de remuestreo*, UNED, Madrid.

PEÑA, D. (2008), *Fundamentos de Estadística*, Alianza Editorial, Madrid.

UGARTE, M. D., y A. F. MILITINO (2002), *Estadística Aplicada con R*, Universidad Pública de Navarra, Pamplona.

WALPOLE, R. E., R. H. MYERS, S. L. MYERS y K. YE (2007), *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias*, Pearson Educación, México.

JOSÉ M.ª BARRIUSO RODRIGUEZ
IES Bachiller Sabuco (Albacete)

VIRGILIO GÓMEZ RUBIO
Escuela de Ingenieros Industriales UCLM (Albacete)

M.ª JOSÉ HARO DELICADO
IES Al-Basit
Escuela de Ingeniería Informática UCLM (Albacete)
<mariajose.haro@uclm.es>

FRANCISCO PARREÑO TORRES
Escuela de Ingeniería Informática UCLM (Albacete)

suma+ 72
Artículos
Marzo 2013
pp. 31-36

Tres años del Máster de Formación del Profesorado de Secundaria de Matemáticas

Mireia López, Joan Miralles y Pelegrí Viader

Analizamos algunos aspectos relacionados con la puesta en marcha del Máster de Formación del Profesorado de Secundaria, en la especialidad de matemáticas. De ello se desprende la necesidad de tomar algunas medidas que permitan asegurar la calidad de la formación del futuro profesorado y, por tanto, de los futuros alumnos de Secundaria.

Palabras clave: Legislación, Secundaria, Bachillerato, Investigación didáctica, Innovación didáctica.

Three years of Secondary Education Teacher Training Master's degree

English AbstractWe analyze some aspects related to the implementation of the Secondary Education Teacher Training Master's Degree, majoring in mathematics. It follows the necessity of adopting some measures to ensure the quality of the education of future teachers and, therefore, future secondary students.

Key words: Law, secondary school, high school, educational research, educational innovation.

Después de años de vacilaciones y discusión el Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Escuela Oficiales de Idiomas —en adelante nos referiremos a él como el Máster—, se creó por Decreto publicado en el BOE, Orden ECI3858/2007, de 29 de Diciembre. La sustitución del antiguo CAP por el Máster tenía como objetivo confesado la mejora de la calidad del profesorado en el momento de su acceso a la función docente. Entrados ya en el tercer curso de funcionamiento del mismo, y sin ánimo de exhaustividad, creemos que es ya momento de analizar algunos aspectos de su rendimiento en lo que respecta a la formación del futuro profesorado de Matemáticas de Secundaria.

¿Están suficientemente preparados los alumnos que acceden al Máster?

Algunos de los problemas que se citarán a continuación fueron ya tratados en la reunión que organizó la Comisión de Educación del CEMat en Madrid, en Noviembre del 2010, cuyos resultados fueron publicados en el número 66 de *Suma* (pp. 137-139). Sin embargo, ahora nos basaremos en da-

Artículo recibido en *Suma* en enero de 2012 y aceptado en julio de 2012

tos concretos e intentaremos hacer un primer balance de la puesta en marcha del Máster. Entre otras, el documento plantea las recomendaciones siguientes:

¿Se comprendería que un futuro profesor de Literatura Española desconociera El Quijote? ¿O que el profesor de Física creyera que la Tierra es plana?

Garantizar una formación disciplinar previa suficiente en los aspirantes a la especialidad de Matemáticas del Máster. Un estándar satisfactorio deseable, considerado por varias universidades, contempla tener acreditados 50 créditos de matemáticas de un grado universitario. La presencia de alumnos con bajo nivel en su formación matemática dificulta y puede impedir el logro de las competencias profesionales requeridas por el título.

Vaya por delante que las dificultades que citaremos a continuación no son imputables al Máster ni a su organización; son consecuencia del enfoque global y de la importancia que toda la sociedad, incluida la universidad, los matemáticos profesionales y los docentes de Matemáticas, damos a la Educación en general y a la Educación Matemática en particular.

Como responsables del Máster conjunto de la Universitat Pompeu Fabra y la Universitat Oberta de Catalunya y, en concreto, de su especialidad de Matemáticas, desde el primer momento nos planteamos la necesidad de conocer los orígenes académicos, la motivación y la preparación matemática del alumnado que accede a nuestro Máster. Por dicho motivo, y desde la primera edición, al comenzar el curso nuestros alumnos se someten a una prueba para conocer su preparación en matemáticas. Las preguntas han ido cambiando desde la primera edición, razón por la cual no podemos comparar los resultados del curso 2011-12 con los anteriores.

Centraremos nuestro análisis en los 33 alumnos de matrícula nueva en el curso 2011-12. El cuadro 1 muestra su distribución según los estudios de licenciatura que les han permitido acceder al máster.

Por lo que respecta a los motivos que han llevado a estos alumnos a matricularse en el Máster, no ha sido necesaria ninguna encuesta para comprobar que, en la mayoría de los casos, se trata de personas ya maduras que, como consecuencia de la falta de trabajo, deciden dar un nuevo enfoque a sus vidas en lo que respecta a la forma de ganarse la vida.

Ello no significa, sin embargo, que su motivación sea baja. De hecho, en la mayoría de los casos, se trata de personas realmente deseosas de vivir su nueva profesión con ganas y con un planteamiento alejado del amateurismo. Si bien son conscientes de la necesidad de aprender a enseñar matemáticas, de entrada lo son mucho menos de su falta de preparación matemática suficiente. Éste es uno de los motivos que nos llevaron a preparar la prueba que pasamos a comentar.

Se presenta la prueba sin aviso previo, explicando que carece de motivación evaluadora; únicamente se pretende una aproximación al diagnóstico de su preparación inicial. Como se verá, las preguntas son de tipos distintos: algunas son de cultura matemática, otras son de tipo más bien competencial, otras requieren poco más que conocimientos de matemáticas de Bachillerato. El cuadro 2 (página siguiente) muestra la serie completa de preguntas y el tipo de respuestas que obtuvimos.

En el gráfico 1, más adelante, se observa la proporción de respuestas correctas obtenidas en cada una de las preguntas.

Licenciados / graduados en Matemáticas, Físicas, Estadística o similares	6
Licenciados / graduados en Económicas, ADE, Empresariales o similares	11
Ingenieros industriales, de Telecomunicacions, Licenciados en Informática o similares	10
Otros	6

Cuadro 1. Distribución según título de acceso

A continuación comentamos algunas de las preguntas y sus respuestas, lo que permitirá matizar los números del cuadro 2.

1. ¿Cuál es el resultado de efectuar *(a+b)²*? ¿Por qué?

Si bien 28 personas efectuaron el cálculo correctamente, hubo dos que sumaron los cuadrados. Se trataba de un arquitecto y de un ingeniero. Tres no contestaron. Únicamente una persona respondió geométrica y algebraicamente.

2. Si en una fracción aumentamos en una unidad el numerador y en una unidad el denominador, ¿la fracción aumenta o disminuye? ¿Por qué?

Enunciado	Respuesta correcta	Respuesta incorrecta	No Contestan	Respuesta incompleta
1. ¿Cuál es el resultado de efectuar $(a+b)^2$? ¿Por qué?	28	2	3	0
2. Si en una fracción aumentamos en una unidad el numerador y en una unidad el denominador, ¿la fracción aumenta o disminuye? ¿Por qué?	11	12	2	8
3. Representar gráficamente la función $y=x^2-5x+4$	23	9	0	1
Determinar todas las soluciones de las ecuaciones siguientes: 4. $x^6=1$	2	3	1	27
5. $2^x=x+2$	0	12	13	8
6. $\sin(x)+\cos(x)=1$	5	10	18	0
7. $x^3-3x^2+4x-2=0$	7	8	11	7
Sin calculadora, calcular: 8. $\log_3(81)$	10	11	12	0
9. $\sqrt{2514}$	14	3	16	0
10. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$	0	18	15	0
11. 1+2+3+...+100	5	8	20	0
12. Enunciar el teorema de Tales y poner un ejemplo.	3	5	25	0
13. Calcular el área de un triángulo de lados 5,5 y 6 cm.	19	7	7	0
14. De una unra que contiene 3 bolas entre blancas y negras extraemos una al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea negra?	1	23	6	3
15. Tenemos tres grupos de alumnos. La nota media del primer grupo es 6; la nota media del segundo grupo es 7 y la del tercero es 8. ¿Cuál es la media del total de alumnos?	7	21	5	0
16. Calcular el m.c.d. (420, 350, 42). (máximo común divisor)	10	15	7	1
Situar en el tiempo los siguientes matemáticos (p ej. David hilbert: principios del siglo XX): 17. Pitágoras	10	8	15	0
18. Newton	12	10	11	0
19. Gauss	14	7	12	0
20. Euclides	8	4	21	0
21. Galileo	14	6	13	0
22. ¿Qué es un poliedro regular? ¿Cuáles existen?	4	18	5	6
23. Explicar qué es una función.	5	13	3	12
24. Un producto vale p euros. Nos aplican un recargo del 10% y, posteriormente, nos hacen un 10% de descuento. ¿Cuánto pagamos por el producto?	17	8	8	0
25. Tiramos dos monedas perfectas. ¿Qué es más probable: obtener dos caras u obtener cara y cruz?	12	17	4	0

Cuadro 2. Resultados de la prueba

Esta pregunta obtuvo 12 respuestas incorrectas. Las 8 incompletas corresponden a razonamientos en los que no se distinguió entre fracciones mayores o menores que la unidad. Dos personas no contestaron.

> 3. Representar gráficamente la función $y=x^2-5x+4$

Se obtuvieron 23 respuestas correctas. La mayoría, sin embargo, fueron a partir de tablas de valores y no sobre la base del conocimiento de las funciones polinómicas de segundo grado. En un caso el cuadro de valores sólo llevó a dibujar puntos aislados. Nueve personas dibujaron gráficas más o menos extrañas: se trata de una persona licenciada en Físicas, cinco en Economía/ADE, una en Arquitectura y dos ingenieros.

> 4. Determinar todas las soluciones de la ecuación $x^6 = 1$

Dos personas hallaron las seis raíces complejas de la ecuación. 18 personas hallaron las dos raíces reales, mientras que otras 9 únicamente hallaron la solución x = 1. Otras tres personas dieron respuestas incorrectas, y una no contestó.

...hasta hace tres años las personas que han dado estas respuestas han accedido directamente al profesorado de Secundaria ...

> 8. Sin calculadora, calcular $\sqrt{2514}$

Observemos que la pregunta, al no pedir una aproximación determinada, es de respuesta abierta. Sin embargo, sólo 14 personas respondieron correctamente, con estimaciones más o menos finas, 3 dieron resultados erróneos y 16 no contestaron.

> 15. Tenemos tres grupos de alumnos. La nota media del primer grupo ha sido de 6; la nota media del segundo grupo es de 7, y la del tercero es 8. ¿Cuál es la media del total de alumnos?

21 personas respondieron que la nota media es de 7 y 5 personas no contestaron. Sólo 7 personas constataron la imposibilidad de calcular la nota media. De éstas, dos tienen titulación de Matemáticas o Estadística, dos han estudiado Economía/ADE, una es física, una tiene titulación de Ingeniería y una de Arquitectura.

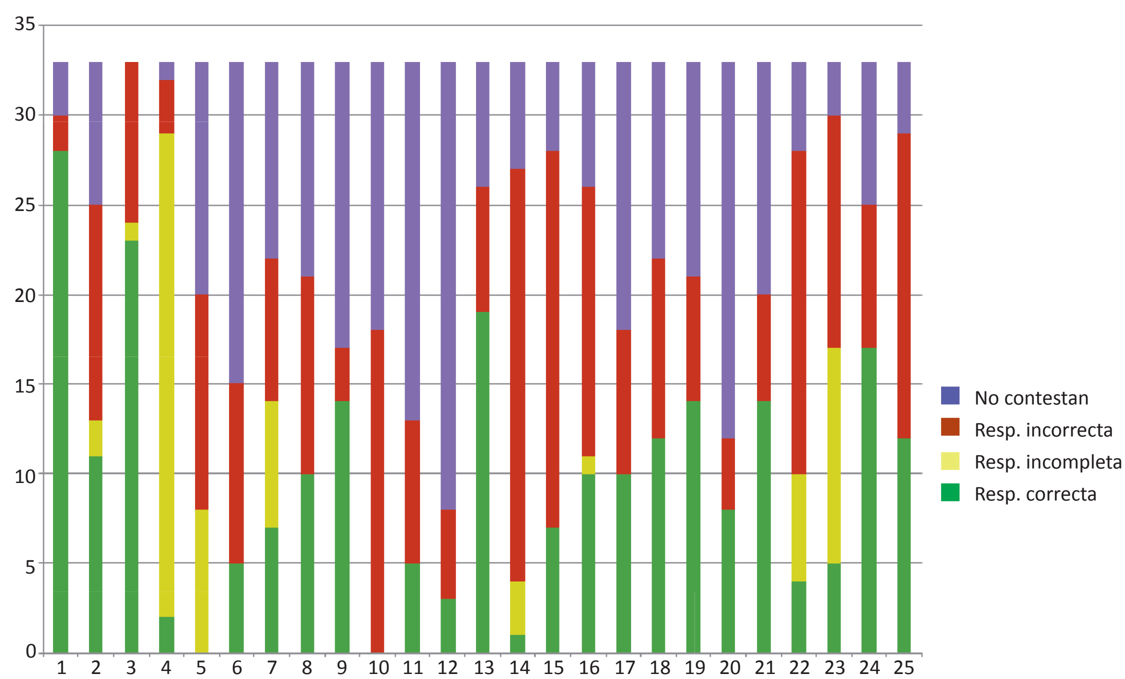


Gráfico 1

22. ¿Qué es un poliedro regular? ¿Cuáles existen?

Hubo 4 respuestas correctas. Dos fueron completamente incorrectas, y otras 16 personas confundieron poliedro con polígono. 6 dieron respuestas ambiguas y 5 no respondieron. Como curiosidad, una de las personas que confundió poliedro con polígono es licenciada en Matemáticas. Las correctas corresponden a dos ingenieros y dos arquitectos.

...con el acceso al Máster de muchos alumnos que cursaron asignaturas de matemáticas hace 20 o 30 años y luego no ejercieron ninguna profesión directamente relacionada con esta materia, se hace insuficiente la propuesta de la CEMat sobre la acreditación de un mínimo de 50 créditos de matemáticas universitarias.

23. Explicar qué es una función

Nuevamente la pregunta es abierta: no se refiere explícitamente a funciones reales de variable real ni a cualquier otra clase particular de las mismas. Así y todo sólo 5 respuestas se pudieron considerar correctas, frente a 13 manifiestamente incorrectas. Hubo 12 respuestas ambiguas y 3 personas no contestaron.

Análisis de la situación

Hemos pretendido mostrar una realidad concreta, sin ánimo de generalizar. Es probable que la experiencia de otras universidades no coincida con la nuestra. Sin embargo, creemos que las causas sociales que llevan a un licenciado a matricularse del máster son comunes. Por tanto, es probable que la composición de los respectivos alumnados también coincida, al menos en parte, con la nuestra.

Antes de llegar a conclusiones precipitadas merece la pena analizar cuidadosamente algunos aspectos que estos resultados sugieren:

Todas las preguntas muestran una gran cantidad de «no contestan». Dado que la actitud manifiesta de los alumnos era de intentar demostrar su preparación, debemos conjeturar que, al menos en algunos casos, esta falta de respuestas se deba al miedo a contestar incorrectamente y, ante esta eventualidad, se opta por no contestar en lugar de razonar.

No sería correcto establecer una relación causa-efecto entre titulaciones y errores; en todas las preguntas podemos encontrar errores cometidos por licenciados en matemáticas, y aciertos entre personas con titulaciones no concordantes.

Qué duda cabe de que los datos muestran un panorama cuanto menos complicado en relación al futuro de la enseñanza de las matemáticas en la Educación Secundaria. ¿Se comprendería que un futuro profesor de Literatura Española desconociera *El Quijote*? ¿O que el profesor de Física creyera que la *Tierra* es plana? Sin embargo, aunque oímos hablar continuamente de la falta de preparación de los alumnos de Secundaria, es difícil encontrar diagnósticos y propuestas de solución a la situación que se describe.

También se hace necesaria una reflexión más allá de la especialidad de Matemáticas: en otras especialidades se observan fenómenos similares, aunque quizá no con la gravedad del caso que nos ocupa. Probablemente, ello es consecuencia del hecho de poder acceder al profesorado con independencia de la especialidad que se haya cursado en el Máster.

Vaya por delante el aspecto más grave, y habitualmente olvidado, que se desprende de los datos anteriores: hasta hace tres años, las personas que han dado estas respuestas han accedido directamente al profesorado de Secundaria en las escuelas concertadas o simplemente con el CAP, en el caso de la enseñanza pública. En otras palabras: en la actualidad, personas con esta preparación están enseñando matemáticas al alumnado de Secundaria. Ahora se nos plantea la dura labor de impartir 60 créditos para convertir a este alumnado en lo más parecido posible a un Profesor de Matemáticas, y creemos que en muchos casos los resultados son exitosos. Sin embargo, parece evidente la necesidad de reclamar de los poderes públicos una intervención de fondo para superar esta situación.

Algunas propuestas para ser estudiadas

Propondremos algunas medidas de aplicación inmediata para paliar la gravedad de la situación:

Limitar el ámbito de competencia de cada especialidad. El Máster de cada especialidad debería habilitar para la docencia del área correspondiente y afines. Como se sugiere en el documento de la CEMat citado al principio:

Establecer como requisito necesario para la admisión a los cuerpos docentes, e imprescindible para ejercer como profesor de matemáticas, haber cursado la especialidad en Matemáticas del Máster.

La situación económica del momento, con el acceso al Máster de muchos alumnos que cursaron asignaturas de matemáticas hace 20 o 30 años y luego no ejercieron ninguna profesión directamente relacionada con esta materia, se hace insuficiente la propuesta de la CEMat sobre la acreditación de un mínimo de 50 créditos de matemáticas universitarias. Por ello consideramos que el acceso al Máster de la especialidad debería exigir la superación de una prueba elaborada en cada distrito universitario. En caso de no superarla, el futuro alumno del Máster debería realizar y superar un curso puente, impartido por las universidades, en el que se ofreciera la formación necesaria, y posteriormente se evaluara, la preparación matemática de los futuros profesores.

El Máster debe continuar siendo un elemento estratégico para la mejora de la preparación matemática de los alumnos de Secundaria. Por tanto, los poderes públicos deben velar para que los recursos que se dedican al mismo sean suficientes y se utilicen para garantizar un nivel de calidad cada vez mayor del profesorado de matemáticas de Secundaria.

Referencias bibliográficas

Boletín Oficial del Estado. Orden ECI3858/2007, de 29 de Diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas. Madrid.

Comisión de Educación del Comité Español de Matemáticas CEMat (2011), «Seminario 2010 de la Comisión de Educación del Comité Español de Matemáticas CEMat», *Suma*, 66, 137-139.

Mireia López Beltrán
Universitat Pompeu Fabra y Universitat Oberta de Catalunya
<mireia.lopez@gmail.com>

Joan Miralles de I. Llobet
Universitat Pompeu Fabra y Universitat Oberta de Catalunya
<joan.miralles@upf.edu>

Pelegrí Viader Canals
Universitat Pompeu Fabra y Universitat Oberta de Catalunya
<pelegri.viader@upf.edu>

suma+ 72
Artículos
Marzo 2013
pp. 37-44

Las Matemáticas y el Bachillerato a lo largo del tiempo

(2.ª parte: LOE hasta la actualidad)

Fernando Tébar Cuesta

En este trabajo se analiza cómo afectan a los estudios del Bachillerato y en concreto a las Matemáticas, las variaciones legislativas desde la LOE hasta la actualidad.

La Constitución de 1978 trajo la democracia y también cambios en el sistema educativo al asumir las CCAA competencias educativas. En concreto, se estudian las enseñanzas mínimas y los currículos de las Matemáticas en el Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Madrid.

Para finalizar, se reflexiona sobre los problemas y el futuro de esta fundamental etapa educativa.

Palabras clave: Bachillerato, Reformas educativas, Enseñanzas mínimas, Currículos, Acceso a la Universidad, Bachillerato Internacional.

Mathematics and High School studies
(2nd part: From LOE to present times)

The aim of this paper is to analyze how the changes in legislation from LOE to the present times have affected High School studies and specially Mathematics studies.

The 1978 Constitution brought democracy and changes into the educational system through the assumption by the CCAA of the educational competences. Specifically, minimum required contents and mathematics curriculums in High School studies of the Madrid Autonomous Region will be analyzed.

Finally, a last observation on the problems and future of this fundamental educational stage is presented.

Key words: High School studies, Educational Reforms, Minimum required contents, Curriculums, University Access, International High School studies.

Terminábamos el artículo anterior (Suma 71) con la estructura del Bachillerato heredada de la LOGSE y las necesarias transformaciones que con el paso del tiempo, por una parte, la asunción de las competencias en materia educativa por las Comunidades Autónomas, por otra, y la consiguiente adaptación de éstas a su realidad territorial, iban a traer nuevas formas de enfrentarnos al hecho educativo.

Definido el nuevo marco de relaciones por la Constitución de 1978, las Comunidades Autónomas han ido aprobando sus estatutos de autonomía y asumiendo las competencias sobre educación, en lo que se refiere a la Comunidad de Madrid, y al amparo de lo previsto en el Estatuto de Autonomía aprobado por la Ley Orgánica 3/1983, se produce el traspaso de funciones y servicios de la Administración del Estado a la Comunidad de Madrid por el Real Decreto 926/1999, de 28 de mayo, siendo a partir de entonces plenamente competente en materia de educación no universitaria, correspondiéndole establecer las normas de desarrollo de las básicas estatales y que serán aplicadas en su ámbito territorial.

La primera manifestación que nos interesa de dicha asunción de competencias es la publicación por la Consejería de Educación de la Orden 3422/2000, de 30 de junio, por la que se dictan instrucciones

Artículo recibido en *Suma* en febrero de 2011 y aceptado en marzo de 2012

para la implantación del bachillerato modelado en la LOGSE, estableciendo también evidentemente, el modo de incorporación de los alumnos procedentes del 3.º de BUP y del COU a 1.º o 2.º de Bachillerato durante los cursos 2000-2001 y 2001-2002 en que se aplicará para 1.º y 2.º respectivamente.

De forma paralela por el Ministerio de Educación se realizan estudios sobre el funcionamiento del Bachillerato en los años transcurridos desde el 1991, actualizándolo desde el punto de vista científico y didáctico por medio del *Real Decreto 3474/2000,* de 29 de diciembre, del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, que modifica los anteriores Real Decreto 1700/91 sobre la estructura y Real Decreto 1178/92 de enseñanzas mínimas.

Respetando siempre la Constitución, la normativa básica estatal, de carácter común, confiere unidad al sistema educativo, por lo que aprobadas por las Cortes las Leyes Orgánicas, corresponde al Gobierno, establecer mediante Reales Decretos la estructura de las modalidades del bachillerato, las materias específicas de cada modalidad, el número de estas materias que se deben cursar, así como fijar las enseñanzas mínimas. Las Administraciones educativas competentes, mediante Decretos establecerán los currículos de las distintas enseñanzas reguladas en la Ley, que incluirán en todo caso las enseñanzas mínimas.

Siguiendo el proceso normativo, una vez que se ha modificado tanto la estructura de la etapa como las enseñanzas mínimas, procede desarrollar para la Comunidad de Madrid el currículo del Bachillerato, haciéndolo mediante el Decreto 47/2002, de 21 de marzo. En él, para cada materia se incluye una introducción con indicaciones metodológicas, los objetivos que deben ser alcanzados por los alumnos, los contenidos para cada curso, y los criterios de evaluación que se han de utilizar como indicadores del grado de consecución de los objetivos. Los contenidos que se establecen en el currículo se introducen de modo flexible, dejando su organización y secuenciación dentro de cada curso a las programaciones que han de hacer los Departamentos didácticos.

El año 2002 fue pródigo en publicación de normativa por la Comunidad de Madrid, pues además del decreto de currículo, se ordenan y organizan las enseñanzas de Bachillerato en régimen nocturno (Orden 2355/02, de 24 de mayo) y a distancia (Orden 2356/2002, de 24 de mayo), y especialmente se regula la organización académica de las enseñanzas del Bachillerato por la Orden 1802/2002, de 23 de abril, que distribuye las materias en los dos cursos de bachillerato, y asigna horario semanal a cada una de ellas. En lo referente a Matemáticas, nada cambia, pues al ser *Matemáticas I* y *Matemáticas II* y estar englobadas en materias de modalidad, cada una de ellas sigue con sus 4 horas semanales.

Y como no podía ser de otra manera, una vez establecidas las bases del Bachillerato, vinieron otra vez años de estabilidad en la etapa. Así, desde la publicación del Decreto y la Orden citados, los cursos siguientes, 2003-04, 04-05, 05-06, 06-07 y 07-08 transcurrieron sin mayores novedades en espera de la publicación de la LOE y el desarrollo posterior de la misma, que se llevó a cabo en el 2008-09 según el calendario establecido en el Real Decreto 806/2006.

LOE

Tras su triunfo en las elecciones de 2004, la primera preocupación del Partido Socialista en materia educativa fue dejar sin efecto el desarrollo de la LOCE y aprobar en las Cortes una nueva ley que sustituyera a la casi *non nata*. En efecto, la primera gran ley que salió del Parlamento fue la *LOE, Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación*, elaborada por la Ministra de Educación y Ciencia María Jesús San Segundo, que en 30 de marzo de 2005 tenía ya elaborado el Anteproyecto de Ley Orgánica de Educación, y que al día siguiente de ser aprobada su ley en las Cortes, fue relevada y sustituida por la profesora de

Universidad Mercedes Cabrera, que se encargará de desarrollar la Ley en todos sus aspectos.

Aprobada la Ley Orgánica y publicado por el Gobierno el Real Decreto 806/2006, por el que se establece el calendario de aplicación de la nueva ordenación del sistema educativo, corresponde la incorporación sucesiva de nueva legislación referida a la ESO y Bachillerato que vaya sustituyendo a la anterior. Así, en su artículo 15 dispone que en el año académico 2008-2009 se implantarán las enseñanzas correspondientes al 1.º de Bachillerato, y el año 2009-2010 las de 2.º.

Según el esquema normativo ya establecido, veamos la secuencia legislativa señalando las etapas como *A, B, C, D, E* y las variaciones habidas en lo referente a las Matemáticas.

A. Aprobada por las Cortes la Ley Orgánica, destaca la estructura que establece para el Bachillerato:

   Artículo 34. Organización.
   1. Las modalidades del bachillerato serán las siguientes:
      a) Artes.
      b) Ciencias y Tecnología.
      c) Humanidades y Ciencias Sociales.

   La distribución de las materias en lo referente a Matemáticas en cada nueva modalidad, queda fijada como se ve en la tabla 1.

B. A continuación corresponde al Gobierno, establecer mediante Reales Decretos la estructura del Bachillerato, las materias específicas de cada modalidad, así como fijar las enseñanzas mínimas. El primero en publicarse con base en la LOE fue el Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. En lo que se refiere a las Matemáticas, las diferencias con el Real Decreto 3474/2000, (desarrollo de la LOGSE), que le precedía, se reflejan en las tablas 2, 3, 4 y 5.

Modalidad /curso	*Primero*	*Segundo*
Ciencias y Tecnología	Matemáticas I	Matemáticas II
Humanidades y Ciencias Sociales	Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I	Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II

Tabla 1

Matemáticas I (RD 3474/2000)	*Matemáticas I* (RD 1467/2007)
Aritmética y algebra	Aritmética y algebra
Geometría	Geometría
Funciones y gráficas	Análisis
Estadística y probabilidad	Estadística y probabilidad

Tabla 2. Contenidos de la materia *Matemáticas I*

Matemáticas II (RD 3474/2000)	*Matemáticas II* (RD 1467/2007)
Análisis	Álgebra lineal
Álgebra lineal	Geometría
Geometría	Análisis

Tabla 3. Contenidos de la materia *Matemáticas II*

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I (RD 3474/00)	*Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I* (RD 1467/2007)
Aritmética y álgebra	Aritmética y álgebra
Funciones y gráficas	Funciones y gráficas
Estadística y probabilidad	Estadística y probabilidad

Tabla 4. Contenidos de la materia *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I*

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II (RD 3474/2000)	*Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II* (RD 1467/2007)
Álgebra	Álgebra
Análisis	Análisis
Estadística y probabilidad	Probabilidad y estadística

Tabla 5. Contenidos de la materia *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II*

C. Las Administraciones educativas con competencias en Educación, mediante Decretos establecerán los currículos, que incluirán en todo caso las enseñanzas mínimas.

Una vez diseñada la estructura del Bachillerato y, concretadas las enseñanzas mínimas, la Comunidad de Madrid publica el currículo por medio de su *Decreto 67/2008,* de 19 de junio, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el *currículo* del Bachillerato. En nuestro tema, el currículo de las Matemáticas, respecto al anterior Decreto 47/2002, varía en lo que se puede observar en las tablas de la 6 a la 9.

En Matemáticas I no hay variaciones significativas entre un Decreto y otro.

Matemáticas I (D 47/2000)	*Matemáticas I* (D 67/2008)
Aritmética y algebra	Aritmética y algebra
Geometría	Geometría
Funciones y gráficas	Análisis
Estadística y probabilidad	Estadística y probabilidad

Tabla 6. Contenidos de la materia *Matemáticas I*

Matemáticas II (D 47/2000)	*Matemáticas II* (D 67/2008)
Análisis	Álgebra lineal
Álgebra lineal	Geometría
Geometría	Análisis

Tabla 7. Contenidos de la materia *Matemáticas II*

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I (D 47/2000)	*Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I* (D 67/2008)
Aritmética y álgebra	Aritmética y álgebra
Funciones y gráficas	Funciones y gráficas
Estadística y probabilidad	Estadística y probabilidad

Tabla 8. Contenidos de la materia *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I*

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II (D 47/2002)	*Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II* (D 67/2008)
Álgebra	Álgebra
Análisis	Análisis
Estadística y probabilidad	Probabilidad y estadística

Tabla 9. Contenidos de la materia *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II*

En Matemáticas II, aparte del cambio de orden en la exposición de los contenidos, las variaciones más destacadas se pueden resumir en:

Álgebra lineal: Se ha perdido la referencia a la discusión y resolución de un sistema lineal por el método de Gauss que se hacía en el Decreto 47.

Geometría: Aunque se continúa con el estudio de la Ecuación de la superficie esférica, se pierde la introducción al conocimiento de algunas curvas y superficies comunes.

Análisis: Se abandona la referencia al Teorema fundamental del cálculo integral, aunque no se entiende que no se siga explicando en los programas, y se añade la integral definida como suma de elementos diferenciales: Aplicaciones al cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución y a la física.

En los dos primeros bloques de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I, no hay apenas variación, y en el tercero, aparte de la permutación en el enunciado del epígrafe, los contenidos se mantienen prácticamente inalterados.

Tampoco en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II hay variación en los dos primeros bloques, en el tercero aparte el orden en el epígrafe, destaca la importancia que específicamente se dá al Contraste de hipótesis para la proporción de una distribución binomial y para la media o diferencias de medias de distribuciones normales con desviación típica conocida.

D. Procede por último, que se regule por Órdenes, la organización académica de las enseñanzas del Bachillerato, antes de su concreción por los centros en sus programaciones. La *Orden 3347/2008,* de la Consejería de Educación, por la que se regula la organización académica de las enseñanzas del Bachillerato, viene a sustituir a la 1802/02 que le sirvió de base. Muy interesantes y utilísimas en cuanto a la aplicación directa en los centros y la facilitación de la adaptación entre una normativa y otra.

E. No podemos olvidarnos de la ordenación que la Comunidad de Madrid realiza para dar posibilidad de continuar estudios a las personas adultas que por estar trabajando, tener obligaciones familiares u otras causas, les permiten proseguir sus estudios en régimen Nocturno o a Distancia. La *Orden 3894/2008,* de 31 de julio, por la que se ordenan y organizan para las personas adultas las enseñanzas de Bachillerato en los regímenes nocturno y a distancia en la Comunidad de Madrid, regula a partir de entonces ambos regímenes.

La estructura fundamental del Bachillerato expresada en los apartados anteriores A, B, C, D, E no ha cambiado hasta la actualidad, lo cual no implica que sea un Bachillerato estático, sino que se va adaptando continuamente, en sus currículos, en sus contenidos[1], con nuevas Optativas que incorporan nuevos saberes y los nuevos avances de la ciencia, disposiciones para adaptarlo a las Pruebas de acceso a la Universidad, nuevos Bachilleratos en Institutos bilingües (aunque sin repercusión en la materia de Matemáticas), Bachilleratos en Institutos de Innovación Tecnológica[2], doble titulación de Bachiller y de Baccalauréat[3], etc.

Nos encontramos finalmente en una época de estabilidad normativa en lo referente al Bachillerato, algo que viene siendo demandado por todos los sectores de la comunidad educativa, en especial por los profesores y los expertos en educación.

Como visión global podríamos decir que hoy en día, y con las deficiencias lógicas que nos van mostrando los expertos y la realidad diaria de los estudios, podemos concluir que nuestro sistema educativo es homologable con los países de la OCDE y, pasado un tiempo desde nuestra incorporación a la Comunidad Europea, seguir afirmando con Escolano[4] que «aún dentro de las tendencias estructurales hacia la normalización, se mantengan también las diferencias, que son expresión por otra parte de la riqueza y el pluralismo que caracterizan a la cultura del Viejo Continente».

Sombras, luces y dos temas pendientes

Una gran nube negra se cierne sobre el Bachillerato, y es la modificación de las fechas de la *PAU* para facilitar a la enseñanza universitaria su adaptación al Espacio Europeo de Educación Superior (conocido popularmente como Bolonia), la cual se haría a costa de unas enseñanzas independientes de la Universidad, como son las Enseñanzas Medias, con autonomía de las anteriores, con independencia de las mismas, con base y soporte legal en una Ley Orgánica, y con enseñanzas definidas en las Leyes como Básicas.

Como mínimo hay dos implicaciones, en primer lugar, la situación en que va a quedar una etapa formativa clásica y fundamental en la educación de nuestros alumnos, pues no es un problema de sistema educativo, es un problema de una parte del sistema, que autónomamente se ha de adaptar, pero no a costa de otros que son tan autónomos como ellos. Olvidamos fácilmente la LOE, que ya en su preámbulo establece como uno de sus principios fundamentales «la exigencia de proporcionar una educación de calidad a todos los ciudadanos de ambos sexos, en todos los niveles del sistema educativo.», y ¿cómo vamos a conseguirlo si quitamos horas y por lo tanto contenidos?

Una gran nube negra se cierne sobre el Bachillerato, y es la modificación de las fechas de la PAU

La LOE establece en su artículo 32 los principios generales del Bachillerato, describiendo que tiene como finalidad proporcionar a los alumnos formación, madurez intelectual y humana, conocimientos y habilidades que les permitan desarrollar funciones sociales e incorporarse a la vida activa con responsabilidad y competencia. Es claro que además de capacitar a los alumnos para acceder a la educación superior, el Bachillerato tiene un fin en sí mismo, el expresado anteriormente de formación terminal de los alumnos, el de preparación como individuos libres y responsables para la vida activa.

En ningún momento se habla de adaptación a las normas universitarias, sino que se establecen sus fines, sus principios y sus objetivos.

Y en segundo lugar, que se necesitará adaptar legislación, currículos, etc, bien entre los dos cursos de Bachillerato redistribuyendo los contenidos, bien eliminando parte de los mismos (convirtiendo un curso en cursillo), o bien reavivando la petición de un tercer curso de Bachillerato como así hacen nuestros vecinos europeos Alemania, Francia, Polonia, Portugal, Italia, entre otros[5], y que tan extendida está entre los profesionales que conocen y viven el Bachillerato, que saben que con esfuerzo y planificación educativa se ha conseguido la seriedad de su tradición y su prestigio, y que naturalmente, están preocupados por su naturaleza, seriedad y pervivencia.

el Bachillerato tiene un fin en sí mismo [...], el de preparación como individuos libres y responsables para la vida activa.

Pongamos la vista en el futuro para hablar en un mundo cada vez más globalizado y para nosotros más integrado en Europa, del Bachillerato Internacional. La Organización del Bachillerato Internacional[6] es una fundación educativa internacional sin ánimo de lucro, con sede en Suiza. El *Bachillerato Internacional* va dirigido a alumnos que han terminado la ESO, tienen entre 16 y 19 años y no son universitarios. Se puede cursar tanto en centros privados como públicos y con una duración de dos años, prepara a los alumnos para la universidad, y la obtención del Diploma da acceso a la universidad sin realizar el examen de selectividad.

Los estudiantes cursan seis asignaturas que deben elegir del Currículo del Programa del Diploma, cada asignatura debe pertenecer a un grupo, siendo éstos los de Lengua, Segunda Lengua, Individuos y Sociedades, Ciencias Experimentales, Matemáticas e Informática, y Artes. Las asignaturas se diferencian en Nivel Medio (150 horas lectivas) y Nivel Superior (240 horas lectivas), debiendo elegir el alumno tres de cada nivel, para conseguir un equilibrio entre la universalidad y por tanto la generalidad, y la especialización y por tanto la profundidad.

El grupo de Matemáticas e Informática incluye cinco asignaturas:

— *Estudios Matemáticos (NM)*
— *Matemáticas (NM)*
— *Matemáticas (NS),*
— *Ampliación de Matemáticas (NM)*
— *Informática*

Para hacernos una idea de las materias, analicemos las *Matemáticas NM*, que van dirigidas a alumnos con conocimientos de los conceptos matemáticos fundamentales y con las destrezas necesarias para aplicar las técnicas matemáticas sencillas, pues los alumnos que deseen estudiar las Matemáticas con más profundidad deberán elegir Matemáticas NS (tabla 10).

Como vemos, ni la distribución de las unidades, ni los contenidos, tienen una correspondencia con nuestro Currículo,

Matemáticas NM (Bto. Int.)	*Matemáticas I* (D 67/2008)
Álgebra	Aritmética y algebra
Funciones y ecuaciones	Geometría
Funciones circulares y trigonometría	Análisis
Matrices	Estadística y probabilidad
Vectores	
Estadística y probabilidad	
Análisis	

Tabla 10. Comparativa entre Matemáticas NM y Matemáticas I de 1.º de Bachillerato

lo cual no es bueno ni malo, sino cuestión de diseño del mismo, visión global de todo el sistema y definición clara de los objetivos.

se le sigue dando la razón al ministro de Instrucción Pública de la II República don Fernando de los Ríos cuando expresaba que: «La segunda enseñanza decidirá la cultura del país»,

Y para finalizar, dos temas pendientes y no resueltos desde la Ley 70. En primer lugar, el referido al *carácter del Bachillerato,* pues desde el diseño de nuestros primeros sistemas educativos, estuvieron claros los niveles inicial y final, el de la enseñanza primaria y el de la enseñanza superior. Sin embargo, la enseñanza secundaria y/o el bachillerato ha sido el nivel educativo más problemático. Así lo entiende M. Puelles[7] al expresar que «a mi parecer, ello es así porque no resulta fácil resolver los tres grandes problemas que este nivel educativo entraña: el de su carácter o naturaleza, el de su destinatario y el de su contenido «curricular». Además, se le sigue dando la razón al ministro de Instrucción Pública de la II República don Fernando de los Ríos cuando expresaba que: «La segunda enseñanza decidirá la cultura del país», y es que conforme se extiende la universalidad y la escolaridad obligatoria, la formación educativa de la población se extiende progresivamente hacia arriba, expresando el nivel que la mayoría va alcanzando.

