El ingeniero militar francés Nicolás Léonard Sadi Carnot (1796-1823) viajó en 1821 a la ciudad germánica de Magdeburgo donde su padre, el insigne matemático y geómetra Lázaro Carnot estaba exiliado. Lázaro había caído en desgracia tras la derrota de Napoleón en Waterloo, ya que entre otros muchos cargos había sido su ministro durante 5 meses y ocupado importantes puestos durante su administración. La casualidad hizo que a Magdeburgo hubiera llegado tres años antes un motor de vapor. Las conversaciones e inquietudes de ambos, padre e hijo, sobre él, harían que Sadi publicara en 1824 su *Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propes à développer cette puissance* (Reflexiones sobre la potencia motriz del fuego y sobre las máquinas adecuadas para desarrollar esa potencia).

En ella, Sadi Carnot explica su motor ideal con dos fuentes de calor que fluye de la caliente a la fría. Sadi descubre que el rendimiento de una máquina de vapor tiene un tope que viene dado por el de su máquina. El rendimiento de una máquina de Carnot es:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

con temperaturas absolutas $T_1 > T_2$. Es decir, el rendimiento tiene que ver con la diferencia de temperaturas de las dos fuentes. A mayor diferencia de temperaturas, mayor rendimiento y a temperaturas iguales rendimiento cero, por lo que da lo mismo que sustituyamos el vapor de agua por cualquier otro fluido.

Carnot demostró que existe un ciclo térmico óptimo, que puede ser reversible a condición de evitar las transferencias de calor entre cuerpos de diferentes temperaturas (Arroyo, 2012).

Pero habría que esperar a 1850, cuando el físico y matemático Rudolf Clausius (1822-1888) acuñaría el concepto de entropía, proveniente de una palabra griega εντροπια que significa *transformación*, *vuelta* y que se asemejaba a la palabra energía. Clausius reconoce la entropía como aquella cantidad que permanece invariante en un ciclo de Carnot en los cambios de volumen y temperatura. En los ciclos de esa máquina ideal de Carnot, los cambios de calor que se dan a temperatura constante, la variación de entropía es nula (transformación reversible), en los otros casos la variación de entropía siempre es positiva (transformación irreversible). En la máquina de Carnot, el vapor es calentado, mueve un pistón y vuelve a enfriarse, la entropía permanece constante; toda la cantidad de calor transmitida se transforma en trabajo. En cualquier otro proceso real, la entropía aumenta. La cantidad real de trabajo producido es menor ya que hay pérdidas por rozamientos y por tanto los procesos son irreversibles.

Clausius utilizó el cálculo diferencial para expresar la entropía *S* en función de la cantidad de calor absorbida, *Q*, en el ciclo de Carnot reversible y *T*, la temperatura absoluta medida en grados Kelvin, como el cociente del calor intercambiado partido por la temperatura:

$$dS = \frac{\partial Q}{T}$$

EJEMPLO 1:

Una viga metálica de 100 kg se encuentra a 10°C (283°K) y dispuesta a ser colocada en un edificio en construcción. Por un descuido, la viga cae al suelo desde una altura de 20 m sin sufrir daños. Posteriormente la viga se pone en su lugar, a 20 m de altura, usando un motor que consume una potencia de 500 W durante un minuto.

Calcule el incremento de entropía que ha experimentado el universo.

Dado que la temperatura es constante, el incremento de entropía es proporcional a la energía perdida en el problema. Esta energía perdida corresponde a la energía potencial que pierde la viga al caer:

$$E = mgh = 19600 \text{ J}$$

más la del motor que no es íntegramente empleada en subir la viga. Como el trabajo que realiza el motor es $W = Pt = 30000$ J de los que solo se utilizarán 19600 en subir la viga, restan 10400 J que se perderán en forma de calor. Con lo que la energía total perdida será:

$$E = 19600 + 10400 = 30000 \text{ J}$$

Y la entropía incrementada en el universo es de:

$$\Delta S = \frac{\Delta E}{T} = \frac{30000}{283} = 106 \text{ J/K}$$

En 1865, Clausius estableció las llamadas Primera y Segunda Ley de la Termodinámica de la siguiente manera:

— *Primera Ley*: La energía del universo es constante.

— *Segunda Ley*: La entropía del universo tiende a un máximo.

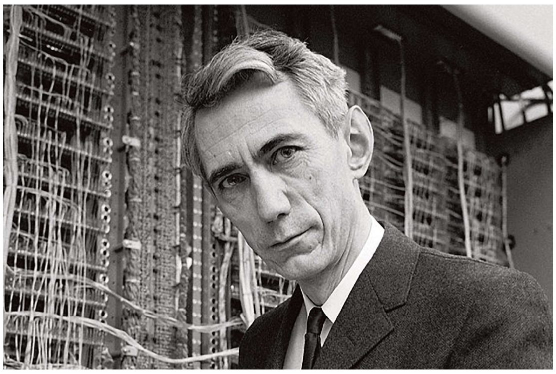

Figura 1. Claude Shannon

monociclo, a veces incluso haciendo juegos malabares. En 1950 programó un ordenador para jugar al ajedrez. Inventó también la calculadora THROBAC-I para operar con números romanos y otro mecanismo para resolver el cubo de Rubik. Shannon estaba fascinado con la inteligencia artificial y la posibilidad de enseñar a una máquina a aprender. Fue el responsable de avances en criptografía que había desarrollado para el uso de Winston Churchill y del presidente Franklin Roosevelt. El Alzheimer acabaría con su vida en 2001.

