suma+ 83
Artículos
Noviembre 2016
pp. 65-71

Visualizaciones geométricas

Félix Martínez de la Rosa

En este artículo se analizan las dos maneras de definir el producto escalar y el vectorial. En ambos productos, se visualiza la propiedad distributiva respecto de la suma, que permite el paso de la expresión geométrica a la analítica. También se visualizan otras dos conocidas fórmulas.

Palabras clave: Producto escalar, Producto vectorial, Geometría, Visualización.

Geometric visualizations

In this paper there are analyzed the ways of introducing the dot product and the cross product. In both products, the distributive property over addition is visualized, which allows the step of the geometric expression to the analytical one. Also other two known formulae are visualized.

Key words: Dot product, Cross product, Geometry, Visualization.

En el editorial del número 80 de la revista *Suma*, se hace una interesante reflexión sobre el papel de la visualización en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Un gran partidario de la misma fue Miguel de Guzmán. En su libro (Guzmán, 1996) explicaba que:

> Las ideas, conceptos y métodos de la Matemática presentan una gran riqueza de contenidos visuales, [...] cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de problemas.
> [...]
> Esta forma de actuar con atención explícita a las posibles representaciones concretas en cuanto desvelan las relaciones abstractas que al matemático interesan constituye lo que denominamos visualización en matemáticas.

En el mencionado editorial, se expone que el razonamiento visual se basa en la geometría, y que es en esta disciplina donde, en las evaluaciones externas, los alumnos de secundaria obligatoria logran los peores resultados. Es necesario poner medios para contribuir a mejorar la comprensión geométrica de los alumnos: quizás sería bueno moderar la presencia del cálculo, tanto del aritmético como del algebraico y de «esas filas interminables de cálculos», a cambio de potenciar la presencia de la geometría.

Artículo recibido en *Suma* en marzo de 2016 y aceptado en julio de 2016

Los contenidos acerca de la geometría plana se imparten en los últimos cursos de la ESO, y todos los alumnos reciben las enseñanzas correspondientes. Sin embargo los relativos a la geometría en el espacio solo se imparten a los alumnos del 2.º curso del bachillerato de ciencias. En ciencias sociales no se imparte dicha materia: no parece bueno que un grupo tan numeroso de alumnos no hayan recibido nunca esta formación.

La geometría del 2.º curso del bachillerato de ciencias comienza con los vectores en el espacio y su producto escalar y vectorial: son básicos para el resto de la geometría, de ahí la importancia de asentar bien estos conceptos. Los dos tienen una expresión geométrica (basada en el ángulo entre los vectores) y una expresión analítica (basada en una operación con las componentes de los vectores). La mayoría de los textos universitarios comienzan los dos por la expresión analítica, mientras que los textos de bachillerato optan por empezar por la expresión geométrica. Pero tanto en unos como en otros, la relación entre las dos expresiones no se expone de forma motivadora ni intuitiva.

En la primera sección de este artículo exponemos ciertas carencias encontradas al introducir el producto escalar y vectorial, en textos universitarios y de bachillerato. En la segunda se propone utilizar la visualización para relacionar las dos expresiones de ambos productos. En la tercera se aportan ideas para visualizar dos conocidas fórmulas.

El producto escalar y el producto vectorial

Producto escalar

En los textos universitarios consultados (Larson y otros, 1995; Bradley y Smith, 1998; Edwards y Penney, 1996; Stewart, 1994), el producto escalar de dos vectores, u y v se define como el producto de sus componentes (expresión analítica). Tras las propiedades algebraicas, el paso a la expresión geométrica

$$u \cdot v = |u||v|\cos\theta$$

donde θ es el ángulo entre los vectores, $0 \leq \theta \leq \pi$, se hace aplicando el teorema del coseno

$$|v-u|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v|\cos\theta$$

en la figura 1.

Combinando esa fórmula con

$$|v-u|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v|\cos\theta$$

se obtiene la conexión que se pretende. Pero esta demostración no aporta ninguna idea intuitiva ni visual: básicamente es solo una manipulación algebraica.