En segundo lugar, la necesidad de una *prueba estatal externa* al finalizar el Bachillerato. No pongamos nombre a dicha prueba para no ser confundidos con ninguna ley, pero sí reconozcamos la solidez de una prueba que fue constante en nuestro sistema educativo, y que sigue siendo obligatoria en los grandes países de Europa, dejando la situación de nuestro país como una isla atípica. Por otra parte, dada la estructura actual del sistema educativo con competencias en 17 Comunidades Autónomas, la existencia de una prueba final que culmine el título de Bachiller se considera ineludible, y ello sin olvidar la distinta tipología y variedad de centros que imparten los cursos de Bachillerato, razón de más para establecer con carácter universal dicha prueba externa, que garantizaría la igualdad en la obtención del título y lo revalorizaría.

Dicha prueba no debe ser confundida con las PAU, pues una iría dirigida a la culminación de 18 años de educación y a la obtención de un título de prestigio como es el de Bachillerato, y que por tanto correspondería su elaboración, aplicación y corrección a las Administraciones de Secundaria. Las otras son las actuales que pone la Universidad para acceso a sus Facultades y Escuelas Técnicas y que se diseñan y aplican por los profesores de su nivel.

Referencias bibliográficas

CAPITÁN DÍAZ, A. (2000), *La educación en la España contemporánea*, Ariel, Barcelona.

EMBID IRUJO, A. (1983), *Las libertades en la enseñanza*, Tecnos, Madrid.

ESCAMILLA, A., y A. R. LAGARES (2006), *La LOE: Perspectiva pedagógica e histórica*, Graó, Barcelon.

ESCOLANO BENITO, A. (2002), *La educación en la España contemporánea,* Biblioteca Nueva, Madrid.

FERNÁNDEZ ORDÓÑEZ, F. (1980), *La España necesaria*, Taurus, Madrid.

GAMIR, L. (1986), *Política económica en España*, Alianza, Madrid.

Gómez F. (1988), «Educación secundaria no obligatoria», *Bordón. Revista de Pedagogía,* vol 40, n.º 3, 409-418

GARCÍA GARRIDO, J. L. (1984), *Sistemas educativos de hoy*, Dykinson, Madrid.

INSPECCIÓN GENERAL DE BACHILLERATO (1981, 1982, 1984), *Informe sobre el funcionamiento de los Institutos de Bachillerato,* MEC, Madrid.

Ley Orgánica 8/1985, de 3 de julio, reguladora del Derecho a la Educación (BOE del 4).

Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo (BOE del 4).

Ley Orgánica 10/2002, de 23 de diciembre, de Calidad de la Educación (BOE el 24).

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (BOE del 4).

Mandelbrot, B.(1993), *Los objetos fractales: forma, azar y dimensión,* Tusquets, Barcelona.

Mandelbrot, B. (1997), *La geometría fractal de la Naturaleza,* Tusquets, Barcelona.

Maravall, J. M.ª (1984), *La reforma de la enseñanza,* Laia, Barcelona.

Puelles Benítez, M. de, «Ocho leyes orgánicas de educación en 25 años», *Cuadernos de Pedagogía,* n.º 348, 12-14.

— *Política y Educación en la España Contemporánea,* UNED.

— (2002), *Educación e ideología en la España contemporánea*, Tecnos, Madrid.

Viñao Frago, A. (1992), «Del bachillerato a la Enseñanza Secundaria (1938-1990)», *Revista Española de pedagogía,* año L, n.° 192, 322-339.

— (2004), «La herencia del PP y los retos del nuevo gobierno», *Cuadeernos de pedagogía,* n.° 336, 83-86.

Fernando Tébar Cuesta
Inspector de Educación
Dirección de Área Territorial de Madrid Este
Servicio de Inspección Educativa
<fernando.tebar@madrid.org>

1 Estudio de cuestiones novedosas y actuales como los *fractales*.

2 Orden 1275/2010, de 8 de marzo. La enseñanza digital utiliza TIC como recurso didáctico preferente, impartiéndose con carácter obligatorio la materia Matemáticas, y en al menos otras dos materias de ESO.

3 Real Decreto 102/2010, de 5 de febrero, por el que se regula la ordenación de las enseñanzas acogidas al acuerde entre el Gobierno de España y el Gobierno de Francia relativo a la doble titulación de Bachiller y de Baccalauréat en centros docentes españoles.

4 Agustín Escolano Benito, *La educación en la España contemporánea* Biblioteca Nueva, p. 283.

5 *Cifras clave de la educación en Europa*, Eurydice.

6 http://www.ibo.org

7 Manuel de Puelles Benítez, «El Bachillerato como problema: antecedentes y situación actual», *Revista Cuenta y Razón del pensamiento actual,* n.º 27.

suma+ 72
Artículos
Marzo 2013
pp. 45-49

Ludymat: un intento de motivación por las matemáticas mediante el juego

Eugenio M. Fedriani Martel[1],
Antonio Á. Fernández,
Aurelio D. Jiménez y Manuel Ojeda

Uno de los aspectos clave para lograr el aprendizaje efectivo de las matemáticas es la motivación de los estudiantes y la mejor forma de conectar con su interés es utilizar recursos didácticos como: tecnologías de la información y la comunicación, aplicaciones de la materia presentada, propuestas que supongan un reto o desafío, sorpresas en los momentos más adecuados y el juego. Por eso, el objetivo principal de este artículo es introducir un juego que ha demostrado ser útil en el aula de matemáticas, probablemente porque sirve para que los alumnos relacionen la asignatura con algo divertido.

Palabras clave: innovación didáctica, aritmética, funciones, destrezas, secundaria.

Ludymat: an Attempt for Motivating the Study of Mathematics trough a Game

One of the major aspects in the learning of mathematics is the students' motivation, and the best ways to connect with the students' interests include ideas such as: communication technologies, usefulness of applications, challenging proposals, surprises in proper moments, and games. Hence, the main aim of this paper is the introduction of a specific game which has shown to be useful in the mathematics classroom since it provides a relation between subject and fun.

Key words: innovation, arithmetic, functions, skills, secondary education.

En el octavo Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME8), celebrado en Sevilla en julio de 1996, se presentó un juego ideado por los profesores Eugenio Fedriani Martín, Aurelio Jiménez Alarcón y Eugenio M. Fedriani Martel. Denominado por sus autores como *LUDyMAT*, el juego fue experimentado en el *I.E.S. Hermanos Machado de Montequinto* (en el municipio de Dos Hermanas, Sevilla), antes y después del ICME8, contando también con la colaboración de los profesores Antonio Fernández Portero y Manuel Ojeda Vizcaíno. Además de ser muy favorablemente recibido por los estudiantes que lo probaron, los docentes comprobaron en su día una mejora sensible por parte de sus alumnos en las competencias de cálculo mental, razonamiento lógico y expresión matemática, entre otras. Estas características provocaron que numerosos participantes del ICME8 solicitaran a los autores que les hicieran llegar por algún medio los recursos necesarios para utilizar el *LUDyMAT* en el aula.

En primera instancia, los autores trataron de distribuir el juego a través de una conocida marca de juegos didácticos, pero su estrategia corporativa en aquel momento no acompañó a los intereses altruistas de los autores. La Sociedad Andaluza de

Artículo recibido en *Suma* en abril de 2012 y aceptado en enero de 2013

Educación Matemática «Thales», en vista del interés suscitado por este trabajo durante el Congreso, sugirió a los autores su publicación a través de la revista Suma, incluyendo las bases del juego y una colección de las tarjetas que permiten su práctica.

...solucionar un ejercicio correctamente significa utilizar todos los elementos y operaciones aportados (una sola vez cada uno de ellos) y obtener el resultado solicitado.

Sin embargo, una serie de desafortunados acontecimientos, incluyendo el fallecimiento de Eugenio Fedriani Marfin el 4 de marzo de 1997, impidió que esta propuesta didáctica se difundiese. Ahora, 15 años después, este artículo pretende servir de homenaje a aquel brillante docente, cuyas originales ideas didácticas siguen vivas en el desempeño de sus compañeros y de muchos de sus alumnos, hoy profesores de Matemáticas.

Introducción

En general, el juego puede favorecer el desarrollo intelectual de los niños y adolescentes, así que es un elemento digno de tener en cuenta en el proceso de aprendizaje de una materia que suele ser criticada en diversos ámbitos por su dificultad y aridez. Consecuentemente, numerosos docentes han procurado introducir la componente lúdica en el aula; un ejemplo puede encontrarse en Corbalán (1994), mientras que en Coronilla et al. (2005) se puede consultar una breve explicación acerca de la importancia histórica del juego en la Matemática.

Numerosas son las virtudes del juego que pueden servir para potenciar la enseñanza en general. Por ejemplo, como herramienta para la motivación, para enlazar diversión y aprendizaje, para reforzar lo aprendido, para facilitar la evaluación, etc. Obviamente, esta herramienta también tiene sus riesgos; además, no existen recetas universalmente válidas para enseñar matemáticas, pero lo que sí queda claro para los entendidos es que resulta conveniente tratar de estimular continuamente y de una forma variada al alumno para mejorar su interés y su rendimiento (NCTM, 2003).

Como decíamos, no hay una única forma de estimular a los estudiantes; ni siquiera es posible establecer un orden idóneo a priori de aplicación de las metodologías didácticas. Sin embargo, sí conviene que el docente tenga suficientes recursos para adecuarse a la evolución del aprendizaje de sus alumnos; por muy atractivo que resulte un recurso, no es positivo abusar de él (Grupo Alquerque de Sevilla, 2011).

La utilidad de los juegos no se limita a las clases de matemáticas en los diferentes niveles educativos. Hay incluso juegos que pueden ser utilizados para enseñar a «pensar» de una forma lógica a un ordenador (Coronilla et al., 2005) y otros que pueden servir para prevenir el envejecimiento cerebral en adultos y ancianos.

En lo que respecta a la docencia de las Matemáticas, nos vamos a fijar especialmente en las dificultades en el aprendizaje asociadas a la aritmética básica (en el caso de los niños) y a la teoría de funciones reales de variable real (en el caso de los adolescentes). Es relativamente habitual el uso de juegos para potenciar el aprendizaje de la Aritmética en Primaria, con diferentes niveles de profundidad y de pretensión. Al mismo tiempo, la idea de trabajar el concepto de función mediante juegos es algo que resulta también natural.

Así, por ejemplo, el Grupo Alquerque de Sevilla (2011) propuso un juego de cartas para relacionar funciones y gráficas. En el caso que aquí se presenta, como se verá, no se tratará de comprender el concepto de gráfica, sino el de la propia definición de función real de variable real y el de valor numérico del álgebra de funciones.

Como se explicará enseguida, *LUDyMAT* es un juego que pretende servir como instrumento para la adquisición de destrezas de cálculo de estudiantes de diversos niveles de conocimiento. Dicho juego se puede practicar en varios grados de dificultad y en tres modalidades fundamentales:

A) «A número de aciertos», sin límite de tiempo.
B) «A tiempo total», con un cronómetro.
C) «A tiempo de penalizaciones», con un reloj de ajedrez.

Los primeros niveles del juego se refieren al cálculo con números y procuran un mayor dominio del empleo de las operaciones aritméticas: suma (en las tarjetas, +), diferencia (–), multiplicación (X), división (÷), potenciación (↑), radicación (√) y logaritmación (*log*) con números naturales, enteros, racionales y reales. Los últimos niveles se refieren al cálculo con funciones y utilizan el cálculo de valores numéricos, la suma (+), diferencia (–), producto (X), cociente (÷), composición de funciones (o), la función inversa (*inv*) y la derivación (*d*/*dx*). En general, la introducción de operaciones se hace de forma paulatina al pasar de un nivel a otro, al tiempo que se incrementa la dificultad de los ejercicios que se proponen a los jugadores. Téngase en cuenta que se utilizan los signos habituales para operar números y funciones, aunque estos pudieran conllevar alguna confusión o dificultad conceptual añadida que, en cualquier caso, los estudiantes deben afrontar en algún momento de su formación matemática básica.

Por medio del presente artículo invitamos a todos los lectores a utilizar este sencillo e interesante juego en sus diferentes modalidades, en el aula o fuera de ella; sus dificultades o dudas, si surgieran, podrían ser planteadas a los autores por correo electrónico. El resto de este documento consta de tres secciones: en la siguiente, se explican las instrucciones más elementales para jugar; posteriormente, se incluyen algunas ideas sobre su utilización en el aula; y finalmente, se recogen algunas conclusiones.

Bases del juego

LUDyMAT es un juego para ser practicado por dos contendientes (individuos o equipos de dos a cinco miembros) sin límites de edad, aunque en cada nivel se requiere el conocimiento de determinados conceptos matemáticos.

Cada enfrentamiento será presidido por un árbitro o moderador que propondrá simultáneamente el mismo ejercicio a ambos equipos participantes. En cada ejercicio (impreso en una tarjeta o carta) se solicita a los participantes que encuentren el orden correcto en el que los elementos y las operaciones que aparecen en la tarjeta producirán el resultado esperado, que también aparece en la tarjeta. Es decir, solucionar un ejercicio correctamente significa utilizar todos los elementos y operaciones aportados (una sola vez cada uno de ellos) y obtener el resultado solicitado. El árbitro conocerá y validará las soluciones de cada equipo a la prueba propuesta.

Como ya se ha dicho, el juego se puede practicar en tres modalidades, que se describen brevemente:

A) El árbitro toma del mazo de cartas un número impar de ellas (del nivel elegido) y va proponiendo ejercicios hasta que se acaben las cartas. Quien resuelve primero y correctamente un ejercicio se queda con la correspondiente carta y el equipo que tiene más cartas al final es el vencedor.

B) Se acuerda de antemano el tiempo que va a durar un enfrentamiento y se coloca sobre la mesa cierto número de cartas. Cada equipo va resolviendo ejercicios cuyas soluciones se comprueban al terminar el plazo acordado. Gana el equipo que tiene mayor número de ejercicios bien resueltos. En esta modalidad no es imprescindible la existencia de un moderador.

C) Se utiliza un reloj de doble esfera (reloj de ajedrez) o dos cronómetros de cuenta atrás, para medir las diferencias entre los tiempos que utiliza un equipo y otro en resolver los ejercicios, de la manera siguiente. El árbitro propone a los dos equipos simultáneamente un ejercicio; una vez resuelto por uno de ellos y aceptada por aquél la solución, un miembro del este equipo pondrá en marcha el reloj del equipo oponente. Éste detendrá su reloj cuando consiga resolver también la prueba. Si la solución no es correcta, el moderador le dará otra oportunidad poniendo previamente en marcha su reloj. Resuelto un ejercicio por ambos contendientes, el árbitro propondrá otro. El encuentro se acabará cuando uno de los equipos agote el tiempo que tenía asignado, por ejemplo, 10 minutos.

En los casos que los docentes estimaran apropiados, el uso de calculadoras u ordenadores también sería viable para la resolución de las cuestiones de mayor dificultad.

Orientaciones didácticas

Puesto que *LUDyMAT*, como se indicó en la presentación, fue concebido con una clara finalidad didáctica, para hacer más provechosa su utilización queremos hacer las siguientes puntualizaciones y recomendaciones:

La modalidad B puede usarse para varios equipos a la vez, o incluso individualmente por todos los alumnos de un aula. En tal caso, recomendamos un proyector de pantalla (cañón) para reemplazar el proyector de opacos que los autores recomendaban en 1997 para presentar simultáneamente cuatro o seis cartas.

En la modalidad C ninguno de los equipos ha perdido el encuentro hasta la finalización del mismo, puesto que siempre es posible que el contrario agote su tiempo en el ejercicio siguiente. Este hecho hace especialmente atractiva esta modalidad, pero presenta la dificultad de que no se sabe a priori la duración total del encuentro. Nos parece adecuada para organizar competiciones de *LUDyMAT* como actividad extraescolar, por ejemplo, en jornadas culturales. En ese caso, sería conveniente haber iniciado a los alumnos en la práctica del juego, al menos, durante una o dos horas antes de la competición.

Después de utilizar el juego durante algún tiempo, se puede invitar a los participantes a fabricar sus propias tarjetas que, unidas a las de otro equipo, pueden dar lugar a un interesante enfrentamiento entre ellos.

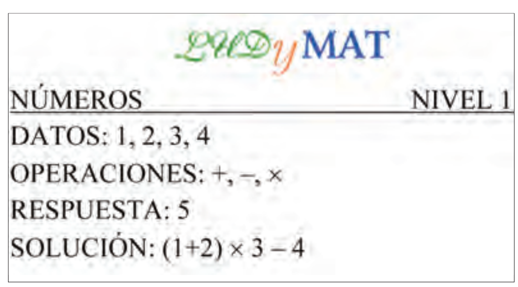
Las tarjetas de *LUDyMAT* pueden ser utilizadas por el profesorado como un instrumento de evaluación, siguiendo, por ejemplo, la sugerencia anteriormente señalada para la modalidad B. Indicando la «solución» y pidiendo la «respuesta», podemos disponer de una colección de ejercicios de «objetivos mínimos».

Generalmente, los jugadores solo utilizarán papel y bolígrafo para hacer sus anotaciones y ensayos; sin embargo, como se comentó anteriormente, puede autorizarse, en determinados encuentros, el uso de calculadoras científicas u ordenadores. En la modalidad C, por ejemplo, cabe la posibilidad de usar una sola calculadora que será empleada, alternativamente en cada ejercicio, por uno u otro equipo. En este caso, se sortearía qué equipo podría utilizar la calculadora en el primer ejercicio.

A continuación se recogen un par de ejemplos de tarjetas. Aunque, por supuesto, cada docente puede diseñar las suyas propias. Algunos modelos más pueden descargarse en formato electrónico de:

http://revistasuma.es/IMG/pdf/72/ludymat_bases_tarjetas_soluciones.pdf

Dichas tarjetas están preparadas para su impresión a doble cara, con lo que las soluciones a cada ejercicio propuesto en el anverso estarían en el reverso de la tarjeta (también denominada carta o ficha).


LUDyMAT

NÚMEROS NIVEL 1

DATOS: 1, 2, 3, 4

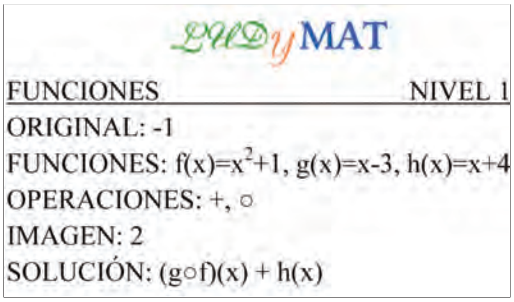
OPERACIONES: +, –, ×

RESPUESTA: 5

SOLUCIÓN: (1+2) × 3 – 4

Una ficha de *LUDyMAT* sobre números

El ejemplo anterior pertenece al nivel más sencillo de la categoría de números; el siguiente, es del nivel más sencillo de la categoría de funciones.


LUDyMAT

FUNCIONES NIVEL 1

ORIGINAL: -1

FUNCIONES: $f(x)=x^2+1$, $g(x)=x-3$, $h(x)=x+4$

OPERACIONES: +, $\circ$

IMAGEN: 2

SOLUCIÓN: $(g\circ f)(x) + h(x)$

Una ficha de *LUDyMAT* sobre funciones

Conclusiones

El sencillo juego que aquí se presenta está dirigido a personas de edades variadas (también los adultos), pero fue inicialmente pensado para niños y adolescentes: en el caso de los primeros, cuando estuvieran adquiriendo soltura en el manejo de las operaciones aritméticas básicas, algo con indudables beneficios formativos (aunque sea discutido qué nivel de destreza es necesario o conveniente alcanzar en cada etapa); en los segundos, cuando intentan entender las operaciones entre funciones y el concepto de valor numérico.

Hay quienes piensan que las operaciones aritméticas y el álgebra de funciones no son de suficiente interés pedagógico, pero hay varias cuestiones que subyacen en los procesos mentales responsables del éxito en las actividades que se proponen; y a veces es conveniente ser conscientes del tipo de competencias que se están potenciando. Pongamos un ejemplo: Molina (2010) basa su investigación en las dificultades de los alumnos de Primaria y Secundaria en el aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra; posteriormente, defiende el enfoque estructural frente al enfoque procedimental. Precisamente, el *LUDyMAT* se fundamenta en dicho enfoque estructural y lo favorece.

Además de lo comentado anteriormente, en este artículo se ofrece una herramienta lúdica para aproximar al alumno a las Matemáticas, lo cual puede tener valor en sí mismo. Simultáneamente, se trata de aprovechar de forma positiva la competitividad que los alumnos poseen de manera natural. Por si fuera poco, con el *LUDyMAT* es posible demostrarles que la aritmética y el razonamiento matemático pueden ser hasta divertidos. Al mismo tiempo, se les hace ver la importancia de dominar las reglas básicas de la notación matemática y se les ayuda a darse cuenta de que la práctica también sirve para aprender, como ocurre en cualquier juego educativo.

Referencias bibliográficas

Corbalán, F. (1994), *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*, Síntesis, Madrid.

Coronilla, S., E. M. Fedriani y J. Trujillo (2005), «Posibilidades didácticas del juego de las tres en raya», *Epsilon*, 63, vol. 21(3), 29-338.

Grupo Alquerque de Sevilla (2011), «Baraja de funciones», *Suma*, 68, 57-60.

Molina, M. (2010), «Una visión estructural del trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas», *Suma*, 65, 7-15.

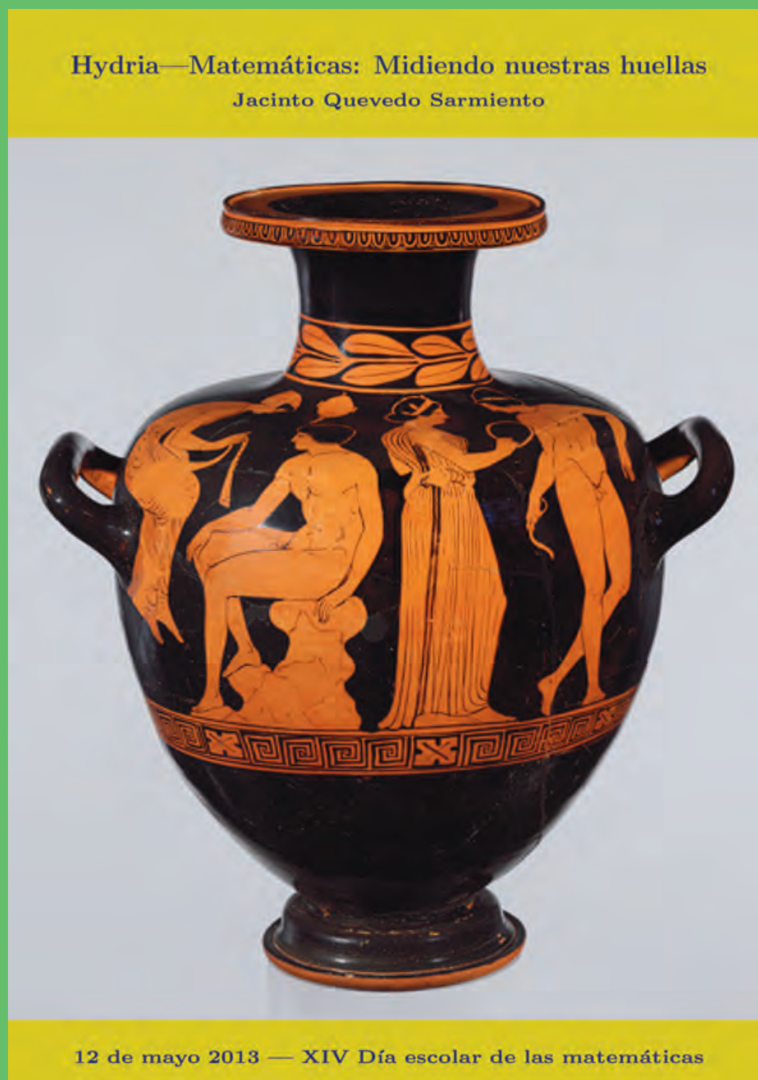
National Council of Teachers of Mathematics (2003), *Principios y estándares para la Educación Matemática*, SAEM Thales, Sevilla.

Eugenio M. Fedriani Martel
Universidad Pablo de Olavide (Sevilla)
<efedmar@upo.es>

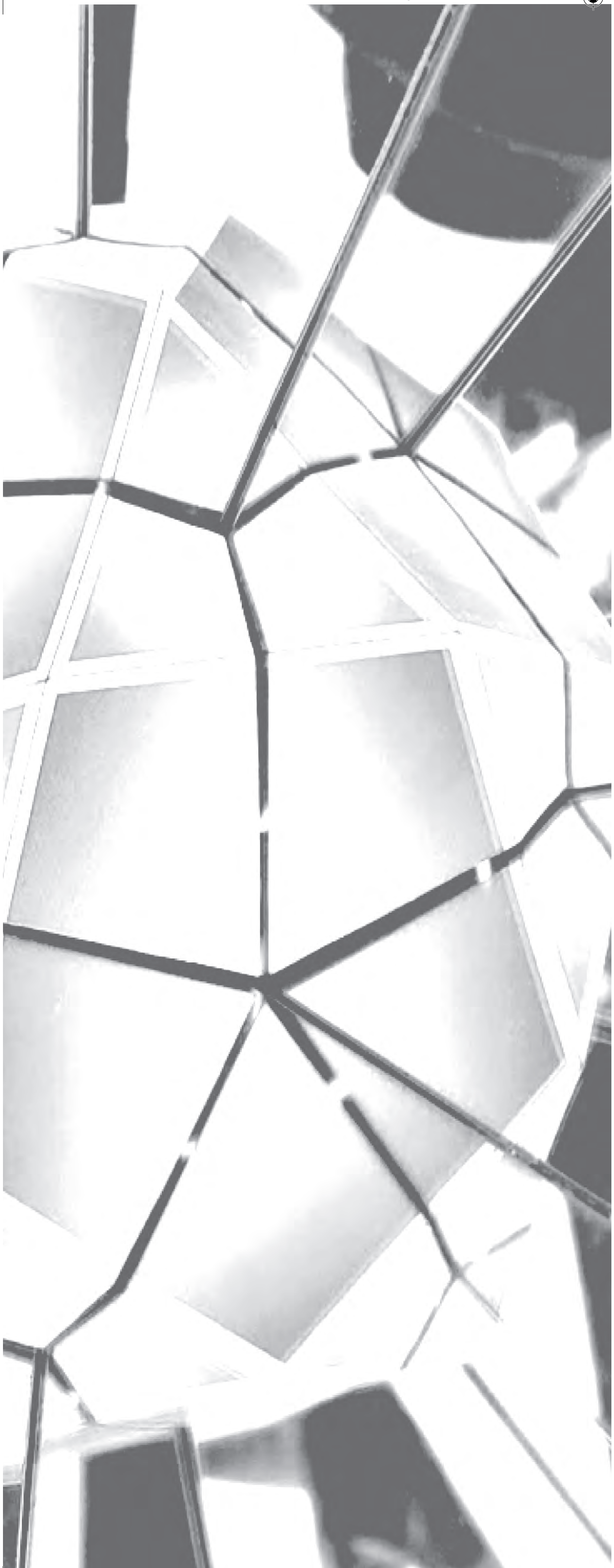
Antonio Á. Fernández Portero
Aurelio D. Jiménez Alarcón
Manuel Ojeda Vizcaíno
IES Hermanos Machado (Sevilla)

1 Eugenio M. Fedriani Martín es hijo de Eugenio Fedriani Martín, ya fallecido, coautor del juego presentado aquí y a quien, con la publicación de este trabajo, sus autores quieren rendir un merecido y sentido reconocimiento.

El 20 de diciembre de 2010 la Asamblea General de las Naciones Unidas declaró 2013 «Año Internacional de la Cooperación en la Esfera del Agua». La decimocuarta edición del *Día escolar de las matemáticas* la vamos a dedicar a la relación entre el agua y las matemáticas y a profundizar en las medidas de nuestras huellas ecológica e hídrica. Los distintos organismos internacionales, como WWF (Informe Planeta Vivo 2012), *Water Footprint* (UNESCO) e Informe sobre el Desarrollo Humano, presentan informes llenos de gráficos, cifras, estadísticas y medidas, que nos pueden ayudar al desarrollo competencial en la práctica docente.



Encontramos relación entre las matemáticas y el agua ya en el antiguo Egipto, donde los *harpedonaptas* (los «que medían con cuerdas») utilizaban propiedades y relaciones numéricas para medir y repartir las tierras anegadas por el Nilo. También hallamos relación entre el agua y las matemáticas en los métodos geométricos diseñados para su reparto en Canarias, en las clepsidras, en su empleo para la medida del tiempo y hasta en los más modernos modelos matemáticos desarrollados con el fin de modelizar complejos comportamientos, siempre con el agua de fondo, tanto en problemas de gestión como de corte medioambiental.



suma+ 72

secciones

suma+ 72
Secciones
Marzo 2013
pp. 53-60

Problemas para manipular II

Grupo Alquerque de Sevilla

En el número 49 de la revista *Suma*, de junio de 2005, publicamos en esta sección el artículo «Problemas para manipular» donde partiendo del interés y dificultad que tiene la introducción de la Resolución de Problemas en clase, planteábamos una selección de problemas en los que la presencia de objetos y su manipulación facilitaba la implicación y resolución por parte del alumnado y que considerábamos interesantes por:

Aspectos motivacionales

— Atracción, porque permiten acercarse al problema desprovisto de la carga negativa y rechazo que para muchos alumnos supone la propia palabra problema.
— Exploración, porque facilitan analizar las distintas posibilidades y elegir una y no otras, sin tener que anotar ni borrar nada.
— Variedad.

Adaptabilidad

— A diversidad de edades.
— A diversos niveles de dificultad, desde Primaria a Secundaria, donde el profesor, en virtud de los alumnos con los que vaya a trabajar, puede modificar adecuadamente los enunciados.
— De tamaño proporcionado.

Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2012 y aceptado en enero de 2013

Viabilidad de su realización

— Facilidad de diseño sin más que un procesador de textos y un programa de tratamiento de imágenes. El enunciado del problema debe figurar en el propio tablero pues facilita un libre descubrimiento por parte de los estudiantes, que interactuarán libremente con el material. En todo caso se pueden dar pequeñas indicaciones generales.
— Permiten una presentación cuidada de los mismos, con buena impresión de los textos e imágenes en color, que los hacen más atractivos.
— Facilidad de construcción, al utilizar fotocopias o impresiones (en blanco y negro o color) plastificadas y materiales de buena calidad, durables (objetos cotidianos: tapones, botones, cubitos, piedrecitas…), seguros (no tener elementos punzantes, no tóxicos).
— Asequibilidad en su precio.

Con estas características creemos que se promueve una actitud positiva y una buena disposición por parte de los alumnos. Por ello seguimos enriqueciendo la selección de problemas susceptibles de esta presentación y hoy traemos una nueva entrega de Problemas para manipular.

Hemos estructurado la selección en tres bloques: Contactar, Ordenar y Colocar, pero se hubiese podido clasificar de otras maneras. Además, hemos indicado, cuando ha sido posible, la fuente de donde están extraídos los enunciados, algunos son pasatiempos clásicos y otros más modernos.

Contactar

En estos problemas hay que buscar el contacto entre los objetos, ya sean lápices, cubos o fichas.

Los seis lápices
(Autor Henry E. Dudeney)

Vamos a jugar con seis lápices.

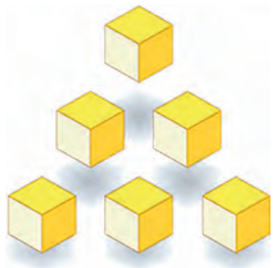
El primer reto consiste en colocar seis lápices de forma que cada uno de ellos toque a otros dos. Es fácil, como se ve en el dibujo. ¿Encuentras una solución diferente? ¿Puedes colocar los mismos seis lápices en la mesa de modo que cada lápiz toque:

a) solamente a tres?
b) solamente a cuatro?
c) a los otros cinco?

Seis Cubos

Y ahora con seis cubos.

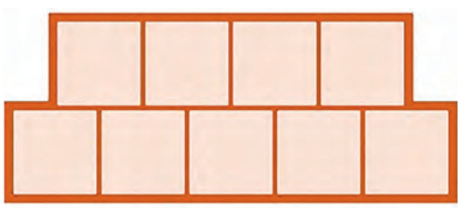
Tienes seis cubos idénticos. Colócalos de forma que cada cubo toque, con una cierta parte de una de sus caras (el contacto a lo largo de las aristas o en los vértices no cuenta):



a) Únicamente a otros dos.
b) Solamente a otros tres.
c) A otros cuatro.
d) A cada uno de los cinco cubos restantes.

En blanco y negro

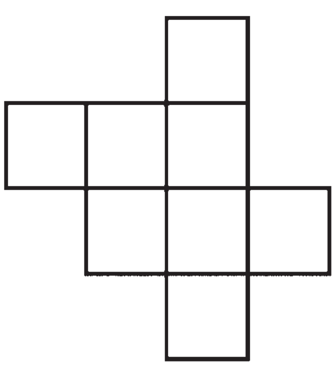
Coloca en el siguiente tablero tres fichas negras y seis fichas blancas, para que cada una, sea de un color o de otro, toque exactamente a dos fichas blancas (puede tocar a las fichas negras que sean).



Ocho dados

(Tomado de *Acertijos enigmáticos* (1998), de Alan Maley y Francoise Grellet)

Sobre un tablero se han dejado ocho dados ocupando las casillas del dibujo. Colócalos sabiendo que de los números que se ven:



a) Cada dado es un 1, un 2, un 3 o un 5.
b) Hay por lo menos un 2.
b) Cada 2 está entre dos 3.
b) Hay por lo menos un 3 entre dos 5.
b) Ningún 5 está en contacto con un 2.
b) Hay exactamente un 1.
b) Ningún 3 está en contacto con el 1.
b) Por lo menos un 3 está en contacto con un 3.

Ordenar

Personajes Disney

(Tomado de *Problemas de ingenio 1* (1980), de Pedro Ocón de Oro)

Seis conocidos personajes de Walt Disney están sentados en el suelo formando un círculo.

Minnie no está al lado de Donald ni de Tío Rico[1]. Margarita no está al lado de Mickey ni de Tío Rico. Donald no está al lado de Mickey ni de Margarita, y Tribilín está a la izquierda de Donald.

¿Cuál es la ubicación de cada uno de estos personajes?

Espectadores

(Tomado de *Mensa. Rompecabezas lógicos* (2000), de Philip Carter y Ken Russell)

Cuatro parejas de marido y mujer van a ver una obra teatral. Todos se sientan en la misma fila, pero ningún marido se sienta junto a su mujer, y en los extremos opuestos de la fila hay un hombre y una mujer. Se apellidan Andrews, Barker, Collins y Dunlop.

1. La señora Dunlop o el señor Andrews ocupan el asiento del extremo.

2. El señor Andrews se sienta entre el señor y la señora Collins.
3. El señor Collins está a dos asientos de la señora Dunlop.
4. La señora Collins se sienta entre el señor y la señora Barker.
5. La señora Andrews se sienta junto al asiento del final de la fila.
6. El señor Dunlop está a dos asientos del señor Andrews.
7. La señora Collins está más cerca del extremo derecho que del izquierdo.

Averigua cómo se han dispuesto en la fila.

Tarjetas

(Tomado del *Campeonato Argentino de Juegos de Ingenio* (2000). Prueba final, de Ivan Skvarca)

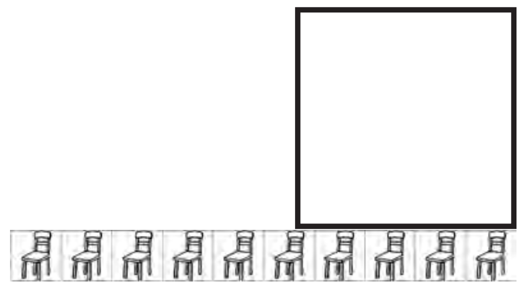
Las tarjetas 1, 2, 3, y 4 son amarillas; las tarjetas 5, 6, 7 y 8 son verdes. Ordénalas una detrás de otra para que todas las frases resulten verdaderas (los números del margen superior izquierdo solo sirven para controlar la exactitud del resultado).

Colocar

Diez sillas

(Tomado de *Problemas de ingenio 1* (1980), de Pedro Ocón de Oro)

Un camarero, al llegar a su trabajo, recibe el encargo de colocar en un salón cuadrado diez sillas que están desordenadas de la noche anterior, de modo que en cada una de las paredes queden situadas tres sillas. ¿Cómo resolverá el problema?



Formando cuadrados

Formar un cuadrado con ocho galletas no es muy difícil. Una vez conseguido, ¿eres capaz, con las mismas ocho galletas, de formar un cuadrado con cuatro en cada lado?

Completar cuadritos

Rellena las casillas de estos cuadrados de tres colores (rojo, amarillo y verde) sabiendo que:

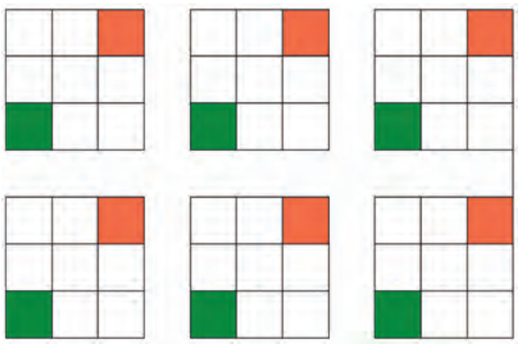
a) Dos casillas vecinas (en horizontal o vertical) no pueden tener el mismo color.

b) No es necesario que en cada fila y en cada columna estén los tres colores.

c) Debe haber tres casillas ocupadas por cada color.

d) Hay que respetar las dos casillas ya pintadas.

Hay seis posibilidades distintas (salvo giro, en cuyo caso no se consideran diferentes).



Este problema se puede plantear más abierto dando solo una plantilla con las dos casillas pintadas y pedir primeramente una solución, y después todas la posibles, sin indicar que son seis. La condición b) se puede omitir para que los alumnos lleguen a esa conclusión ya que no está indicada en el enunciado, y a veces nosotros mismos nos ponemos restricciones que no son tales.

Una variante del problema es buscar todas las soluciones (salvo giro) en las que la única casilla que se da pintada es la central, por ejemplo de amarillo.

De la A la H

(Tomado de *Jeux Mathématiques* (2006), de Fédération française des jeux mathématiques)

Completa el dibujo con las letras *B, C, D, E, F* y *G* de forma que dos círculos unidos por un segmento no contengan dos letras consecutivas en el alfabeto.

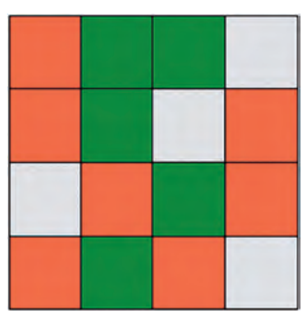
Béticos y sevillistas

(Adaptado del *Campeonato Argentino de Juegos de Ingenio (2000). Prueba final,* de Jaime Poniachik)

Descubre en cada tablero lugares habitados por aficionados béticos y sevillistas. Donde hay un número hay un seguidor bético o bien uno sevillista. Donde no hay número, no vive nadie. En cada casilla donde hay un bético, el número indica cuántos sevillistas tiene a su alrededor, y en cada casilla donde hay un sevillista, el número indica cuántos béticos tiene a su alrededor. Los alrededores de una casilla son sus vecinas inmediatas en horizontal, vertical y diagonal. En el tablero está ubicado en verde un aficionado bético.

	1	3	1		
	2	4	3		
		5	2	2	
	2	4	3	3	2
	2	5	5	3	
	1	2	3		

Es un juego muy adaptable y el diseño es bien sencillo, utilizando la técnica de empezar por el final. Una vez elegido el tamaño que deseamos para la cuadrícula, en nuestro ejemplo 4x4 escribimos la solución que queremos y, después, los números que indican cuántos aficionados del equipo contrario viven a su alrededor (diferenciamos las preferencias futbolísticas utilizando los colores verde y rojo de los equipos mencionados). Ya solo falta indicar la ubicación de uno de los seguidores.