En las páginas siguientes nos adentraremos en algunos conceptos tratados por Shannon. En particular trataremos el concepto de entropía. Este es uno de conceptos científicos más poliédricos, más transversales que nos podemos encontrar. Obviamente que existen conceptos matemáticos o estadísticos que tienen una significación física, como es el caso de la media aritmética, asimilable al centro de gravedad de un sistema de masas, pero son pocos aquellos que nos permiten un acercamiento desde la Física, la Computación y la Economía y uno de ellos es el concepto de entropía. En todas esas aproximaciones es la probabilidad la que justifica su desarrollo e interpretación.

Por tanto, en este artículo, abordaremos la entropía desde una visión interdisciplinar. En el primer apartado veremos su génesis dentro de la Termodinámica. En el siguiente apartado mostramos que la entropía nos da el número medio de bits necesarios para codificar un mensaje y su relación con la compresión de ficheros informáticos. En el último apartado utilizaremos la entropía como una medida para estudiar la mayor o menor concentración de una variable económica. Sin duda es enriquecedor mostrar al alumnado el mismo concepto dentro de asignaturas tan dispares como la Física y Química, Matemáticas, Estadística, Informática o Economía, siendo un recurso didáctico útil para atraer la atención de nuestro alumnado.

Entropía en la Física

La entropía es en origen un concepto físico. Veamos su gestación. A finales del siglo XVIII se produjo la invención de la máquina de vapor por James Watt (1736-1919), un ingeniero que arreglaba los instrumentos que se estropeaban de la Universidad de Glasgow. Dicho hecho marcó el nacimiento de la Revolución Industrial y produjo una enorme transformación en las sociedades europeas, dando lugar a la aparición de inventos que permitían tener grandes fábricas de hilaturas o extraer agua del fondo de las minas o desplazarse de un lugar a otro encima de una locomotora, etc. Todo esto conllevó la creación de una nueva clase social, la del proletariado. En la máquina de vapor de James Watt apenas un 3% del calor generado lo convertía en trabajo. Nacería así una parte de la Física, la Termodinámica, dedicada en principio a estudiar cómo mejorar el rendimiento de una máquina, ver si ese rendimiento tenía un tope y si se mejoraría cambiando el vapor de agua por otro fluido.

Figura 2. Sadi Carnot

suma+ 83
Artículos
Noviembre 2016
pp. 43-53

Bit, Entropía y Probabilidad

Gabriel Ruiz-Garzón
Jaime Ruiz-Zapatero

El objetivo de este artículo es mostrar el concepto de entropía desde una visión multidisciplinar, en el campo de la física, la computación o la economía. La entropía es un concepto ligado con la tecnología y las preocupaciones diarias de nuestros alumnos. Un recurso didáctico para nuestras clases de matemáticas que no es entendible sin la probabilidad.

Palabras clave: Recursos didácticos, Entropía, Probabilidad, Bachillerato y Universidad.

Bit, Entropy and Probability

The aim of this article is to show the concept of entropy from a multidisciplinary approach, physics, computer science and economics. Entropy is a concept linked to technology and a daily concern of our students. It's an indispensable educational resource for our math's classes, not understandable without the notion of probability..

Keywords: Educational resource, Entropy, Probability, Secondary School and University.

Este año 2016 se cumple el centenario del nacimiento de Claude Shannon. Solo la divulgación de su obra matemática ya justificaría que le dedicáramos unas páginas.

Claude Shannon (1916-2001) nació en Gaylord, un pequeño pueblecito de Michigan y tuvo como inspiración a su primo lejano Thomas Alva Edison. Estudió Ingeniería eléctrica y Matemáticas en la Universidad de Michigan. En 1940 lee su tesis doctoral en el Massachussetts Institute of Technology (MIT), como continuación de su trabajo en esa institución y en los laboratorios Bell Telephone. En dicha memoria exponía cómo la manipulación de ceros y unos se puede tratar con circuitos eléctricos. Abrió así la puerta de la computación analógica, basada en el álgebra booleana, como paso previo a la digital, de tanta importancia en telefonía, informática, etc. Es decir, inauguró la revolución tecnológica que ha caracterizado el pasado siglo XX. Suyo es el término *Bit* como apócope de **b**inary dig**it**, el desarrollo de la *Teoría de la Información* y la definición de *entropía* como una medida de la eficiencia de la comunicación del sistema.