En los textos de bachillerato consultados, (Colera y Oliveira, 2009; Escoredo y otros, 2009; González y otros, 2009), el producto escalar se define con la expresión geométrica. La relación entre esta y la expresión analítica se consigue expresando los vectores en función de los unitarios básicos y aplicando la propiedad distributiva del producto escalar respecto de la suma. Pero en ninguno de esos textos se demuestra o se justifica esta última. Al ser una propiedad instrumental no se le presta ni un momento de atención: su único valor es el de ser un paso intermedio entre una expresión y la otra. Sin embargo esta propiedad tiene un gran potencial visual, como veremos en la segunda sección.

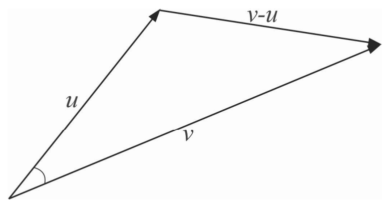

Figura 1

Producto vectorial

En los textos universitarios consultados (Larson, 1995; Bradley y Smith, 1998; Edwards y Penney, 1996; Stewart, 1994), el producto vectorial de dos vectores, u y v, se define con la conocida expresión analítica. A partir de ella y usando las propiedades de los determinantes, se deducen las propiedades algebraicas y el hecho de que $u \times v$ es ortogonal a u y a v. La relación con la fórmula del módulo del producto vectorial $u \times v$ en función del ángulo θ, $0 \leq \theta \leq \pi$, que forman u

y v, y la del área del paralelogramo que tiene a u y a v como lados adyacentes, se obtiene de la expresión

$$|u||v|\operatorname{sen}\theta = |u||v|\sqrt{1-\cos^2\theta} =$$
$$= |u||v|\sqrt{1-\frac{(u\cdot v)^2}{|u|^2|v|^2}} = \sqrt{|u|^2|v|^2-(u\cdot v)^2}$$

Sustituyendo los vectores por sus componentes, y tras un laborioso cálculo que no aporta nada al entendimiento de los conceptos, se prueba que la expresión anterior coincide con $|u\times v|$.

Para aclarar el sentido del vector $u\times v$, en Larson (1995) se explica que la orientación de los vectores $\{u, v, u\times v\}$ se basa en su comparación con la terna $\{i, j, k = i\times j\}$, y se habla de un sistema positivo o negativo. Sin embargo, la mayoría de textos universitarios (Bradley y Smith, 1998; Edwards y Penney, 1996; Stewart, 1994), se decantan por la «regla de la mano derecha» (figura 2).

Se coloca la palma de la mano derecha extendida a lo largo de u (con los dedos apuntando en el sentido de u). Si se doblan los dedos de la mano derecha en el sentido de una rotación de u a v (con un recorrido angular menor que 180°), entonces el pulgar señala en la dirección y sentido de $u\times v$.

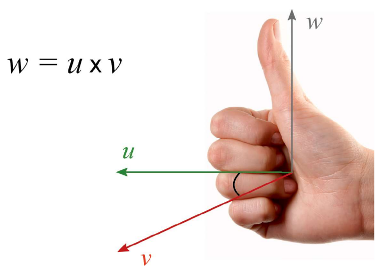

Figura 2

En los textos de bachillerato consultados se opta por definir el producto vectorial de dos vectores, u y v, como un nuevo vector de módulo $|u|\,|v|\operatorname{sen}\theta$ y dirección perpendicular a ambos. Pero el sentido se define de un modo impreciso. Es curioso que en ninguno de estos textos se haga referencia a la regla de la mano derecha. En su lugar se emplean otras explicaciones que resultan confusas. Por ejemplo, en Escoredo y otros (2009) se explica que el sentido de $u\times v$ es el del avance de un sacacorchos que gira de u a v, mientras que en González y otros (2009) se especifica que se trata de un avance a derechas (dextrógiro). Basta ver la figura 3, para comprobar que hace falta ser más preciso para obtener el sentido correcto del producto vectorial de $u\times v$.

En Colera y Oliveira (2009) se explica que el sentido del producto vectorial $u\times v$ es *hacia arriba* si el ángulo entre u y v es menor de 180° o *hacia abajo* si el ángulo entre u y v es mayor de 180°. Se aclara que se toma el ángulo en sentido positivo, es decir contrario al movimiento de las agujas del reloj. Con esta definición surge una duda acerca del sentido que debemos tomar: ¿dónde se pone el reloj? (figura 4).