2	2	1	
2	3		2
	3	4	1
1	3	2	

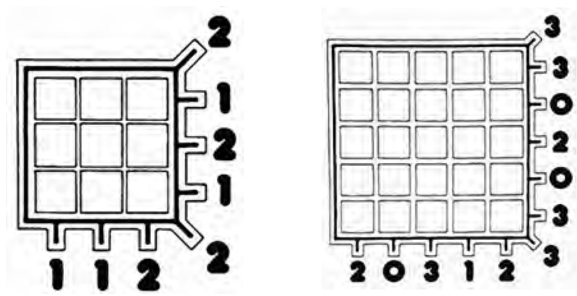
Para su resolución podemos utilizar fichas de parchís o tapones de plástico.

Ocultos

(Tomados de *Cacumen,* n.^{os} 46 y 47)

Dos problemas de la añorada revista de ingenio, juegos y pasatiempos de los años 80 *Cacumen,* en un tablero 3×3 y en uno 5×5.

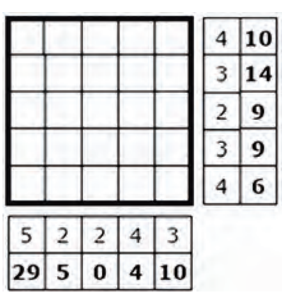
Sitúa sobre el tablero las fichas necesarias para que en cada fila, columna y diagonal haya la cantidad que se indica. En cada casilla solo puede ir una ficha.



Camino de dominós

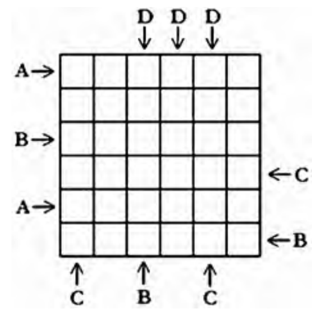
(Tomado del *Campeonato Argentino de Juegos de Ingenio (2000). Prueba final*, de Marcelo Iglesias)

Sobre el tablero se han colocado ocho fichas de dominó (0-0, 0-3, 0-4, 0-5, 0-6, 3-4, 5-6, 6-6), formando un camino cerrado y respetando la regla de contacto (dos fichas sólo pueden unirse por el mismo número incluso lateralmente formando un escalón). En el tablero vacío hay, como pistas, dos series de números. La primera, con números más finos, indica cuántas casillas están ocupadas en cada fila o columna. La segunda, con números más gruesos, indica la suma de los valores de cada fila o columna. Descubre cómo están ubicadas las fichas.



El juego de ABCD

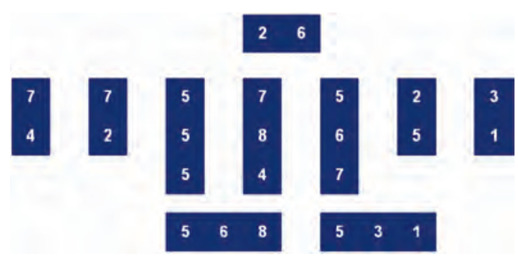
Hay que colocar las letras *A, B, C* y *D* en el dibujo. Las cuatro letras aparecen exactamente una vez en cada fila y cada columna, en total seis veces cada una. Doce cuadritos permanecen vacíos. En algunas filas y columnas se indica la primera letra que se colocará en ese lado.



Puzzle numérico bidireccional

(Tomado del *XIII Open Matemático* (2001))

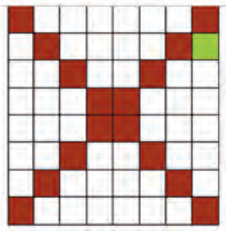
Compón un cuadrado con estas baldosas numéricas, formando números de cinco cifras. El cuadrado estará bien hecho si los cinco números de cinco cifras se pueden leer, de igual forma, tanto en horizontal como en vertical, es decir, el número de la primera fila sea el de la primera columna, el número de la segunda fila sea el de la segunda columna, etc.



Ocho estrellas

(Tomado de *Acertijos, desafíos y tableros mágicos (2007),* de Henry Dudeney)

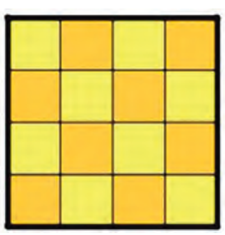
Coloca ocho estrellas sobre el tablero de modo que ninguna quede alineada con otra, ni en horizontal, ni en vertical ni en diagonal. Una estrella ya está puesta, y no debe ser movida, de modo que solo queda por poner 7. No se deben poner estrellas en ninguna de las casillas grises.

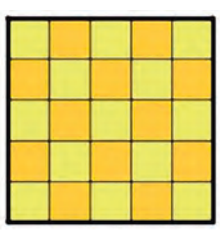


Se trata de una variante del clásico problema de las ocho reinas propuesto por el ajedrecista alemán Max Bezzel en 1848. A partir del problema de las ocho reinas el número de problemas que se han estudiado relacionados con la colocación de piezas en tableros de ajedrez es amplísimo.

Si consideramos iguales las soluciones que se pueden obtener a partir de simetrías, rotaciones y traslaciones tenemos una única solución. Si no hubiésemos fijado una estrella de inicio habría dos soluciones esencialmente distintas.

Para familiarizarse con el problema, en caso de no encontrar ningún camino para abordarlo o bien para graduar su dificultad, es aconsejable empezar por casos más sencillos; por ejemplo, con cuatro objetos en un tablero 4×4 o con cinco en uno de 5×5. En el primer caso hay una solución esencialmente distinta (dos aceptando reflexiones y/o rotaciones); en el tablero 5×5 hay dos soluciones esencialmente distintas (10 si admitimos reflexiones y/o rotaciones).

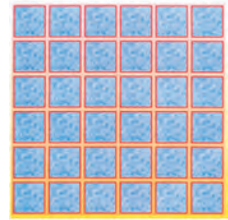




Treinta y seis

(Del libro *Problemas y experimentos recreativos,* de Yakov I. Perelman)

En las casillas de esta cuadrícula se colocan 36 fichas.



Hay que quitar 12 fichas, de tal modo que, después de esto, en cada fila y en cada columna quede el mismo número de fichas. ¿Qué fichas hay que quitar?

Una versión es la siguiente: Quitar seis fichas de la cuadrícula, de modo que en cada una de las filas, columnas y las dos diagonales siga quedando un número par de fichas.

Cuatro casas de campo

(Este rompecabezas se inspira en *Las seis casas de campo del libro 536 puzzles y problemas curiosos,* de Henry E. Dudeney)

En el dibujo se muestra un mapa de un camino circular. La distancia entre dos puntos consecutivos es de 1 km. Hay dos casas construidas ya en el camino, y se quieren construir dos más. El Ayuntamiento quiere saber dónde se han de colocar teniendo en cuenta que se den todas las distancias posibles de 1 a 12. Las dos casas que ya están colocadas están separadas por 1 o 12 km, dependiendo de la dirección del itinerario, por lo que el objetivo es colocar las dos nuevas casas para obtener las distancias de 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11.

Parejas de números

Coloca los números 1, 1, 2, 2, 3, 3 en fila de manera que entre los dos unos haya un número, entre los dos doses haya dos números y entre los dos treses haya tres números. ¿Y con cuatro: 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4?

Es imposible para cinco y seis, pero es nuevamente posible para siete y para ocho parejas. Halla las soluciones.

1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8

Es una variante, con números, del Puzzle o Problema de Langford, denominado así por el matemático escocés Dudley Langford que lo propuso en 1958 al observar como su hijo pequeño jugaba con parejas de bloques de colores.

Los emparejamientos Langford existen sólo cuando el número de parejas n es congruente con 0 o 3 módulo 4; por ejemplo, no hay emparejamiento Langford cuando n = 1, 2 o 5. Los números de los distintos emparejamientos Langford para n = 1, 2,..., considerando iguales una secuencia y su inversa, son (según Wikipedia):

N.º de parejas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
N.º emparejamientos	0	0	1	1	0	0	26	150	0	0	17792	...

Simultáneamente el matemático y lógico noruego Thoralf Skolem (1887-1963) trabajaba una variante del problema de Langford que nosotros podemos aprovechar para nuestro juego.

Coloca los números 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 en fila de manera que entre los dos unos no haya separación, entre los dos doses haya un número, entre los dos treses haya dos números y entre los dos cuatros haya tres números.

Este problema tiene solución siempre que el número de parejas n sea congruente con 0 o 1 módulo 4. Los números de los distintos emparejamientos Skolen para n = 1, 2,..., considerando iguales una secuencia y su inversa, son:

N.º de parejas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
N.º emparejamientos	1	0	0	3	5	0	0	252	1318	...

Como vemos un problema teórico reducido a pasatiempo en sus casos más sencillos y que aún está abierto para generalizaciones a ternas, cuaternas…

Para finalizar

La manipulación es especialmente atractiva en muchas edades, sobre todo en Primaria y ESO. Por ello, abordar este tipo de acertijos crea una motivación especial para introducirse en la resolución de problemas, ya que se realiza como un juego. Como se ha podido apreciar la base de algunos de ellos son problemas con un hondo sentido matemático e incluso hay algunos problemas abiertos que no son nada elementales. Además, conseguir el material es fácil, barato y puede ser creado por los propios alumnos, lo que añade un elemento más de atracción. Pensamos que este tipo de retos es un buen recurso para animar a toda persona a acercarse de una manera lúdica y crítica a las matemáticas, desarrollando una serie de estrategias que podrá aplicar en muchas situaciones cotidianas. Nosotros los usamos con bastante aceptación en las clases cuando abordamos la resolución de problemas, en semanas culturales y en actividades en la calle. Pequeños y mayores se acercan sin tanto miedo a las matemáticas.

GRUPO ALQUERQUE DE SEVILLA
Constituido por

JUAN ANTONIO HANS MARTÍN
CC Santa María de los Reyes

JOSÉ MUÑOZ SANTONJA
IES Macarena

ANTONIO FERNÁNDEZ-ALISEDA REDONDO
IES El Majuelo

<juegos@revistasuma.es>

1 Los nombres de los personajes se mantienen textualmente, pero su equivalencia a los utilizados hoy en día sería: Tío Rico es Tío Gilito, Margarita es Daisy y Tribilín es Goofy.

suma+ 72
Secciones
Marzo 2013
pp. 61-72

Itinerario curricular para matemáticas de 3.º de ESO

Mariano Real Pérez

Desde esta sección venimos dando a conocer algunas aplicaciones y recursos TIC útiles para el aula de matemáticas. En algunas ocasiones esos recursos tienen su utilidad para el proceso de enseñanza que realiza el profesorado y en otras ocasiones están más aconsejados para el proceso de aprendizaje del alumnado.

En esta ocasión nos vamos a centrar en un recurso que posee las dos finalidades anteriores, propiciando su utilización para el proceso de enseñanza-aprendizaje del alumnado en el aula de matemáticas.

Desde febrero de 2011 los profesores Mariano Real Pérez (Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper») que ha actuado como coordinador de la elaboración y diseño de contenidos, José Muñoz Santonja (Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales») y Arturo Mandly Manson (Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper») hemos desarrollado para el Centro Nacional de Desarrollo Curricular en Sistemas no Propietarios (CEDEC), dependiente del Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de formación del Profesorado (INTEF – Ministerio de Educación), unos materiales para el desarrollo curricular del área de matemáticas en tercero de la ESO a través de tareas que contribuyan al desarrollo

MatemásTIC

Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2012 y aceptado en enero de 2013

de las competencias básicas. Este material está pensado para su utilización en clases presenciales, haciendo especial hincapié en el desarrollo de la competencia en el tratamiento de la información y la competencia digital.

El proyecto se completó en abril de 2012, suponiendo más de un año de trabajo. Además, la coordinación didáctica y técnica, edición y maquetado ha sido desarrollada por los profesores Antonio Monje Fernández (Director del CEDEC) y Miguel Ángel Pereira Baz (Jefe de servicio del CEDEC), la revisión de contenidos y corrección de estilo la ha realizado Guadalupe Ramos Molina (Jefa de negociado del CEDEC) y el diseñador gráfico ha sido Francisco Javier Pulido Cuadrado (Profesor de Educación plática y miembro de GSEEX).

Los materiales suponen, por una parte, un cambio metodológico en el aula de matemáticas influenciado por las tareas con las que se propone en los mismos el desarrollo curricular de la materia. Son tareas que atienden a la llamada del desarrollo de las competencias básicas en el alumnado y que inciden directamente en la competencia «tratamiento de la información y competencia digital». Por otra parte, suponen un cambio en el aprendizaje del alumnado y en la forma en que éstos interactúan con los contenidos y llegan a asimilarlos, de forma que se sienten partícipes en la elaboración de muchos de ellos.

Si bien los dos cambios anteriormente mencionados podrán haber sido más profundos, se ha perseguido en todo momento que los materiales, su contenido y metodología estuvieran al alcance de todo el profesorado tendiendo puentes hacia metodologías más tradicionales que se pudieran estar desarrollando aún en el aula.

Estos materiales han sido pensados y programados para su utilización en las clases presenciales, recogiendo los contenidos teóricos de la materia, pero sin entrar en profundizaciones. La investigación, la búsqueda de información y la utilización de las tecnologías de la información y la comunicación son destrezas que el alumnado deberá manejar en el desarrollo y resolución de cada una de las tareas que se proponen.

La abundancia de tareas con las que cuenta cada unidad proporcionan al docente la posibilidad de seleccionar aquellas que considere más conveniente para cada momento e incluso darle pistas sobre tareas alternativas que pueda plantear al alumnado.

Cada tarea planteada se ha pensado independientemente del año y lugar en el que se utilice, algo que ha supuesto un hándicap debido a la riqueza que estos dos ingredientes suponen para el enunciado de las mismas, aprovechando hechos concretos que puedan estar sucediendo en un momento concreto. Por ejemplo, el tratamiento de la ley D´Hont en un periodo de unas elecciones concretas. Sin embargo, este tratamiento ha supuesto que esta ventana quedara abierta para que el profesorado en cada momento pueda aportar estos ingredientes.

El papel del docente es fundamental en la utilización de estos materiales. Como guía, como ayuda, como un referente del alumnado para conseguir desarrollar cada una de las tareas y asimilar los contenidos propios de la materia. Además, se ha tenido en cuenta la utilización de la pizarra digital

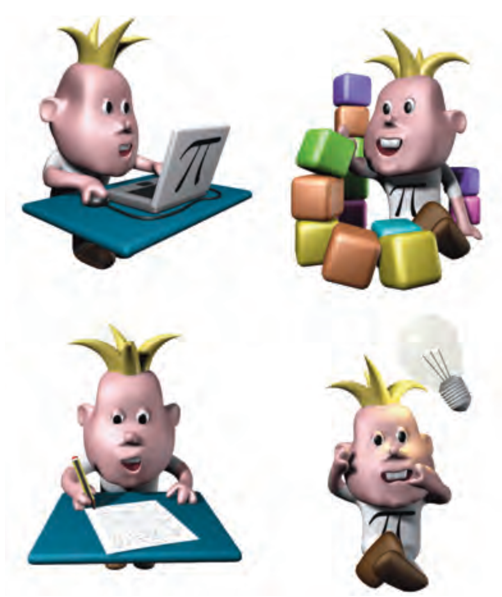


Imagen 1. ePI

interactiva en el aula, de forma que las applets interactivas y el contenido multimedia tiene el tamaño suficiente para este recurso.

La presentación ha sido cuidadosamente revisada, dotando cada una de las unidades de abundante material multimedia de un diseño gráfico atractivo. Entre todo el diseño gráfico cabe destacar un personaje que aparece a lo largo de toda la aplicación y cuyo nombre es *ePI*. Podemos ver a ePI en diversas situaciones en la imagen 1.

Una de las premisas ha sido la elaboración de estos materiales bajo las pautas de la licencia de *Creative Commons Reconocimiento-CompartirIgual 3.0 España*.

Para acceder a todos los ficheros de estos materiales debemos entrar en la siguiente dirección:

http://cedec.ite.educacion.es/index.php/es/
matematicas-3o-eso/832-matematicas-3o-eso

Podemos utilizar el material desde Internet. Para ello solamente debemos acceder a la siguiente dirección:

http://descargas.pntic.mec.es/
cedec/mat3/index.html

También podemos descargarnos el material completo sin necesidad de estar conectados a Internet para su utilización. Para ello, toda la aplicación se proporciona en un archivo comprimido que nos podemos descargar de la siguiente dirección:

http://descargas.pntic.mec.es/
cedec/mat3/mat3.zip

Por otra parte, todos los archivos fuente de cada una de las unidades en que se divide el material se pueden descargar desde la plataforma de contenidos *Agrega* por si algún profesor/a quisiera modificarlos, siempre bajo los criterios de la licencia de los mismos.

Cuando accedemos a los materiales observamos la pantalla inicial que se aprecia en la imagen 2.

En esa pantalla aparece un enlace a los contenidos, otro para las orientaciones del profesor y otro a la autoría de los materiales que ya hemos comentado inicialmente.

Imagen 2. Pantalla inicial de los materiales

Ahora vamos a acceder a los contenidos de la aplicación. Para la creación de los materiales se acordaron realizar 12 unidades que recogieran todos los contenidos de matemáticas de tercero de la ESO. En la imagen 3 podemos observar cada una de las unidades. Esta pantalla es la que aparece al pulsar sobre la opción contenidos de la imagen 3.

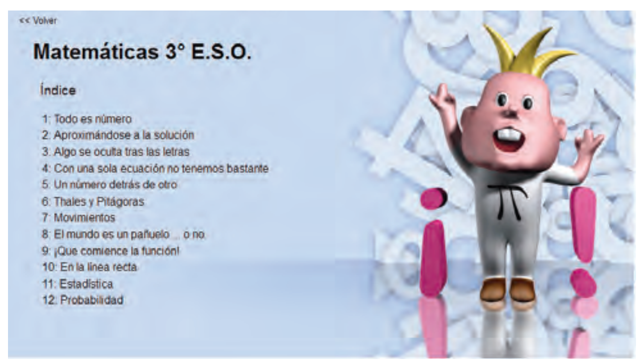


Imagen 3. División de contenidos de la aplicación

Cada unidad está indicada para 10 horas de duración, aunque al profesorado, en cada una de ellas, se le han facilitado un buen número de tareas de forma que tenga capacidad de selección de las tareas que considere más convenientes.

Como hemos indicado anteriormente, la aplicación se compone de 12 unidades que recogen todos los bloques que componen el currículo de matemáticas de tercero de la ESO. Cada uno de estos bloques queda plasmado en los materiales en cada una de las unidades que indicamos seguidamente:

El primero de los bloques de contenidos para tercero de la ESO relativo a contenidos comunes se ha pensado como un bloque transversal y que se desarrolla a lo largo de todos los contenidos de la aplicación. Este primer bloque es:

Bloque 1. Contenidos comunes. Planificación y utilización de estrategias en la resolución de problemas tales como el recuento exhaustivo, la inducción o la búsqueda de problemas afines, y comprobación del ajuste de la solución a la situación planteada.

Descripción verbal de relaciones cuantitativas y espaciales, y procedimientos de resolución utilizando la terminología precisa. Interpretación de mensajes que contengan informaciones de carácter cuantitativo o simbólico o sobre elementos o relaciones espaciales. Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas, comprender las relaciones matemáticas y tomar decisiones a partir de ellas. Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas y en la mejora de las encontradas. Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas.

Para los siguientes bloques se ha acordado la siguiente división:

Bloque 2. Números. Este bloque consta de 2 unidades que son:

Unidad 1: Todo es número. Esta unidad está dotada de los siguientes contenidos: Transformación de fracciones en decimales y viceversa. Números decimales exactos y periódicos. Fracción generatriz. Operaciones con fracciones y decimales. Potencias de exponente entero. Representación en la recta numérica. Comparación de números racionales. La primera parte de esta unidad se dedicará al repaso del máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

Unidad 2: Aproximándose a la solución. Esta unidad está dotada de los siguientes contenidos: cálculo aproximado y redondeo. Cifras significativas. Error absoluto y relativo. Utilización de aproximaciones y redondeos en la resolución de problemas de la vida cotidiana con la precisión requerida por la situación planteada. Significado y uso. Su aplicación para la expresión de números muy grandes y muy pequeños. Operaciones con números expresados en notación científica. Uso de la calculadora.

Bloque 3. Álgebra. Este bloque consta de 3 unidades que son:

Unidad 3: Algo se oculta tras las letras. Esta unidad está dotada de los siguientes contenidos: traducción de situaciones del lenguaje verbal al algebraico. Transformación de expresiones algebraicas. Igualdades notables. Resolución de ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita. Valoración de la precisión, simplicidad y utilidad del lenguaje algebraico para resolver diferentes situaciones de la vida cotidiana.

Unidad 4: Con una sola ecuación no tenemos bastante. Esta unidad está dotada de los siguientes contenidos: sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones, sistemas y otros métodos personales. Valoración de la precisión, simplicidad y utilidad del lenguaje algebraico para resolver diferentes situaciones de la vida cotidiana.

Unidad 5: Un número detrás de otro. Esta unidad está dotada de los siguientes contenidos: análisis de sucesiones numéricas. Progresiones aritméticas y geométricas. Sucesiones recurrentes. Las progresiones como sucesiones recurrentes. Curiosidad e interés por investigar las regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en conjuntos de números.

Bloque 4. Geometría. Este bloque consta de 3 unidades que son:

Unidad 6: Thales y Pitágoras. Esta unidad está dotada de los siguientes contenidos: Aplicación de los teoremas de Tales y Pitágoras a la resolución de problemas geométricos y del medio físico. Determinación de figuras a partir de ciertas propiedades. Lugar geométrico.

Unidad 7: Movimientos. Esta unidad está dotada de los siguientes contenidos: Traslaciones, simetrías y giros en el plano. Elementos invariantes de cada movimiento. Uso de los movimientos para el análisis y representación de figuras y configuraciones geométricas. Planos de simetría en los poliedros. Reconocimiento de los movimientos en la naturaleza, en el arte y en otras construcciones humanas. Determinación de figuras a partir de ciertas propiedades. Lugar geométrico.

Unidad 8: El mundo es un pañuelo…, o no. Esta unidad está dotada de los siguientes contenidos: coordenadas geográficas y husos horarios. Interpretación de mapas y resolución de problemas asociados. Curiosidad e interés por investigar sobre formas, configuraciones y relaciones geométricas.

Bloque 5. Funciones y gráficas. Este bloque consta de 2 unidades que son:

Unidad 9: ¡Que comience la función!. Esta unidad está dotada de los siguientes contenidos: análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias. Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente: dominio, continuidad, monotonía, extremos y puntos de corte. Uso de las tecnologías de la información para el análisis conceptual y reconocimiento de propiedades de funciones y gráficas. Formulación de conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica. Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados.

Unidad 10: En la línea recta. Esta unidad está dotada de los siguientes contenidos: utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica. Utilización de las distintas formas de representar la ecuación de la recta.

Bloque 6. Estadística y probabilidad. Este bloque consta de 2 unidades, que son:

Unidad 11: Estadística. Esta unidad está dotada de los siguientes contenidos: necesidad, conveniencia y representatividad de una muestra. Métodos de selección aleatoria y aplicaciones en situaciones reales. Atributos y variables discretas y continuas. Agrupación de datos en intervalos. Histogramas y polígonos de frecuencias. Construcción de la gráfica adecuada a la naturaleza de los datos y al objetivo deseado. Media, moda, cuartiles y mediana. Significado, cálculo y aplicaciones. Análisis de la dispersión: rango y desviación típica. Interpretación conjunta de la media y la desviación típica. Utilización de las medidas de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones. Actitud crítica ante la información de índole estadística. Utilización de la calculadora y la hoja de cálculo para organizar los datos, realizar cálculos y generar las gráficas más adecuadas. Experiencias aleatorias. Sucesos y espacio muestral.

Unidad 12: Probabilidad. Esta unidad está dotada de los siguientes contenidos: utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. Formulación y comprobación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos. Cálculo de la probabilidad mediante la simulación o experimentación. Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos. Reconocimiento y valoración de las matemáticas para interpretar, describir y predecir situaciones inciertas.

Cada unidad está compuesta de varios apartados que serán utilizados dependiendo del momento de desarrollo en el que se encuentre la unidad. Para que nos sirva de ayuda, en la pantalla que aparece en la imagen 3 vamos a pulsar sobre la primera unidad, todo es número, apareciendo la pantalla que observamos en el imagen 4.

En esa pantalla observamos que aparecen las siguientes opciones:

Imagen 4. Pantalla correspondiente a la unidad 1

a) Historia Inicial: esta parte contiene una historia inicial relacionada con los contenidos que se van a estudiar en la unidad. Esta historia inicial puede aparecer posteriormente referenciada en los contenidos de la unidad o bien en alguna tarea que se pueda proponer en esos contenidos. A modo de introducción, presenta un escenario real en el que pueden ser utilizados los contenidos que se va a abordar en la unidad. En la imagen 5 podemos observar la pantalla de la historia inicial correspondiente a la unidad 1.

En este caso la historia gira en torno a un hombre al que le han concedido un puesto de venta en un nuevo mercado que se ha abierto.

Imagen 5. Historia inicial de la unidad 1

En general, en la historia inicial de cada unidad no se trata ningún contenido matemático.

b) Tarea inicial: es una tarea con la que el alumno obtendrá un producto o resolverá una posible situación que se encuentra en la historia inicial. A partir de la historia inicial se le plantea una tarea al alumnado. Al igual que las tareas que se recogen en la unidad, ésta puede ser realizada de forma individual o por grupo. En la imagen 6 observamos la pantalla correspondiente a la tarea inicial de la unidad 1.

En este caso se le pide al alumnado resolver una tarea tras un paseo el paseo por el mercado que han observado en el vídeo. En este caso, el alumnado debe obtener

Imagen 6. Tarea inicial de la unidad 1

como producto final un cartel con una determinada oferta para colocar en el mercado. No todos los carteles deben ser iguales. Es más, lo probable es que todos los carteles obtenidos sean diferentes.

c) Contenidos: es la zona que contiene de forma organizada, los contenidos que se tratan en el tema y las tareas que se proponen para su desarrollo. En esta parte de contenidos, el alumnado encontrará los contenidos de la unidad, autoevaluaciones, curiosidades, enlaces aclaratorios de esos contenidos, tareas que contribuyen al desarrollo de las competencias básicas y que impliquen la utilización de esos contenidos, ventanas interactivas con las que practicar, investigar… En la imagen 7 podemos observar la pantalla correspondiente a los contenidos de la unidad 1.

Imagen 7. Pantalla de contenidos de la unidad 1

En este caso, los contenidos del currículo que se desarrollan en la unidad 1 son los siguientes: Números decimales y fracciones. Transformación de fracciones en decimales y viceversa. Números decimales exactos y periódicos. Fracción generatriz. Operaciones con fracciones y decimales. Potencias de exponente entero. Representación en la recta numérica. Comparación de números racionales. La primera parte de esta unidad se dedicará al repaso del máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

La división que se ha elegido para los contenidos de esta unidad ha sido la que se observa en la imagen 7 como menú navegable en la parte izquierda de la pantalla y que son:

Unidad 1: Todo es número.

1. Recordando divisibilidad
   1.1. Múltiplo y divisor
   1.2. Mínimo común múltiplo y máximo común divisor
2. Fracción: un número debajo de otro.
   2.1. Definición, simplificación, interpretación y reducción de fracciones (% y proporción)
   2.2. Operaciones con fracciones
   2.3. Representación, ordenación y comparación
3. De fracción a decimal
   3.1. Tipos de decimales
   3.2. Fracción generatriz
   3.3. Operaciones con decimales
4. Potencias
   4.1. Potencias de exponente natural
   4.2. Potencias de exponente entero
5. Resolución de problemas
   5.1. Proporción
   5.2. Porcentaje

d) Tarea de la unidad: es una tarea con la que el alumnado debe obtener un producto final. La realización de esta tarea implica la utilización de los contenidos y destrezas adquiridos a lo largo de la unidad. En nuestro caso, en la imagen 8 podemos observar la pantalla correspondiente a la tarea de la unidad 1.

En la imagen 8 solamente aparece una parte de la tarea completa. En todas las unidades, en esta tarea

Imagen 8. Tarea final de la unidad 1

final se le pide al alumnado que elabore una presentación con un esquema de los contenidos tratados a lo largo de la unidad. Además, se le pide al alumnado que la suba a Internet y la incruste en el blog de aula que el profesor o profesora habrá creado.

e) Preguntas: Es un archivo que contiene 30 preguntas pensadas para el repaso de los contenidos tratados en la unidad. Pueden ser preguntas tipo test, de respuesta múltiple, de respuesta escrita… En general supone una autoevaluación para el alumnado.

f) Refuerzo: Esta zona está pensada como refuerzo para aquel alumnado que haya encontrado dificultades para conseguir alcanzar los objetivos de la unidad. Esta zona se compone de dos partes. En una primera aparecen enlaces con los que el alumnado puede repasar los contenidos que se han tratado en la unidad. En la segunda se le propone una tarea a modo de refuerzo en la que debe utilizar sus destrezas para conseguir un producto final utilizando los contenidos tratados en la unidad. En la imagen 9 podemos observar la pantalla que obtenemos al acceder a la zona de refuerzo de la unidad 1.

En la parte izquierda de la pantalla que observamos en la imagen 9 aparecen distintos enlaces que se recomiendan al alumnado que llega a esta parte de la aplicación, en lo que se le proponen diversos ejercicios y simulaciones de repaso. También aparece un enlace a la tarea de refuerzo que se le propone en esta unidad.

g) Profundización-ampliación: Esta zona está pensada como refuerzo para aquel alumnado que se observe que puede seguir profundizando en los contenidos del tema. La estructura es similar a la de la zona de refuerzo ya que se compone de dos zonas. En la primera aparecen enlaces con los que el alumnado puede profundizar en los conocimientos y utilización de los contenidos de la unidad. En una segunda pantalla se le propone una tarea más compleja en la que el alumnado deberá reflexionar y profundizar en los contenidos de la unidad y en la que debe utilizar sus destrezas para conseguir un producto final utilizando los contenidos tratados en la unidad. En la imagen 10 podemos observar la pantalla correspondiente a la zona de profundización-ampliación, pero en esta ocasión se muestra la correspondiente a la tarea.

La presente aplicación tiene unas orientaciones al profesorado a través de las que se puede intuir la composición de dicha aplicación y la idea con la que han sido realizados. Toda una declaración de intenciones que van a hacerse efectivas en el desarrollo de las distintas unidades que lo componen. Estas orientaciones las recogemos textualmente:

Imagen 9. actividades de refuerzo de la unidad 1

Imagen 10. Zona de ampliación de la unidad 1

Estimado/a profesor/a.

Queremos darte la bienvenida a estos materiales de Matemáticas para el curso de 3.º de ESO.

Hemos dividido la materia en doce unidades que comprenden todo el currículo de este nivel. Nuestro objetivo es que el alumnado desarrolle las competencias básicas de una forma activa y utilizando especialmente las Nuevas Tecnologías.

En cada Unidad tendrás una serie de materiales para que los trabajes según tu gusto. Comienza con una historia inicial en la que se suele presentar un personaje y/o una situación a la que se puede hacer referencia a lo largo de todo el tema. Seguidamente se propone una tarea inicial a realizar por el alumnado basada en esa historia inicial y que tiene por objetivo que tome contacto con la materia concreta que se va a desarrollar en ese tema.

La parte principal serán los contenidos del tema. En ellos se encuentran incluidos los conceptos que el alumnado debe aprender o repasar, unas veces de forma explícita y en otras ocasiones mediante enlaces a páginas o actividades alojadas en Internet. Aparecerán elementos audiovisuales que hagan más atractivo el proceso de aprendizaje. También aparecerán una serie de actividades que al alumno deberá realizar directamente en los contenidos, muchas de ellas autoevaluables, que le permitirán practicar los contenidos estudiados. Esto se complementará con enlaces a actividades interactivas que puedan realizar directamente en alguna página de la red.

Los contenidos también incluirán una serie de tareas que deberán realizar individualmente o en grupos y que se diferirán a la hora de presentar el producto, ya que podréis encontraros con actividades de distinto tipo:

a) Unas veces tendrán que resolver una serie de actividades cuyo desarrollo deberán reflejar en sus cuadernos de trabajo, herramienta muy importante que el profesor deberá revisar regularmente.

b) Habrá investigaciones que deberá realizar el alumno, bien individualmente o en grupo, y cuyo resultado deberán exponer en Internet. Desde aquí te aconsejamos la creación de un blog de aula en el que los alumnos puedan exponer sus trabajos y defenderlos delante del resto de compañeros.

c) También encontrarás en las unidades propuestas de juegos de fichas y tablero para practicar en el aula en grupos. Corresponde al profesor la organización de la dinámica para realizar dichos juegos en clase, pues se necesitarán tener preparados tableros y materiales para que los alumnos puedan manipular los elementos en el aula. Es asimismo labor del profesor la organización de la dinámica de la clase para que el trabajo sea efectivo.

Aparte de lo anterior, los materiales se complementan con una tarea final en la que el alumno deberá aplicar lo aprendido en la unidad. También encontrarás un archivo con treinta preguntas, de tipo test o de respuesta corta, para que el alumno demuestre los conocimientos adquiridos.

Con el fin de tratar la atención a la diversidad hemos añadido dos tareas, una de refuerzo y otra de ampliación. Queda a tu criterio decidir qué personas deben hacer cada una de esas tareas según su rendimiento y sus capacidades. En ambas tareas hay una serie de enlaces a actividades manipulativas que creemos que pueden ser muy interesantes para aclarar conceptos o ampliar conocimientos.

Queremos llamar la atención sobre la importancia que tendrá en todo momento la utilización de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) para resolver las cuestiones planteadas y como ayuda en los procesos de investigación y documentación. En este sentido te proponemos la creación de un blog de aula que posteriormente utilizará el alumnado para la presentación de los resultados de sus tareas. En este tipo de acciones el alumnado realizará entradas en el blog incrustando alguna imagen o alguna presentación que haya realizado y subido posteriormente a algún espacio de Internet con *Slideshare* o bien incrustando algún vídeo que haya podido elaborar y subir posteriormente a Youtube. En estos casos tanto los datos que deba manejar como el producto final que debe presentar será distinto para cada uno, por lo que le indicamos que utilice una serie de etiquetas en cada caso para localizarlos fácilmente.

De cara al desarrollo específico de la competencia tratamiento de la información y competencia digital, se le solicitará al alumnado que busque información en Internet con la que realizar una determinada tarea, que extraiga los datos necesarios de la misma y que elabore algún tipo de documento con los resultados de la resolución de la tarea en cuestión.

Por otra parte también utilizará herramientas como el procesador de textos como Open Office, programas de tratamiento de imágenes como GIMP, la hoja de cálculo, etc. En algunas ocasiones se le indicará también que desarrollen contenidos con una determinada herramienta específica. En ese caso se hará alusión a esa herramienta en concreto.

Esperamos que el esfuerzo que hemos realizado te sea útil en tu trabajo. Un saludo.

Como se puede deducir de estas orientaciones, para el desarrollo de cada una de las tareas el alumnado deberá manejar distintas aplicaciones. La mayoría son generales como un procesador de textos, otras son más específicas y se le indica a lo largo de los contenidos de cada unidad. Lo ideal y casi imprescindible por parte del profesorado es la creación de un blog de aula en el que el alumnado irá realizado entradas en las que irá incrustando el objeto o producto que haya elaborado en la mayoría de las tareas. Tanto el de las tareas iniciales como, como el de las que se va a encontrar a lo largo del desarrollo de cada unidad como las de refuerzo o las de profundización, según se trate. Además, en cada una de las tareas se le dan indicaciones al alumnado para que realice una determinada configuración a la hora de realizar esas entradas en el blog de aula, de forma que el profesorado puede conocer en cada momento cuántos alumnos o alumnas han presentado una determinada tarea y cuántas tareas ha realizado un determinado alumno o alumna. Como ejemplo, podemos decir que entre las tareas con las que se puede encontrar el alumnado, el producto que deberá realizar en ellas puede ir desde un documento de texto o una hoja de cálculo a un vídeo, pasando por una presentación. Las tareas son muy variadas y, como se indica en las orientaciones, el producto final que obtiene cada alumno o alumna suele ser diferente, ya que se parte de elementos diferentes como pueden ser su propia casa, la calle en la que vive, una determinada factura, un tipo de coche que le guste, etc. El alumnado no solamente deberá utilizar todos los conocimientos y recursos de los que dispone para resolver la tarea, sino que, en la mayoría de las ocasiones, deberá exponer al resto del grupo las conclusiones de la tarea que ha desarrollado y defender el camino seguido para realizarla.

Ya dentro de los contenidos, los de cada una de las unidades siguen unas marcas o divisiones comunes de forma que el alumnado conoce en todo momento a qué hace referencia cada una de las partes con las que se encuentra y qué posibles actuaciones van a tener que hacer en cada una de ellas. Hemos querido recoger en una imagen varias de estas partes de forma que podamos ilustrar estas divisiones que mencionamos. Para comenzar, aunque dentro de una unidad los contenidos que se tratan están muy relacionados, hemos dividido la unidad en grandes epígrafes que traten contenidos específicos. Como ejemplo nos puede servir la pantalla que observamos en la imagen 11 y que corresponde a la unidad 8. En este caso los epígrafes serían los puntos:

1. Líneas en la Tierra.
2. Husos horarios.
3. Mapas.

Al pulsar directamente sobre cada epígrafe se muestra una introducción a los contenidos que se van a desarrollar en el mismo. Además, aparecen los subapartados de que consta ese epígrafe. En la imagen 11 observamos que se han desplegado los subapartados correspondientes al primer epígrafe. Estos subapartados son:

1.1. Líneas en la esfera.
1.2. Divisiones verticales y horizontales.
1.3. Coordenadas planetarias.

En nuestro caso, en la imagen 11 se observa una parte del subapartado 1.1. Aquí podemos ver que aparecen distintas zonas que sirven de referencia al alumnado.

La primera zona que aparece está en tono azul y lleva por nombre *Aprende a hacerlo*. Aquí se le propone al alumnado una determinada actividad de la que se le proporciona la solución, un camino para conseguir resolverla o una ayuda sustancial para realizarla. En este caso además, la actividad tiene una ventana interactiva que deberá utilizar el alumnado.

La segunda zona que aparece lleva por título *Comprueba lo aprendido* y en ella se

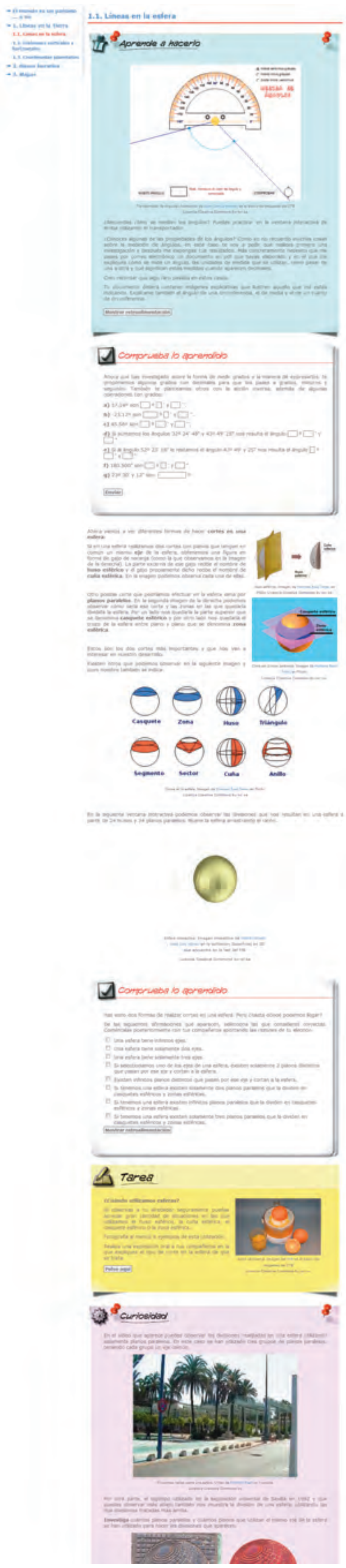


Imagen 11. Pantalla correspondiente a la unidad 8

le propone una actividad de autoevaluación de la asimilación de los conceptos tratados hasta ese momento o bien es una autoevaluación de los conocimientos previos que puede tener de un determinado concepto.