De Shannon se cuenta que era un tipo algo excéntrico, ya que cuando no estaba encerrado en su despacho, se movía por los pasillos de los laboratorios de la compañía Bell montado en un

Artículo recibido en *Suma* en febrero de 2016 y aceptado en julio de 2016

VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática

VIII CIBEM Madrid 2017

10–14 julio

Niveles educativos

Inicial (3 a 5 años)

Primario (6 a 11 años)

Medio o Secundario (12 a 15 años)

Terciario (16 a 18 años)

Formación y actualización docente

Educación de adultos

No específico

Núcleos temáticos

I. Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos

II. La resolución de problemas en Matemáticas

III. Aspectos socioculturales de la Educación Matemática

IV. Formación del profesorado de Matemáticas

V. Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas

VI. Matemáticas y su integración con otras áreas

VII. Investigación en educación matemática

VIII. Historia social de la Educación Matemática en Iberoamérica

IX. Comunicación y divulgación matematica

www.cibem.org

Referencias bibliográficas

Benavides, M., A. Maz, E. Castro y R. Blanco (eds.) (2004), *La Educación de niños con talento en Iberoamérica*, OREALC-Unesco, Santiago (Chile).

Davis, G. A., S. B. Rimm y D. Siegle (2011), *Education of the gifted and talented* (6th ed.), MA: Pearson, Boston.

Freiman, V. (2006), «Problems to discover and to boost mathematical talent in early grades: A Challenging Situations Approach», *The Montana Mathematics Enthusiast*, n.º 3 (1), 51-75. Canada: The Montana Council of Teachers of Mathematics.

Greenes, C. (1981). «Identifying the Gifted Student in Mathematics», *Arithmetic Teacher*, n.º 28 (8), 14-17.

Miller, R. C. (1990), *Discovering Mathematical Talent*, ERIC Digest E482, Office of Educational Research and Improvement, Washington, D. C.

Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático*, Tesis doctoral, Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, disponible en: http://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis.

Rico, L., A. Marín, J. L. Lupiáñez y P. Gómez (2008), «Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales», *Suma*, n.º 58, 7-23.

Rafael Ramírez Uclés
Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada
<rramirez@ugr.es>

Pablo Flores Martínez
Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada
<pflores@ugr.es>

Tarea 4: Versión del Teorema de Pitágoras para polígonos regulares y figuras semejantes (ver si es si y solo si para rectángulos)	
Individual	Cooperativo
Conjeturar la validez del Teorema de Pitágoras para polígonos regulares construidos sobre los lados (Geogebra)	Demostración de las conjeturas
Reposo: Área del polígono regular como descomposición en triángulos iguales. Obtención de la fórmula. **Objetivo**: Relación de proporcionalidad entre el lado del triángulo y el área del polígono regular construido sobre él. **En relación al proyecto**: ¿Se puede construir un puzle con triángulos rectángulos y triángulos equiláteros construidos sobre sus áreas? ¿Qué relación tiene el puzle hexagonal con el triangular? **Pista**: El área del polígono regular es proporcional al lado al cuadrado sobre el que está construido. Investigar demostraciones geométricas de la igualdad de áreas para triángulos equiláteros. Descomposición del puzle hexagonal en seis puzles triangulares.	

Tarea 5: Puzles hexagonales sobre triángulos no rectángulos	
Individual	Cooperativo
Generalización del Teorema de Pitágoras a polígonos regulares	Consensuar la mejor formulación
Reposo: Condición necesaria y suficiente. Reducción al absurdo. **Objetivo**: El Teorema de Pitágoras como condición necesaria y suficiente para polígonos regulares. **En relación al proyecto**: ¿Es imposible construir un puzle para triángulos no rectángulos y hexágonos regulares construidos sobre los lados? **Pista**: Completa los siguientes enunciados: — Si un triángulo es rectángulo, el área del polígonos regular construido sobre el lado mayor es igual a … — Si un triángulo es acutángulo, el área del polígono regular construido sobre el lado mayor es … — Si un triángulo es obtusángulo, el área del polígono regular construido sobre el lado mayor es … **Pista**: ¿Qué ocurriría si fuese cierta la igualdad de áreas para hexágonos regulares construidos sobre triángulos no rectángulos? ¿Qué podría deducirse de las Tareas 3 y 4 en relación al Teorema de Pitágoras?	

Si se desea avanzar en este tema se pueden plantear nuevas cuestiones relacionadas:

- — Demostraciones geométricas para otros polígonos regulares.
- — Caso límite cuando el polígono regular tiene infinitos lados.
- — Construcción de puzles hexagonales (no regulares).
- — Teorema de Pitágoras para cubos construidos sobre los lados del triángulo (Teorema de Fermat).
- — Teorema de Pitágoras en métricas no euclídeas…

Una última reflexión final

¿Y si partimos del reposo curricular para planificar las sesiones de *todos* nuestros alumnos? Es decir, una vez que hemos diseñado las tareas pensando en el nivel máximo de comprensión matemática, podemos modificarlas para ir adaptándolas a niveles inferiores. Quizá esto pueda resultar más operativo que, como decíamos, focalizar en el nivel estándar y completar con refuerzo y ampliación.

Os proponemos como ejercicio releer este artículo y adaptar las tareas del proyecto pensando que van destinadas a un alumno cualquiera. Para que cada uno pueda llegar hasta su nivel (donde pueda y un poco más). Algunas pautas: más participación del profesor como guía, justificaciones más intuitivas y menos formales, utilización de material manipulativo para las conjeturas, mayor número de repeticiones, etc.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado dentro del proyecto EDU2012-37259 «Análisis de procesos de aprendizaje de estudiantes de altas capacidades matemáticas de E. Primaria y ESO en contextos de realización de actividades matemáticas ricas» subvencionado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

Para abordar el proyecto, el profesor marca unas pautas de investigación que le dan sentido a que *reposen* su comprensión del Teorema de Pitágoras. Para dar respuesta a preguntas superiores, iremos descendiendo a preguntas que vayan consolidando la base matemática del problema que queremos abordar (tabla 1).