Parece claro que la regla de la mano derecha es la más precisa para definir el sentido correcto del producto vectorial de dos vectores.

Por otro lado, la relación entre la expresión analítica y la geométrica se da sin ningún tipo de justificación en Escoredo y otros (2009). En González y otros (2009) se demuestra a partir de la propiedad distributiva del producto vectorial respecto de la suma, aunque esta última simplemente se menciona. Solo en Colera y Oliveira

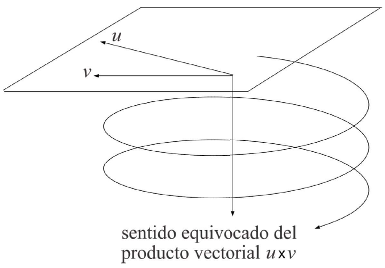

Figura 3

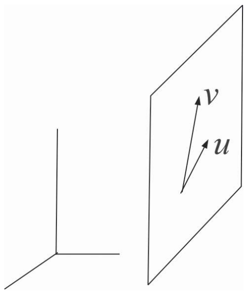

Figura 4

(2009), se prueba esta propiedad mediante una demostración que ocupa todo un folio: su laboriosidad y longitud hace inviable que pueda plantearse explicarla en un aula.

En estos textos de bachillerato, el objetivo es llegar rápidamente a la expresión analítica para que los alumnos puedan realizar sus productos vectoriales aplicando la regla del determinante. Sin embargo (como ya pasaba con el producto escalar) la propiedad distributiva tiene muchas posibilidades visuales, como veremos en la segunda sección.

Propiedad distributiva

Propiedad distributiva del producto escalar respecto de la suma

Si se parte de la expresión analítica (como en los textos universitarios) se vio antes que la obtención de la expresión geométrica es laboriosa. Pero si se comienza con la expresión geométrica (como en los textos de bachillerato), la clave es la propiedad distributiva: a partir de ella y expresando los vectores en función de los unitarios básicos, se obtiene la expresión analítica.

La demostración de esta propiedad puede hacerse con un razonamiento visual que es válido tanto para dos como para tres dimensiones. Supondremos, para simplificar, que los productos escalares dan como resultado números positivos. Para probar visualmente la fórmula

$$u\cdot(v+w)=u\cdot v+u\cdot w$$

se utiliza la figura 5 (dos dimensiones) y la figura 6 (tres dimensiones).

Notemos que en la figura 6, los tres planos son perpendiculares a u, siendo P, Q y R las intersecciones de esos planos con u (las líneas discontinuas marcan las trayectorias de los vectores por detrás de los planos). Vemos que el plano 2 pasa por el final de v y el plano 3 pasa por el final de w.

En ambas figuras se observa que las longitudes de las proyecciones de v, w, y de $v+w$ en u son, respectivamente, $|PQ|$, $|QR|$ y $|PR|$, siendo $|PR|=|PQ|+|QR|$. Finalmente, el resultado se

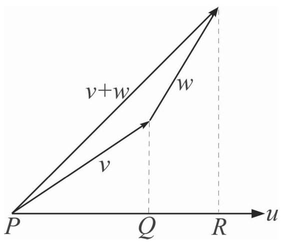

Figura 5

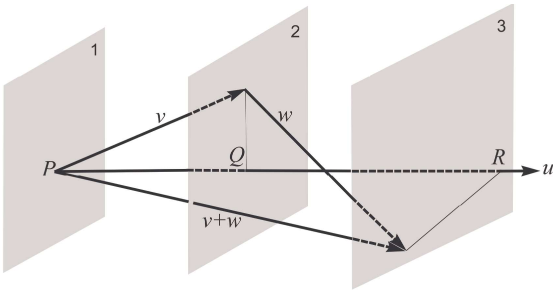

Figura 6

deduce aplicando que el producto escalar de dos vectores es el módulo del primero por la longitud de la proyección del segundo sobre él.

Propiedad distributiva del producto vectorial respecto de la suma

Exactamente igual que en el caso anterior, pasar de la expresión analítica del producto vectorial a la expresión geométrica es muy farragoso. Si se comienza con la expresión geométrica, este paso se realiza a través de la propiedad distributiva. Aquí exponemos una manera muy visual de obtenerla. La idea se encuentra en la página 187 del clásico de nuestra literatura matemática *Elementos de Matemáticas* (Rey Pastor y Castro Brzezicki, 1981). La prueba visual de la igualdad $u\times(v+w)=u\times v+u\times w$ se basa en tres figuras.