La tercera zona no tiene título alguno y en ella se ofrece información sobre determinados contenidos del subapartado.

En la cuarta zona, ya en tono amarillo, aparece una tarea que el alumnado deberá resolver y conseguir, como hemos indicado anteriormente, un producto final.

La quinta y última zona que observamos aparece en tono rosa y se dedica a una curiosidad relacionada con los contenidos tratados.

Como hemos indicado, la imagen 11 nos sirve para ilustrar algunas de estas zonas, pero nos quedan otras muchas que aparecen a lo largo de la unidad como son los conceptos importantes, lecturas, ventanas interactivas, información en la red, etc.

Por otra parte, se han tenido en cuenta los criterios de usabilidad y accesibilidad de la web de forma que el material pueda ser utilizado por el alumnado con deficiencias específicas y que necesiten lectores de pantalla u otros elementos adaptados.

La verdad es que esta aplicación supone un cambio significativo tanto en la posición del alumnado ante la materia, ya que participa activamente en la construcción y el descubrimiento de determinados conceptos, como en la metodología del profesorado que, sin llegar a ser un cambio tan radical como se hubiese querido, si supone un puente que invita a cambiar y a impulsar la metodología de aula. La ficha educativo-técnica de la aplicación se muestra en la página siguiente.

Despedida de la sección

Ha llegado un nuevo equipo a *Suma*+ con un proyecto claro y decidido con el que hacer más fuerte, atractiva y prestigiosa esta revista igual que lo han ido consiguiendo los equipos anteriores. En ese proyecto, la sección MatemásTIC desaparece, por lo que a mí solamente me queda despedirme y echar el telón a esta sección que os lleva acompañando durante cinco años. Para ello me gustaría agradecer a los miembros de la FSPM que me ofrecieron esta oportunidad de llevar una sección en *Suma*+ y la confianza que depositaron en mí hace cinco años y a la que espero haber correspondido durante los últimos 16 números de la revista, alcanzando los objetivos que con la misma se pretendían.

Espero haber aportado mi granito de arena para hacer crecer esta publicación y que los artículos hayan sido de utilidad para el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. Gracias a todos por el ratito que dedicábais en cada número a navegar por esta sección. Mis mejores deseos para el nuevo equipo y para nuestra revista como documento de encuentro y divulgación dentro y fuera de la Federación. Un saludo a todos y a todas. Nos seguimos leyendo en la Red:

@GeoGebreando

@MarianoRealPerez

http://www.facebook.com/mariano.realperez

FICHA EDUCATIVO-TÉCNICA	
Nombre	Itinerario para matemáticas de 3º de la ESO
Sistema	Cualquier sistema operativo. Necesita plugin de Flash y de Java
Descarga	Todos los archivos: <http://cedec.ite.educacion.es/index.php/es/matematicas-3o-eso/832-matematicas-3o-eso> Utilizar desde Internet: <http://descargas.pntic.mec.es/cedec/mat3/index.html> Descarga de materiales para utilizat sin Internet: <http://descargas.pntic.mec.es/cedec/mat3/mat3>
Licencia	Creative Commons Reconocimiento-CompartirIgual 3.0 España
Contenido	Currículo completo de tercero de la ESO. Desarrollo por competencias.
Nivel	3º ESO
Metodología	Participativa del alumnado en la resolución de tareas propias de su entorno que contribuyen al desarrollo de las competencias básicas. El profesorado actúa como guía referente en el proceso formativo.

MARIANO REAL PÉREZ
CEP de Sevilla
<matemastic@revistasuma.es>

suma+ 72
Secciones
Marzo 2013
pp. 73-81

Matemáticas en el *Far West*

José María Sorando Muzás

Al lector de esta sección ya no le ha de extrañar que encontremos escenas con matemáticas en películas de cualquier tipo, no forzosamente en contextos académicos. Pero hay que reconocer que ciertos géneros cinematográficos parecen menos proclives a esa presencia. Así ocurre con los western (para nosotros, películas del Oeste). Este género se asocia con peleas, galopadas y tiroteos; no con cálculo, análisis y reflexión. Y sin embargo, a veces también los encontramos en ellas, aunque con connotaciones sui generis. Dado que cualquier persona intenta resolver problemas, para que en una situación aparezcan matemáticas no es necesaria la intervención de matemáticos; aunque algunos se resistan a reconocerlo, como le pasa a Chris Adams (interpretado por Yul Brynner) en *Los siete magníficos* (John Sturges. 1960), cuando dice:

> —Resolver problemas no es asunto nuestro. Lo nuestro es el plomo.

Números

En el Oeste rige una aritmética de la supervivencia[1], empezando por la simple numeración. Así se muestra en la película citada, adaptación al Oeste de *Los*

CineMateca

Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2012 y aceptado en enero de 2013

Siete Samuráis (Akira Kurosawa. 1954). Unos campesinos contratan los servicios de siete pistoleros para deshacerse de la extorsión de una banda de forajidos. Los pistoleros hacen recuento de sus vidas, dando especial importancia al cero:

> —El revólver lo es todo. Te permite tutear a taberneros y jugadores de ventaja, tal vez a 200 de ellos. Tienes 500 tugurios donde dormir y 1.000 fonduchos donde comer. Pero hogar, esposa e hijos, no. Y porvenir, cero. ¿Me olvido algo?
> —Sí. Sitios a los que estás ligado, ninguno. Personas con derecho sobre ti ante las que has de inclinarte, ninguna.Insultos tolerados, ninguno. Enemigos, ninguno.
> —¿Ningún enemigo?
> —... con vida.
> —Ésta es la clase de Aritmética que me gusta.

En *Hasta que llegó su hora* (Sergio Leone. 1968), «Armónica» (Charles Bronson) y «Cheyenne» (Jason Robards) son dos tipos duros que al conocerse mantienen el siguiente diálogo. «Armónica» dice a su interlocutor que ha visto a tres de sus hombres tiroteados y que los ha reconocido por unos característicos abrigos que los distinguen. «Cheyenne» no lo admite:

> —Eso no es más que un cuento, Armónica, por tres razones: Primera, no hay nadie que se atreva a llevar esos abrigos, excepto los hombres de Cheyenne. Segunda, los hombres de Cheyenne no mueren. ¿Te sorprende?
> —Sí, sabes contar hasta dos.
> —Puedo llegar hasta seis, si me apuras (mientras lo dice, hace rodar el tambor de su revólver). Más rápido que tú.

El bueno, el feo y el malo (Sergio Leone, 1966)

El número seis es importante en el Oeste. También se insiste sobre ello en *El Bueno, el Feo y el Malo* (Sergio Leone. 1966). El Bueno (Clint Eastwood) descubre que le sigue un grupo de pistoleros y, mientras los cuenta, conversa con el jefe de la banda:

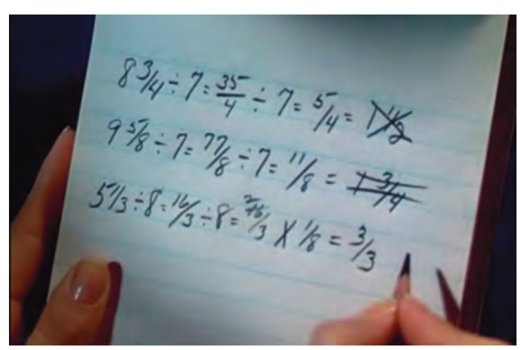
> —Uno, dos, tres, cuatro, cinco y seis. Seis, el número perfecto.
> —¿No es tres el número perfecto?
> —Hay seis tiros aquí dentro (señala su pistola).

Para los matemáticos, seis es el primer número perfecto por otras razones; no de armas, sino de divisibilidad. El anterior diálogo, ¿es un «guiño matemático» de Sergio Leone o es pura coincidencia?

Los forajidos de *Los siete magníficos* necesitan una numeración más amplia, habida cuenta de las bajas que sufren:

> —Andrés, Lorenzo y Felipe no regresaron.
> —Y van tres.
> —Armando cayó en el pueblo.
> —Van cuatro.
> —Jorge y Ramón en El Paso, donde quedaron atrapados en la red.
> —¡Malditos! Van seis.
> —Luego, Emilio en el muro.
> —Siete.
> —José en el pajar.
> —Ocho.
> —Gregorio, junto a la fuente.
> —Y van nueve.
> —Fortunato, en la zanja de riego. Rico en el campo, pasado a cuchillo.
> —Entonces ya son once. Sí.

No esperemos sofisticación numérica en ese mundo rudo y violento. La protagonista de *El Virginiano* (Stuart Gilmore. 1946)[2] es una joven maestra, procedente de una refinada familia del Este, que se desplaza a su primer trabajo en la escuela de un pueblecito del Salvaje Oeste. En el tren que la lleva va escribiendo unas fracciones, según podemos ver en el siguiente fotograma:



Fracciones en *El virginiano* (Stuart Gilmore, 1946)

Se ve que la joven sabe dividir números mixtos entre naturales, pero que tiene algunas dificultades con el paso de fracciones impropias a mixtos, con la simplificación y con el producto de fracciones. El revisor que la ve le informa enseguida de la baja exigencia cultural de la zona.

> —No se esfuerce usted, señorita. Aquí nadie sabrá si está bien o mal. Lo único que quieren de un maestro es que sepa contar hasta cien.

La rareza de alguien con cultura en el lugar reaparece en una conversación de cowboys en el «saloon».

> —¿Por qué no le invitamos a un trago?
> —¡No! Es maestra.
> —¿Y qué diferencia hay? Es humana, ¿no?

«Contar hasta cien»… en general, no les hacían falta muchos más números. Aunque si la fortuna sonreía, tal vez sí. En Hasta que llegó su hora, reencontramos a «Armónica» y «Cheyenne» haciendo sus estimaciones de las cuantiosas ganancias que puede reportar la propiedad de los terrenos por donde pasará el ferrocarril. Su aritmética es escasa, pero no su ambición:

> —Si construyes un pueblo junto a una estación…, uy, uy, uy. Es una fábrica de dinero. Centenares de miles de dólares. Incluso más, miles de miles.
> —A eso le llaman millones.
> —¿Millones?¡Sí, millones! Eso es.

He aquí un ejemplo de cómo ante nuevas necesidades, surgen nuevos conceptos…

La anterior película es una de las llamadas «spaghetti western». Con ese nombre se conoce a las películas del Oeste rodadas bajo la dirección del italiano Sergio Leone en escenarios españoles (Desierto de Tabernas en Almería y otros), aunque con actores norteamericanos en los papeles principales (de forma destacada, el debutante Clint Eastwood que saltaría a la fama). La osadía de entrar en un género que parecía patrimonio de los EE.UU. fue menospreciada por Hollywood dando a estas películas esa denominación jocosa que era, en su intención, sinónimo de western de baja calidad. Sin embargo, las películas de Leone han ganado valoración con el paso del tiempo. Les caracterizan: la crueldad de los personajes; los diálogos escuetos y sentenciosos; y la genial música compuesta por Ennio Morricone, que entonces comenzaba su fecunda y exitosa carrera. Otras coproducciones latinas quisieron seguir esa senda, pero quedaron lejos de aquel nivel.

Los siete magníficos (John Sturges, 1960)

Cálculos

En las películas de Leone, hay varias escenas con elementos matemáticos que, como todo en este cine, contribuyen a realzar la tensión de las situaciones y la dureza de unos individuos a quienes sólo les preocupa el botín en juego, sin concesión a los sentimientos. Aunque a la vez, como veremos, no estén exentas de humor.

Esos pistoleros además de numerar, también hacen sus cálculos. Como los hace el protagonista de *La muerte tenía un precio* (Sergio Leone, 1965): «El Manco» (Clint Eastwood), un cazarecompensas. Es un pistolero frío e inexpresivo, siempre con su poncho y su cigarro, lacónico e impávido ante las situaciones límite. En la escena final, tras el tiroteo en que ha sucumbido toda la banda perseguida, se separan el Coronel Mortimer (Lee Van Cleef) y «El Manco», quien se queda con los cuerpos. Los ha apilado en su carreta para cobrar las recompensas. Y empieza a hacer su particular recuento de caja, con algún desajuste. Lo solucionará a su manera...

—Doce mil, quince, diecinueve, veintiuno, veinticinco... (va sumando recompensas).

Se detiene pensativo; se da cuenta de que le falta uno. Sin alterarse, se da la vuelta rápidamente y dispara a un miembro de la banda al que daba por muerto, justo antes de que éste le dispare a él.

—Y cuatro, veintinueve.

Desde lo lejos, el coronel pregunta:

—¿Qué te pasa muchacho?
—Nada, viejo. Que no me salía la cuenta. Ahora está bien.

Y no sólo sumas, en *Hasta que llegó su hora*, estos tipos duros ¡también hacen restas! En una solitaria estación desciende del tren «Armónica» quien busca a *Franck* (Henry Fonda). Le esperan tres malencarados pistoleros.

—¿Y Franck?
—Nos ha mandado a nosotros.
—¿Hay un caballo para mí?

Los tres tipos miran hacia los caballos, que son tres, mientras ríen.

—Parece ser que hay un caballo de menos.
—Yo diría que sobran dos.

Cesan las risas y empieza el tiroteo. Efectivamente, sobraban dos.

Cuando, más adelante, «Armónica» conduce ante el sheriff al que parecía su amigo, «Cheyenne», perseguido por la justicia, vuelven a restar:

—La recompensa por «Cheyenne» es de 5.000 dólares, ¿no?
—Judas se contentó con 4.970 dólares menos.
—Entonces no había dólares.
—Pero había mal nacidos.

Son más elaborados los cálculos que hace *Buffalo Bill* en *Pony Express* (Jerry Hoper, 1953), titulada en España como *El triunfo de Buffalo Bill* [3].

Se narra la aventura de la puesta en marcha del servicio de correo postal a través de relevos de jinetes atravesando los EE.UU. entre Saint Joseph (Missouri) y Sacramento (California). El proyecto chocaba con los intereses secesionistas californianos y por ello se intenta hacer fracasar el viaje inaugural. *Buffalo Bill* (Charlton Heston) y sus amigos intentarán evitarlo logrando que el *Pony Express* realice su trayecto con éxito.

La muerte tenía un precio (Sergio Leone, 1965)

En la siguiente escena se explica la infraestructura del servicio:

—Necesitamos dos hombres en cada estación: un jefe de estación y un vigilante.
—Necesitamos los mejores ponis indios.
—190 estaciones.
—Tres en cada estación: 570 ponis.
—80 jinetes. Ya están elegidos.
—Separadas por 10 ó 15 millas. Y agua en cada estación.
—Cubrirán una media de 45 millas diarias, cambiando tres veces de caballo. 12 segundos por cambio y el Pony Express cubrirá 250 millas diarias.
—¿Cuál es el tiempo récord de la diligencia desde aquí hasta Sacramento?
—21 días.
—¿Cuánto nos llevará así?
—10 días, menos de la mitad.

Con todos estos datos, se puede proponer a los alumnos preguntas como las siguientes:

— *¿Cuál era la distancia total del trayecto?*
— *¿Por qué las estaciones estarían separadas no más de 15 millas?*
— *¿Cuál era la distancia media de separación entre estaciones?*
— *¿Cuál es la velocidad media conseguida por el Pony Express? ¿Y por la diligencia?*
— *¿Cuántos jinetes y caballos intervenían en un viaje del Pony Express?*

Hay que señalar que las previsiones de *Buffalo Bill* son aceptables como aproximación, salvo algún desajuste de redondeo, lo cual no debiera ser algo a destacar, si no fuera por el maltrato a las matemáticas a que nos tiene acostumbrados Hollywood.

El truelo

Para muchos, *El bueno, el feo y el malo* es el mejor spaghetti western, del cual se recuerda una y otra vez[4] la magnífica escena del duelo en el cementerio. Los protagonistas son: el Bueno («Rubio», Clint Eastwood), un cazarecompensas; el Feo («Tuco», Eli Walach), un ladrón; y el Malo («Sentencia», Lee Van Cleef), un asesino a sueldo y sargento nordista. La acción se desarrolla sobre el fondo histórico de la Guerra Civil norteamericana, estableciendo una ácida comparación entre el goteo de muertes provocadas por la violenta avaricia de los pistoleros y las masacres con justificación patriótica.

Clint Eastwood, Eli Walach y Lee Van Cleef a punto para el «truelo» de *El bueno, el feo y el malo*

Los tres buscan un botín de 200 000 dólares en monedas de oro, que yace enterrado en una tumba de un perdido cementerio y, a su pesar, deben colaborar hasta localizarla reuniendo la información parcial que cada uno tiene. Llegados al cementerio (filmado en tierras burgalesas), el Bueno escribe el nombre de la tumba del botín en una piedra que deposita en el centro de un gran círculo empedrado rodeado de tumbas. Propone entonces un duelo a tres, lo que se ha dado en llamar un «truelo».

Dispuestos a desenfundar, cada uno valora la situación mirando a sus rivales. Son tres minutos de primeros planos, con miradas expresivas cuya tensión es dramatizada una vez más por la música. La escena es ya un clásico y ha sido replicada varias veces; entre otros, por Quentin Tarantino, admirador declarado de Leone. Por ejemplo, en la escena final de *Reservoir Dogs* (1992) y en la escena del bar de *Malditos bastardos* (2009), aunque con diferentes desenlaces. Con frecuencia es puesta como ejemplo de la Teoría de Juegos. ¿Cuál es la mejor estrategia a seguir por cada uno de los tres pistoleros?

La expresión «El bueno, el feo y el malo» se repite hasta 175 veces como metáfora en publicaciones científicas, según citan Bezuglyi y Handelman, quienes también la usan en el título de su reciente trabajo sobre *Medidas en Conjuntos de Cantor*[5]. Los investigadores españoles Armengual y Toral efectuaron el análisis matemático de los truelos en un trabajo que está accesible en la red[6]. Se citan como ejemplos de truelos: la Guerra de la antigua Yugoslavia, con el enfrentamiento de serbios, bosnios y croatas; también, las «pinzas» de dos partidos políticos contra el más votado en una institución.

Para poder hacer un análisis de estrategias con cálculo de probabilidades se deben asumir algunas premisas.

Caso 1

Supongamos que B, F y M son tres expertos tiradores y que por lo tanto ninguno va a fallar el tiro, acertando mortalmente al rival elegido. También, que los tres conseguirán disparar; apenas uno haga ademán de hacerlo, instantáneamente los otros le imitarán. Se puede considerar por lo tanto que habrá tres disparos simultáneos y certeros. Por último, supondremos que la elección por cada uno de ellos de uno u otro blanco entre sus dos oponentes es equiprobable.

Desglosando los sucesos y calculando sus probabilidades, se concluye que la probabilidad de que se salve uno cualquiera de los tres es de 1/4; que la probabilidad de que perezcan los tres es también de 1/4; y que, con esas premisas, es imposible que se salven dos. Es un buen ejercicio de aula.

Clint Eastwood, omnipresente en los «spaghetti» western

Ese truelo termina tras un único tiro por jugador y la probabilidad de aniquilación de cada uno de ellos es de 3/4, de modo que a ninguno le conviene empezar el «juego», lo cual deviene en una tensa espera. Es un caso de equilibrio inestable, donde cualquier factor no controlado puede desencadenar el fatal desenlace.

Este tipo de situación en Teoría de Juegos es conocida, precisamente, como «Atasco de Pistoleros», cuando el enfoque racional lleva al bloqueo de las acciones, dadas la baja probabilidad de éxito para cada jugador y la posibilidad del desastre total. El Equilibrio de Nash en Teoría de Juegos establece que cuando un grupo de jugadores aceptan las reglas y conocen la estrategia de los demás, suelen tender a minimizar sus pérdidas. En este caso, no sale a cuenta a nadie querer ser valiente. La estrategia óptima sería que los tres acordaran abandonar el juego.

Caso 2

Supongamos que cada jugador dispone de un único disparo. También, que F sólo acierta la tercera parte de las veces que dispara; M las dos terceras partes; y que B acierta siempre (para eso es el Bueno). Para compensar esa desigualdad, empezará por disparar F, luego lo hará M y por último B. Por supuesto, esto presupone un respeto a las reglas difícil de esperar en esos truhanes. Pero, aceptándolo, ¿cuál es la mejor estrategia que debiera seguir F?[7]

Si F elige disparar a B, al desarrollar el correspondiente diagrama en árbol obtenemos casos en que se salvan uno o dos pistoleros. Haciendo recuento: F tiene probabilidad 2/3 de salvarse, M tiene 8/9 y B tiene 2/9.

Si F comienza disparando a M, puede acertar y acabar con él (con probabilidad 1/3), pero, en tal caso, luego será el turno de B, que le matará con seguridad. Esto nos advierte de que acertar el tiro no es siempre lo más conveniente. Completando el diagrama, concluimos que, dentro de esta estrategia de F, todos tienen la misma probabilidad de salvarse, 5/9.

La consideración anterior sugiere una tercera estrategia para F, que no consiste en intentar abatir a alguno de sus oponentes, sino en fallar el tiro premeditadamente, tirando al aire por ejemplo. La situación que luego queda es que empieza a tirar M y, si sigue vivo, después tira B. Se deduce que siempre se salvarán dos de ellos, siendo la probabilidad de que se salve F de 5/6; la de que se salve M, también de 5/6; y la de que se salve B, sólo de 1/3.

Al comparar esos resultados, se llega a conclusiones paradójicas: la mejor estrategia de F es fallar su tiro. Y el mejor tirador, B, es quien tiene menor probabilidad de sobrevivir.

El truelo de la película se parece más al caso 1 ¿Cómo se resuelve? El Bueno abate al Malo, que no llega siquiera a disparar; es decir, no se cumple la primera premisa de ese caso (en general, y no sólo en el Oeste, va contra la racionalidad asumir la infalibilidad de alguien). El Feo no consigue disparar porque su pistola no lleva balas; se las quitó el Bueno la víspera. Con esa información oculta, el Bueno tenía una ventaja que había aprovechado; sólo debía concentrarse en abatir al Malo.

Y una curiosidad: ¿Cuál sería el valor actual del botín en juego? Sabiendo que en 1862, cuando transcurre la acción (Guerra de Secesión), la onza de oro valía 20,672$, aquellos 200 000$ eran el valor de 9 633 onzas de oro. Al terminar 2012, la onza de oro se compra a 1 655,80$. Así que el Bueno, el Feo y el Malo hoy andarían a tiros por 15 950 321$. Esta breve escena, comprensible sin conocer la película, ha dado lugar a varias cuestiones que pueden ser llevadas al aula.

Juegos de Lógica

Números, cálculos, estrategias… y también manipulación lógica. La encontramos en el anti-western *Pequeño gran hombre* (Arthur Penn. 1970), donde se cambian los tradicionales papeles de «buenos» y «malos».

Jack Crabb, el único superviviente blanco de la batalla de *Little Big Horn* (el título de la película es un juego de palabras con este nombre) relata su larga vida, ya con 121 años. Capturado por los indios siendo un niño, fue criado entre ellos y apodado «Pequeño Gran Hombre». Varias veces transitó entre los dos modos de vida: unas con los cheyennes (quienes se denominan a si mismos los «seres humanos»); y otras, con los hombres blancos. El momento clave de su relato es la batalla en la que el 7º Regimiento de Caballería, bajo el mando del General Custer, es aniquilado por los indios sioux y cheyennes bajo las órdenes del jefe Caballo Loco.

Esta película es la crónica de la traición de la nación norteamericana a sus pobladores primigenios. Tras desalojarlos paulatinamente de sus territorios, se prometió a los indios una tierra que sería suya «mientras la hierba crezca, el viento sople y el cielo sea azul». Confiados por esta promesa, fueron víctimas de sucesivas masacres. Su victoria sobre Custer fue el último acto de resistencia eficaz, al que siguieron sólo derrotas frente a las armas avanzadas. Como veremos, según esta película, esa derrota fue fruto de la enajenación megalómana de Custer, quien cercano a su fin grita: «¡Soy invencible! ¡soy invencible!».

Pequeño gran hombre (Arthur Penn, 1970)

Polémica en su día (no olvidemos la coincidencia nada casual con la Guerra de Vietnam), era una versión necesaria frente a anteriores décadas de cine del Oeste donde John Wayne y sus secuaces aparecían como «los buenos» que liquidaban sin remordimientos a «esos salvajes». En la película se presentan tres juegos lógicos, situaciones paradójicas basadas en negaciones y contradicciones.

El contrario

El primero de esos juegos es digno de Lewis Carroll. Aparece un indio que monta a caballo de espaldas, mirando hacia atrás.

—Hola «Oso Joven».
—Adiós.
[Voz en *off*: Era el muchacho al que había salvado la vida para vergüenza suya.]
—Atrapaste los conejos que fuiste a cazar?

Los coge y los tira.

—No.
—Entonces no le des los conejos que no has cazado a «Búfalo que se revuelca».
[Voz en *off*: Oso Joven se había convertido en un «contrario», el más peligroso de los guerreros cheyennes, porque su manera de vivir los vuelve medio locos. Excepto en el combate, un «contrario» lo hace todo al revés. Dice «adiós» para decir «hola»; «sí» cuando quiere decir «no»; se lava con arena y se seca con agua; y así todo lo demás sucesivamente.]

Se le ve arrojarse arena por encima y después meterse en el río.

Fotograma de *Hasta que llegó su hora* (Sergio Leones, 1968)

Los blancos-negros.

«Pequeño Gran Hombre» está en la tienda de su abuelo el jefe de la tribu cheyenne.

—¿Sabes, abuelo? no todos los blancos están locos.
—Me alegra oír eso, hijo mío. Yo creía que sí.
—No. Conozco a uno que es tan valiente como cualquier «ser humano».
—Me gustaría conocer a ese hombre y fumar con él. ¿Cómo se llama?
—Se llama General Custer.
—General Custer, ¿qué significa ese nombre, hijo mío?
—Significa «Cabello Largo».
—Buen nombre. ¿Cómo lo ganó?
—Lo ganó en la guerra que hicieron los blancos para liberar a los negros.
—Oh sí, los «blancos hombres negros». He oído hablar de ellos. Se dice que no son tan feos como los blancos, pero están tan locos como ellos.

Las brutales matanzas cometidas bajo el mando de Custer pronto harán cambiar de opinión a «Pequeño Gran Hombre».

Dustin Hoffman «pequeño gran hombre» corriendo serio peligro

Antes de la batalla

Custer habla sobre «Pequeño Gran Hombre»:

—Ese hombre puede serme muy útil, comandante. Primero me pidió que lo hiciera explorador. Luego casi lo cuelgo por renegado. Su juego está muy claro, alejarme de sus amigos los indios. Todo lo que ese hombre me diga será mentira. Por lo tanto, tendré un perfecto barómetro al revés.

Se acerca a «Pequeño Gran Hombre» y le dice:

—¿Qué crees tú que debo hacer? ¿Qué te parece, debo avanzar o retirarme?
[Voz en *off* de «Pequeño Gran Hombre»: Ahora estaba a mi merced. Lo que tenía en mis manos no era un cuchillo, sino la verdad.]
—¿Qué respondes?
—General, debe avanzar.
—¿Me aconsejas salir a campo abierto?
—Sí señor.
—No habrá indios allí, supongo.
—Allí le aguardan miles de indios y cuando terminen sólo quedará de vd. una grasienta mancha. Esto no es Río Wachita, general. No son niños indefensos ni mujeres los que

> le están esperando, son guerreros cheyenes y sioux. Vaya a su encuentro, si tiene valor.
>
> —Sigues intentando engañarme, ¿eh? Intentas hacerme creer que si ahora avanzo estoy perdido. Pero la sutil verdad es que tú realmente no quieres que dé la orden de ataque.

«Pequeño Gran Hombre» sonríe al verle avanzar hacia el desastre. Ha vencido a Custer en una peculiar versión del dilema del mentiroso («Yo siempre digo mentiras. Esto que acabo de decir, es mentira. ¿Soy mentiroso? ¿Digo mentiras?»).

De tiros, recompensas, masacres y emboscadas, las del *Far West* con razón se pueden llamar «Matemáticas Especiales».

Los enlaces para ver en Internet las escenas de éste y anteriores artículos, se encuentran en:

http://catedu.es/matematicas_mundo/Cinemateca.htm

José María Sorando Muzás
IES Elaios (Zaragoza)
<decine@revistasuma.es>

1 Expresión que como las escenas de *Los Siete Magníficos*, he tomado del blog de Ángel Requena: http://matedecine.wordpress.com/

2 Agradezco a Javier Pascual la información de esta película.

3 Debo agradecer la pista de estas escenas y las ideas para el aula a Yair Rodríguez.

4 Conocí esta escena por una conferencia en internet de Alfonso J. Población.

5 S. Bezuglyi y D. Handelman, *Measures on Cantor sets: the good, the ugly, the bad*, en línea: arXiv:1201.1953v1 [math.DS] 10 jan 2012.

6 Armengual, Pau; y Toral, Raúl. *Truels or the survival of the weakest*. En línea: arXiv:math/0606181v1 [math.PR] 8 jun 2006.

7 Esta situación se enuncia en «Enemigos», episodio n.º 10 de la 5.ª temporada de *Numb3rs*.

Publicaciones recibidas (1)

La Gaceta
de la Real Sociedad
Matemática Española
RSME
Vol. 15, nº. 4
2012
ISSN 1138-8927

X la tangente
Kangorou Italia
nº. 35
Ottobre 2012
Monza, Italia
ISSN 1971-0445

Llull
Revista de la Sociedad Española de las Ciencias y las Técnicas
Vol. 35, n.º 76
2012
SEHCYT
Zaragoza
ISSN 0210-8615

Epsilon
S.A.E.M. THALES
n.º 81, Vol. 29 (2)
2012
ISSN 1131-9321

XXV CongresoEnciga
Asociación dos Ensinantes de Galicia
n.º 76
Novembro 2012
Santiago de Compostela
ISSN 0214-7807

Investigación
y Ciencia
n.º 436
Enero 2013
Prensa Científica, SA
Barcelona
ISSN 02210136X

suma+ 72
Secciones
Marzo 2013
pp. 83-90

Jacob Bernouilli y el cálculo de probabilidades

Santiago Gutiérrez Vázquez

Hace trescientos años, en 1713, veía la luz un libro titulado *Ars conjectandi* (El arte de las conjeturas), considerado por un buen número de historiadores científicos como el origen del Cálculo de Probabilidades, en cuanto parte integrante de la ciencia Matemática. Su autor, Jacob Bernoulli, había fallecido en 1705, dejando inconcluso su trabajo. No obstante mereció ser publicado, y así lo entendió y lo hizo su sobrino Nicolaus, matemático como su tío, hijo del pintor Nicolaus, hermano de Jacob.

Jacob pertenecía a una familia de comerciantes originaria de los Paises Bajos, en concreto, de Amberes, de donde habían emigrado sus antepasados en 1583 huyendo de la persecución a que eran sometidos los protestantes por parte Española. De allí pasaron a Francfort, y posteriormente a Suiza. Se establecieron en Basilea en 1622, donde pudieron gozar de un gran prestigio.

Jacob, nacido en Basilea en 1654, era el quinto de los once hijos que tuvieron el farmacéutico Nikolaus y Margaretha. Hizo sus primeros estudios en la escuela pública de Basilea. Posteriormente, cursó, por deseo de su padre, filosofía, teología e idiomas en la universidad de esta su ciudad natal. A los 17 años se graduó como magíster en filosofía y a los 22 ad-

Hace

Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2012 y aceptado en enero de 2013

quirió el título de doctor en teología. A la vista de semejante preparación, lo que menos podía esperarse de él era llegar a verlo situado, pasados los años, en la cumbre de los matemáticos de su tiempo. Y es que desde muy temprano sintió una gran afición por las matemáticas, lo que le llevó a dedicarse a ellas, a escondidas de su padre, por su cuenta, sin maestro, y con libros no muy apropiados para un principiante como eran la *Geometría* de Descartes, la *Aritmética infinitorum* de Wallis y las *Lecciones de geometría* de Barrow. Interesado especialmente por la astronomía, a los 18 años ya resolvía complicados problemas relacionados con esta materia.

Sello con la imagen de Jacob Bernoulli con ocasión del Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en Zurich en 1994

Finalizados sus estudios, en la universidad de Basilea, se dedica a viajar por distintos países europeos. Entre 1676 y 1680, recorre Italia y Francia, además de Suiza. Durante estos viajes lleva consigo un cuaderno donde anota diversos comentarios científicos, entre los que se incluye la resolución de diversos problemas matemáticos. Dos años después de regresar a Basilea, en 1682, emprende nuevos viajes, esta vez por Inglaterra y Holanda. En Ámsterdam, conoce a Huygens, cuyos trabajos sobre el azar influirán, como se verá más adelante, de forma decisiva en las teorías de Jacob sobre el tema. En general, el resultado de sus viajes ha sido para él altamente provechoso. Estableció relaciones con destacados matemáticos europeos con los que no dejó de cartearse a lo largo de toda su vida.

En 1683, de regreso a casa, comienza su tarea docente como profesor de Física experimental en la universidad de Basilea. El año siguiente, con 30 años cumplidos, se casa con Judit Stupanus. Tuvieron dos hijos, chico y chica. Ninguno de los dos siguió la carrera de su padre. Sin embargo, la familia Bernoulli fue muy prolífica en vocaciones científicas.

Por lo que se refiere a las matemáticas, Jacob trabaja en dos direcciones: sobre el cálculo diferencial e integral y sobre el cálculo de probabilidades.

Encuentro con el nuevo cálculo de Leibniz

En 1686 Jacob es elegido para ocupar la plaza de profesor de matemáticas de la universidad de Basilea, que a la sazón había quedado vacante. Se convierte así en el primero de la saga de matemáticos Bernoulli que dominó la docencia en dicha universidad durante casi un siglo, aunque si tenemos en cuenta, además de los matemáticos, al conjunto de la familia, abuelos, hijos y nietos, que logró ocupar algún puesto de profesor en esa universidad, de esa o de otras materias, nos vamos a los dos siglos y medio sin interrupción. A éste se le denomina Jacob I, para distinguirlo del otro Jacob (1759 – 1789), nieto de Johann I, su hermano, astrónomo y científico de la Academia de ciencias de San Petesburgo. En este artículo, siempre nos referiremos al primero de los Jacob, aunque no lo explicitemos.

Por entonces, y como producto sin duda de los contactos establecidos durante su estancia en Alemania, Jacob recibe un trabajo de Leibniz titulado *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangetibus, qua nec irrationales quantitates moratur* (Nuevo método para los máximos y mínimos, así como para las tangentes, que también puede aplicarse a las cantidades irracionales). En este trabajo, publicado en la revista *Acta Eruditorum* de 1684, que fundara en 1682 el profesor de Filosofía moral y política Otto Mencke, y de la cual Leibniz era su primer y habitual colaborador, Leibniz establece las reglas generales de la diferenciación, más que de la derivación, utilizando el símbolo d para designar la diferencial.

Jacob propone a su vez el problema conocido como de la catenaria, esto es, encontrar la forma que adopta una cuerda flexible y homogénea, suspendida por sus extremos, sometida exclusivamente a su propio peso.

La comprensión del escrito no le resulta nada fácil a Jacob. Encuentra especialmente difíciles algunas de las conclusiones a que llega Leibniz, por lo que decide escribirle pidiéndole que se las aclare. Pero Leibniz anda en esos momentos de viaje por Italia, con lo que no puede satisfacer las peticiones de Jacob hasta tres años después. Durante la larga espera éste no solo ha resuelto ya sus dudas, sino que ha hecho varias contribuciones al desarrollo del nuevo método.

Sello con la efigie de Leibniz con motivo del 350 aniversario de su nacimiento

Posteriormente, recibe una segunda memoria de Leibniz, publicada en el *Acta Eruditorum* de 1686, titulada *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* (Sobre una geometría altamente escondida y el análisis de los indivisibles y de los infinitos). En esta memoria, establece Leibniz las reglas fundamentales del cálculo integral. Aquí introduce el signo $\int$, estilización de la letra S, inicial de la palabra *summatio*, como contrario al signo d, y lo justifica del siguiente modo:

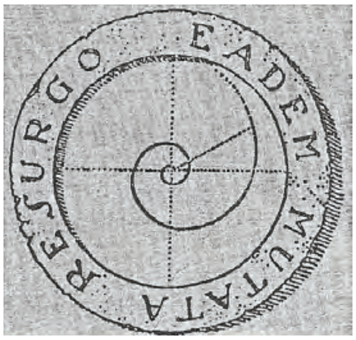
> Será ventajoso que en lugar de las sumas de Cavalieri (o sea, en vez de suma de todos los y), en lo sucesivo, se escriba $\int ydy$. En definitiva, con esto se manifiesta el nuevo tipo de cálculo que corresponde a la adición y multiplicación.(...) Del mismo modo que el signo $\int$ aumenta la dimensión, asimismo el signo d la reduce. El signo $\int$ denota una suma; d, una diferencia. (Wussing, 1989: 263)

En 1686 Leibniz propone el problema de la isócrona, esto es, determinar la curva de descenso de un móvil con una velocidad vertical uniforme. Jacob lo resuelve en 1690 y lo publica en el *Acta Eruditorum*. Se trata de la curva de ecuación $x^3 = ay^2$. En la solución de este problema aparece por primera vez el término integral, de modo que Leibniz lo adopta para sus escritos, utilizándolo en adelante en lugar del término sumatorio del que se servía hasta entonces.

Al final de este trabajo, Jacob propone a su vez el problema conocido como de la catenaria, esto es, encontrar la forma que adopta una cuerda flexible y homogénea suspendida por sus extremos, sometida exclusivamente a su propio peso. El problema fue resuelto geométricamente por Huygens, a quien se debe el nombre de la curva resultante: «catenaria» de *catena*, cadena en latín. Tanto Leibniz como Johann Bernoulli lo resolvieron por medio del cálculo infinitesimal.

Otras muchas curvas fueron objeto del interés de Jacob, en particular la espiral logarítmica de la cual demostró varias propiedades. Su ecuación en coordenadas polares es $\rho = Ce^{\kappa\theta}$, donde κ y θ son las variables de la curva. Se da la particularidad de que cualquiera que sea el valor de C se obtiene siempre la misma curva. Fue tal la fascinación que le produjo este hecho a Jacob que la denominó *spira mirabiles* y pidió que se grabara sobre su tumba con la divisa *Eadem mutata resurgo* (aunque cambie permanezco igual a mi misma), como símbolo de la resurrección. Al final, el tallista grabó la espiral de Arquímedes en lugar de la logarítmica.

Por estos años, se producía una controversia sobre la validez del método de inducción aplicado con frecuencia por los matemáticos de entonces. Jacob, tan amante como era del rigor, no podía dejar pasar por alto la crítica que se le hacía al método. Lo estudió profundamente y como resultado ideó el método de inducción completa.



Inscripción sobre la tumba de Jacob Bernoulli

Contó Jacob, para sus trabajos de análisis, con la colaboración de su hermano Johann, a pesar de ser trece años más joven y de estar estudiando aún su carrera de medicina, pero que, iniciado por Jacob en el conocimiento de las matemáticas, se había interesado ahora en las nuevas ideas del cálculo. Ambos hermanos contribuyeron decisivamente al desarrollo del cálculo diferencial e integral, aunque de una forma un tanto anómala: discutiendo, retándose a resolver diversos problemas, compitiendo entre ellos,… Jacob era más crítico, lento y riguroso, más profundo; mientras que Johann destacaba por su ingenio y su rapidez, era más brillante.

De cualquier forma, lo cierto es que realizaron grandes progresos en favor del cálculo de Leibniz. Hasta tal punto que puede decirse que entre Leibniz, Jacob y Johann fundamentaron en menos de veinte años todo el análisis infinitesimal.

Los antecedentes del azar

Desde muy antiguo eran tratados por filósofos y hombres de ciencia los sucesos que solo ocurrían determinados por la casualidad. Las predicciones a que daban lugar eran conjeturas únicamente, pero no llegaban a formar parte un cuerpo de doctrina suficiente como para merecer integrarse en las teorías científicas. De ahí el título de *Arte de las conjeturas* con el que, no exento de cierta humildad, recoge Jacob sus reflexiones sobre el tema.