¿Es posible una versión *hexagonal* del Teorema de Pitágoras para triángulos no rectángulos?
¿Es posible una versión *hexagonal* del Teorema de Pitágoras para triángulos rectángulos?
¿Es posible una versión *cuadrada* del Teorema de Pitágoras para triángulos no rectángulos?
¿Qué relación existe entre la longitud de los lados de un triángulo cualquiera?
¿Qué es un triángulo?

Tabla 1. Secuenciación de preguntas para reposar el contenido

Siguiendo este esquema, el profesor presenta una secuenciación de tareas en las que los alumnos trabajan tanto individualmente como en grupo, cuando sea posible. El profesor plantea cada tarea y actúa como moderador de sus respuestas, dejando que sean ellos los que determinen criterios para analizar la validez de sus respuestas y el aporte al proyecto. En caso de que encuentren dificultades, puede plantear nuevas preguntas en relación al proyecto u orientaciones (pistas) para que reconduzcan su trabajo.

Tarea 1: ¿Qué es un triángulo?	
Individual	Cooperativo
Definición de triángulo	Consensuar una definición única de grupo
Reposo: Concepto de triángulo como región, polígono y vértices no alineados. Magnitud y medida. Unidades de medida. **Objetivo**: Analizar la equivalencia de las posibles definiciones que aporten: — Tres puntos del plano no alineados — Área comprendida entre tres rectas que se cortan dos a dos — Tres segmentos que se cortan dos a dos **En relación al proyecto**: Clasificación de triángulos según la medida de sus lados **Pista**: ¿Qué relación existe entre la longitud de los lados y la forma del triángulo? **Pista**: Clasificación de triángulos según los lados y según los ángulos.	

Tarea 2: ¿Qué medidas pueden tener los lados de un triángulo?	
Individual	Cooperativo
Conjeturas de propiedades	Formulación de la propiedad
Reposo: Desigualdad triangular. Condición necesaria y suficiente. **Objetivo**: Condición necesaria y suficiente para las longitudes de los lados de un triángulo. **En relación al proyecto**: ¿Cómo tienen que ser las longitudes de los lados de un triángulo? **Pista**: Completa esta afirmación: Tres segmentos forman un triángulo si y solo si las longitudes de sus lados cumplen… **Pista**: ¿La suma de dos de ellas es mayor que la otra? ¿Cómo tienen que ser tres números para que cumplan esta propiedad?	

Tarea 3: Formulación del Teorema de Pitágoras para triángulos no rectángulos	
Individual	Cooperativo
Formulación del Teorema como condición necesaria y suficiente	Consensuar la mejor formulación
Reposo: Condición necesaria y suficiente. Representación del Teorema como igualdad de áreas. **Objetivo:** El Teorema de Pitágoras como condición necesaria y suficiente. Visualización de la propiedad de la igualdad de áreas. **En relación al proyecto** ¿Se puede construir un puzle con triángulos no rectángulos y cuadrados construidos sobre las áreas? **Pista**: Completa los siguientes enunciados: — Si un triángulo es rectángulo, el área del cuadrado construido sobre el lado mayor es igual a …. — Si un triángulo es acutángulo, el área del cuadrado construido sobre el lado mayor es …. — Si un triángulo es obtusángulo, el área del cuadrado construido sobre el lado mayor es… **Pista**: ¿Es cierto el recíproco del primer enunciado? Enuncia el Teorema de Pitágoras como condición necesaria y suficiente. **Pista**: Para construir el puzle, encuentra demostraciones geométricas del Teorema de Pitágoras y construye las piezas que se utilizan para comprobar las igualdades. (Figura de una demostración)	

— Generalizar el teorema para potencias distintas de dos.

En este caso, la característica se ha elegido tras la selección de contenidos y elementos de razonamiento. En otras ocasiones pueden determinarse previamente las características a desarrollar y posteriormente seleccionar los contenidos y elementos.

Metodologías recomendadas para alumnos de altas capacidades

Particularizando las expuestas para el caso de las matemáticas, podemos plantear tareas de investigación a través de retos y problemas abiertos. Si es posible el trabajo cooperativo y el contextualizarlos en situaciones reales, mucho mejor.

La posibilidad del trabajo cooperativo es la que matiza la presentación y secuenciación de las tareas, según el rol que el alumno con talento matemático adopte dentro del grupo. En grupos heterogéneos puede aportar y enriquecerse de las distintas estrategias de aprendizaje y de comunicación con el grupo. Cuando las tareas son de mayor complejidad, resulta interesante la interacción con otros alumnos de talento, ya que pueden compartir el interés por resolver la tarea, comprender las estrategias de resolución del compañero y comunicar ideas de un nivel superior. Para enriquecer el intercambio de ideas, es conveniente que las tareas sean de definición, argumentación y resolución.

El posible agrupamiento es lo que diferencia el reposo curricular según se enfoque a un alumno en particular, un grupo de alumnos (dentro de la misma clase) o un grupo de alumnos de un programa de enriquecimiento (fuera de la clase habitual).