En la figura 7, los vectores v' y w' son las proyecciones de v y de w en el plano P, que es perpendicular a u.

Una consecuencia directa de la expresión geométrica del producto vectorial de dos vectores es que su módulo coincide con el del área del paralelogramo que determinan. Esto, unido a la figura 8, nos permite visualizar que $|u\times v|=|u\times v'|$.

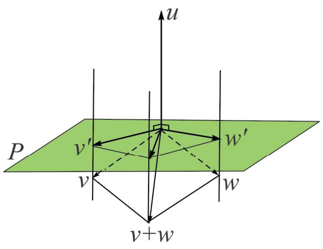

Figura 7

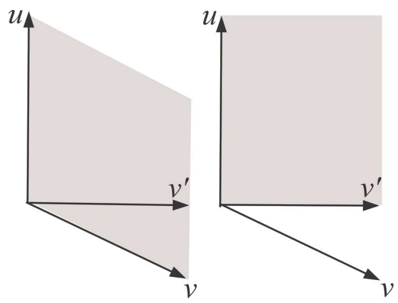

Figura 8

Por otro lado, usando la regla de la mano derecha, visualizamos que la dirección y el sentido de $u \times v$ y de $u \times v'$ de coinciden y por tanto son iguales. También se concluye que $u \times w = u \times w'$ y que $u \times (v + w) = u \times (v' + w')$. Por tanto se tiene que

$$\left\{ \begin{aligned} u \times (v + w) &= u \times (v' + w') \\ u \times v + u \times w &= u \times v' + u \times w' \end{aligned} \right.$$

Sólo falta probar que los segundos miembros de las dos igualdades anteriores son iguales. Para ello se utiliza la figura 9.

La figura 9 representa al plano P, junto con todos los vectores que contiene. Observando los dos paralelogramos vemos que las longitudes de los lados del pequeño son $|v'|$ y $|w'|$, mientras

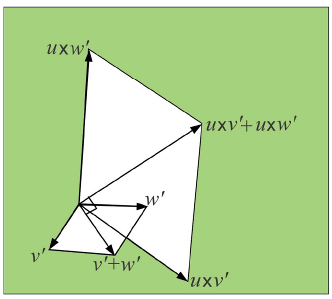

Figura 9

que las de los del grande son $|u|\,|v'|$ y $|u|\,|w'|$ (por ser v' y w' perpendiculares a u). Por tanto la longitud del paralelogramo grande es $|u|$ por la del pequeño, es decir:

$$|u \times v' + u \times w'| = |u|\,|v' \times w'| = |u \times (v' + w')|$$

Finalmente con la regla de la mano derecha se obtiene la igualdad.

Dos visualizaciones

Demostración visual de la distancia de un punto a un plano

Una de las fórmulas de geometría que el alumno de segundo de bachillerato de ciencias debe conocer es la de la distancia de un punto a un plano. En este artículo se aporta una demostración visual de esta fórmula (figuras 10 y 11).

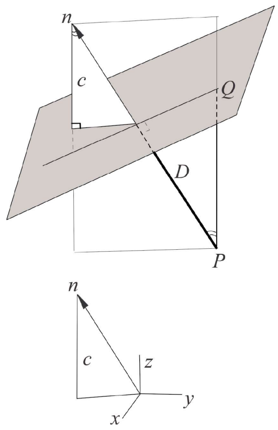

Figura 10

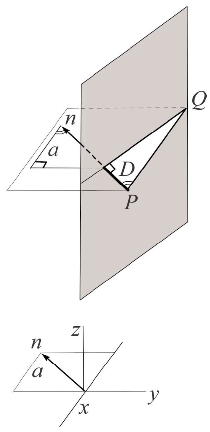

Figura 11

En la figura 10 se muestra un plano no vertical, $\pi \equiv ax+by+cz+d=0$, $c \neq 0$. Por la semejanza de los dos triángulos rectángulos que aparecen en ella, se tiene que

$$\frac{|PQ|}{|n|}=\frac{D}{|c|}$$

Tomemos el punto $P(x_0, y_0, z_0)$. Observemos que

$$|PQ|=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{|c|}$$

por ser $|PQ|$ la diferencia entre la coordenada z de P y la de Q. Por tanto, despejando obtenemos el valor de D.