Fueron no pocos los matemáticos que abordaron problemas sobre el tema del azar en épocas relativamente recientes. Ya en el siglo XV introduce Luca Pacioli varios problemas que dan lugar a consideraciones probabilísticas en la *Suma de conocimientos de aritmética, geometría, razones y proporcionalidad*. Eso sí, en una parte especial y bajo el título de *Problemas no habituales*. Uno de ellos, el problema de los repartos, lo vemos más tarde abordado por Pascal y Fermat (Ver *Suma*, número 70, pág. 111). Pacioli lo enuncia del siguiente modo:

> —Se realiza un cierto juego hasta 60 puntos y se hace una apuesta de 22 ducados. En razón de ciertas circunstancias, el juego no puede ser terminado y la apuesta debe ser repartida. En el momento de la suspensión, uno de los jugadores ha alcanzado la cifra de 50 puntos y el otro la de 30. ¿Qué parte de la apuesta debe recibir cada contrincante? (Sánchez y Valdés, 213)

Pacioli propone repartir la apuesta en razón directamente proporcional al número de puntos obtenidos hasta ese momento por cada uno. Así, deberían recibir 5/8 y 3/8 de la apuesta. Esta solución fue criticada por autores posteriores como Tartaglia, que no la consideró correcta y para exponer su idea propuso un caso límite. Supongamos que uno de los jugadores ha conseguido un cierto número de puntos (puede ser simplemente 1 punto) mientras el otro ha conseguido 0, en el momento de la interrupción. Según la solución de Pacioli, al primero le correspondería todo y al segundo nada. Este protestaría porque quedando mucha partida, si se hubiera conti-

La idea fundamental de Bernoulli es que lo importante reside en las partidas que faltan y no en las que ya se han jugado.

nuado, podría haber sucedido de todo. Pero, Tartaglia no propone ninguna solución. Hay que esperar siglo y medio para que Pascal y Fermat, en 1654, nos mostraran una solución correcta por medio de su correspondencia. Sin embargo, aún estos dos genios no hablaban de probabilidad, se limitaban a calcular el número de casos posibles y el número de casos favorables al suceso en cuestión.

El holandés Christiaan Huygens, que había tenido conocimiento de los trabajos de Pascal y Fermat en su viaje a Paris de 1655, intentó probar fortuna en esta nueva rama, aún balbuciente, de las matemáticas. Estudió el problema de los repartos por su cuenta, y, como resultado, escribió una obra titulada *De los razonamientos en los juegos de azar* que publicó en 1657.

Sello con la efigie de Huygens de una serie dedicada a personalidades de la ciencia

El Ars conjectandi

Jacob, durante sus viajes por Europa, tuvo ocasión de conocer a Huygens y su escrito sobre los juegos de azar. Inspirado en la lectura de la obra se adentró así mismo en los misterios del azar y durante sus últimos veinte años reflexionó sobre el tema. De este modo, llegó a escribir el célebre tratado de las conjeturas. No le dio tiempo a terminarlo, pero lo que hizo fue suficiente para que en él podamos ya apreciar los rudimentos de lo que hoy conocemos como cálculo de probabilidades.


JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruss. Sodal.
Mathematici Celeberrimi,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et Epistola Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.
BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↄ Iↄcc xiii.

Portada de la primera edición del *Ars conjectandi*

Estructura su libro en cuatro partes. En la primera, titulada *Apuntes sobre los posibles cálculos en los juegos de azar de Christiaan Huygens con notas de Jacob Bernoulli*, reproduce íntegramente la obra de Huygens y añade valiosos comentarios de su cosecha. Advierte que esta parte es fundamental para comprender el resto de la obra. En concreto, enuncia y demuestra una proposición clave, que luego generaliza. Dice así:

> Si tengo las mismas posibilidades de obtener a y b, entonces esto me vale $(a+b)/2$.

En efecto, aclara Jacob:

> Supongamos que alguien oculta 3 monedas en una mano y 7 en la otra. Dos personas señalan una mano diferente cada una, y obtienen las monedas de la mano señalada. Entre las dos, tendrán 10 monedas. Cada una tenía la misma oportunidad al elegir su mano, así que la esperanza conjunta debe ser dividida por la mitad, y la esperanza de cada una es obtener 5 monedas. Esta esperanza será la misma en el caso de que en una mano haya a monedas y en la otra ninguna. (Sánchez y Valdés, 2001:216)

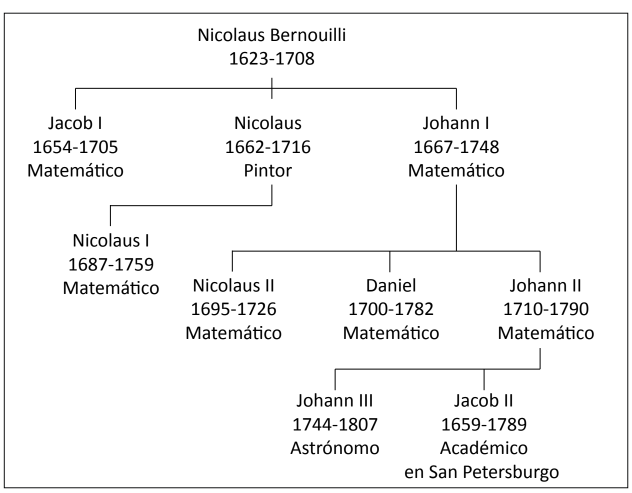
A partir de aquí, generaliza el caso a más de dos posibilidades. Así, en el caso de cuatro posibilidades la esperanza sería $(a+b+c+d)/4$. Considera, en fin, el caso general:

> Si el número de casos en que se obtiene la suma a es p y el número de los que se obtiene la suma b es q, y todos los casos son igualmente posibles, entonces la esperanza es $(pa+qb)/(p+q)$. (Sánchez y Valdés, 217)

Para demostrarlo, Jacob considera $p + q$ jugadores para $p + q$ urnas, y razona de la siguiente manera. En p urnas se colocan a monedas en cada una y, del mismo modo, en q urnas se colocan b monedas en cada una. Cada jugador obtiene las monedas de una urna, estando todos en iguales condiciones. El total de jugadores habrá obtenido $pa+qb$ monedas. Entonces la esperanza para cada uno, será $(pa+qb)/(p+q)$. De este modo, Jacob utiliza la esperanza matemática como punto de partida para la probabilidad.

Analiza entonces, el problema del reparto equitativo de la apuesta cuando se interrumpe el juego sin haber terminado. La idea fundamental de Bernoulli es que lo importante reside en las partidas que faltan y no en las que ya se han jugado. Supone varias situaciones que va complicando hasta llegar a una conjetura. Así, por ejemplo, si se trata de un juego entre dos jugadores, en que hay una apuesta inicial a, y el juego se interrumpe cuando a un jugador, A, le falta una partida para ganar y al otro jugador, B, le faltan tres partidas, analiza todas las posibilidades del máximo de partidas necesarias para dar por finalizado el juego. En este caso son 3. Puede ocurrir que el jugador B gane las dos primeras partidas y el jugador A gane la tercera, lo simbolizaremos por el paréntesis (B, B, A). Simbolizamos así todas las posibilidades como sigue:

La base de su idea reside en lo que hoy conocemos como ley de los grandes números, que Jacob enuncia, en su forma más elemental, en esta cuarta parte de su Ars conjectandi...



Arbol genealógico de toda la familia Bernoulli de científicos

(A, A, A), (A, A, B), (A, B, A), (A, B, B)

(B, B, B), (B, B, A), (B, A, B), (B, A, A)

Se ve que el jugador B solo gana en un caso, mientras el jugador A gana en los otros 7 casos. Así que A debe recibir $7a/8$; y B, $a/8$.

Estos y otros muchos casos analizados conducen a Jacob a formular una conclusión:

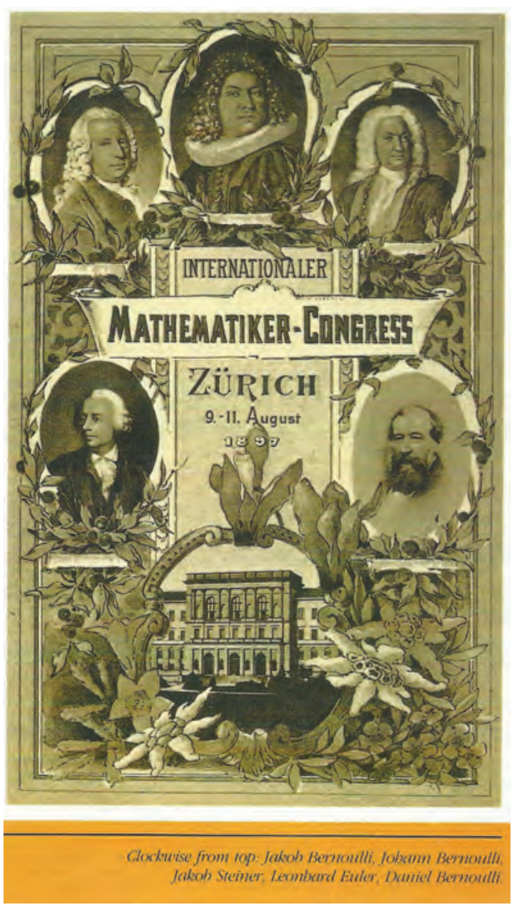
> Si a mi me falta una partida y a mi oponente le faltan n, entonces mi parte de la apuesta y la de él deben relacionarse en la proporción de $(2^n\text{-}1)/1$. (Sánchez y Valdés, 2001:218)

Más adelante, Jacob generaliza el problema del reparto al caso de juegos no equitativos. Supone un juego que consta de n partidas en el que el jugador A tiene una probabilidad p de ganar, mientras que la probabilidad de ganar de su contrincante B es $q=1–p$. ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador A gane k partidas del total?

Todo este tipo de problemas hizo necesario el desarrollo del cálculo combinatorio que Leibniz llamó el «arte de la combinatoria». A ello se dedica Bernoulli en la segunda parte del *Ars conjectandi*. Así como la primera parte toma como referencia a Huygens, en esta segunda cita a Van Schooten, Leibniz, Wallis y Prestet.

La tercera parte se ocupa de la aplicación de las reglas de la combinatoria a ciertos juegos de dados y de azar. Incluye una demostración del teorema del binomio. Aparecen aquí los denominados por Euler como números de Bernoulli. Estos números los encontró Jacob tratando de hallar unos polinomios que nos permitieran calcular en poco tiempo la suma de las potencias de los números naturales hasta el exponente 10. Observando que las fórmulas para el caso de las primeras potencias son polinomios de un grado en una unidad mayor que el exponente, por un ingenioso procedimiento en el que utiliza las propiedades de las integrales, calcula el polinomio para el caso general de potencias de exponente *n*. Los coeficientes de este polinomio son los números de Bernoulli.

La cuarta parte, que titula *Aplicación de la doctrina a cuestiones civiles, éticas y económicas*, además de la más novedosa es también la más interesante. En ella trata de ampliar el campo de aplicaciones de los teoremas establecidos en las secciones anteriores a las relaciones sociales y económicas. Es decir intenta ir más allá de los problemas de juegos hasta entonces tratados.



Cartel del primer congreso internacional de matemáticas celebrado en Zurich en agosto de 1897. En la parte superior aparecen tres miembros de la familia Bernouilli, con Jacob en el centro

Se inicia esta parte con consideraciones acerca de varios conceptos. Respecto de la probabilidad dice:

> La probabilidad no es más que un grado de la certeza y se distingue de ella lo mismo que una parte se distingue del todo. (Wussing y Arnold, 285)

Al intentar extender la noción de probabilidad a las cuestiones sociales y económicas tropieza con la dificultad de que en estas cuestiones no se puede saber el número de casos posibles de un suceso ni el número de casos favorables en una determinada experiencia. Tampoco se pueden tratar todas las posibilidades equitativamente. Esto sí ocurre, en cambio, en los juegos de azar. Al lanzar una moneda, por ejemplo, los dos resultados posibles son igualmente fáciles o difíciles. O al lanzar un dado, todos los números tienen la misma facilidad o dificultad de salir. Pero no es posible, por ejemplo, establecer la probabilidad a priori con que un determinado tratamiento de una enfermedad va a ser efectivo. O de que un control de calidad proporcione cierto resultado...

Ante esta dificultad, Jacob, además de la definición teórica de probabilidad o «probabilidad a priori», introduce un nuevo concepto como es la definición estadística de probabilidad, abriendo así la puerta a la mayor parte de las aplicaciones actuales del cálculo de probabilidades. La base de su idea reside en lo que hoy conocemos como ley de los grandes números, que Jacob enuncia, en su forma más elemental, en esta cuarta parte de su *Ars conjectandi*. Lo hace de la siguiente manera:

> ...al aumentar las observaciones crece también constantemente la probabilidad de que el número de las observaciones favorables alcance su verdadera relación con respecto al número de las desfavorables, y ello precisamente hasta el extremo de que dicha probabilidad supere finalmente cualquier grado de certeza... (Wussing y Arnold, 286)

La demostración de la ley o *teorema de Bernoulli*, como también se la conoce, le resultó al parecer especialmente difícil y, aunque es correcta, no deja de ser, además de larga, un tanto enrevesada. El propio Jacob confiesa que le llevó veinte años de reflexiones hacerla. Es decir, todo el tiempo que estuvo dedicado al tema de la probabilidad. La palabra probabilidad aparece, por cierto, en este párrafo por primera vez. Parece pues, que la ley fue una de sus intuiciones iniciales. La idea, de alguna manera, estaba ya en el ambiente. Refiriéndose a los razonamientos sobre los sucesos en que no es posible determinar los casos posibles y favorables, así se expresa Jacob:

> Para tales razonamientos se necesita una gran cantidad de observaciones… Aunque esto, naturalmente, es conocido de todos la demostración construida sobre fundamentos científicos, en general, no es tan frecuente y por esto necesitamos exponerla. (Sánchez y Valdés, 226)

La incredulidad sobre las cuestiones relativas a la probabilidad era todavía tan grande que, durante este siglo y los dos posteriores, aparecieron numerosos experimentos para verificar la ley o teorema de Bernoulli. El ejemplo de la moneda resultaba ser el más socorrido. Jacob, sin duda, había dado pie a ello, pues no solo enunció y demostró la ley, sino que calculó incluso el número de observaciones necesarias para tener la seguridad de que la frecuencia relativa del suceso se diferenciara de la probabilidad teórica en menos de una cantidad previamente fijada. La cantidad calculada por Jacob resultaba en la práctica excesivamente grande, no hacían falta tantas observaciones como él pedía.

Por desgracia, Jacob no pudo terminar su *Ars conjectandi* debido a que una infección de tuberculosis acabó con su vida prematuramente, en 1705, cuando solo contaba 51 años. Lo que faltaba era relativamente poco, pero tenía una importancia crucial. Pretendía extender la aplicación de sus teorías a materias de tipo jurídico, a cuestiones relativas a los seguros y a estadísticas de población. Su sobrino Nicolaus I, dándose cuenta de la importancia del trabajo de su tío, decidió publicarlo con un prólogo justificativo.

Incluso el propio Nicolaus continuó trabajando sobre el tema hasta el punto que pudo mejorar las estimaciones de Jacob acerca del número de observaciones necesario para aproximar la frecuencia relativa de un suceso a la probabilidad obtenida teóricamente a priori. Y la tesis que defendió para obtener su grado de licenciado en derecho se titulaba precisamente *Sobre la aplicación del arte de la conjetura a los problemas del derecho*.

Referencias bibliográficas

COLLETTE, J. P. (1985), *Historia de las matemáticas*, Siglo XXI de España editores, Madrid.

SÁNCHEZ, C., y C. VALDÉS (2001), *Los Bernoulli*, Nivola, Madrid.

WUSSING, H., y W. ARNOLD (1989), *Biografías de grandes matemáticos*, Prensas Universitarias, Zaragoza.

SANTIAGO GUTIÉRREZ VÁZQUEZ
Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»
<hace@revistasuma.es>

suma+ 72
Secciones
Marzo 2013
pp. 91-98

Calcular usando el contexto del dinero

David Barba y Cecilia Calvo

Tal como comentamos en las entregas previas de esta sección dedicada a las Matemáticas en Primaria, nuestra intención es la de analizar dinámicas de clase centradas en la conversación y la comunicación: ¿qué actividades podemos proponer para generar este ambiente de clase?, ¿qué preguntas podemos formular para fomentar las discusiones?, ¿qué modelos podemos presentar a los alumnos para ayudarlos a pensar y a comunicar sus razonamientos?

En esta tercera entrega continuamos haciendo propuestas en este sentido, ahora centrándonos en un tema del bloque «Numeración y Cálculo» con la misma intención de dar a nuestros alumnos y nuestras alumnas un papel protagónico en la construcción de su aprendizaje a partir de actividades en las que ell@s tienen la palabra.

El dinero como modelo para calcular

El uso del dinero como modelo estructurador de contenidos en la enseñanza de las matemáticas es sumamente importante debido a que es un contexto que refleja el sistema de numeración decimal. No es el único modelo que cumple esta propiedad, los

Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2012 y aceptado en enero de 2013

bloques multibase, los ábacos o la utilización de bolsitas con diez garbanzos agrupadas en cajas de diez bolsitas, también lo reflejan y creemos en la importancia de su presencia en las aulas. Sin embargo, el uso del dinero amplía muchísimo las posibilidades de juego ya que, forma parte del contexto cotidiano de los alumnos y brinda muchas más oportunidades a la comunicación.

Comentaremos dos grandes campos de la utilización del dinero en clase de matemáticas:

a) La comprensión del sistema de numeración posicional, en el que cabe incluir también el conocimiento en contexto de los números decimales.
b) El desarrollo de estrategias de cálculo y la oportunidad que brinda un contexto cotidiano para poder verbalizar la justificación de estas estrategias.

El dinero y las operaciones aditivas en el rango 0-100

En la primera entrega de «Ell@s tienen la palabra» (*Suma*, n.º 70) hablamos de la línea numérica como modelo y de una estrategia de cálculo asociada a este modelo: el encadenamiento (*stringing*, en Van den Heuvel-Panhuizen, 2001, pp. 90). Según esta estrategia para sumar dos números se parte del primero, se descompone el segundo y se suman al número de partida primero las decenas y luego las unidades. Aplicada esta estrategia a la suma $44 + 32$ resultaría:

$$44 + 30 = 74$$

$$74 + 2 = 76$$

Por lo tanto:

$$44 + 32 = 76$$

El uso del dinero como contexto puede generar otra estrategia de cálculo, distinta del encadenamiento: la descomposición (*splitting*, en Van den Heuvel-Panhuizen, 2001, pp. 90). Veamos un ejemplo: la imagen 1[1] presenta una situación en la que queremos saber el costo total de dos juguetes que valen respectivamente 44 y 32 €. Manipulando dinero lo más normal es agrupar los billetes por un lado, las monedas por otro y finalmente sumar los resultados parciales. En este caso, el cálculo efectuado sería el siguiente:

$$40 + 30 = 70$$

$$4 + 2 = 6$$

$$70 + 6 = 76$$

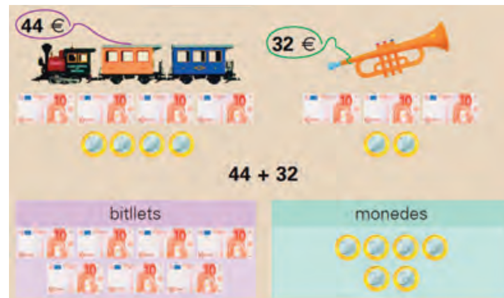


Imagen 1. ¿Cuánto valen los dos juguetes juntos?

En esta estrategia se descomponen los dos números para después sumar los resultados, a diferencia de la estrategia de encadenamiento en la que el primero queda fijo, siendo únicamente el segundo el que se descompone. Mientras el encadenamiento es una estrategia muy adecuada para realizar cálculos mentales y favorece la generación de estrategias alternativas o «cálculos astutos» (por ejemplo, sumar 73+19 sumando 73+20 y restando 1 al resultado), la descomposición es la base sobre la que se construyen los algoritmos de cálculo. En el caso de situaciones que impliquen la utilización de la resta, el proceso es análogo al de la suma con la única diferencia que en lugar de añadir billetes o monedas, se quitan.

Después de la fase de manipulación, entramos en el proceso de representación. Estas representaciones deben unificarse y comprimirse para poder contrastar las distintas soluciones o estrategias usadas por los alumnos y para poder discutirlas entre todos. En las imágenes 2a y 2b tenemos dos ejemplos de estas representaciones. La primera es especialmente adecuada para que la maestra o el maestro represente en la pizarra la explicación oral de un alumn@ que verbaliza su proceso, compartiéndola así con sus compañeros. La segunda implica una representación más formal y su disposición vertical ilustra nuestra afirmación acerca de que la estrategia de descomposición es la base sobre la que se construyen los algoritmos de cálculo.

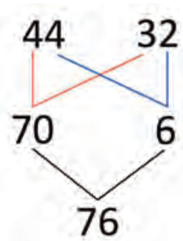


Imagen 2a. Para sumar 44+32, primero sumamos 40+30; luego 4+2; y finalmente, 70+6.

44	40	4
+ 32	30	2
76	70	6

Imagen 2b. Para sumar 44+32 descomponemos los dos sumandos.

En la imagen 3 se presenta una situación relacionada con la resta. Para calcular 56–35 manipulando dinero lo más normal es quitar tres billetes de los 5 que había y 5 monedas de las 6 que tenía, para finalmente sumar los resultados parciales. En este caso el cálculo efectuado sería el siguiente:

$$50 - 30 = 20$$

$$6 - 5 = 1$$

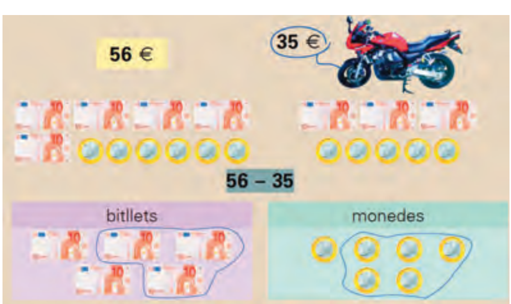


Imagen 3. Si tengo 56€ y compro un juguete que cuesta 35€, ¿cuánto me sobrará?

Reagrupando, quedan 20+1=21 euros. Pero se ha de tener en cuenta que si no ha habido un trabajo manipulativo anterior no se entiende por qué en el paso final se ha de sumar en lugar de restar.

¿Qué pasa en el caso de que las operaciones implicadas son «con llevadas»? En el caso de la suma solamente implica una pequeña modificación en el momento de reagrupar monedas y billetes.

Pongamos, por ejemplo, que queremos sumar 44+38. El proceso sería el siguiente:

$$44 = 40 + 4$$

$$38 = 30 + 8$$

Sumando los billetes, obtenemos:

$$40 + 30 = 70$$

Y sumando las monedas:

$$8 + 4 = 12$$

Cuando reagrupamos obtenemos $70 + 12 = 82$.

El caso de la resta es más complejo. Calcular, por ejemplo, 62 – 34 manipulando dinero supone un reto, ya que de 6 billetes de 10€ puedo quitar 3 sin problema, pero de 2 monedas de euro no podemos quitar 4. Se plantea así el problema de la resta con llevadas a nivel manipulativo.

Buscamos una solución: cambiar la descomposición de 62 para poder restar. En lugar de $62 = 60 + 2$ podemos considerar $62 = 50 + 12$, que corresponde a cambiar un billete de 10€ en monedas y quedarnos con 5 billetes y 12 monedas. Ahora ya podemos efectuar la resta 62 – 34: quitamos 3 billetes de 10 de los 5 que había y 4 monedas de euro de las 12 que teníamos y nos quedan 2 billetes y 8 monedas que representan 28€. En la imagen 4 podemos ver una representación de esta estrategia similar a la que aparecía en la imagen 2b para una suma.

62	50	12
- 34	30	4
28	20	8

Imagen 4. Representación de 62–34=28 por estrategia de descomposición.

Esta reflexión es muy importante de cara a la transparencia de los pasos implicados en el algoritmo de la resta con llevadas, ya que es la que empleamos cuando quitamos «la que llevamos» a las decenas del minuendo[2].

Una representación, de la estrategia de descomposición, que nos acerca más al algoritmo estándar es la llamada representación en columnas: simplemente consiste en un cambio de dirección de la representación que pasa a ser vertical.

En la imagen 5 podemos ver la suma 44 + 38 representada en columna. A nivel visual, esta representación puede parecerse mucho al algoritmo estándar, pero lo que las diferencia es el «discurso asociado».

$$\begin{array}{r} 44 \\ +38 \\ \hline 70 \\ 12 \\ \hline 82 \end{array}$$

Imagen 5

Ante la suma en columnas el alumno no dice: «4+8=12, escribo un 2 y me llevo una», ni «4+3=7», sino que trabaja con las cantidades reales: «40+30 son 70, 4 más 8 son 12, 70 y 12 son 82».

$$\begin{array}{r} 62 \\ -\ 34 \\ \hline 30 \\ -2 \\ \hline 28 \end{array}$$

Imagen 6

Vemos un ejemplo de cómo esta manera de sumar también puede convertirse en una estrategia de cálculo mental en el siguiente vídeo:

http://youtu.be/gdF7qutu5kc

Está extraído de la magnífica colección de vídeos del CEIP Aguamansa de Tenerife, donde Antonio Martín lleva años trabajando en este sentido.

La imagen 6 presenta una variación de la resta en columna e implica la resolución de una resta «con llevadas» de una manera distinta a las usuales en nuestro país (Van den Heuvel-Panhuizen, 2001, pp 150). Sorprende por su simplicidad, eficacia y transparencia y es una magnífico ejemplo de la potencialidad de la combinación del algoritmo en columnas con el discurso asociado en un contexto de dinero.

El «discurso asociado» en este caso sería: tengo 60€ y he de pagar 30, me quedan 30; tengo 2€ y he de pagar 4 «debo 2» (escribiendo «–2» para indicar esa deuda); si tengo 30 y debo 2 me quedan 28. ¿Podría ser ésta la salida a años y años de pelearnos con la opacidad del algoritmo de la resta «con llevadas»?

El dinero y los números decimales

Escribir o ordenar números decimales no es tarea fácil: que un alumno escriba 15 centésimas como 0,015 o que afirme que 6,32 es mayor que 6,4 porque 32 es mayor que 4, son errores frecuentes en nuestras clases. Pero si la introducción de los números decimales se hace en el contexto del dinero, los alumnos tienen un referente claro que les ayuda a resolver sus dudas y evaluar sus respuestas.

Si presentamos a un alumno un monedero amarillo que tiene un billete de 5€ y una moneda de 20 céntimos y un monedero verde que tiene un billete de 5€ y cuatro monedas de 1 céntimo, podemos invitarlo a que elija el monedero en el que hay más dinero o a que decida si la cantidad de dinero que hay en el monedero verde se escribe 5,4 o 5,04.

Se debe tener en cuenta que el contexto del dinero no agota el trabajo que debemos hacer con decimales puesto que hablando de dinero siempre se tienen dos cifras decimales. De todas maneras, el contexto de las medidas de longitud y el uso de las calculadoras (por ejemplo, para discutir por qué si escribimos 3,20 y pulsamos la tecla igual, aparece en pantalla un 3,2) complementan perfectamente estas carencias.

El dinero y la división decimal

Sabemos que una misma división puede tener resultados diferentes dependiendo de la situación que representa. La división 14:4 puede representar, entre otras cosas, el reparto de 14 libros entre 4 personas (en cuyo caso el resultado sería dar 3 libros a cada persona y que queden 2 libros sin repartir) o el reparto de 14€ entre 4 personas (en cuyo caso el resultado sería dar 3,50€ a cada persona). Por tanto, lo que decide si una división es decimal o no, es la situación a la que da respuesta esa división y no la maestra. Preguntas como «¿extraemos decimales?» o «¿cuántas cifras decimales hemos de sacar?» deberían desaparecer de un aula donde ell@s tienen la palabra.

El trabajo con divisiones decimales comienza con actividades manipulativas como las que se proponen en la imagen 7, donde se pide repartir diferentes cantidades de dinero en diferente número de cajas (cada rectángulo representa una de tales cajas y el que hecho que dos rectángulos tengan el mismo color implica que en ellos debe haber una cantidad igual de dinero).

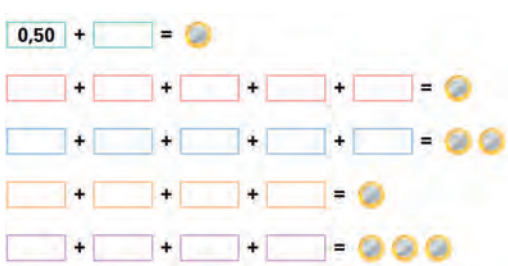


Imagen 7

Después de trabajar con este tipo de ejercicios es posible proponer otras situaciones como las que aparecen en la imagen 8 donde se pide repartir 641€ en cuatro sacos de manera que todos ellos contengan la misma cantidad de dinero.

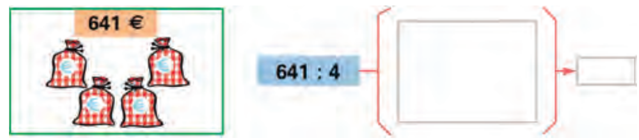


Imagen 8

Un discurso que podría acompañar estos repartos podría ser este: para repartir 641€ entre 4, separamos la cantidad total en grupos que sepamos dividir entre 4 fácilmente. Por ejemplo, uno de 400€, otro de 200€, otro de 40€ y otro de 1€. Y como:

$$400:4=100$$

$$200:4=50$$

$$40:4=10$$

$$1:4=0,25$$

En total, pondremos en cada saco:

$$160,25€=100+50+10+0,25$$

El cálculo contextualizado en el dinero mediante *applets*

A continuación presentamos algunos applets que ofrecen la oportunidad de manipular virtualmente dinero con la finalidad de desarrollar estrategias de cálculo y de poder verbalizarlas en discusiones grupales. Un primer ejemplo a destacar es (imagen 9):

www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/00411/spel.html

Imagen 9

Se trata de un *applet* en que se pide que se paguen diferentes importes exactos a partir de una serie de monedas y billetes disponibles. Cuando eso no es posible, se puede pedir que una moneda o billete se cambie en monedas o billetes más pequeños hasta poder pagar el importe exacto.

Un segundo ejemplo podría ser un applet con varias actividades relacionadas con el dinero y del que comentaremos un par de ellas a continuación:

www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/01041/

a) En la actividad *Wisselgeld* (imagen 10) se presentan situaciones en que se debe dar cambio al pago de una cierta cantidad con un billete mayor.

Imagen 10

b) En la actividad *Hoeveel kost dit artikel?* (imágenes 11a, 11b y 11c) se presentan situaciones en que se debe adivinar el precio de diferentes artículos. La barra que aparece a la derecha informa de si las aproximaciones que se van dando son por defecto o por exceso y de la proporción que representa la aproximación con relación al valor exacto).

Vale la pena comentar que los precios de los artículos que aparecen en el applet son ajustados con la realidad lo cual da lugar a interesantes discusiones sobre cuál sería una estimación razonable para comenzar.

Imagen 12a

Imagen 11a

Imagen 11b

Imagen 11c

Por último, queremos destacar el applet siguiente (imágenes 12*a* y 12*b*):

www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/03390/

En este applet se da una cantidad de dinero para repartir en 9 grupos iguales.

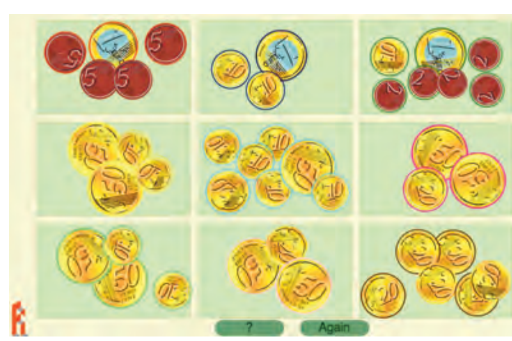


Imagen 12b

Potencial del contexto del dinero

El potencial del dinero como soporte para pensar y comunicar se hace evidente, por ejemplo, en actividades de estimación. Es muy natural para un niño o una niña entender que 1,9 x 5 es aproximadamente 10 si contextualizamos este producto en un problema de cálculo del precio aproximado de 5 tabletas de chocolate que cuestan 1,90 € cada una. Más aun, frente a esta situación pueden ver que 10 es una aproximación por exceso del precio exacto y pueden articular un discurso para explicarlo del estilo de: «como cada tableta cuesta un poco menos que 2 €, las cinco tabletas cuestan un poco menos que 10 €».

Un interesantísimo applet en la línea de este tipo de problemas es:

www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/03128/opdracht1.html

En él se recrea el funcionamiento de una caja en un supermercado que capta la información del precio de tres objetos que van apareciendo uno a uno y se pide que se estime el precio total que se ha de pagar (retener en la memoria los tres precios exactos es prácticamente imposible, por lo que la invitación a estimar viene dada por el propio contexto). Al introducir la respuesta, el applet muestra una línea donde se representan el valor exacto, el estimado y una valoración del error cometido.

Tal y como muestra Treffers en el capítulo IX de *Children Learn Mathematics* (Van den Heuvel-Panhuizen, 2001), los criterios de divisibilidad representan un ejemplo del potencial del dinero como herramienta de justificación. ¿Cómo se puede entender que hay criterios de divisibilidad que recurren a la suma de las cifras del número y otros que sólo piden mirar el número formado por las últimas cifras?

Ilustrémoslo con el criterio de divisibilidad entre 9. Si queremos saber si 278 es divisible entre 9 podemos pensar que tenemos 2 billetes de 100 €, 7 billetes de 10 € y 8 monedas de 1 € para repartir entre nueve personas. Entonces:

1) De cada billete de 100€ repartiríamos 11 € a cada persona y guardaríamos el euro sobrante.
2) De cada billete de 10€ repartiríamos 1 € a cada persona y guardariamos el euro sobrante.

Después de esos primeros repartos todavía quedarían por repartir 2 € (procedentes de los dos billetes de 100), 7 € (procedentes de los siete billetes de 10) y los 8 € de las monedas de 1. Y puesto que 2+7+8 no es divisible entre 9, no se podrá repartir la cantidad 278 entre 9 (sin recurrir a los decimales).

De manera análoga se puede explicar por qué el criterio de divisibilidad entre 3 también involucra la suma de las cifras del número. Sin embargo, en los criterios de divisibilidad entre 2, 5 y 10 sólo interesa la última cifra del número. Ilustremos la explicación de este hecho para el caso de la divisibilidad entre 5 tal como lo hicimos en el caso del 9. Para averiguar si 278 es divisible entre 5 podemos pensar, como hicimos antes, que tenemos 2 billetes de 100 €, 7 billetes de 10 € y 8 monedas de 1 € para repartir entre cinco personas. Al repartir cada billete de 100€ y cada billete de 10 € entre cinco personas no hay sobrante, por lo cual se podrá repartir la cantidad 278 entre 5 (sin recurrir a los decimales) únicamente si la cantidad de monedas de 1€ (la cifra de las unidades) es divisible entre 5.

La explicación del criterio de divisibilidad entre 4 es similar, pero permite una interesante variación que da lugar a un segundo criterio:

1) Para saber si 278 es divisible entre 4 volvemos a pensar que disponemos de 2 billetes de 100€, 7 billetes de 10€ y 8 monedas de 1€ para repartir entre cuatro personas. Cogemos cada billete de 100€ y como al repartirlo entre cuatro personas no hay sobrante, se podrá repartir la cantidad 278 entre 4 (sin recurrir a los decimales) únicamente el número formado por las dos últimas cifras (78) es divisible entre 4.

2) Pero también podemos proceder de otro modo:

a) Cogemos cada billete de 100€ y lo repartimos entre cuatro personas sin que haya sobrante.
b) Cogemos cada billete de 10€, repartimos 2€ a cada persona y guardamos los dos euros sobrantes

Después de estos primeros repartos quedan por repartir 14€ (provenientes de los siete billetes de 10) y 8€ (provenientes de las monedas de 1). Por tanto, se podrá repartir la cantidad 278 entre 4 (sin recurrir a los decimales) únicamente si el doble de la cifra de las decenas más la cifra de las unidades es divisible entre 4.

Reflexión final

Hemos intentado explicar cómo un tema, en principio rutinario, como es el trabajo con el sistema monetario puede convertirse en una oportunidad para generar un ambiente de clase donde los alumnos tienen mucho que decir. Basta que planteemos dinámicas de discusión y reflexión en las que participen activamente los alumnos guiados por nosotros, sus maestros. Para ello es necesario que previamente consideremos qué estrategias de cálculo queremos que vayan desarrollando, qué actividades propondremos para facilitar el desarrollo de estas estrategias, qué preguntas centrales realizaremos para favorecer la discusión grupal y cómo iremos observando a cada alumno para escucharlo después de haberle dado la palabra.

Referencias bibliográficas

Barba Uriach, D., y C. Calvo Pesce (2011), «Sentido numérico, aritmética mental y algoritmos», en J. E. García Jiménez, (coord.), *Elementos y razonamientos en la competencia matemática* (recurso electrónico), Ministerio de Educación, Subdirección General de Documentación y Publicaciones, 47-78.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (ed.) (2001), *Children Learn Mathematics*, Freudenthal Institute, Utrecht University.

David Barba Uriach
Universitat Autònoma de Barcelona

Cecilia Calvo Pesce
Escola Sadako, Barcelona
<tienenlapalabra@revistasuma.es>

1 Las imágenes 1, 3, 7 y 8 se han tomado de D. Barba, C. Barba y C. Calvo (2005). *3x6.mat Quaderns d'estratègies de càlcul*, Barcanova, Barcelona.

2 Pueden encontrar más información sobre este punto en cuatro artículos del blog <http://puntmat.blogspot.com.es/> dedicados a este tipo de restas, con fechas: 8/9/11, 20/2/12, 25/2/12 y 24/9/12. Las capturas mostradas en este artículo se tomaron en la fecha 6/2/13.

suma+ 72
Secciones
Marzo 2013
pp. 99-103

NRICH: *Enriching Mathematics* (Reino Unido)

Carme Burgués Flamarich

Queridos lectores de *Suma*, en el primer número de la revista del año 3×11×61 les quiero presentar la página web de un equipo de profesores de matemáticas, de diversos niveles educativos, que depende conjuntamente del Centro de Ciencias Matemáticas y de la Facultad de Educación de la Universidad de Cambridge: el *NRICH Project*.

http://nrich.maths.org/frontpage

La web forma parte del *Millennium Mathematics Project* de la Universidad de Cambridge junto con otras iniciativas para mejorar el aprendizaje matemático:

http://mmp.maths.org/

Como *Plus,* un magazín de matemáticas para alumnos de más de 16 años y para el público en general:

http://plus.maths.org

O como *Maths and Sport: Countdown to the Games*, dedicada a las matemáticas de los juegos olímpicos y paralímpicos de 2012:

http://sport.maths.org

Justificaré mi elección basándome en la utilidad que el recurso pueda tener para los educadores matemáticos sumamente comprometidos con la mejora del aprendizaje y de la enseñanza de las matemáticas.

Vale la pena...

Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2012 y aceptado en enero de 2013

Ante la realidad presente y respecto a las matemáticas en la enseñanza no universitaria, cabe preguntarse ¿qué podemos hacer para mejorar los resultados de su aprendizaje? Desde luego la respuesta no es poner más exámenes. ¿Cómo atender a la diversidad de niveles de adquisición e intereses del alumnado? No con la segregación, ni aunque se llame agrupación «flexible» o de otra manera.