En los dos primeros casos, el profesor debe compaginar el trabajo de los alumnos con talento matemático con el resto de la clase. Una solución es plantear el proyecto de investigación al principio de cada unidad y *negociar* con los alumnos con talento el modo de trabajo. Por ejemplo, cada vez que demuestren que dominan los contenidos previstos para una sesión, pueden agruparse para trabajar en su proyecto. El profesor adquiere el papel de mentor que coordina dicho trabajo. El resto de alumnos deben conocer el proyecto y estar invitados a participar en este grupo de trabajo cuando *quieran* y *dominen los contenidos*.

En el caso de programas de enriquecimiento en los que en determinados momentos se agrupen a los alumnos con talento matemático, el profesor puede adquirir un papel más activo en el trabajo en grupo. Especialmente puede profundizar en los aportes individuales, moderar en la recopilación y comunicación de ideas, resolver dudas puntuales y aportar información.

En relación a las tareas, en general, encontrar respuestas a las cuestiones de mayor complejidad planteadas o resolver problemas supone un reto para los alumnos con talento matemático. Sin embargo, cuando sea posible, es recomendable que el objetivo del trabajo sea encontrar respuesta a un problema abierto (del que incluso el profesor puede desconocer la solución) y que les resulte novedoso. La resolución no es lo más importante, sino las ideas para abordarlo y que sean conscientes de las dificultades que van encontrando. El contextualizarlo en una situación real puede ser un elemento motivador que además aporte significatividad a los nuevos contenidos que están aprendiendo.

Reposo curricular. El Teorema de Pitágoras

Vamos a mostrar un esquema de presentación de tareas de enriquecimiento para esta unidad. El reposo se centra en el concepto de triángulo rectángulo, la formulación del Teorema y la representación como igualdad de áreas construidas sobre los cuadrados.

Presentación del proyecto: Construcción del puzle hexagonal del Teorema de Pitágoras

> Una empresa de juegos educativos quiere ampliar su colección de puzles. Para ello ha contactado con un grupo de matemáticos (vosotros) para que hagáis el diseño de las piezas. El directivo está interesado en versiones similares al Teorema de Pitágoras, pero le gustaría utilizar triángulos de otro tipo en los que se construyan hexágonos regulares sobres los lados. Analizad la viabilidad del proyecto y, en su caso, elaborad una propuesta de puzle para la empresa.

nivel de conocimiento matemático, el análisis del contenido que el profesor realiza para planificar su unidad (Rico y otros, 2008). Podemos plantear inicialmente cuestiones relativas a la estructura conceptual (propiedades formales), sistemas de representación (representaciones simbólicas, gráficas, numéricas, modelos) y sentidos y modos de uso (términos, contextos, fenómenos y situaciones).

Esto permite disponer de herramientas para plantear al estudiante tareas que muestren que estudiar situaciones matemáticas va más allá de buscar una solución rápidamente, que requiere reposo para profundizar en su estudio. Para ello tenemos que plantear retos, promover que los estudiantes formulen, escuchen y aprecien explicaciones propias y de sus compañeros, y finalmente profundicen en la comprensión del contenido matemático. En resumen, el reposo curricular supone una actuación de profundización del profesor que favorezca una profundización reposada del alumno, sintetizada en la figura 2.

El análisis de contenido anterior permite formular las siguientes cuestiones que pueden constituirse en retos, en relación al concepto, formulación, definiciones, propiedades, demostración…:

— ¿Qué tienen los triángulos rectángulos de especiales para que se cumpla esta igualdad? ¿Qué le pasa a los otros triángulos?
— ¿Qué significa en matemáticas una doble implicación? ¿Es el Teorema de Pitágoras una doble implicación? ¿Cómo se formularía en una versión de si y solo si?
— Hay muchísimas demostraciones de este teorema, ¿comprendes los razonamientos de alguna de ellas?

En relación a la representación o modelos que podemos utilizar para comprenderlo mejor:

— El Teorema de Pitágoras establece una relación entre los cuadrados de los lados. ¿Qué relación tiene con la medida de áreas? ¿Existe alguna relación entre las medidas de los lados sin elevar a ninguna potencia? ¿Y al elevarlas a potencias mayores de dos? ¿Qué significa geométricamente la igualdad de cubos sobre los lados?
— ¿Se puede generalizar el Teorema de Pitágoras al área de polígonos regulares construidos sobre los lados? ¿Y al perímetro? ¿Y a otro tipo de figuras?

En relación al uso y problemas que resuelve:

— ¿Para qué se utiliza el Teorema de Pitágoras? ¿Qué relación existe con la medida de longitudes y de áreas? ¿Qué se puede medir sin utilizar el Teorema de Pitágoras?

Características del talento a desarrollar

De las características expuestas seleccionamos las que consideramos que pueden ponerse en juego para responder a las preguntas anteriores. En este caso vamos a focalizar la atención en la capacidad para generalizar y realizar abstracciones. Tendrán que poner en juego esta característica para:

— Abstraer propiedades generales a partir de casos particulares.
— Generalizar el enunciado para cualquier triángulo.
— Generalizar la propiedad de las áreas para polígonos regulares.