> *Una colección extensísima de actividades clasificadas por edades y nivel de dificultad... de bajo umbral y techo alto... de alto potencial pero que pueden afrontarse desde un nivel de dificultad elemental.*

Evidentemente la mayor responsabilidad de la mejora está en manos del profesorado, pero tal como dijo Claudi Alsina en una de sus conferencias «los alumnos también sufren la diversidad del profesorado». Experiencia docente, conocimiento matemático y didáctico, competencia tecnológica, competencia comunicativa, creencias, compromiso…, admiten gradaciones y tendencias que combinadas ofrecen una situación muy compleja. No hay solución universal, es bien cierto. Sin embargo algunos recursos pueden ser útiles de diferentes maneras a la diversidad de maestros y profesores de matemáticas.

Uno de estos recursos es contar con buenas y ricas actividades, acompañadas de consejos para gestionarlas, de modo que no pierdan su alto valor cognitivo. ¿Cómo son estas actividades?

Tareas abiertas, en contextos con sentido para el alumnado, con poder de provocar interés. Deben ser tareas que todos puedan iniciar y, en las que cada alumno llegue hasta donde pueda o quiera. Que permitan a los más maduros o capaces, matemáticamente hablando, profundizar y a todos mostrar lo que pueden hacer, no solamente lo que no conocen. Es sorprendente la altura imprevista a la que pueden llegar algunos alumnos.

En este tipo de tareas el contenido puede mantenerse a un nivel muy simple, pero no el nivel de pensamiento matemático. Conjeturar, comprobar, generalizar, encontrar y expresar patrones…, son algunas de las acciones mentales que pueden implicar este tipo de actividades en primaria; y además, en secundaria, aplicar ensayo y error, trabajar sistemáticamente, predecir, justificar, demostrar, formalizar, elegir y analizar…

La gestión de estas actividades debe posibilitar la construcción de conocimiento, especialmente en las puestas en común de resultados y procesos de resolución. Para ello el docente deberá conocer profundamente las actividades que propone y cómo puede relacionarlas con los contenidos y las competencias.

Esta necesidad de plantear actividades ricas, interesantes, retadoras y de alto nivel matemático es la razón que me ha hecho elegir el proyecto NRICH para presentarlo a quienes lo conocen poco o nada.

Este proyecto nació en 1996 para dar soporte y estímulo a los alumnos más dotados para las matemáticas. Actualmente pretende llegar a toda clase de alumnos en un abanico muy amplio de edades (de 5 a 19 años). Busca desarrollar el pensamiento matemático, el razonamiento y la resolución de problemas, ofreciendo para ello actividades para alumnos, y recursos y formación para el profesorado. En ambos casos se anima a compartir experiencias, a trabajar en equipo y participar en el fórum de discusión. De manera continuada se ofrecen nuevas actividades, artículos, juegos, cursos, etc. Todo el material publicado es accesible.

Asimismo, se ofrecen cursos, seminarios, conferencias y talleres para maestros y profesores de diferentes niveles educativos y asesoramiento curricular para docentes, coordinadores de matemáticas en las escuelas y personal directivo. Publican artículos sobre educación matemática. Investigan y desarrollan usos de las nuevas tecnologías para elevar el nivel de aprendizaje y de enseñanza de las matemáticas. Participan en proyectos internacionales. Se ofrece también como lugar de encuentro de personas a las que interesen las matemáticas.

Hasta aquí nada especial. Hay centenares (¿o miles?) de portales que ofrecen cosas como estas. Lo que hace de NRICH una propuesta interesante es el tipo de actividades que proponen para el alumnado y el tipo de soporte para los maestros y profesores.

Para los alumnos encontramos propuestas de problemas y juegos para la Educación Primaria y para la Educación Secundaria en dos niveles de edad (figuras 1 y 2):

— *Lower Primary* (5 a 8 años)
— *Upper Primary* (9 a 11 años)
— *Lower Secondary* (11 a 14 años)
— *Upper Secondary* (15 a 18 años)

Se proponen problemas o juegos a los que el estudiante puede responder. También se muestran soluciones o comentarios de otros estudiantes. Hay un apartado muy interesante en el que se promueve la adquisición de procesos: *Be a Mathematician* (figura 3).

Las respuestas se cuelgan con facilidad y los alumnos reciben respuesta o comentarios. Los estudiantes pueden pedir ayuda para resolver las actividades o para pedir aclaraciones sobre matemáticas:

http://nrich.maths.org/discus/
messages/board-topics.html

Esta sección contiene todos los paneles de discusión de alumnos, de profesores y adultos interesados.

En resumen, para los que quieran iniciar o expandir un proyecto de matemáticas en inglés, tienen en *nrich* una oferta muy atractiva. Puede proponerse una actividad de clase con el objetivo de resolver de diferentes maneras uno de los nuevos problemas que se presentan y colgarlo en la web o bien resolver un problema más antiguo y contrastar las soluciones con las de otros alumnos que ha seleccionado y comentado el equipo de *nrich*. Sin em-

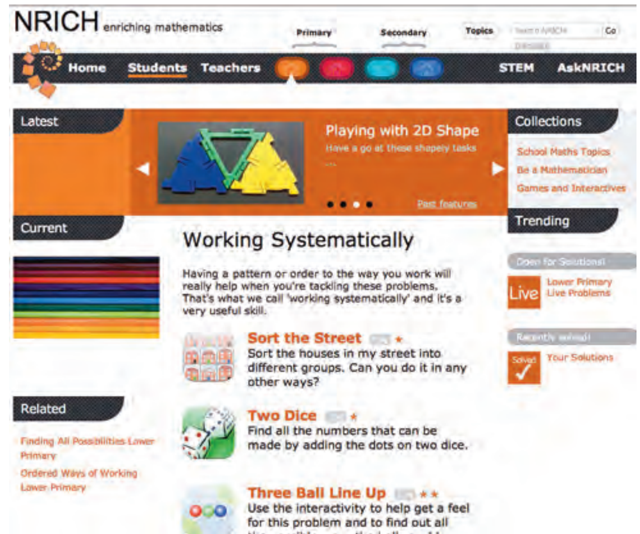


Figura 1

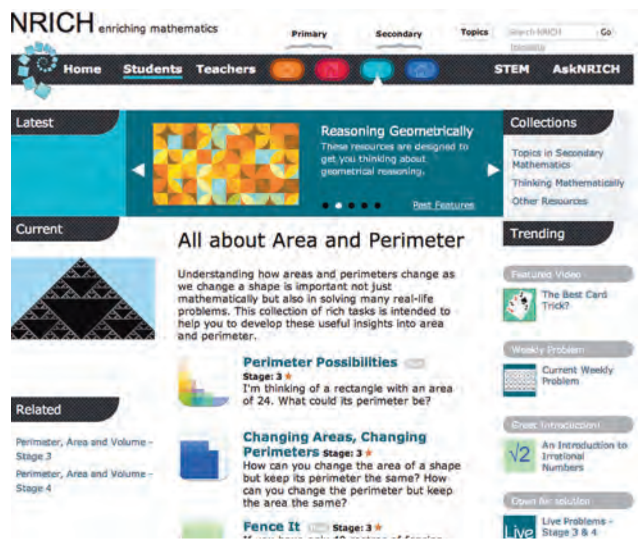


Figura 2

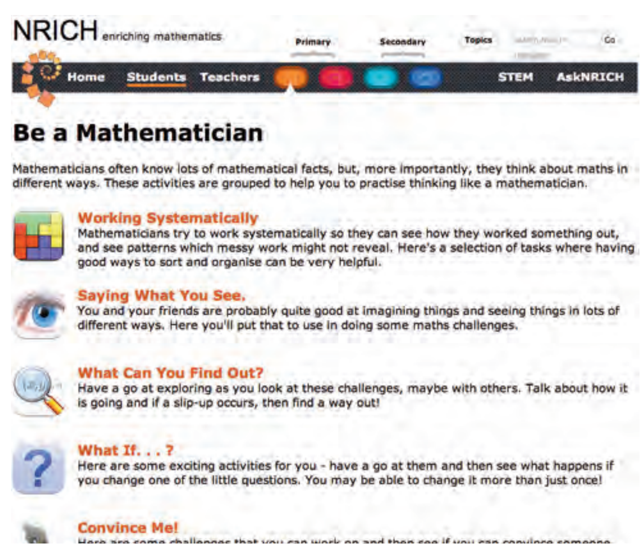


Figura 3

bargo, el mayor potencial del proyecto es el soporte para el docente de matemáticas, desde Educación Infantil a Bachillerato.

Lo que puede encontrar un maestro o maestra de Educación Infantil

Actividades con su guía correspondiente, es decir, cómo plantearla, qué objetivos matemáticos se persiguen, cómo estimular el razonamiento, cómo deben dejar constancia de la tarea realizada (dibujos, fotografías), recursos, cómo introducir variaciones, etc. Se tocan temas diversos: geometría, medida, números, clasificación… Se anima a enviar muestras del trabajo de los niños: fotografías, ejemplos de los que dicen, de lo que crean. También comentarios del diseño de la actividad, de cómo se ha desarrollado en su clase y preguntas relacionadas con la enseñanza de las matemáticas a esas edades. En la dirección:

http://nrich.maths.org/content/id/8853/eyfs%20statutory%20framework%20march%202012.pdf

encontrarán un documento en el que se enmarca el aprendizaje en educación infantil, incluyendo ideas sobre evaluación.

Para docentes de alumnos de 6 a 19 años

Una colección extensísima de actividades clasificadas por edades y nivel de dificultad. Se trata de actividades *LTHC* (*low threshold, high ceiling*), de bajo umbral y techo alto, es decir que son de alto potencial pero que pueden afrontarse desde un nivel de dificultad elemental. También se puede acceder a las actividades por temas matemáticos (*topics*).

Cuando se abre una actividad desde la ventana del maestro/a de la etapa educativa aparece a la izquierda un menú que permite el acceso a:

Problem. El enunciado de la actividad y la posibilidad de descargarlo en formato *word* o póster.

Getting started. Preguntas de las que se plantean al alumno para ayudarlo a iniciar la actividad.

Solution. En el caso de tratarse de propuestas anteriores aparece esta posibilidad donde se ofrecen algunas soluciones enviadas por alumnos comentadas por el equipo de *nrich*. Esta sección es altamente interesante para la gestión de estas actividades porque permite avanza posibles soluciones de nuestros alumnos y prever con mayor eficacia la puesta en común así como las posibles dificultades.

Teachers' resources. En primer lugar se justifica el interés y la importancia del problema, posibles maneras de introducirlo, incluyendo materiales complementarios como videos, *power points*, hojas de trabajo, etc. Se incluyen preguntas clave, posibles extensiones y adaptaciones según la problemática de los alumnos.

En el menú también aparecen enlaces a otras actividades con contenidos o estrategias comunes con la actividad que se está consultando.

Al final del problema aparecen «topics» relacionados con el del problema y donde se pueden encontrar más problemas con aspectos comunes. En la página *Teachers*, eligiendo *Primary* o *Secondary* (para bachillerato es el *Stage 5*), pueden abrir en el menú enlaces a *Curriculum Topics, Thinking Mathematically*, *Other Resources*, *Primary Professional Development*.

En estas secciones encontrarán las listas de contenidos que les llevarán a todas las actividades y artículos correspondientes, los procesos esenciales y las actividades correspondientes, recursos de diversos tipos, juegos interactivos…, incluyendo enlaces a actividades específicas con *applets*.

En el apartado *Professional Development* encontraran ofertas de formación en línea, artículos sobre tareas ricas, como iniciarse en este tipo de actividades, ideas para la clase, investigación sobre la propia práctica…

Disponen también de un buscador de actividades por temas en la parte superior de la página inicial *Topics:*

http://nrich.maths.org/public/leg.php

Solamente del tema «Using, Applying and Reasoning about Mathematics» tienen más de 2.500 actividades.

Para aquellos que tengan dificultades en orquestar actividades interdisciplinarias tienen en la parte superior de la página inicial *STEM* (ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas), con una estructura parecida a lo que se ha dicho anteriormente (figura 4).

Naturalmente, quedan más aspectos que pueden encontrar en *nrich* y que pueden serle útiles en la tarea de seleccionar, adaptar o diseñar actividades para sus alumnos de los 5 a los 19 años.

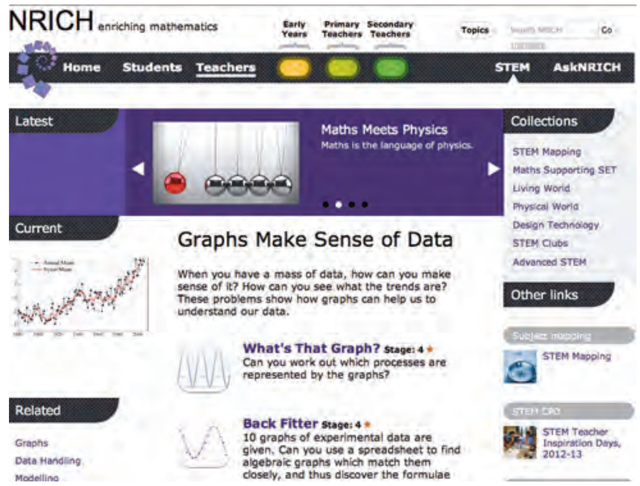


Figura 4

¡Por cierto!, aunque la traducción que se ofrece en la pagina es muy mejorable, siempre es un primer paso para entender la información. También pueden seguir a los entusiastas de la página en Facebook o Twiter. Hasta la próxima y ¡enriquézcanse!

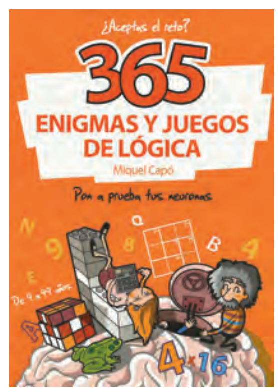
Carme Burgués Flamarich
Universidad de Barcelona
<valelapena@revistasuma.es>

Publicaciones recibidas (2)

LOSANGES
SBPMEF
RSME
n.º 19
Décembre 2012
Namur, Belgique
Nº d'Agrément de la Poste
P801339

DESAFÍOS MATEMÁTICOS
Propuestos por la Real Sociedad Matemática Española en su centenario
Coord. Adolfo Quirós
RSME, Ediciones SM
Madrid 2012
ISBN 978-84-675-5778-7

EL TEOREMA DE GÖDEL
UN ANÁLISIS DE LA VERDAD MATEMÁTICA
Josep Pla i Carrera
Real Sociedad Matemática Española, RSME
Madrid, 2012
ISBN 978-84-935196-7-4



365 ENIGMAS Y JUEGOS DE LÓGICA
Miquel Capó Dolz
Random House Mondadori, SA
Barcelona, 2012
ISBN 978-84-8441-226-7

EDUCAÇAO E MATEMÁTICA
Revista da Associaçao de Professores de Matemática
nº. 120
Novembro-Dezembro 2012
Lisboa
ISSN 0871-7222

PNA
Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática
Vol. 7, nº. 2
Enero 2013
Universidad de Granada
ISSN 1886-1350

suma+ 72
Secciones
Marzo 2013
pp. 105-114

Alan Turing y la manzana envenenada (1.ª parte)

Joaquín Collantes Hernáez
y Antonio Pérez Sanz

Siglo XX cambalache, problemático y febril… Así comenzaba el famoso tango (1934) de Enrique Santos Discépolo, en el que se recoge uno de los más ácidos diagnósticos de la condición humana en el cierre del segundo milenio de nuestra era.

Y si es verdad que el siglo XX fue febril en los aspectos sociales, políticos, económicos, tecnológicos, científicos y culturales, no es menos cierto que fue un siglo de lo más agitado y apasionante desde el punto de vista matemático. Y aún no ha terminado. Sí, los siglos matemáticos no terminan siempre cuando caen los dos ceros. Algunos duran 110 años; otros, sólo 90.

Si el siglo XX matemático empezó en el Congreso de París del año 1900 con la formulación de los 23 problemas de Hilbert, para nosotros, al menos, no terminó hasta el año 2006, coincidiendo con el *International Congress of Mathematics* (ICM) de Madrid y la demostración de la Conjetura de Poincaré por parte de Perelman.

En esta sección intentaremos hacer un recorrido rápido y discontinuo por las mentes matemáticas más notables de los últimos cien años. Por ella desfilarán hombres y mujeres que han iluminado con su genio alguno de los campos más actuales y potentes de la

Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2012 y aceptado en enero de 2013

matemática actual. Turing, Wiles, Gödel, Kolmogorov, Santaló, Mandelbrot, Perelman, Noether, Kline y Thom, entre otros, visitarán estas páginas.

Pero no queremos mostrar sólo al personaje (sus obras y aportaciones), sino sobre todo a la persona, al ser humano que hay detrás de cada teorema y de cada demostración. Personaje + persona. Esa es nuestra intención: presentar a los lectores el rostro más humano de las matemáticas a las puertas del tercer milenio.

No estaré solo en esta mi tercera colaboración estable, en forma de sección fija, con la revista Suma. Esta aventura por la historia de la matemática reciente la intentaré llevar a buen puerto con mis jóvenes amigos y colegas José Luis Muñoz y Francisco Maíz. Y con los sabios consejos literarios de Joaquín Collantes.

Y para empezar, nada mejor que nuestro modesto homenaje, con unos meses de retraso por su centenario, a Alan Turing, el hombre que sabía demasiado. Es de justicia.

Buckinghamshire, Inglaterra: 1938

El hombre que tenía la carpeta sobre la mesa se revolvió incómodo en su asiento y miró con un punto de desconfianza a su interlocutor, un joven excesivamente atildado, para su gusto, que le había entregado el dossier encargado… y que en ese momento, ante la desconfianza de su superior, insistía:

—¿Usted cree que es de fiar?
—Sí, señor.
—¿Esta seguro?
—Por encima de todo es un gran matemático.
—¿Por encima de todo?
—He querido decir… bueno, quiero decir… que es el mejor de todos nosotros. Y, por supuesto, el que con mayor eficacia puede ayudar a Inglaterra en las actuales circunstancias —contestó el joven, desviando su mirada hacia el suelo—.
—Está bien, está bien, está bien... Pero sepa usted que estará especialmente vigilado. En estos tiempos todos somos susceptibles de cometer errores que pueden ser fatales para la patria. Los homosexuales y las mujeres, y espero que esté de acuerdo conmigo, son personas especialmente sensibles, especialmente vulnerables a los ataques de agentes extranjeros. Además, la homosexualidad es una actividad (¿actividad? —se preguntó sorprendido el que escuchaba—) prohibida en Inglaterra y por lo tanto penada por la Ley. Por otra parte, tengo entendido que el señor…
—Turing. Alan Mathison Turing, señor —añadió el que estaba de pie, al ver dudar a su superior—.
—Pues bien, tengo entendido que el señor Alan Mathison Turing es, además, un hombre hermético y de personalidad un tanto complicada, por utilizar un término… En fin, no me fío de quienes no saben separar su vida privada de su vida profesional…
—Pero, de momento, señor, no sabemos…

Claramente molesto por la interrupción, el hombre sentado fulminó con la mirada a su interlocutor, para continuar diciendo:

—Además, el trabajo que va a llevar a cabo va a ser de estricto secreto. Pero ya veo que las referencias son inmejorables –dijo, ojeando el primer folio del dossier, y añadió- pero a mí, como militar, siempre me queda un poso de desconfianza… –iba a decir hacia los civiles, y probablemente hacia las mujeres y los homosexuales, pero frenó el comentario por respeto al civil que tenía delante y que, al igual que el matemático que le proponían, tenía un brillante expediente académico, más que suficiente para formar parte del Government *Code and Cypher School* (Escuela Gubernamental de Código y Cifrado)—.

En cuanto se quedó solo en el despacho, situado en la planta baja de la mansión conocida por el nombre de *Bletchley Park*, el militar vestido de civil que se sentaba ante la barroca mesa de caoba, se arrellanó en su asiento, abrió la carpeta en la que una letra ordenada y picuda había escrito «Informe secreto sobre Alan M. Turing», y comenzó a leer… (págs. 108 y 109).

Terminada la lectura del informe el hombre abrió un cajón de su mesa, sacó un tampón y una almohadilla y estampó en tinta roja en la carpeta, sobre el nombre que la identificaba, la palabra «APROBADO». Después, levantó el auricular de uno de los tres teléfonos que había sobre la mesa y dijo:

—¡Que se incorpore a su trabajo mañana mismo!

Bletchley Park: 1938-1945

Bletchley Park estaba situado en la región de Buckinghamshire, en plena campiña inglesa, a 50 millas al noroeste de Londres. En este lugar se instaló la sede del *Government Code and Cypher School* (GC&CS) una nueva organización creada para descifrar códigos militares secretos que reemplazaba a otro departamento gubernamental llamado *Room 40*, organización creada para interceptar y controlar las comunicaciones del ejército alemán durante la I Guerra Mundial.

Los extensos terrenos que rodeaban la mansión de estilo neogótico Tudor, y que en su día tuvieron unos jardines en consonancia con la edificación, alojaron una serie de edificaciones auxiliares y barracones, o *huts*, donde se llevaba a cabo el trabajo real que efectuaban las doscientas personas que inicialmente se instalaron allí en el año 1938, cuando se tuvo la certeza de que la guerra con Alemania sería inevitable.

Una vez iniciada la II Guerra Mundial y con los ejércitos alemanes avanzando imparables por Europa, los esfuerzos para contrarrestar ese avance por parte de los aliados hicieron que aumentara la llegada de los llamados técnicos a *Bletchley Park*. Así, del grupo inicial de doscientos expertos se alcanzaría la cifra de diez mil en 1945, a modo de ejército en la sombra que luchaba a su manera, pero eficaz e inteligentemente, contra el enemigo. Eran hombres y mujeres de total y absoluta confianza reclutados principalmente mediante la llamada red de *old-boys* y *old-girls*, es decir, por veteranos del citado *Room 40*, cuya eficacia ya había sido sobradamente demostrada.

Así, aquellos veteranos técnicos se encargaron de ponerse en contacto con sus antiguos compañeros y profesores de Oxford, Cambridge, del *Newnham College* y del *Girton College* de Cambridge, indagando y confiando en su consejo acerca de quiénes podrían ser susceptibles de ser reclutados para una misión tan secreta que ni siquiera podían explicar de qué misión se trataba. Secreto absoluto: el enemigo lo ve todo, lo escucha todo. Un comentario imprudente puede significar el fracaso de una operación militar o una derrota en el frente (sigue en pág. 110).

Bletchley Park, en Buckinghamshire, al noreste de Londres

Informe secreto sobre Alan M. Turing

a) Alan Mathison Turing nació el 23 de Junio de 1912, en una clínica de la zona de Paddington, en Londres. Su padre, Julius Mathison Turing, era un alto funcionario del gobierno británico destinado en India que se casó con Ethel Sara Stoney, de origen irlandés e hija del ingeniero jefe de los ferrocarriles de Madrás. La madre del matemático se trasladó a Londres para que su hijo naciera en la metrópoli. En 1913 regresó junto a su marido dejando a su hijo, de tan solo un año, en Londres al cuidado de unos parientes. En 1926 volvieron definitivamente a Inglaterra.

b) Desde una edad muy temprana el niño dio muestras de una gran inteligencia. Y también desde muy pequeño mostró su interés por los rompecabezas y los juegos matemáticos. En el año 1918, a la edad de seis años, ingresó en el colegio St. Michael. Sus profesores observaron enseguida su interés por el cálculo y la facilidad con que resolvía problemas inaccesibles para un niño de su edad. Más tarde ingresó en la Hazlehurst Preparatory School donde fue un alumno normal, sin destacar especialmente en ninguna materia pero donde se interesó por primera vez en la práctica de deportes y por el ajedrez, intereses que mantendría durante toda su vida.

c) En 1926, a la edad de catorce años, ingresó en la Sherborne School, en el condado de Dorset, (se cuenta como anécdota que su primer día de clase coincidió con una huelga de transportes. El joven Turing, sin arredrarse ante tal contingencia y demostrando su magnífica condición física, recorrió en bicicleta las más de 60 millas que separaban su casa de la escuela, hazaña que fue recogida en la prensa local y que le haría muy popular entre sus compañeros de estudios). En la *Sherborne School* chocó con un sistema educativo poco estimulante para él. Su inclinación hacia las ciencias, la física, la química y las matemáticas lo enfrentaron a una línea educativa cuyas directrices estaban más encaminadas hacia el estudio de los clásicos y de las lenguas muertas. A pesar de todo, consiguió seguir adelante con sus preferencias científicas que lo llevarían a ganar premios escolares de matemáticas.

d) En 1928, recién cumplidos los dieciséis años, descubrió los trabajos de Albert Einstein sobre la Teoría de la Relatividad y sobre mecánica cuántica[1] a través del libro «La naturaleza del mundo físico», de A. S. Eddington. Y no

sólo pudo comprenderlos, sino que además los discutió con sus profesores, sorprendiéndoles con sus propias notas al respecto. Este año también conoció a Christopher Morcom, estudiante de un curso superior, cuya intensa amistad tuvo un gran efecto intelectual sobre el joven Turing, ya que trabajaron juntos en ideas científicas. La repentina muerte de Morcon en el mes de febrero de 1930 le produjo una profunda crisis nerviosa.

Por culpa de la crisis y de centrar su atención solamente en las disciplinas de ciencias, descuidando las materias de letras, no superó los exámenes para ingresar en el *Trynity College* de la universidad de Cambridge, que era su primera opción, teniendo que contentarse con la segunda: el *King´s College* de la misma universidad, donde estudió con el reputado matemático Godfrey Harold Hardy.

e) En 1932 centra su interés en la física a partir del descubrimiento de tres obras: el «Estudio de los fundamentos lógicos de mecánica cuántica», de John von Neumann, la obra de Bertrand Russell[2] titulada «Introducción a la filosofía matemática», y el libro «Principia Matemática», obra conjunta de A. N. Whitehead y B. Russel, considerada la obra maestra de la lógica matemática.

f) Entre 1932 y 1933 forma parte de movimientos y asociaciones estudiantiles, al tiempo que asume plenamente su identidad homosexual. Se sabe que tuvo un «más que amigo» llamado James Atkins, también estudiante de matemáticas. Ambos, homosexuales discretos, evitaron los ambientes homosexuales de todos conocidos en los círculos universitarios e intelectuales[3]. Además, y dada su complexión atlética, dedicó en esta época gran parte de su tiempo a actividades deportivas al aire libre, preferentemente a correr o remar, obteniendo muy buenos registros.

g) En 1933 es iniciado en los principios lógicos matemáticos por el ya citado Bertrand Russel, filósofo y matemático de enorme prestigio. Con la llegada al poder de los nacionalsocialistas de Adolf Hitler, se adhirió a los movimientos antibélicos que estallaron en Inglaterra y en el resto de Europa. Con todo, la postura de Turing fue netamente patriótica, ya que no se decantó, como algunos de sus compañeros de universidad, hacia movimientos revolucionarios de ideología marxista.Este mismo año concluye su estudio «Los números computables, con una aplicación al *Entscheidungsproblem*», que publicaría al año siguiente. En dicho estudio reformuló los resultados obtenidos por Kurt Gödel en 1931 sobre los límites de la demostrabilidad y la computación, sustituyendo al lenguaje formal universal descrito por Gödel[4].

i) En 1936 obtiene el Smith Prize por su trabajo sobre Teoría de Probabilidades titulado «Sobre la función de error de Gauss». Curiosamente, en este trabajo, y casi sin proponérselo, presenta una demostración del teorema central del límite, sin saber que Lindeberg lo había demostrado diez años antes. Este hecho le proporcionará a pesar de su corta edad un gran prestigio nacional e internacional.

j) En el mes de septiembre de este mismo año viajó a los Estados Unidos de América para trabajar durante los dos años siguientes en la Universidad de Princeton. En dicha universidad trabajó en el equipo del investigador especialista en lógica Alonzo Church, con quien haría sus estudios de doctorado en lógica matemática, analizando la noción de intuición en la matemática. También avanzó en su proyecto «Ordinal Logics», probablemente su más profundo trabajo matemático y que lo aproximaría al mundo de lo abstracto. Durante el verano de este mismo año publica su obra más significativa «On Computable Numbers with an Application to the Entscheidungsproblem» donde pone la simiente de la Teoría de la Computabilidad y presenta la idea de la llamada «Maquina de Turing»[5].

j) En 1938 obtuvo el Doctorado en Princeton con la tesis que llevaba por título «Systems of Logic Based on Ordinals», trabajando posteriormente como becario de John von Neumann en el Institut for Advanced Studies, donde le ofrecieron un puesto académico, puesto que Turing rechazó para volver a Inglaterra durante el verano del presente año.

1 El hombre que leía el informe empezó a subrayar en rojo algunos párrafos.

2 Doble subrayado en rojo con el añadido al margen y en letras mayúsculas: «ATENCIÓN: PACIFISTA»

3 Doble subrayado en rojo de los tres renglones.

4 Nota: Ya desde sus primeras publicaciones aparece un proyecto de máquina autómata, no física sino abstracta. Y en uno de de sus trabajos sienta con gran brillantez las bases teóricas del problema formulado por David Hilbert a principios de siglo, el citado Entscheidungsproblem, o problema de decisión, sobre la existencia de un algoritmo de respuesta universal.

5 Nota: la información sobre las características de la citada máquina, por extensas, se presentan en informe aparte.

Otro tipo de reclutamiento fue, cuando menos, original: a través de un crucigrama publicado en el periódico *The Daily Telegraph* y presentado como un concurso. Los concursantes que lograban hacer los crucigramas en menos de 12 minutos eran seleccionados y se les proponía realizar un trabajo especial para contribuir al esfuerzo bélico de Gran Bretaña. De esta manera se crearon equipos de cripto-analistas cuya única e importante misión consistiría en descifrar el mayor volumen de mensajes secretos del ejército alemán interceptados y, sobre todo, en el menor tiempo posible.

Los equipos estaban compuestos por un heterogéneo grupo de matemáticos, ingenieros, traductores de alemán, físicos, químicos, expertos en geografía e historia, lingüistas, especialistas en cultura clásica, maestros del juego de ajedrez, arqueólogos expertos en jeroglíficos, expertos en crucigramas, psicólogos y hasta filósofos. En fin, por una variopinta amalgama de mentes preparadas para abordar todo tipo de problemas y, sobre todo, con capacidad y entusiasmo para resolverlos. A este grupo se uniría Alan Turing como responsable de descifrar los códigos secretos de los mensajes interceptados procedentes de la marina alemana.

El sistema de trabajo consistía en que un problema a primera vista irresoluble pasaría de experto en experto hasta que cayera en las manos de quien tuviera las herramientas mentales apropiadas para resolverlo…, o para seguir resolviéndolo, ya que a veces cada experto resolvía el problema parcialmente. Así que lo volvía a pasar a otra persona para que lo siguiera construyendo sobre el trabajo de desciframiento ya efectuado por él; y a veces éste lo pasaba a otro experto, y ése a otro…, hasta que tenían la completa seguridad de que el problema estaba resuelto.

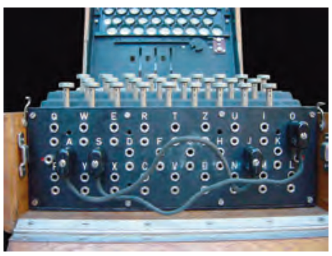
El trabajo de los expertos se organizó como en una fábrica. Cada grupo de criptoanalistas, también llamados rompecódigos, trabajaba en distintos pabellones separados entre sí a modo de secciones de una misma cadena de trabajo. A estos pabellones se los denominaba cabañas o *hut* y estaban numerados para distinguir la especialidad de quienes trabajaban en ellos. De esta manera mientras técnicos y cripto-analistas de un *hut* se dedicaban a interceptar mensajes del espionaje alemán o de sus ejércitos, los de otro tenían por misión el descifrado de estas comunicaciones encriptadas, pasando los mensajes descifrados a un tercer *hut* donde se traducían al inglés; y de allí, a un cuarto departamento dedicado a analizar los resultados obtenidos y a recomponer una imagen de las operaciones desentrañadas. Trabajando ininterrumpidamente las 24 horas del día aquellos equipos fueron piezas fundamentales para la victoria de los ejércitos aliados. Además, la tecnología que inventaron y desarrollaron marcaría el comienzo de la era de la informática que dominaría el resto del siglo XX.

Enigma: 1917-1945

En 1917 el norteamericano Edward H. Hebern ideó un sistema mecánico de rotores mediante los cuales transformaba caracteres utilizando alfabetos independientes, como método de sustitución polialfabética. Pero sería un año después, a finales de la I Guerra Mundial, cuando un ingeniero llamado Arthur Scherbius patentó una máquina para encriptar textos en clave a la que bautizó con el nombre de *Enigma*, sin poder imaginar en ese momento que su máquina sería decisiva para las operaciones militares en la segunda gran guerra europea que nadie esperaba, pero que apenas tardaría veinte años en llegar.

Scherbius se asoció con E. R. Ritter fundando la empresa *Scherbius & Ritter* con la idea de que la máquina se vendiera a las grandes empresas con vistas a transacciones comerciales más o menos secretas que lo serían del todo encriptándolas. Convencidos de sus posibilidades militares para la elaboración de mensajes en clave, se la ofrecieron a la marina alemana, que no mostró un especial interés ella. Decepcionados, los dos socios vendieron su empresa a la alemana *Chiffriermaschinen*, que durante los años siguientes comercializaría máquinas de distintas características para uso exclusivamente civil, distinguiendo cada uno de los modelos de venta en el mercado con las primeras letras del alfabeto.

A medida que se asentaba el prestigio de la máquina entre las empresas alemanas y también europeas, la marina alemana recapacitó y desarrolló sus propios modelos de *Enigma*.



La máquina *Enigma*

Con la llegada de los nacionalsocialistas al poder en el año 1933, las prioridades del ejército alemán pasaron a un primer plano y la marina, como precursora del proyecto, contó con todas las facilidades gubernamentales para desarrollar y mejorar una máquina que, ahora que otros vientos distintos a los de la década anterior corrían por Europa, parecía más que imprescindible para el engreído III Reich.

Las investigaciones y los modelos de *Enigma* habían ido avanzando hasta que en 1934 apareció el modelo más sofisticado, considerado secreto de estado, y conocido con el nombre de *Wehrmacht*, que sería utilizado por el ejército alemán para cifrar sus mensajes antes de ser emitidos a sus tropas a través de radio por el sistema Morse. A pesar de todo, y al ser la marina alemana el cuerpo de ejército de élite mimado por Berlín, desarrollaron su propio modelo de Enigma que bautizaron como *Funkschlüssel 4*, o simplemente, *M-4*.

Los fallos de *Enigma*

1. La codificación era una función letra a letra.

2. La imagen de cada letra no podía ser la propia letra.

3. La clave inicial diaria de tres letras que informaba de la codificación utilizada se repetía dos veces para garantizar una recepción correcta, lo que hacía más fácil descifrarla.

La máquina combinaba componentes eléctricos y mecánicos ingeniosos, pero no excesivamente complicados de manejar. La dificultad estribaba en la capacidad de cambio de posibilidades de escritura y número de combinaciones que la máquina, convenientemente manejada, producía. Los componentes mecánicos eran el cerebro de la máquina y estaban formados por un teclado a semejanza de los de las máquinas de escribir y un grupo de rotores, normalmente cinco, pero que la marina alemana, para aumentar la complejidad de sus máquinas, llegaría a aumentar hasta ocho. De la elección inicial de tres de esos ocho rotores y de sus posiciones iniciales dependía la encriptación obtenida. Así, los mensajes se escribían tal como eran redactados, pero cada vez que se pulsaba una tecla se producía un giro en uno de los rotores que a su vez giraba el resto.

Al principio del mensaje iba la clave local, habitualmente tres letras, con la que se había codificado el mensaje. Esta clave se cambiaba diariamente. De esta manera se lograba que una letra no estuviera siempre codificada por el mismo carácter inicial pues a cada pulsación de una tecla, y como consecuencia del giro secuenciado de los rotores, variaban las letras que escribían dicho mensaje. Cada rotor contenía todas las letras del alfabeto, en una de sus caras había un disco dentado de baquelita y en otra una serie de contactos eléctricos también colocados en círculo, lo que hacía que las combinaciones para transformar una letra en otra distinta creciera hasta un número considerablemente grande y dificultando así la lectura de cualquier mensaje interceptado. De hecho, los alemanes para simplificar su uso, redujeron las más de 10.114 configuraciones posibles a ¡sólo! 1.023. El trabajo de Turing consistió en diseñar algoritmos basados en la periodicidad forzosa de los engranajes para facilitar la búsqueda de las claves diarias.

Aunque el ejército alemán fue el que comenzó a utilizarla, los demás ejércitos europeos también adquirieron sus propias máquinas *Enigma* y a partir de 1938, cuando ya estaban claras las intenciones expansionistas de la Alemania nazi, estalló una guerra de espionaje industrial —un año antes de que estallara la guerra real— en la que todos querían saber cómo eran las máquinas *Enigma* de los demás y si su modelo de *Enigma* era superior al de los ejércitos de los otros países, sobre todo al de Alemania. Se estima que desde 1933 a 1945 se fabricaron más de cien mil unidades de estas máquinas.

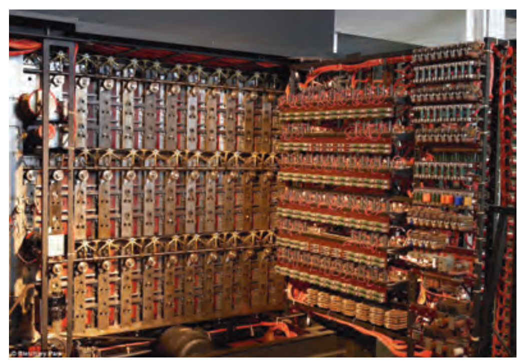
Bombe: 1938

Cuando Alan Turing llegó a *Bletchley Park* se encontró un mundo rígido y cerrado en el que los llamados técnicos llevaban a cabo un trabajo considerado esencial que era mantenido en secreto, no sólo para sus familiares y amigos, sino hasta para los mismos compañeros de trabajo. Los técnicos de un barracón desconocían el trabajo que hacían los del barracón de al lado.

La misión de Turing, así como la de todos los que trabajaban en el *hut 8*, era perfeccionar las máquinas que se utilizaban para descifrar los mensajes en clave que se interceptaban a los alemanes. Así, el trabajo de los técnicos del *hut 8* sería esencial para intentar romper el bloqueo naval que llevarían a cabo los submarinos alemanes, los temidos *U-boot*, contra Inglaterra a partir de agosto de 1940.

Años antes de que estallara la guerra los alemanes enviaron una máquina *Enigma* a Varsovia y, por azar, cayó en manos de los polacos que la estudiaron durante una semana, enviándola de nuevo a su destino tal y como había llegado a sus manos. Un grupo de matemáticos polacos, dirigidos por Marian Rejewski consiguió descubrir los códigos de la máquina en ese tiempo record. Aunque fuera solamente un primer paso, la labor de los matemáticos polacos fue la clave para el éxito posterior obtenido en *Bletchley Park*.

Los alemanes sospecharon que sus claves iniciales habían sido descubiertas y en 1938, un año antes de la invasión de Polonia, decidieron cambiar su estrategia. Pero a cada paso hacia delante que daban los técnicos alemanes, otro tanto hacían los matemáticos polacos logrando localizar los nuevos códigos a partir del análisis de las frecuencias que denominaron «hembras», lo que les permitió configurar sus máquinas *Enigma* para descifrar los mensajes interceptados. La amenaza de la guerra llevó a los polacos a plantearse la posibilidad de sustituir el método manual utilizado hasta entonces para analizar las frecuencias por una máquina electromecánica, una batalla de máquina contra máquina. Así surgió la máquina denominada *Bombe*. La falta de recursos de los polacos llevó a que, a principios de 1939, sus servicios de inteligencia pasaran la información obtenida y los trabajos realizados a ingleses y franceses para que continuaran la importante labor por ellos comenzada.



Recreación de una máquina *Bombe*

La invasión de Polonia el día 1 de septiembre de 1939 precipitó los trabajos de investigación en *Bletchley Park*. Afortunadamente, los matemáticos que allí trabajaban ya eran expertos en las complejidades que presentaba la *Enigma*. Las aportaciones hechas por los matemáticos polacos unos años antes allanaron el camino para que los ingleses trabajaran ahora sobre los mensajes codificados alemanes elaborados con la máquina polaca *Bombe* y por las versiones perfeccionadas de *Enigma*, convertida a esas alturas en una máquina casi perfecta por indescifrable…, o al menos eso creían los alemanes. Una vez descubiertos los métodos utilizados por los alemanes para encriptar sus mensajes ahora deberían averiguar los cambios en las claves que a diario hacían en sus máquinas. La captura de algunas máquinas *Enigma* alemanas facilitó el trabajo de los criptoanalistas ingleses, al descubrir que los operarios alemanes que manejaban las máquinas cambiaban cada noche las claves a usar al día siguiente.

De esta manera, aunque los ingleses descubrieran una clave utilizada para descifrar los mensajes, al día siguiente se encontrarían con otra distinta. Así, los ingleses tenían que averiguar cada día la nueva clave impuesta. Era un trabajo de nunca acabar que les llevaba a trabajar las veinticuatro horas de día, ya que en cuanto descubrían la clave cambiada tenían que descifrar y traducir los mensajes interceptados…, para ponerse a trabajar a continuación en el descubrimiento de la siguiente clave. Los alemanes nunca utilizaban un rotor en la misma posición durante más de dos días, lo que llevó a los aliados a intentar nuevas técnicas al ser conscientes de que la suya era una lucha agotadora contra una máquina cuya forma de ser manejada variaba constantemente.

Esta situación los empujó a recuperar las investigaciones de sus colegas polacos, dándose cuenta de que la clave podría estar en rediseñar la máquina *Bombe* polaca y partir de nuevo de ella para conseguir formas más rápidas de desciframiento.

Alan Turing, desde su llegada a *Bletchley Park*, se incorporó, como hombre clave, a trabajar en el diseño mejorado de la máquina *Bombe* polaca. Trabajó en la nueva *Bombe,* una máquina que nació de su ingenio personal y a la que ya todos llamaban la *Bombe* de Turing, ya que suya fue la idea original perfeccionada con mejoras sugeridas por el también matemático Gordon Welchman y cuyo diseño y construcción recayó en Harold Keen, miembro de la empresa *British Tabulating Machina*. La nueva máquina *Bombe* se convirtió en la herramienta más importante para leer con mayor precisión y rapidez las transmisiones de las maquinas Enigma alemanas.

El primer diseño de Turing fue bautizado con el nombre de *Victory* instalándose en *Bletchley Park* en marzo de 1940. En agosto de 1940 se fabricó e instaló una máquina de prestaciones más avanzadas con el nombre de *Spider* y en la primavera del año siguiente, se instaló un tercer modelo, aún con más prestaciones, llamado *Jumbo*. Gracias a la popularidad de su trabajo, ya en 1942 Alan Turing era considerado un auténtico genio entre sus compañeros de *Bletchley Park*.

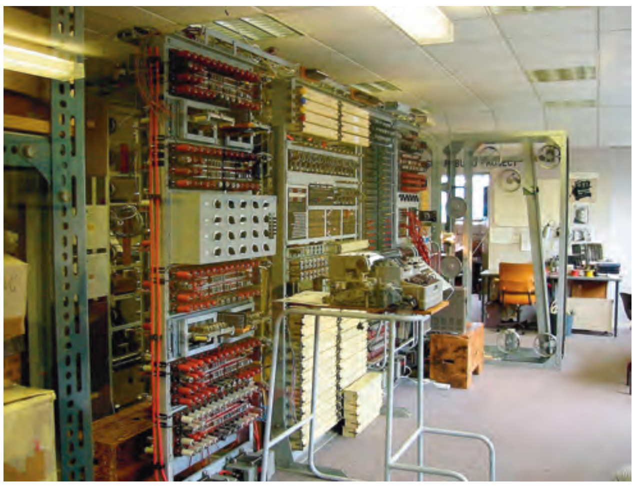
A principios del año 1943 nuevas versiones de la máquina *Bombe* mejoradas se empezaron a fabricar en Estados Unidos hasta llegar a 120 unidades, aunque en la actualidad solamente se conserva una en el Museo Nacional de Criptografía. Por su parte, a finales de la II Guerra Mundial llegó a haber instaladas en *Bletchley Park* 210 *Bombes* que requerían del trabajo de 2.000 especialistas para su mantenimiento y funcionamiento. Una vez terminada la guerra, el primer ministro inglés, Winston Churchill mandó destruir todas las máquinas, al considerarlas secreto de Estado.

Concluida la guerra, Alan Turing sería condecorado con la Orden del Imperio Británico en reconocimiento a su contribución a la victoria de los Aliados.

Colossus

En paralelo al desarrollo de las *Bombes*, en *Bletchley Park* tuvo lugar otro acontecimiento ideado y desarrollado por el matemático inglés y que en aquel momento se mantendría en un modesto segundo plano: el nacimiento de la máquina *Colossus*.

Este primer computador fue diseñado también con el único objeto de ayudar a su compañera *Bombe* a descifrar los códigos alemanes. *Colossus* surgiría de la imperiosa necesidad de aumentar la eficacia en el descifrado de los códigos y, sobre todo, la rapidez de su ejecución. La idea surgió al trabajar sobre la interceptación de teletipos codificados por los alemanes en sus transmisiones. Los ingleses llamaron *Fish* a las claves alemanas que circulaban a través de teletipo para distinguirlas de las recibidas a través de las máquinas *Bombe*, ya que los alemanes utilizaban conjuntamente las máquinas *Enigma* junto a dichos teletipos codificados para dificultar el descifrado de sus claves. La nueva máquina se utilizaría inicialmente para descifrar los llamados códigos *Fish*.



Colossus.
Reconstrucción del Museo de la Computación Británico

A comienzos de la guerra los servicios ingleses interceptaron señales de teletipo en las que no se utilizaba el código *Morse* y que eran distintas a las codificadas normalmente con las *Enigma*. Se trataba de señales codificadas por el ejército alemán mediante una máquina diferente, conocida con el nombre de *Lorenz*, consistente en un accesorio que conectado a un teletipo cumplía los mismos propósitos que *Enigma*, pero con distintas claves. Serían precisamente sus observaciones del sistema *Fish* las que llevarían a Turing a idear la primera máquina programable, electrónica y digital. Turing fue el creador de la idea inicial y de la base lógica en los computadores. El primer prototipo de esta máquina fue diseñado por Tommy Flowers, un técnico de la *British Post Office Research Station* que planteó la utilización de válvulas, convirtiendo así su propuesta en el primer ordenador de la historia. Aunque, de hecho, no era un computador de propósito general. La máquina como tal sería diseñada y construida por Maxwell Newman en 1943.

Así, una primera versión de *Colossus* llamada *Markus 1* se construyó a comienzos de 1944 seguida de una nueva versión mejorada en junio de ese mismo año denominada *Markus 2*. A finales de la II Guerra Mundial estaban en servicio diez máquinas *Markus 2* en *Bletchley Park*. Gracias a las *Colossus*, 63 millones de caracteres contenidos en mensajes alemanes cifrados interceptados por los aliados fueron descifrados con éxito. Todas esas máquinas y las *Bombe* fueron destruidas al final de la guerra por orden del primer ministro británico, así como los planos y estudios del proyecto con objeto de preservar lo considerado como alto secreto militar.

Treinta años después de terminada la guerra, en 1976, una vez concluido el plazo que imponía la ley de secretos militares, el proyecto *Colossus* volvió a salir a la luz sacando al escenario de la Historia a los protagonistas del proyecto, con Alan Turing a la cabeza, quienes desde entonces serían considerados los creadores del primer ordenador, por delante de los creadores del norteamericano *ENAC*.

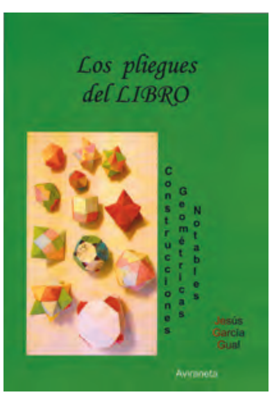
Pero no será *Colossus* la máquina más famosa de Turing. El padre de la computación se hará famoso por una máquina que nunca existió: la famosa «Máquina de Turing». Pero esa es otra historia que..., continuará.

ANTONIO PÉREZ SANZ
IES Salvador Dalí, Madrid
SMPM
JOAQUÍN COLLANTES HERNÁEZ
<tercermilenio@revistasuma.es>

suma+ 72
Secciones
Marzo 2013
pp. 115-117

Matemáticas con calculadora y Los pliegues del libro

Lluís Albarracín Gordo



Reseñas

Matemáticas con calculadora 1.º de Bachillerato Ciencias y Tecnología

Editores: Manuel Torralbo Rodríguez y Agustín Carrillo de Albornoz Torres
Editado por: SAEM THALES y División Didáctica CASIO
Año de edición: 2012
ISBN: 978-84-15641-00-1

Me dispongo a abordar la lectura de un libro que pretende ahondar en el uso de la calculadora como herramienta didáctica. Constato que me encuentro plenamente inmerso en el siglo XXI y considero el impacto en las aulas que supone todo lo relacionado con Internet y las tecnologías que se han ido incorporando en los centros, así como la relación que mantienen los adolescentes con los *smartphones* o las *tablets*. En este contexto me pregunto si tiene sentido seguir hablando de la calculadora como herramienta educativa en el aula de matemáticas.

Luego me doy cuenta de que la calculadora sigue presente en nuestras aulas, de que es la única herramienta que permitimos utilizar a nuestros alumnos en los exámenes y de que sigue siendo necesaria y útil en el sentido de que agiliza la actuación de los estudiantes. Sin embargo, no les proporciona pistas metodológicas para superar las pruebas a las que los sometemos. Por lo tanto, decido que este *Matemáticas con calculadora* se merece su oportunidad y mi tiempo, ya que introduce una gran cantidad de conceptos matemáticos que se pueden trabajar con las calculadoras científicas convencionales y una gran variedad de actividades que se pueden aplicar utilizando otras tecnologías si no disponemos del tipo de calculadoras propuestas.

El texto se centra en describir las opciones que ofrecen dos tipos de calculadoras: las científicas, que se han convertido en un estándar en las últimas décadas, y las calculadoras científicas con interfaz gráfica y simbólica, más recientes y con una implantación menor.

Un repaso al índice nos ofrece una visión de los temas tratados, entre los que se encuentran aquellos en los que esperamos que la calculadora tenga un peso específico, como son los números reales, la estadística, la combinatoria o los cálculos de probabilidades. Pero también se tratan en este libro otros temas del currículum en los que no es tan evidente que la calculadora sea una herramienta didáctica de peso, como pueden ser la factorización de polinomios, el estudio de funciones o la geometría analítica.

Los diferentes capítulos tratan con gran profundidad aspectos clave que dificultan la comprensión de los alumnos de diferentes conceptos utilizando para ello de forma efectiva las potencialidades de la calculadora. En especial, se explota la capacidad de crear tablas numéricas, dibujar gráficas de funciones o manipular algebraicamente expresiones numéricas racionales de las calculadoras con interfaz simbólica.

Un ejemplo claro de lo que podemos encontrar en este libro es el capítulo que trata los límites de una función y el estudio de su continuidad. El texto nos propone ejercicios que podemos utilizar en el aula a partir de diversos casos concretos en los que se estudia la continuidad de una función en un punto, como hallar los límites laterales por aproximación mediante una tabla numérica. Los resultados obtenidos se visualizan gracias al potencial gráfico y se trabajan utilizando zooms. De los límites puntuales se pasa a los límites en el infinito y a los diferentes tipos de asíntotas. El capítulo acaba con una serie de ejercicios no resueltos que se pueden proponer en el aula.

Más sorprendente es la posibilidad de las calculadoras más potentes de incluir imágenes y aprovecharlas para encontrar la ecuación que describe diferentes objetos reales a partir de la capacidad de representación de funciones con parámetros. De esta forma, la calculadora gráfica se utiliza en un conjunto de actividades denominadas *Modelizando el mundo*. En ellas se propone a los alumnos que encuentren la curva que determina figuras como la Plaza del Anfiteatro de Lucca (Italia), que tiene forma de elipse, la estructura del ADN o las parábolas que forman unas estructuras de hormigón en un puente. Todo ello a partir de imágenes introducidas en la calculadora.

De esta forma nos hallamos ante un libro que repasa, uno por uno, los temas de 1º de Bachillerato y que proporciona actividades concretas para plantear en clase con la ayuda de diferentes tipos de calculadora científica. Al mismo tiempo encontramos actividades interesantes que podemos adaptar a nuestro entorno educativo e implementarlas en nuestras clases aprovechando las tecnologías de las que disponemos en ellas.

Lluís Albarracín Gordo

Los pliegues del libro

Construcciones geométricas notables doblando papel

Autor: Jesús García Gual
Editorial: Aviraneta
Año de edición: 2011
ISBN: 978-84-938047-4-9

Debo dejar claro de entrada que mis experiencias previas con el plegado de papel son más bien escasas. De hecho, desde el punto de vista docente podríamos decir que son inexistentes y que, por ese tipo de formación tan formal que recibimos los que hemos estudiado matemáticas, nunca he incluido la papiroflexia como una herramienta didáctica en mis clases. Y aquí me hallo con un pequeño-gran libro. Pequeño, porque apenas llega a las 60 páginas, aunque sean de formato DIN-A4; y grande, por sus ambiciones, como ahora describiré. El libro se presenta con el propósito de recoger algunas de las demostraciones más notables de la geometría usando el plegado de papel.

En el prólogo el autor cita el *Libro* propuesto por Paul Erdös. Aquel en el que Dios guarda las demostraciones más hermosas para cada hecho matemático y del que aquí se propone realizar una versión particular. En esta nueva versión de *El Libro* se incluyen las construcciones y demostraciones geométricas realizadas con plegado de papel que el autor ha recopilado de entre las que considera que combinan mejor simplicidad y belleza.

El contenido de este libro es fácil de describir: en cada página encontramos las instrucciones a seguir para realizar una figura geométrica, como pueden ser un pentágono regular hecho con un lazo, una parábola creada marcando puntos, un tetraedro realizado trabajando con un sobre cerrado o un rombododecaedro. También podemos encontrar algunos hechos geométricos y su demostración utilizando las técnicas propias de la papiroflexia. En este caso no estamos ante una versión purista de este arte, pues se dan instrucciones en las que se utiliza pegamento e, incluso, la goma elástica. Se ofrecen además recomendaciones para utilizar diseños de papel que magnifiquen la belleza de las figuras.

En un texto en el que se describen acciones y se dan instrucciones que deben ser seguidas por el lector, lo más importante es la claridad. En este libro se consigue a partir de dos premisas básicas. La primera, es la simplicidad en las explicaciones, que se centran en los movimientos a realizar sobre el papel posponiendo las justificaciones matemáticas. La segunda, son las ilustraciones que acompañan al texto, que permiten hacerse una idea clara de lo que se va a construir antes de ponerse manos a la obra.

Pero que este es un libro de matemáticas no se descuida en ningún momento. Para aquellos pasos en los que un plegado condiciona el resultado final y le proporciona una propiedad matemática relevante, nos espera una explicación con todos los detalles necesarios para cuando hayamos acabado con los pliegues y rasgados propuestos. Este es el tipo de argumentación geométrica al que estoy acostumbrado por formación, con lo que considero muy adecuada su inclusión en el propio texto. De esta manera las figuras dejan de ser meros objetos de adorno y se convierten en modelos matemáticos que permiten trabajar aspectos geométricos diversos.

Me gustaría destacar la demostración propuesta que lleva a que el área de un triangulo es la longitud de su base por su altura dividido entre dos. Me parece una forma extremadamente sencilla y clara para presentar a los alumnos de Primaria o Secundaria y que éstos pueden llevarse a su casa.

Con todo, se trata de un libro de edición sencilla pero de objetivos ambiciosos que cumple con su cometido principal: obligarte a hacer matemáticas doblando una hoja de papel.

Lluís Albarracín Gordo
Universitat Autònoma de Barcelona
<reseñas@revistasuma.es>

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Comisión Ejecutiva

Presidente: Serapio García Cuesta
Secretario General: Agustín Carrilo de Albornoz Torres
Vicepresidente: Manuel Torralbo Rodríguez
Tesorera: Claudia Lázaro del Pozo

Secretarías

Técnica adjunta: Biel Frontera Borrueco
Revista SUMA: Miquel Albertí Palmer y Iolanda Guevara Casanova
Relaciones internacionales: Sixto Romero Sánchez
Servicio de publicaciones: Ricardo Luengo González
Actividades y formación del profesorado: Juana Mª Navas Pleguezuelos
Actividades con alumnos: Jordi Comellas i Blanchart

Sociedades Federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT)
Presidenta: Iolanda Guevara Casanova
Facultat de Matemàtiques i Estadística (UPC)
C/Pau Gargallo, 5. 08028 Barcelona

Sociedad Aragonesa *Pedro Sánchez Ciruelo* de Profesores de Matemáticas
Presidente: Daniel Sierra Ruiz
Instituto Universitario de Matemáticas y Aplicaciones
Edificio de Matemáticas, 1ª planta. Universidad de Zaragoza
C/Pedro Cerbuna s/n. 50009 Zaragoza

Sociedad Canaria *Isaac Newton* de Profesores de Matemáticas
Presidente: Juan Agustín Noda Gómez
C/ La Isa, 33, Cercado Mesa, 38205, La Laguna, S/C de Tenerife

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García Cuesta
Avda. España, 14, 5ª planta. 02002 Albacete

Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea *Tornamira*
Presidente: J. Javier Jiménez Ibáñez
IES *Alhama,* Avda. Villar, 44. 31591 Corella (Navarra)

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Manuel Rodríguez Mayo
Apdo. de Correos 103. Santiago de Compostela

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo*
Presidente: Juan A. Martínez Calvete
IES Villablanca. C/ Villablanca, 79. 28032 Madrid

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidente: Luis Serrano Romero
Facultad de Educación y Humanidades.
Ctra. Alfonso XIII, s/n. 52005 Melilla

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas *A prima*
Presidenta: Elena Ramirez Ezquerro
CPR. Luis de Ulloa, 37. 26004 Logroño

Sociedad Andaluza de Educación Matemática *Thales*
Presidente: Manuel Torralbo Rodríguez
Facultad Matemáticas. Apdo. de Correos 1160. 41080 Sevilla

Sociedad Asturiana de Educación Matemática *Agustín de Pedrayes*
Presidente: Juan Antonio Trevejo Alonso
Apdo. de Correos 830. 33400 Avilés (Asturias)

Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática *Miguel de Guzmán*
Presidente: Antonio Bermejo Fuertes
IB Comuneros de Castilla. C/Batalla Víllalar, s/n. 09006 Burgos

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidente: Bienvenido Espinar Cepas
CPR Murcia II. Calle Reina Sofía n.º1. 30007 Murcia

Sociedad Extremeña de Educación Matemática *Ventura Reyes Prósper*
Presidente: Ricardo Luengo González
Apdo. de Correos 590. 06080 Badajoz

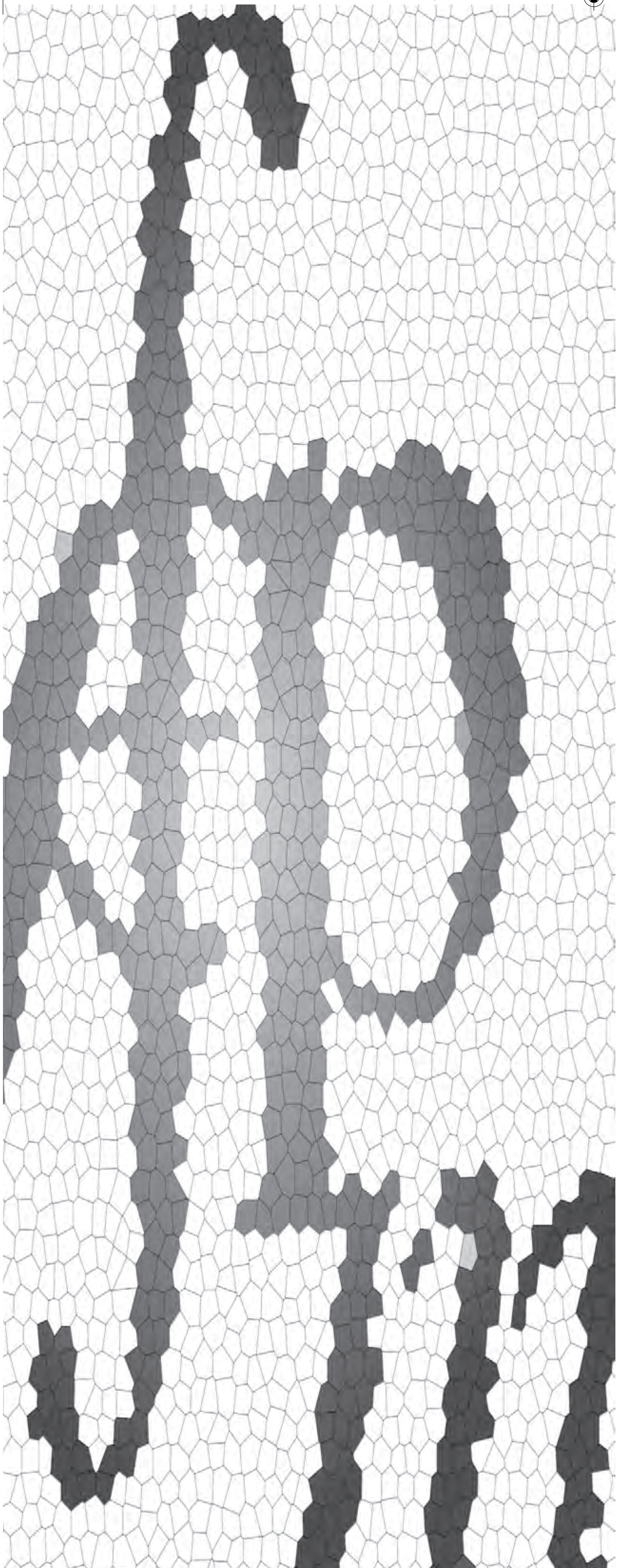
Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: María José Señas Pariente
Avda. del Deporte s/n. 39012 Santander

Sociedad *Puig Adam* de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Facultad de Educación. (Sec. Deptal. Álgebra). Despacho 3005.
C/ Rector Rollo Villanova, s/n. 28040 Madrid

Sociedade Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)
Presidente: Julio Rodríguez Taboada
CPI Dos Dices
C/ Dos Dices, s/n. 15911 Rois (A Coruña)

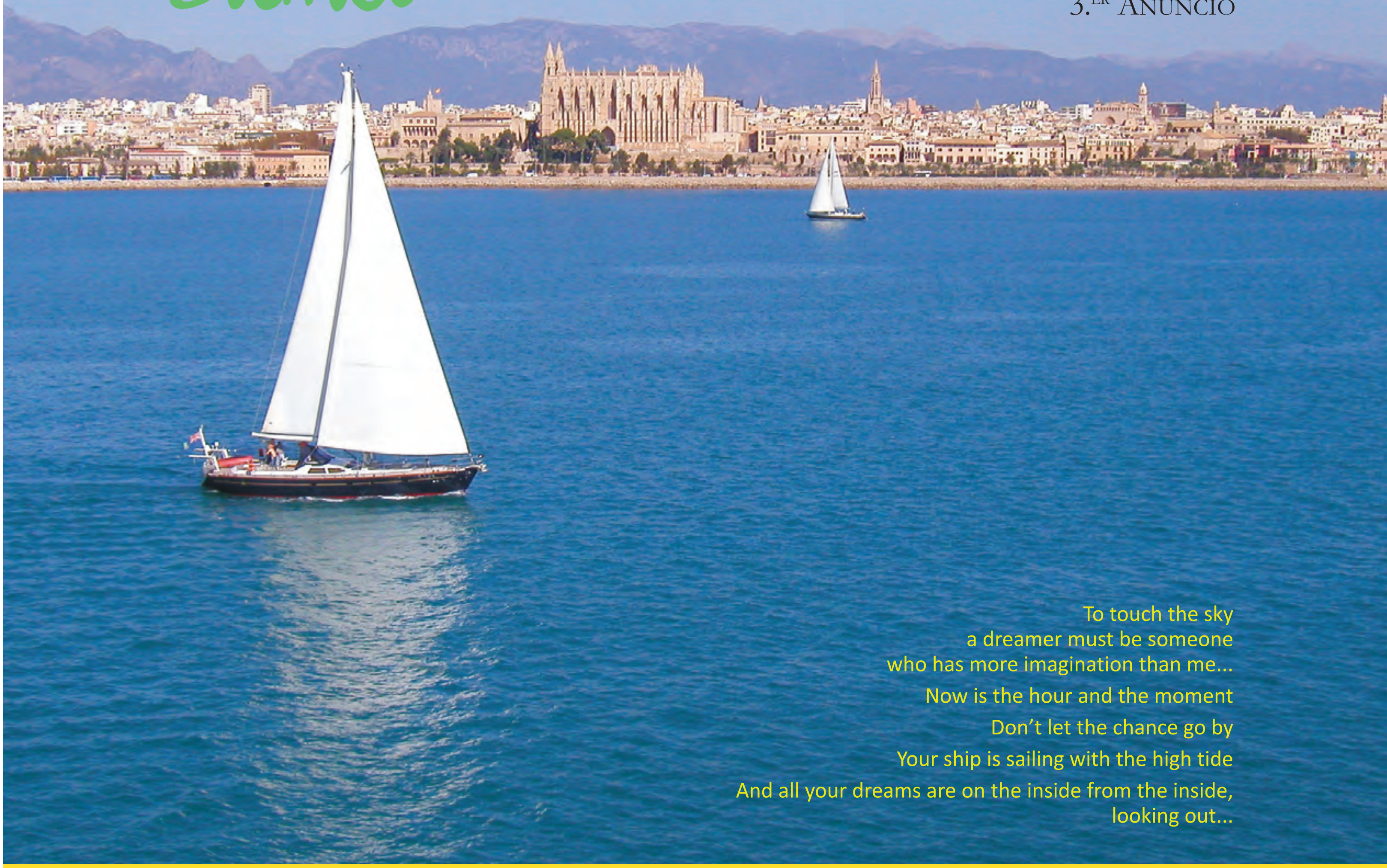
Societat d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana *Al-Khwarizmi*
Presidente: Onofre Monzó del Olmo
Departamento de Didáctica de la Matemática.
Apdo. 22045. 46071 València

Societat Balear de Matemàtiques *Xeix*
Presidente: Josep Lluís Pol i Llompart
C/Martí Rubí 37/alts. 07141 Sa Cabaneta (Marratxí). Illes Balears



suma+ 72

FESPM & Cía



suma+

XVI JAEM: ¡Palma a la vista!

SOCIETAT BALEAR DE MATEMÀTIQUES SBM-XEIX

3.ER ANUNCIO

To touch the sky
a dreamer must be someone
who has more imagination than me...
Now is the hour and the moment
Don't let the chance go by
Your ship is sailing with the high tide
And all your dreams are on the inside from the inside,
looking out...

Para tocar el cielo
un soñador debe ser alguien
con más imaginación que yo...
Llegado el momento
No dejes escapar la ocasión
Tu barco zarpa ya con la marea alta
llevando todos tus sueños en su interior,
que, desde dentro,
se asoman a la lejanía...

ALAN PARSONS PROJECT: *Inside looking out*
(del disco «Gaudí»)

JAEM XVI Palma 2013

FESPM

Entramos ya en la recta final de preparación para la celebración de la XVI edición de nuestras queridas JAEM. En realidad, estas jornadas constituyen el verdadero buque insignia de la Federación que recalará el próximo julio en la capital balear. El programa va tomando forma y quedan poquitos detalles por cerrar. ¡Que no falte nadie!

http://xvi.jaem.es

Fechas y lugar de celebración

Las XVI JAEM se celebrarán del martes 2 al viernes 5 de julio de 2013 en la ciudad de Palma, Mallorca.

Los actos tendrán lugar en el centro de la ciudad y combinarán tres espacios diferentes, muy cercanos entre sí. El Teatre Principal acogerá los actos protocolarios y las conferencias plenarias, el IES «Ramon Llull» i el ICE acogerán todas las otras actividades del congreso, y los espacios de *La Misercòrdia* acogerán las exposiciones matemáticas.

Comités

Comité científico

Agustín Carrillo de Albornoz Torres, secretario general de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática SAEM «Thales» y secretario general de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM).

Miguel Albertí Palmer, codirector de la revista *Suma*.

Manuela Moreno Gil, vocal de la junta directiva de la Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia (SEMRM) y miembro del Comité científico de las JAEM de Gijón.

Onofre Monzó del Olmo, presidente de la *Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana SEMCV* «al-Khwarizmi».

El sol interpreta los arcos del *Castell de Bellver* (Foto: JLP)

Matemáticas y creatividad: un mundo en construcción

Juan Antonio Trevejo Alonso, presidente de la Sociedad Asturiana de Educación Matemática (SADEM) «Agustín de Pedrayes» y miembro del Comité científico y del comité local organizador de las XV JAEM Gijón 2011.

Aina María González Juan, miembro de la junta directiva de la *Societat Balear de Matemàtiques* SBM-XEIX.

Josep Lluís Pol i Llompart, presidente de la *Societat Balear de Matemàtiques* SBM-XEIX.

Triángulos rectángulos meciéndose en el suave oleaje del puerto de Palma (MAP)

Comité local

Catalina Amengual, profesora del IES Sineu y miembro de la *Societat Balear de Matemàtiques* SBM-XEIX.

Maria Barceló Vidal, profesora del IES Felanitx y vocal de la junta directiva de la *Societat Balear de Matemàtiques* SBM-XEIX.

Enric Carrió Beas-Pérez de Tudela, tesorero de la *Societat Balear de Matemàtiques* SBM-XEIX.

Biel Frontera Borrueco, profesor del IES «Emili Darder», vocal de la junta directiva de la *Societat Balear de Matemàtiques* SBM-XEIX y secretario técnico adjunto de la FESPM.

Aina Maria González Juan, maestra del CEIP «Marian Aguiló», vocal de la junta directiva de la *Societat Balear de Matemàtiques* SBM-XEIX.

Guillem Àngel Llabrés Munar, profesor del IES «Guillem Cifre» de Colonya (Pollença) y vocal de la junta directiva de la *Societat Balear de Matemàtiques* SBM-XEIX.

Antònia Martorell Mir, profesora del IES «Santa Margalida» y secretaria de la junta directiva de la *Societat Balear de Matemàtiques* SBM-XEIX.

Ana Belén Petro Balaguer, profesora de la *Universitat de les Illes Balears* (UIB) y vocal de la junta directiva de la *Societat Balear de Matemàtiques* SBM-XEIX.

Josep Lluís Pol i Llompart, profesor del *Centre d'Aprenentatge Cientificomatemàtic «CentMat»*, presidente de la junta directiva de la *Societat Balear de Matemàtiques* SBM-XEIX.

Catalina Pol Quetglas, profesora del IES «Son Ferrer» y vocal de la junta directiva de la *Societat Balear de Matemàtiques* SBM-XEIX.

Maria Àngels Rueda Portilla, maestra CEIP «Son Anglada» y miembro de la *Societat Balear de Matemàtiques* SBM-XEIX.

Daniel Ruiz Aguilera, profesor de la *Universitat de les Illes Balears* (UIB) y vicepresidente de la junta directiva de la *Societat Balear de Matemàtiques* SBM-XEIX.

Maria Triay Magraner, profesora del *Centre d'Aprenentatge Cientificomatemàtic «CentMat»* y vocal de la junta directiva de la *Societat Balear de Matemàtiques* SBM-XEIX.

Estructura de las XVI JAEM

Las JAEM se articulan en tres grandes bloques, la mayoría de los cuales ya cuentan con nombres y apellidos.

Bloque A

Conferencias plenarias

Serán a cargo de personas de reconocido prestigio tanto en el ámbito de la educación matemática como en el ámbito de la creatividad.

Alan Turing: una vida de película
Francesc Rosselló Llompart

Catedrático del departamento de Matemáticas e Informática de la Universitat de les Illes Balears (UIB) dirige el grupo de investigación Biología computacional y bioinformática (BIOCOM) en la UIB:
<http://www.uib.cat/recerca/estructures/grups/grup/BIOCOM/>
Para esta conferencia contará con la colaboración de actores de la UIB y la dirección de Patricia Trapero.

Matemáticas y Animación 3D: un proceso creativo
Cristóbal Vila

Diseñador gráfico e industrial, es especialista en diseño animado por ordenador y autor de vídeos tan reconocidos como *Nature by numbers*, sobre matemáticas y naturaleza, o *Inspirations*, un homenaje a la obra de Escher. Podéis seguirlo en *twitter* y en su web:
<@cristobalvila>, <https://twitter.com/cristobalvila>
<www.etereaestudios.com>

La matemática, el arte y sus paradojas
Marta Macho Stadler

Profesora del Departamento de Matemáticas en la Facultad de Ciencia y Tecnología de la *Euskal Herria Unibersitatea* (EHU). Merece al pena citar, como ejemplo, sus contribuciones en la divulgación de las matemáticas, el portal *Matematicalia* o su participación en la comisión de mujeres y matemáticas de la RSME. Podéis seguir su *blog* y su *twitter*:
<http://ztfnews.wordpress.com/>, <@martamachoS>
<https://twitter.com/MartaMachoS>

Contar se conjuga como amar, pero admite imperativo: cuéntame un cuento, o dos, o tres
Carme Aymerich y Manel Barrios

Carme es maestra de la *Escola Maria-Mercè Marçal* de Mataró, formadora PFZ de la *Generalitat de Catalunya*. Manel es director del programa *Una mà de contes,* de TV3 de Catalunya, y en el que ha participado Carme.
Esta es la web del programa:
<http://www.super3.cat/unamadecontes/>

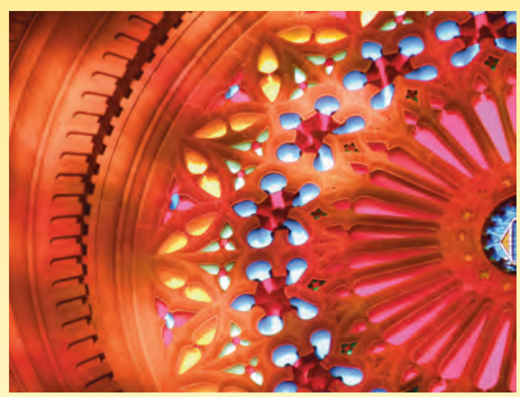
Ponencias

Se desarrollarán nueve ponencias a cargo de ponentes invitados por el Comité Científico y en torno a los siete núcleos temáticos definidos.

I. Infantil y Primaria: ahí empieza todo

El proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas a edades tempranas tiene una gran importancia para que el alumno sea capaz de construir su aprendizaje. Este proceso debe realizarse en continuo contacto con la realidad que les envuelve, es decir, tiene que partir de situaciones relacionadas con sus intereses, debe incluir la manipulación de objetos matemáticos y debe otorgar un papel activo a los alumnos en situaciones que permitan el afloramiento de la creatividad. Todo ello favorece y potencia un aspecto primordial del aprendizaje en esas edades como es que resulte significativo.

Creciendo con las matemáticas
María Luisa Novo Martín
(Universidad de Valladolid)



Intersección de rosetones en *La Seu de Mallorca*
(Foto: JLP)

II. Didáctica y formación del profesorado

En los últimos años ha habido cambios sustanciales en la formación inicial del profesorado. La adaptación al marco de

Matemáticas y creatividad: un mundo en construcción

Bolonia ha supuesto, en general, un cambio positivo en los planes de estudio, tanto a nivel de magisterio, como a nivel de grado en la rama de especialización didáctica o en el máster de formación del profesorado. La formación continua es la otra gran clave de bóveda en nuestro quehacer profesional, donde las perspectivas actuales no son nada halagüeñas.

La formación del profesor de matemáticas
BERNARDINO DEL CAMPO LÓPEZ
(Universidad de Castilla La Mancha)

Acciones evaluadoras que generan eficiencia y equidad
ROSALIA BILBAO BUÑUEL
(*Societat Balear de Matemàtiques* SBM-XEIX)

III. Modelización y formalización

El conocimiento es, o bien un modelo, no siempre compartido, de lo que llamamos realidad o bien un modelo de otro modelo. Sea como sea, el conocimiento de la realidad pasa indefectiblemente por la construcción de modelos, lo que en el caso de las matemáticas implica necesariamente el desarrollo de procesos lógico-matemáticos de abstracción, formalización y demostración, y para los que se hace necesario definir, analizar, categorizar, conjeturar, razonar, generalizar o sintetizar.

Modelización con datos reales
LUIS PUIG (*Universitat de València*)

IV. Resolución de problemas

El planteamiento y la resolución de problemas es uno de los componentes esenciales de la actividad matemática y de su aprendizaje. Es importante que estén presentes de forma continuada a lo largo de todo el periodo formativo del estudiante y no constituir una pieza aislada de los diferentes currículos.

¿Quien tiene problemas? Un camino para aprender matemáticas
JORDI DEULOFEU (*Universitat Autònoma de Barcelona*)

V. Materiales y recursos en el aula de matemáticas

Decía Maria Montessori que el niño tiene la inteligencia en las manos. El desarrollo tecnológico pone a nuestra disposición múltiples y variadas herramientas y recursos que añadir a la gran cantidad de materiales de calidad que a lo largo de la historia han sido utilizados para facilitar el aprendizaje de las matemáticas.

El aula de matemáticas: material y virtual
DAVID BARBA Y CECILIA CALVO
(*Universitat Autònoma de Barcelona*)

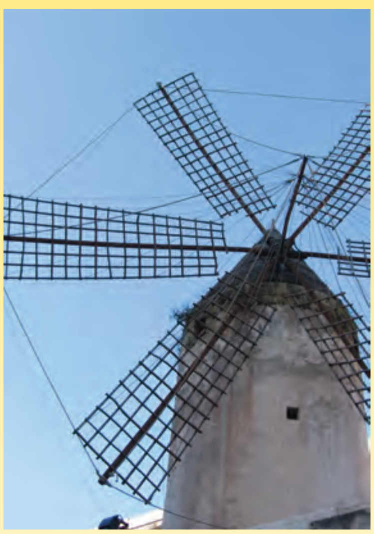
La Serra de Tramuntana emergiendo del Mediterráneo en Llucalcari (Foto: JLP)

Matemáticas y creatividad: un mundo en construcción

VI. Conexiones y contextos

Para que un aprendizaje sea significativo debe conectar con aquello que ya se sabe y resultar útil a quien lo aprende. Esto es, conectar con los conocimientos adquiridos anteriormente, ya sea en el ámbito de las matemáticas o en otros campos. En este sentido, los contextos constituyen el marco indispensable para dar sentido a las aplicaciones de las matemáticas en el entorno vital y esencialmente cotidiano de la persona, donde se manifiesta su competencia. Los contextos son además focos de creatividad matemática, pues permiten la creación de problemas nuevos o de enfoques nuevos a viejos problemas que la diversidad de los entornos sociales y culturales representados en las aulas nos ofrecen y dan sentido y significado a esos nuevos contextos.

Los números preferidos del artista
(números en el arte moderno)
Raúl Ibáñez (*Euskal Herriko Unibertsitatea*)



Elementos de geometría balear que estudia el viento (MAP)

VII. Comunicación y divulgación

El proceso de enseñanza-aprendizaje es un proceso de comunicación. Como dice Paul Watzlaswick, toda comunicación tiene un nivel de contenido y un nivel de relación que no podemos obviar ya que condiciona el primero.

Compartiendo la pasión por las mates
Joaquín Comas (IES Sierra Minera, la Unión, SEM de la Región de Murcia)

¿Y si Pitágoras hubiese sido periodista?
Pere Estelrich Massutí
(*Societat Balear de Matemàtiques* SBM-XEIX)

Comunicaciones

Un número elevado de intervenciones breves (15 min), enmarcadas en alguno o varios de los núcleos temáticos anteriores, donde el profesorado participante en el congreso expone y comparte sus experiencias de aula, investigaciones, ideas o puntos de vista sobre la educación matemática, etc.