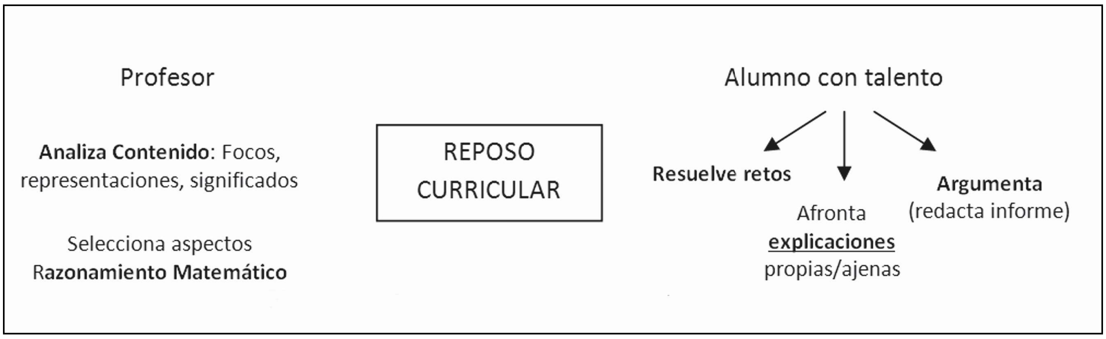

Figura 2. Esquema del reposo curricular

Enriquecimiento del contenido y los elementos de razonamiento matemático

Mayoritariamente, en esta unidad todos los alumnos han trabajado en la formulación del Teorema de Pitágoras, tanto en relación a las medidas de los lados como en la relación entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados. También se han planteado tareas aplicándolo a resolver problemas concretos. Puede haberse trabajado utilizando puzles o programas informáticos como Geogebra.

La *aceleración* es una respuesta educativa que permite adelantar varios cursos al alumno que presenta un elevado desfase respecto al grupo. En los casos en los que no está recomendada esta aceleración, nuestra propuesta de enriquecimiento se basa en el *reposo*. Además, utilizamos esta palabra con otra intención añadida. En nuestra experiencia en el programa ESTALMAT en Andalucía, hemos apreciado el interés, la disposición de los alumnos de altas capacidades matemáticas, pero también la disposición a demostrar su rapidez, más bien con actitud competitiva y sin validar su respuesta. Para afrontar la intención de enriquecer el aprendizaje de estos alumnos, pero a la vez, no reforzar estas tendencias, proponemos un proceso de diseño de tareas de enriquecimiento que llamamos «reposo curricular».

Para explicar nuestra propuesta de enriquecimiento de un contenido matemático comencemos por señalar que pretendemos establecer unas pautas que permitan al alumno profundizar en el contenido y abordarlo con un nivel mayor de abstracción y complejidad.

El reposo curricular afecta tanto a los alumnos como al profesor. Comencemos por este último. Nuestra comprensión del teorema de Pitágoras como profesores no es la misma que la que tuvimos la primera vez que nos lo presentaron. Múltiples experiencias y formación han enriquecido el significado que tiene para nosotros esa igualdad, que va más allá de despejar una incógnita dados los otros dos valores.

Nuestra vocación de enseñar lo que sabemos, nos puede llevar a intentar transmitirlos, pero, sin duda por la falta de tiempo, comprimimos toda esta información y dejamos poco tiempo para que se *asienten y reposen* los nuevos contenidos aprendidos.

En relación a los elementos de razonamiento, el alumno puede que no esté tan familiarizado como nosotros en conceptos como los de condición necesaria y suficiente, demostración, conjetura, contraejemplo, notación, definición, etc. Las técnicas de argumentación, como la reducción al absurdo o el uso de contraejemplos y las estrategias de resolución de problemas puede que tampoco le sean tan familiares o que no hayan tenido las suficientes experiencias para asentarlas.

A este fin, con la idea de reposo curricular proponemos que el profesor *se pare* para analizar el contenido a enseñar (el teorema de Pitágoras, en este caso), determinando los focos de dicho contenido (las relaciones métricas en un triángulo rectángulo, tanto de áreas como de longitudes, relacionadas a partir de la semejanza de las figuras que se colocan sobre los lados y de la fórmula que permite obtener la medida del área a partir de la longitud del lado del cuadrado; pero también la utilización de esa relación para construir ángulos rectos, dado que la igualdad que expresa el teorema es exclusiva de los triángulos rectángulos; o bien la relación entre ternas pitagóricas de números y su relación con los otros dos focos). Este análisis le permite apreciar que el trabajo con el contenido abarca enunciar el teorema (en ambas versiones, superficie y longitud), justificar en casos concretos, demostrar gráficamente a partir de construcciones con diverso grado de generalidad, demostrar formalmente (con diversidad de caminos); pero también aplicarlo en situaciones directas (determinar longitudes/superficies a partir de otras), o inverso (estudiar la perpendicularidad de rectas, a partir de la igualdad numérica de medidas).

En este análisis aparecen diversos elementos del razonamiento matemático relacionados con el contenido: concepto de teorema, condiciones necesarias y suficientes, generalización de una propiedad, entre otros.