Los interesados en presentar una comunicación deben remitirla a través de la web oficial de las Jornadas mediante el formulario correspondiente antes del 15 de marzo.

Bloque B

Talleres. Actividades prácticas que han sido llevadas a cabo por el profesorado en sus clases. Se trata de sesiones de hora y cuarto, cuyo objetivo principal es la manipulación interactiva de materiales, software, exposición de actividades concretas, etc.

Zoco matemático. Se ofrece a todos aquellos asistentes que deseen disponer de un espacio físico en el cual puedan exponer y presentar materiales didácticos, recursos, programas informáticos, pósters, etc.

Clips de aula. Vídeos de corta duración que recogen la realización in situ de las actividades de docentes y alumnos.

Matemáticas y creatividad: un mundo en construcción

Espacios de debate. Consistentes en el encuentro físico de un grupo de docentes que ya habrán participado en alguno de los diversos foros telemáticos que están en marcha a través de la web oficial del congreso. Se ofrecen cuatro espacios de debate:

Calculadora
JOSÉ MARÍA CHACÓN (coord.)
(IES Llanes, Sevilla)

Formación del profesorado
TOMÀS QUERALT (coord.)
(IES *Les Alfàbegues*, València)

Matemáticas 2.0
EVA M. PERDIGUERO (coord.)
(IES Ribera del Bullaque)

GeoGebra
PEP BUJOSA (coord.)
(*Associació Catalana de GeoGebra)*

Bloque C

Exposiciones no comerciales. Están confirmadas un mínimo de tres exposiciones que podrán verse en las salas del edificio de *La Misericòrdia*:

Cuadrando ideas
SBM-XEIX, CENTMAT

Prohibido no tocar
MMCA: MUSEU DE MATEMÀTIQUES DE CATALUNYA

Exposiciones del día escolar de las matemáticas
IES SANTANYÍ

Stands. Exposición y venta de materiales didácticos por parte de la FESPM, de las diferentes sociedades federadas y de distintas empresas colaboradoras.

Presentación de proyectos relacionados con la educación matemática, ya sean particulares, asociaciones, administraciones, fundaciones...

Discontinuidad asintótica en el *Torrent de Pareis* (Foto: JLP)

Matemáticas y creatividad: un mundo en construcción

Presentaciones comerciales vinculadas a la educación matemática por distintas empresas colaboradoras.

Actividades culturales diversas.

VIII Premio «Gonzalo Sánchez Vázquez»

Premio *GSV*

La FESPM convoca con periodicidad bianual el premio «Gonzalo Sánchez Vázquez» a la labor docente y los valores humanos en la educación matemática. En esta octava edición el galardonado es el profesor gallego D. Manuel Pazos Crespo «Coque». Como ya viene siendo habitual, durante las JAEM se hará entrega de este premio en un acto específico que, aunque breve, acostumbra a ser muy emotivo.

Síguenos en Twitter y Facebook

A través de estas dos redes sociales podréis tener la información actualizada de las Jornadas. Estos espacios pueden servir para compartir impresiones, ideas, sugerencias y mucho más. Nuestra página de *Facebook* es:

http://www.facebook.com/JAEM2013

Para obtener las noticias actualizadas de las XVI JAEM Palma debéis pulsar «Me gusta». Os animamos también a compartir los contenidos con vuestros contactos. En *Twitter* nos podréis seguir a través de nuestro usuario:

@JAEM2013

Institut «Ramón Llull», sede de las XVI JAEM

JAEM XVI Palma 2013

Matemáticas y creatividad: un mundo en construcción

Con él estaréis al día de las últimas noticias de las *Jornadas* y del concurso fotográfico. Este es el *hashtag* para las jornadas:

#jaem2013

Inscripción

La inscripción se realizará a través de la web oficial de las jornadas:

http://xvi.jaem.es

Las diferencias de cuota pretenden favorecer la asociación a entidades locales de manera que, en la mayoría de los casos, si todavía no se pertenece a ninguna sociedad matemática federada, sale más a cuenta asociarse primero y pagar después la cuota de inscripción correspondiente a un miembro federado (véase la tabla siguiente).

Anulaciones

Sólo podrán ser atendidas aquellas solicitudes de devolución de la cuota de inscripción que tengan motivos justificados y siempre y cuando se realicen antes del 15 de mayo de 2013.

Viajes y alojamiento

Palma es un destino estival por excelencia de millones de personas y marca, lógicamente, una punta de ocupación. Es muy importante que se gestionen con antelación tanto el viaje como la estancia. En la web del congreso existe un enlace directo a la web de la agencia oficial.

Los acompañantes pueden optar al programa preparado por la agencia o visitar por su cuenta alguna de las propuestas que el comité local ha preparado en la web.

Cuotas XVI JAEM Palma	Hasta 15/05/13	16/05/13—15/06/13
Miembros de sociedades federdas o de las que han firmado convenio con la FESPM	120,00€	150,00€
General	180,00€	220,00€

Como se indica en la tabla anterior la cuota reducida contempla la inscripción hasta el 15 de mayo de 2013. Como en otras ocasiones hay descuentos para miembros de las sociedades federadas y para aquellos que formalicen su participación con suficiente antelación.

Concurso fotográfico

El mes de abril finaliza el concurso fotográfico. Todavía hay tiempo suficiente para enviar cuantas propuestas se quiera. La última propuesta mensual consiste en imprimir el logo de las JAEM que se encuentra en el área de descargas de la web y fotografiarse con él en algún lugar o situación original.

http://xvi.jaem.es

¡Animaos a participar!

Matemáticas y creatividad: un mundo en construcción

Comisión Ejecutiva de la FESPM

Renovación de cargos

El Artículo 11 de los Estatutos de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) establece los cargos unipersonales entre los que se encuentran las secretarías de area. Mediante el Artículo 7 del Reglamento de la FESPM se especifican las áreas para las cuales se elegirán Secretaríos/as y que son las siguientes: Secretaría Técnica Adjunta, Revista Suma, Relaciones Internacionales, Servicio de Publicaciones, Actividades y Formación del Profesorado y Actividades con alumnos.

La Junta de Gobierno de la FESPM, en reunión celebrada en Madrid el pasado día 15 de diciembre de 2012, acordó convocar la renovación de cargos para las secretarías siguientes:

Relaciones internacionales
Actividades con alumnos
Actividades y formación del profesorado
Servicio de publicaciones

De acuerdo con lo establecido en el Artículo 8 del Reglamento de Régimen Interno de la FESPM:

> Podrá ser candidato a las Secretarías cuaquier socio de una Sociedad federada, con un año de antigüedad al menos. La solicitud, dirigida al Predisente de la FESPM, deberá ir acompañada de la siguiente documentación:
>
> 1. Certificado en el que conste que se es socio activo de una Sociedad federada y su antigüedad.
> 2. Un proyecto en el que se exponga su línea de trabajao (máximo cuatro hojas).
> 3. En el caso de la Secretaría del Servicio de Publicaciones, presentará además un presupuesto económico de ingresos y gastos (que puede ser anual, bianual o para los cuatro años).

El plazo para la presentación de candidaturas se abre hasta el 31 de mayo de 2013. Las candidaturas se remitirán por correo electrónico a la dirección:

secretariageneral@fespm.es

La Junta de Gobierno de la FESPM elegitrá a los/las nuevos/vas secretarios/as presentados/oas, oídos reviamente el Secretario General, en su reunión que tendrá lugar durante la celebración de las XVI JAEM en Palma (del 2 al 5 de julio de 2013).

Diciembre de 2012
Agustín Carrillo de Albornoz Torres
Secretario General de la FESPM

suma+ 72
Secciones
Marzo 2013
pp. 131-136

Seminario FESPM: La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la educación Primaria

David Barba Uriach

Del 15 al 18 de noviembre del pasado año se celebró en Santiago de Compostela el Seminario «La enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria» convocado por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) y la Comisión de Educación del Comité Español de Matemáticas (CEMat). Fue organizado por la Asociación *Galega* de Profesores de Educación Matemática con la colaboración de la Facultad de Ciencias de la Educación de Santiago y el *Departamento de Didáctica das Ciencias Experimentais e da Matemática* de dicha facultad.

La finalidad principal de este seminario queda reflejada en la introducción de la convocatoria y en la que la FESPM y la CEMat, como convocantes, proponen:

> ...abordar el carácter central de la matemática en la cultura y en la formación de ciudadanos, destacar las finalidades y organización curricular de las matemáticas en la educación primaria, subrayar las necesidades para la formación de su profesorado e identificar los retos y peculiaridades derivados de la enseñanza y aprendizaje que la sociedad actual demanda en este momento.
> Además de promover e incentivar un debate sobre el momento presente de las matemáticas escolares, la FESPM y el Comité de Educación de CEMat se proponen redactar un documento que pueda reflejar la visión que sobre tales

Sociedades federadas

cuestiones tienen los profesionales de la matemática y de la educación matemática, miembros de la FESPM y de otras sociedades encuadradas en CEMat, así como proponer recomendaciones para las Administraciones Educativas, para los profesores y para otros grupos e instituciones involucrados en la educación. Se espera también que los participantes en este seminario hagan propuestas de actuación futura a los órganos de gobierno de la FESPM y de CEMat con respecto a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación.

Serapio García (presidente de la FESPM), Victoria Otero (decana de la USC) y Luis Rico (presidente de la CE-CEMat)

Objetivos del seminario

Seis fueron los objetivos de este seminario:

1. Analizar el carácter fundamental de la educación matemática en Primaria.

2. Reflexionar sobre la formación inicial y permanente del profesorado de Primaria.

3. Estudiar el papel de los materiales manipulativos y los recursos TIC.

4. Considerar las aportaciones de la interdisciplinariedad a la mejora de la Educación Matemática en Primaria.

5. Desarrollar estrategias metodológicas para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en Primaria.

6. Elaborar un documento de conclusiones con las aportaciones a la mejora de la educación matemática en Primaria desde la FESPM.

Actividades

El seminario se organizó dasarrollando dos clases de actividades. Por una parte, las charlas generales con su debate posterior correspondiente. Por otra, los grupos de trabajo, que se realizaron en torno a cuatro temas:

1. La educación Matemática en Primaria.

2. Formación del profesorado de Primaria.

3. Materiales manipulativos y TIC en Primaria.

4. Interdisciplinariedad.

Visión general

Aunque los grupos tenían asignados objetivos distintos a desarrollar, al final se han producido ciertas intersecciones, sobre todo en aquellos relacionados con la formación inicial y permanente. Así pues, esta reseña del seminario se organiza en en tres bloques. En ellos se recogen tanto las conclusiones de los grupos de trabajo como las opiniones discutidas en los debates generales. Esos tres bloques son:

I. Currículum y formación inicial y permanente del profesorado. El papel de la Universidad y sociedades de profesores.

II. Materiales manipulativos, TIC's y interdisciplinariedad.

III. La profesión y la formación. Relaciones maestros/universidad. Formación permanente del profesorado de Primaria.

I. Currículum de Primaria y formación inicial del profesorado

¿Qué líneas de fuerza deben definir el currículum? ¿Cuál debe ser el papel de las sociedades de profesores e investigadores en la definición de este currículum? ¿Cómo se crean y gestionan los materiales de apoyo al profesorado? ¿Cómo debe organizarse la formación inicial y permanente del profesorado?¿Es necesario disponer de textos específicos para formación inicial? ¿Es interesante que sean comunes en distintas Universidades?

De cara a la próxima aparición de una nueva Ley de Educación (en el momento de cerrar este artículo, parece que se deja para más adelante) se plantea una idea principal: las asociaciones de Profesores e Investigadores, ¿deberían ser consultadas como grupo de expertos, desde las Administraciones Educativas, para la elaboración del currículum de Matemáticas?

Por otra parte, se plantea la necesidad de acompañar el texto curricular con adendas de ayuda al profesorado. En este caso, las sociedades de profesores e investigadores deben jugar un papel importante creando equipos de trabajo que elaboren, difundan y contrasten propuestas y ejemplificaciones de clase. Finalmente, y dado que hablamos de Primaria, se cree necesario potenciar la figura del/de la coordinador/a de matemáticas de centro, como eslabón imprescindible para recoger, organizar y valorar las propuestas.

Con relación a la formación inicial del profesorado las preguntas podrían ser las siguientes:

¿Qué opinión merece el nuevo grado de Magisterio? ¿Serían necesarias unas pruebas iniciales para acceder a los estudios? ¿Qué características básicas deben conformar los programas de Didáctica de las Matemáticas? ¿Es necesario ampliar el número de créditos de Matemáticas? ¿Cuál debe ser el papel de las prácticas, el perfil de de los tutores de escuela, la relación y responsabilidades entre la universidad y la escuela?

Se manifiesta un importante grado de satisfacción en relación a los nuevos programas. Dicho de otra manera: el plan anterior, que contemplaba especialidades en Música, Educación física,... se considera que fue nefasto para la formación inicial en Didáctica de las Matemáticas. Era imposible formar adecuadamente a los alumnos debido a los escasos créditos asignados a la materia. Los estudios de grado permiten formarlos mejor, aunque se piensa que las asignaturas instrumentales tendrían que disponer de algunos créditos más.

Se plantean los conocimientos tanto matemáticos como didácticos que tendría que dominar una maestra, divididos en dos planos. Por una parte, las tareas profesionales: planificar, gestionar e interpretar. Y por otra, los conocimientos necesarios.

La formación inicial y permanente fue tratada con mayor o menos intensidad en todos los grupos. Por ello, se comenta en el tercer apartado.

Algunos de los asistentes al seminario durante la visita guiada a la universidad

II. Materiales manipulativos, TICs e interdisciplinariedad

Aunque tratados en grupos diferentes, se agrupan aquí esos tres aspectos, ya que responden, en cierto modo, a la idea general de gestión de aula.

En relación a los materiales manipulativos, TICs y posibles relaciones entre ellos, se plantea:

¿Qué sentido tiene actualmente la utilización de materiales manipulativos?¿Son opuestos, compatibles, o complementarios con las TIC? ¿Cuál es el papel de las TIC en la enseñanza de las Matemáticas? ¿Cómo buscar y gestionar la información encontrada? TIC y organización de clase: ¿qué aportan?

Acerca de la evolución del uso de materiales en las aulas no se llegó a conclusión alguna, ya que faltaban elementos para afirmar si su uso ha variado o no, si está emergiendo actualmente (como parece ser) o si, por el contrario, está siendo paulatinamente olvidado. Se opta por plantear una propuesta de plan de actualización para un posible uso de materiales manipulativos en los centros.

Este plan de actualización, en el campo de las TIC y los materiales, deberían realizarlo equipos de trabajo potenciados desde las sociedades matemáticas. Se plantea en tres etapas: selección de materiales y propuestas de actividades clasificadas por ciclos, divulgación y experimentación.

Con relación a la divulgación, y pensando en documentos que transmiten las autoridades administrativas, se recomienda que en la documentación dirigida a los maestros la clasificación (o etiquetas) se organice por contenidos para facilitar así su búsqueda e implementación, tanto en el caso de las TIC como en el de los materiales.

En otro orden de cosas, se considera importante que tanto materiales como TIC tengan un peso importante en los estudios de grado.

Cada vez más las propuestas de integración de disciplinas van ganando terreno.

¿Hasta que punto se pueden desarrollar las Matemáticas en Primaria de forma multidisciplinar? ¿Qué ventajas aporta hacerlo? ¿Cómo enfocar las evaluaciones? ¿Cómo vencer o convencer la resistencia de los padres? ¿Qué formación deberían tener los maestros? ¿Cuándo una actividad es interdisciplinar o solamente un maquillaje? ¿Es compatible la organización multidisciplinar con la actual movilidad del profesorado?

Dos músicos *galegos* cantando al abrigo de la lluvia

Para organizar este debate y ayudar a discusiones posteriores se elabora un documento «DAFO» en el que se definen qué debilidades, fortalezas, amenazas y oportunidades se pueden encontrar a la hora de llevar a cabo esta interdisciplinariedad.

Se analiza también la evaluación de la interdisciplinaridad, y en qué aspectos es fortaleza, debilidad, oportunidad o amenaza. Finalmente, se concreta la opinión de que es la mejor manera de formar ciudadanos, un criterio de calidad, motiva al alumnado, facilita las conexiones y logra que los alumnos descubran la matemáticas en la vida real.

III. Profesión y formación

En este apartado se recogen la ideas generales que en los diferentes grupos y en el transcurso de los debates generales se aportaron, tanto en lo referente a formación inicial y permanente, como en aspectos profesionales y académicos, esto es, el papel de los maestros y su relación con las Facultades de Educación, sociedades matemáticas, etc.

¿Qué modelo de prácticas y qué tipo de maestros deseamos? ¿Cómo deben influir en la evaluación y selección de alumnos? ¿Cómo debe articularse la formación permanente? ¿Cuál debe ser el papel de facultades y administraciones y sociedades? ¿Debería apostarse por una formación autónoma de los/las maestros/as? ¿Cómo articular la «carrera docente»? ¿Cuál debería ser el papel y acceso de los maestros con título de grado a los departamentos de Didáctica?

En cuanto a la formación inicial, para el buen desarrollo de las prácticas en centros escolares, seria necesario crear redes de «buenos maestros» que estén en contacto con las facultades y que sirvan de referentes de «buenas prácticas» para los/las alumnos/as de Magisterio. Por otra parte, debería ser uno de los puntos centrales, tanto para la evaluación de los alumnos como profesionales, cómo para detectar capacidades o obstáculos para el buen desarrollo de la profesión.

Con respecto a la formación permanente, éste es un derecho de los maestros y se discute si tendría que ser obligatoria. Es necesaria debido a la escasa formación inicial. Las administraciones educativas deberían asumir la formación matemática, basada en los centros o cómo formación de posgrado. Sin embargo, también se señala que, como cualquier otro colectivo profesional, la formación permanente no debería depender exclusivamente de las administraciones educativas. Podría generarse en asistencia a jornadas o encuentros profesionales, como, por ejemplo, las JAEM.

Una esquina del Santiago antiguo

En este sentido se apuntó la cada vez más extendida idea de la formación autónoma, donde cada profesor crea su propio «entorno de formación autónoma» (PLE) en el que, gracias al entorno virtual 2.0, se crean equipos colaborativos de formación y autoaprendizaje en los que se definen objetivos, se buscan referentes y se establecen canales de comunicación, especialmente *Twitter*. En este entorno seria interesante ver cuál ha de ser el papel de las sociedades y de los departamentos de Didáctica.

En cuanto a la relación de maestros/as con las facultades de Ciencias de la Educación se observa que la creación de un grado de Magisterio permitirá que maestros experimentados puedan presentarse a plazas de universidad compitiendo con licenciados en Matemáticas. Lejos de ser un problema, ya que la presencia de maestros en la especialidad de magisterio parece lógica y necesaria, precisa de una reflexión sobre de qué manera puede influir en la dinámica de los departamentos y qué mecanismos deben articularse para lograr un modelo eficaz. Se apuntó la idea, que se está valorando en ciertos ambientes, de crear dos caminos distintos para entrar en los departamentos: uno para maestros/as y otro para matemáticos/as o afines, que también implicarán condiciones distintas. Sin embargo, el tema del acceso de maestros/as a la facultad solamente fue introducido y no se puede hablar de conclusiones ni de propuestas.

Un último punto tratado es el de las condiciones de acceso a la profesión, que si bien tiene gran importancia para encontrar caminos de excelencia en la escuela pública, resulta complicado resumir en un artículo cómo éste, ya que consiste en un listado de propuestas para hacer llegar a la Administración y que sin duda leeremos en el documento final cuando se publique.

A punto de cenar

Ésta ha sido una visión general relatada por uno de los participantes en el seminario. Cómo se comentó al inicio del artículo, las conclusiones de los grupos servirán para que un equipo de trabajo redacte un documento único para ser remitido a las Autoridades Educativas en el que se insta a que tengan en cuenta nuestras aportaciones y que hagan partícipes de pleno derecho a sociedades y a la universidad de su elaboración, divulgación y evaluación.

La organización

No se puede terminar este comentario sin hablar del ambiente y el clima (bajo cubierto) de este seminario; no sólo en lo referente a los aspectos académicos, sino también en los organizativos, selección de las salidas, alojamiento, disponibilidad, amabilidad y eficacia de los amigos de *AGAPEMA*. Lo único que les recrimino, y no cabe la menor duda que la responsabilidad es suya, es haber engordado 2 kg en 4 días.

David Barba Uriach
Universidad Autónoma de Barcelona
<davidbarbauriach@gmail.com>

Ciruelos en marcha

Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo»
de Profesores de Matemáticas

Hace unos dos años y medio una nueva junta directiva tomó las riendas de la Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas (los *ciruelos*). Esta junta provenía, a su vez, de una junta gestora que había estado manteniendo las constantes de la sociedad bajo mínimos durante algunos años: básicamente, nuestra única actividad era la olimpiada. La situación se sostenía difícilmente, ya que nuestras deudas aumentaban y tampoco había demasiada motivación para seguir adelante. Así que la disyuntiva era clara, o cerrábamos el *chiringuito* o intentábamos reactivar la Sociedad. Algunos de nosotros optamos por esta segunda opción, eso sí, gracias a que otras personas se unieron al proyecto.

Evidentemente, la reactivación pasaba por hacer visible la Sociedad y, para ello, teníamos que realizar algunas actividades..., baratas. Con estas premisas, la iniciativa que tomamos fue organizar charlas, al menos una por trimestre. Lógicamente había que acompañarlas con mecanismos adecuados de difusión, pues en ello iba la mencionada visibilización.

Así que, desde la primera que fue el día 8 de marzo de 2010 —antes, incluso de constituirnos en junta directiva—, mantenemos con regularidad nuestro compromiso de organizar charlas. Al plantearnos qué temas queremos que se aborden, obviamente, siempre tenemos como referencia la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles, pero con un criterio suficientemente flexible como para dar cabida a otros aspectos relacionados con nuestra ciencia.

Antes de empezar este curso las charlas que hemos organizado han sido:

— *Recursos TIC para el aula de Matemáticas.* Una propuesta de materiales curriculares interactivos para la ESO, desde los proyectos Ed@d y Descartes del ITE (Ministerio de Educación), a cargo de María José García.

— *Las tablas de cálculo.* Un método para trabajar el cálculo mental en las aulas de Primaria y Secundaria, a cargo de Jesús Javier Jiménez.

— *Matemáticas con Excel.* Un potente instrumento al alcance de todos. Más que una calculadora, más que un generador de gráficos, a cargo de Miguel Barreras.

— *El blog de aula en las Matemáticas de Primaria y Secundaria*, a cargo de María Ángeles Esteban, Ricardo Alonso y José María Sorando.

— *Imaginary*, *una mirada matemática*, a cargo de Julio Bernués

— *Matemáticas en la calle.* Gymkhana intercentros, a cargo de M.ª Ángeles Arroyo. Actividades alrededor del centro, a cargo de Fernando Herrero y José M.ª Sorando.

— *Integración del Bloque de Números en el resto de bloques del currículo por medio de la resolución de problemas,* a cargo de Ana Turumbay.

— Presentación del libro π*oetas. Primera antología de poesía con matemáticas,* de Jesús Malia. También intervinieron Marta Macho y Emilio Pedro Gómez.

Como se puede observar, temática variada. Hasta la fecha todas las charlas se habían celebrado en el CPR Juan de Lanuza de Zaragoza, que, además de cedernos su excelente salón de actos, también nos prestaba apoyo logístico en la difusión de las actividades.

Salón de actos del CPR Juan de Lanuza, durante la charla de Ana Turumbay

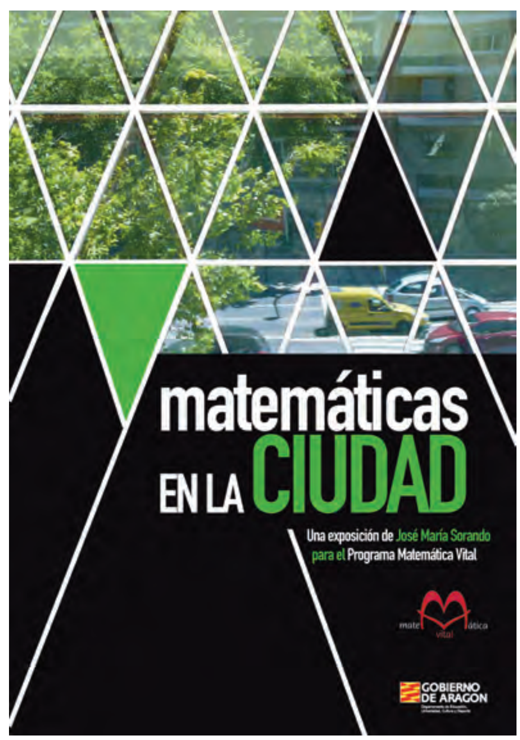
El presente curso

Matemática Vital era un programa del Departamento de Educación del Gobierno de Aragón, que se puso en marcha en el año 2004-2005, gracias a la iniciativa de Fernando Corbalán, miembro histórico de la SAPM. Este programa tenía como núcleo fundamental la organización de semanas matemáticas, pero también sirvió para favorecer la elaboración de algunos materiales, entre los que se encontraban las exposiciones.

En pleno cambio organizativo en el Departamento de Educación por cuestiones políticas, se encomendó una nueva exposición, en esta ocasión a José María Sorando, también miembro histórico de nuestra Sociedad y actual secretario de la junta. Este trabajo quedó terminado en verano de 2011 con intención de que pudiera empezar a circular por los centros de Aragón durante el curso 2011-2012. Sin embargo, el nuevo equipo de Educación decidió eliminar *Matemática Vital* del catálogo de programas institucionales, por lo que la flamante exposición parecía destinada a dormir el sueño de los justos.

Desde el primer momento, la SAPM hemos estado haciendo gestiones para que se pudiera hacer uso de todos los materiales ya que considerábamos que se había empleado en ellos un dinero público que era necesario rentabilizar. Finalmente, en agosto de 2012 llegamos a un acuerdo con el Departamento de Educación para que nos permitiera su uso y, de paso, la puesta en marcha de un nuevo programa, en esta ocasión denominado *Conexión Matemática,* cuya filosofía era similar al anterior pero con unas condiciones materiales bastante más precarias.

Así pues, estábamos en condiciones de presentar a la comunidad educativa matemática la exposición de José María Sorando denominada *Matemáticas en la ciudad,* cosa que hicimos el pasado 20 de noviembre en la Sala de Exposiciones del IES Goya de Zaragoza. A dicha presentación,



Cartel inicial de la exposición *Matemáticas en la ciudad*

Inauguración de la exposición de José María Sorando

acudieron más de 60 personas, dejando pequeño el local y poniendo de manifiesto el tirón del autor.

Esta muestra intenta despertar la curiosidad del alumnado y del público en general sobre la presencia matemática en los entornos urbanos. Se compone de 10 carteles de gran formato, cada uno de ellos acompañado por otros dos menores donde se plantean 43 actividades para Primaria y Secundaria.

Uno de los objetivos que nos planteamos desde la junta de la SAPM es llegar a todos los niveles de la educación matemática. En este sentido, estamos intentando generar vías de comunicación entre primaria y secundaria, y entre secundaria y universidad. Así que cuando Paz Jiménez Seral (Directora del Departamento de Matemáticas de nuestra universidad) nos ofreció hablar sobre el currículo de Álgebra en el bachillerato le tomamos rápidamente la palabra.

El 7 de febrero tuvo lugar en la Sala de Conferencias del Edificio de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza la charla-coloquio *Álgebra y Bachillerato* a cargo de la mencionada Paz Jiménez. El acto fue presentado por Alberto Elduque y contó con nutrida asistencia de profesorado de Bachillerato y Universidad, así como alumnos del Master de Secundaria.

Paz expuso un análisis crítico de los actuales contenidos de Álgebra en el curriculum de Bachillerato, desde el desarrollo que ofrecen los libros de texto predominantes, combinando el sentido matemático de los conceptos con las posibilidades y necesidades de los estudiantes en esa etapa. Uno de los puntos de mayor debate en el coloquio posterior fue la pertinencia del uso de determinantes para los problemas que se abordan en Bachillerato. Como continuación a este coloquio se va a poner en marcha un grupo de trabajo con el objetivo de elaborar una propuesta que presentar a la Administración.

Alberto Elduque presenta a Paz Jiménez

Para finalizar, y dejar patente nuestro interés por llegar a todos los niveles, decir que cuando *Suma* esté impresa ya habrá tenido lugar la charla *MatemaTICinfantil: Aplicaciones TIC para ver matemáticas en Infantil con la PDI,* a cargo de M.ª Pilar Plaza, Ana Isabel Blasco, Carmen Soguero y Ricardo Alonso.

Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo»
de Profesores de Matemáticas
<sapm.ciruelos@gmail.com>

XXXI Concurso de Resolución de Problemas

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

La Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas y el Colegio de Doctores y Licenciados en Filosofía y Letras y en Ciencias convocan el XXXI Concurso de Resolución de Problemas cuyas bases se exponen a continuación.

Bases

Primera

Los alumnos podrán participar en el Concurso en tres niveles:

a) Primer nivel: alumnos de 3.º de ESO.
b) Segundo nivel: alumnos de 4.º de ESO.
c) Tercer nivel: alumnos de 1.º Bachillerato.

Segunda

Las pruebas consistirán en la resolución de Problemas de Matemáticas (los mismos para todos los concursantes de un mismo nivel) que se realizarán en la mañana del sábado, día 9 de junio de 2013, a partir de las 10 horas, en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

Tercera

A los mejores de cada nivel se les concederán diplomas y premios.

Cuarta

Los Centros que deseen presentar alumnos (hasta un máximo de seis) deberán realizar la preinscripción antes del día 20 de mayo del 2013, dirigiéndose por correo electrónico, carta o fax al presidente de nuestra Sociedad:

Prof. Javier Etayo Gordejuela
Departamento de Algebra
Facultad de Ciencias Matemáticas
28040-Madrid
Fax: 91 394 4662
Correo electrónico: <jetayo@mat.ucm.es>

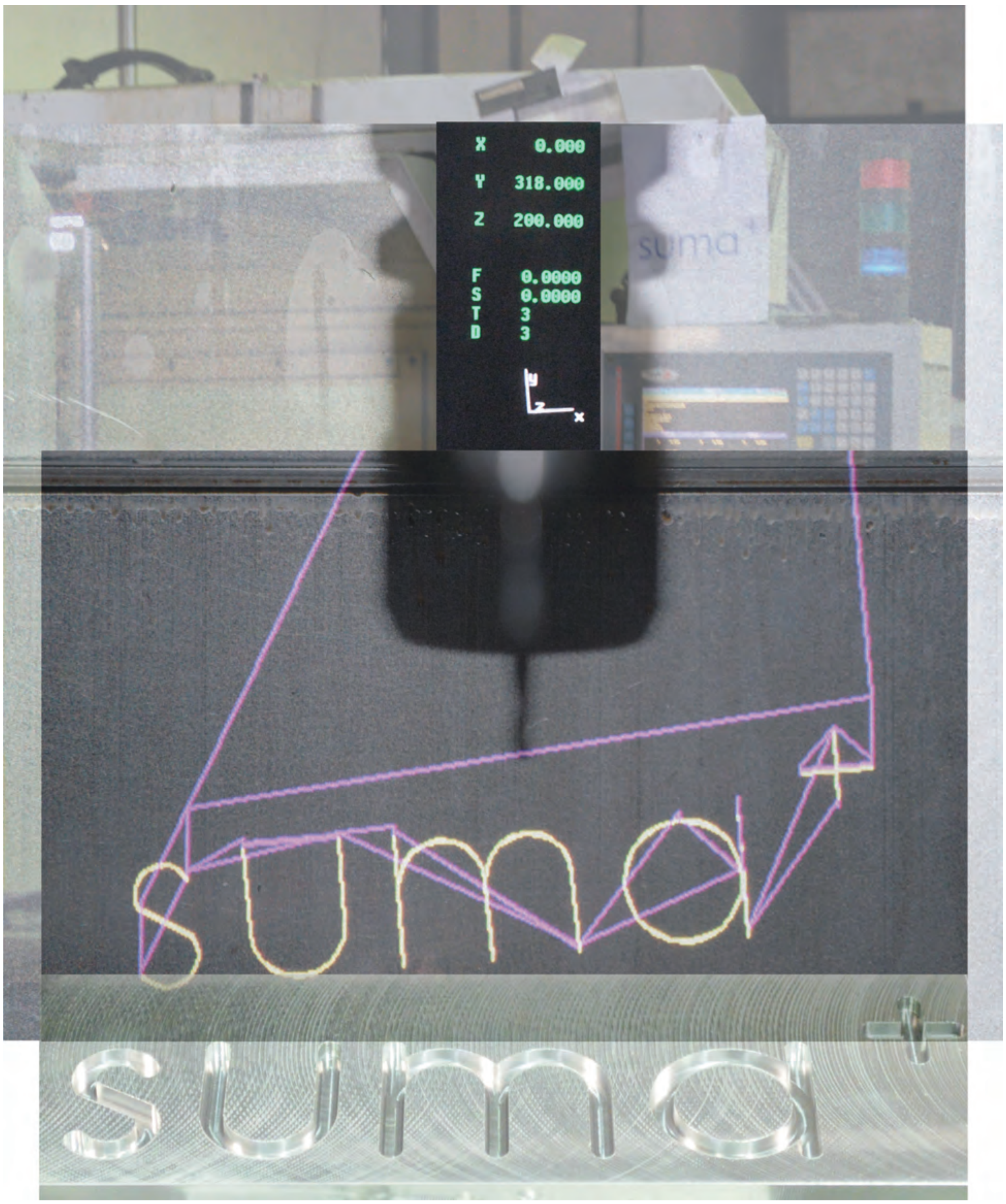
En la preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados. Si algún centro desea presentar más de seis alumnos, debe solicitarlo antes de la fecha mencionada anteriormente.

Quinta

Los centros entregarán a los alumnos que envíen credenciales individuales en las que se haga constar que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas, así como el curso en que están matriculados en el año académico 2012-2013.

La portada (*making off*)

Àngels González Fernández
Josep Moreno Fernández



Normas de publicación

1. Para el envío de artículos o cualquier consulta sobre su contenido se utilizará el correo electrónico de la redacción de *Suma* <articulos@revistasuma.es> o su dirección postal:
   Revista *Suma*
   Apartado de Correos 286
   08911 Badalona
2. Si los trabajos, imágenes incluidas, ocupan más de 5 Mb sólo se enviaran por correo postal en soporte magnético (CD-ROM, DVD-ROM o *pen drive*).
3. Los trabajos deben ser enviados como archivo en formato MS Word o RTF —fuente Times New Roman y cuerpo 12— adjunto a un mensaje de correo electrónico en el que deben figurar:
   1) El título del trabajo, los nombres y apellidos de todos los autores, su lugar de trabajo y su dirección completa así como la sociedad federada a la que pertenecen (si se desea).

   Y a efectos de comunicación:
   2) El correo electrónico, teléfono y dirección postal del autor de contacto.
4. Se debe enviar una segunda versión del original en la que no aparezcan los nombres de los autores, ni información relativa a ellos o que pueda servir para identificarlos (por ejemplo, institución a la que pertenecen, citas y referencias bibliográficas propias, agradecimientos, datos del proyecto en el que se enmarca el trabajo). En esta versión se reemplazarán las citas y referencias bibliográficas por «Autor, 2012» o «Autor y otros, 2012». En las referencias bibliográficas propias se debe eliminar el título y el nombre de la revista o el título del libro donde se publica.
5. Se admiten diversos tipos de trabajos: teóricos, informes de investigaciones, divulgación, innovación didáctica…
6. Junto con el artículo se remitirá un resumen (máximo de 600 caracteres incluyendo espacios), una traducción del mismo y del título en inglés, y cinco palabras clave jerarquizadas (en castellano e inglés).
   Ejemplo: Investigación didáctica, Álgebra, Modelización y dificultades, Enseñanza y aprendizaje, Secundaria y bachillerato.
7. El texto irá una sola columna y tendrá una longitud máxima de 25 000 caracteres sin contar espacios pero incluyendo las tablas, las figuras y los anexos.
8. Los esquemas, dibujos, gráficas e imágenes serán enviados preferentemente en formato TIF o EPS, aunque será admisible el formato JPEG, de modo que, a una resolución mínima de 300 ppp, la imagen tenga un tamaño mínimo de 7 × 7 cm, y en color original. Se adjuntarán en una carpeta aparte del documento del texto, ya que las imágenes incrustadas en el texto no son válidas para su posterior edición. Cada archivo estará claramente identificado y se indicará en el texto el lugar donde se ubica. De igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.
9. Si alguna expresion no se puede escribir con los caracteres disponibles en la fuente Times New Roman, se incluirá, con un editor de ecuaciones, fuera del texto. Si esto no fuera posible, se incorporará como imagen. En tales casos se indicará el lugar que ocupan las fórmulas en el texto, haciendo referencia al nombre del archivo que las contiene.
10. Las referencias bibliográficas se dispondrán al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición.
    Ejemplos:
    Gómez, E. (1990), *Título,* Editorial, Lugar de edición.
    Gómez, E. (1990*a*), *Título,* Editorial, Lugar de edición.
    Gómez, E., y J. Pérez (1990), *Título,* Editorial, Lugar de edición.
    Gómez, E., J. Pérez y D. Hernández (1990), *Título,* Editorial, Lugar de edición.

    En los artículos de revistas y capítulos de libro se seguirá la pauta que se muestra a continuación:
    Gómez, E. (1990), «Título», *Revista,* n.° 31, 35-56.
    Gómez, E. (1990), «Título», en J. Pérez (ed.), *Título,* Editorial, Lugar de edición, 13-23.
11. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: «[…] supone un gran avance (Hernández, 1992)». Si el autor aparece explícitamente en el texto, tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: «[…] según Rico (1993)».
12. Si se cita una referencia de más de tres autores se puede citar el primero seguido de la expresión *y otros.* Por ejemplo: «Bartolomé y otros (1982)», «Gelpi y otros (1987)». Pero en la bibliografía deben aparecer todos los autores.
13. Todas las referencias bibliográficas deben corresponder a menciones hechas en el texto.
14. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente con superíndices a lo largo del artículo y se incluirán al final del texto.
15. A la recepción del trabajo se enviará un correo electrónico como acuse de recibo.
16. Cada trabajo será remitido a dos asesores para ser evaluado. Estos no serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo, aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo o recomendarán posibles modificaciones acordes con las normas y criterios de *Suma*.
17. Si los dos informes son positivos, el artículo será publicado. Si los dos informes son negativos, se desestimará su publicación. Si existe discrepancia entre los informes, se solicitará un tercer informe que decidirá su publicación o no.
18. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como —en caso afirmativo— la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido.
19. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

Boletín de suscripción

Tarifas	Suscripción anual	Número suelto	Monografía
Particulares	25 €	10 €	15 €
Centros	40 €	15 €	15 €
Europa	50 €	20 €	15 €
Resto del mundo	60 €	22 €	15 €

Fotocopiar esta hoja y enviar:

por correo a: Revista *Suma*. Apartado de correos 286
08911 Badalona (Barcelona)
por Fax al: (+34) 912 911 879
por correo-e a: administracion@revistasuma.es

Deseo suscribirme a la revista *Suma*:

Nombre y apellidos: NIF/CIF:

Dirección: Teléfono:

Población: CP:

Provincia: País:

Correo electrónico: Fax:

Importe (€)

☐ Suscripción a partir del año (3 números) ___________

☐ N.os sueltos ______________________________

Total

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto)

☐ Transferencia bancaria (CC 0081-0024-83-0001496357)

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista SUMA

☐ Giro postal dirigido a Revista SUMA

Fecha y firma:

Nombre y apellidos:

Código Cuenta Cliente: Entidad: Oficina: DC: Cuenta:

Banco/Caja:

Agencia n.º: Dirección:

Población: Provincia:

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que, periódicamente, les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista *Suma*.

Atentamente (fecha y firma):