Gracias a este reposo podemos plantear las tareas de enriquecimiento. Para que el alumno profundice en el significado del contenido matemático podemos compartir, adaptándolo a su racterizaciones de diversos autores (Greenes, 1981; Freiman, 2006; Miller, 1990), de ellos seleccionamos las siguientes características:

El alumno con talento matemático es aquel, que entre otras características, pregunta espontáneamente cuestiones que van más allá de las tareas matemáticas que se le plantean, aprende rápidamente, organiza los datos con habilidad, tiene capacidad para generalizar y realizar abstracciones, cambia fácilmente de una estrategia a otra, localiza la clave de los problemas, busca patrones y relaciones, produce ideas originales, desarrolla estrategias eficientes, piensa de modo crítico, persiste en la consecución de los objetivos que se propone, es original en la interpretación, tiene entusiasmo y una gran curiosidad por la información numérica, etc.

De las recomendaciones para la atención del talento matemático, nos centramos en el enriquecimiento curricular porque es una estrategia que puede dar respuesta a la problemática introducida.

Enriquecimiento curricular

Consiste en añadir nuevos contenidos que no estén cubiertos en el currículo oficial o trabajar determinados contenidos en un nivel mayor de profundidad. No consiste en avanzar contenidos de cursos posteriores, sino en ampliar la estructura de los temas y abordarlos con un nivel mayor de abstracción y de complejidad. Se enfatiza en la profundización en los contenidos matemáticos para extender el aprendizaje del alumno pudiendo ir más allá de los prescritos por el currículo. Una forma de enriquecer el contenido es complementarlo mediante la alusión a elementos del razonamiento matemático que generalmente no forman parte de las matemáticas escolares. Atender a qué es un teorema, corolario, etc., detenernos en la diferencia entre condiciones necesarias, suficientes o necesarias y suficientes, caracterizar las definiciones en matemáticas, o la necesidad de establecer la existencia y unicidad del concepto definido, son algunos ejemplos de razonamientos matemáticos que pueden caber en esta idea de enriquecimiento.

Para abordar el diseño de las tareas para los contenidos del enriquecimiento curricular, podemos considerar diversas orientaciones metodológicas recomendadas para alumnos con talento (Davis, Rimm y Siegle, 2011). Destacamos, entre otras, fomentar tanto el trabajo autónomo como la interacción entre el alumnado mediante el aprendizaje cooperativo, presentar situaciones nuevas con preguntas abiertas que fomenten el razonamiento, estimular la indagación y la reflexión en torno a problemas reales y plantear retos y proyectos de investigación.

Sinteticemos todo lo anterior destacando tres factores a tener en cuenta en el diseño de actuaciones con alumnos de alta capacidad matemática.

— Enriquecimiento de los contenidos matemáticos, dándoles mayor profundidad y añadiendo elementos de razonamiento matemático.
— Atender a las características específicas del talento que se quieren desarrollar.
— Usar metodologías de las recomendadas para alumnos de altas capacidades.

A partir de estos elementos, proponemos un esquema que los conecta (figura 1).

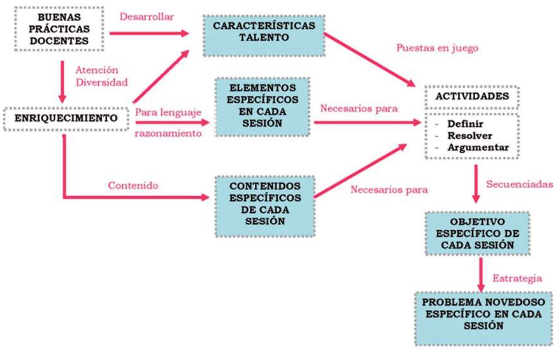

Figura 1. Esquema para el diseño de sesiones

Vamos a explicar este modelo de diseño utilizando un ejemplo concreto referido a la enseñanza del Teorema de Pitágoras en 3.º de ESO. Debemos seleccionar los elementos que conforman cada uno de los focos: ¿Qué contenidos y elementos de razonamiento matemático se van a enriquecer? ¿Qué características del talento se quieren desarrollar? ¿Qué metodología vamos a utilizar para relacionarlos y llevar a cabo el enriquecimiento?

enseñanza focalizadas en el grupo estándar (*los del centro* de la campana de Gauss) y complementarlas con actividades de refuerzo (para los *de abajo*) y de ampliación (para *los de arriba*). Esto obliga, al menos, a triplicar las expectativas de aprendizaje, considerando distintos niveles de complejidad y una metodología que permita orquestarlas.

Para llevar a cabo tareas de refuerzo, el maestro o profesor parte de las limitaciones que manifiestan sus alumnos, que normalmente conoce por experiencias previas. Tiene localizados los errores cometidos por los alumnos que no superaron la asignatura el curso anterior, las dificultades de comprensión de determinados conceptos, etc. A partir de este conocimiento, puede diseñar refuerzos puntuales, adaptaciones curriculares, programas de refuerzo y otras medidas específicas para las dificultades diagnosticadas.

También en la atención de los alumnos de alta capacidad surgen dificultades a la hora de planificar actuaciones, tanto para reconocer las características específicas de estos estudiantes como en la puesta en marcha de medidas educativas que se sugieren para ellos. Por ejemplo, si bien los grupos de apoyo están bastantes consolidados, no son tan habituales los grupos de enriquecimiento. Además, en los diagnósticos adquiere un papel fundamental el departamento de orientación, quien marca las pautas genéricas de atención que el profesor debe concretar para su clase de matemáticas.

En este trabajo pretendemos aportar ideas para que el profesor diseñe tareas de enriquecimiento para sus alumnos de alta capacidad matemática.

En este trabajo pretendemos aportar ideas para que el profesor diseñe tareas de enriquecimiento para sus alumnos de alta capacidad matemática. Inicialmente procederemos a caracterizar a estos estudiantes. A continuación analizaremos algunas estrategias, recursos y metodologías para atenderlos. Finalmente, presentaremos el «reposo curricular» como una estrategia tanto para enriquecer las tareas cuando el alumno está en clase con el resto de compañeros, como para diseñar sesiones de enriquecimiento específicas para grupos de alumnos con talento matemático.

Caracterización del talento matemático

Hemos utilizado indistintamente alta capacidad matemática o talento matemático para referirnos a los alumnos que destacan por sus habilidades sobresalientes en matemáticas. Para las matizaciones de diagnóstico o definición os sugerimos distintos trabajos que profundizan en estos aspectos (Benavides, Castro y Blanco, 2004; Ramírez, 2012)

Aquí nos interesa matizar tres términos. La sobredotación, talento matemático y alto rendimiento son tres conceptos independientes, aunque pueden estar relacionados. El alumno de altas capacidades presenta puntuaciones superiores en los test psicométricos utilizados por los psicólogos, pudiendo ser las matemáticas una de las áreas en las que supere el percentil correspondiente. El alumno con talento matemático posee unas habilidades sobresalientes en el ámbito específico de las matemáticas y ha podido ser diagnosticado por el departamento de orientación o nominado por los profesores de matemáticas que han percibido estas características específicas. Sin embargo, los dos casos anteriores no necesariamente van acompañados de un alto rendimiento en la asignatura de matemáticas.

Las medidas de atención a la diversidad deben ir encaminadas a los alumnos que las demandan. Un alumno de alto rendimiento, o un alumno superdotado que no tiene talento matemático, no tiene por qué demandar tareas más ricas en clase de matemáticas porque puede haber alcanzado su nivel máximo de competencia o por focalizar sus intereses en otros campos.

Nos centramos en el alumno con talento matemático que *demanda más* en la clase de matemáticas. *Mi hijo se aburre en clase* no tiene por qué ser ningún indicador de talento. Mejor enfatizar la demanda que el aburrimiento, ya que este puede ser consecuencia de otros factores. Para reconocer a los estudiantes con talento hay muchas ca-

suma+
Artículos
Noviembre 2016
83
pp. 33-41

Planificar el enriquecimiento para alumnos de alta capacidad matemática: reposo curricular

Rafael Ramírez Uclés
Pablo Flores Martínez

En este trabajo presentamos un esquema para el diseño de sesiones de enriquecimiento curricular para alumnos con talento matemático. En esta planificación confluyen los contenidos y elementos de razonamiento matemático, las metodologías recomendadas para las altas capacidades y las características del talento que se pretenden desarrollar. Ejemplificamos este diseño en una unidad del Teorema de Pitágoras, utilizando el reposo curricular como enfoque para la profundización tanto para el alumno como para el profesor.

Palabras clave: Talento matemático, Enriquecimiento curricular, Altas capacidades, Atención a la diversidad, Teorema de Pitágoras.

Planning curricular enrichment at mathematically talented students: curricular rest

In this work we introduce a plan for the design of curricular enrichment sessions aimed at mathematically talented students. This plan incorporates the elements of mathematical reasoning, the recommended methodologies for high abilities and the characteristics of the talent to be developed. We illustrate with examples this design in a unit focused on Pythagoras Theorem, making use of curricular rest as a deepening approach both for the student and the teacher.

Keywords: Mathematically talented, Curriculum enrichment, High abilities attention to diversity, Pythagoras theorem.

La diversidad dentro de las aulas es una realidad a la que el profesor necesita dar respuesta. Cada alumno tiene su particular actitud hacia la asignatura, su propio nivel de competencia y su estilo de aprendizaje. La planificación del proceso de enseñanza no puede basarse únicamente en un grupo homogéneo que comprende las matemáticas del mismo modo, al mismo tiempo y con el mismo interés. Esta atención a la diversidad cobra aún mayor sentido en el caso de alumnos con necesidades educativas especiales, que al poseer unas características específicas, demandan una atención más personalizada.

De las palabras:

> Más que una exigencia normativa, el profesor concibe la atención a la diversidad como una oportunidad de satisfacer las necesidades educativas de cada uno de sus alumnos, teniendo en cuenta sus capacidades, motivaciones, dificultades, etc.

A los hechos:

> Mañana explico el Teorema de Pitágoras. Tengo 25 alumnos en clase, dos repetidores, tres asisten a apoyo con dificultades de aprendizaje, dos presentan trastorno de déficit de atención, dos son alumnos superdotados, uno tiene talento académico, dos talento matemático, cuatro son de alto rendimiento, etc.

Una primera solución, creemos que bastante extendida y socorrida, es diseñar propuestas de

Artículo recibido en marzo 2016, aprobado julio 2016