En la figura 11 se muestra un plano vertical, $\pi \equiv ax+by+d=0$, $a \neq 0$. La prueba visual es análoga al caso anterior, teniendo en cuenta que $|PQ|$ es la diferencia entre la coordenada x de P y la de Q.

Con la figura 12, se puede visualizar, de manera análoga a lo anterior, la distancia de un punto a una recta en dos dimensiones.

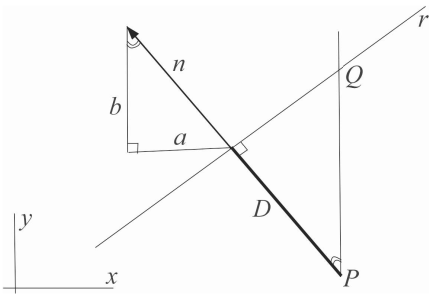

Figura 12

Visualización de la fórmula de la derivada direccional

En el estudio de las funciones de dos variables $z=f(x,y)$, en primer curso de Cálculo en la universidad, se plantea conocer la razón de cambio de f en un punto $P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$, según la dirección determinada por un vector unitario $u(a,b)$. Este problema se reduce a dos dimensiones cortando la superficie determinada por f con un plano vertical que pase por P y sea paralelo a u: de esta manera se obtiene una curva C. La pendiente de la recta tangente a C en el punto P se denomina derivada direccional de f en P según la dirección unitaria u. Su valor, $Df_u(x_0,y_0)=af_x(x_0,y_0)+bf_y(x_0,y_0)$, se obtiene de una forma analítica a través de la regla de la cadena. Pero si se usa el producto vectorial se puede obtener un significado geométrico que ayuda a motivar y a entender esa fórmula. Observemos que la recta tangente a C en el punto P está contenida en el plano vertical y en el plano tangente a la superficie en P (figura 13).

Por tanto esa recta es la intersección de los planos siguientes

$$\begin{cases} b(x-x_0)-a(y-y_0)=0 \\ z-f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+ \\ \qquad\qquad +f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \end{cases}$$

El vector dirección de esa recta es el producto vectorial de los vectores normales a los planos

$$(b,-a,0)\times(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0),-1)=$$
$$=(a,b,af_x(x_0,y_0)+bf_y(x_0,y_0))$$

Su tercera componente es la que indica el comportamiento de la superficie en P según la dirección y sentido de u.

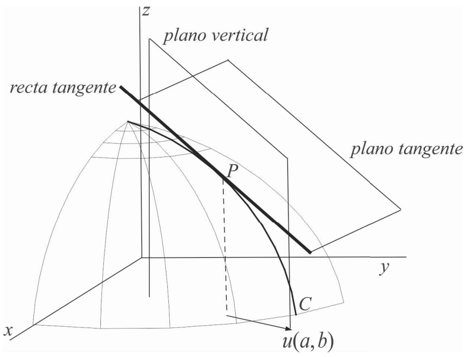

Figura 13

Resumen y conclusiones

En este artículo se han mostrado las dos formas distintas de introducir el producto escalar y el vectorial.

En los textos universitarios se comienza, en ambos, con la expresión analítica y se llega a la expresión geométrica. Esto se hace a través de un proceso algebraico que resulta largo, y que no resulta ni motivante ni intuitivo.

En los textos de bachillerato se hace justamente al contrario. En el caso del producto vectorial, se prescinde de la regla de la mano derecha para aclarar el sentido del mismo. En su lugar se prefieren otras explicaciones que resultan imprecisas. En ambos productos se pone de manifiesto la dificultad para pasar de la expresión geométrica a la analítica. A veces se hace sin más, y otras se recurre a la propiedad distributiva respecto de la suma. Pero la justificación de esta o no se da o es tan larga que resulta inviable.

En este artículo se aboga por comenzar con las expresiones geométricas, usando la regla de la mano derecha para explicar el sentido del producto vectorial. Para relacionar la expresión geométrica con la analítica apostamos por una conexión visual. Para ello aportamos las visualizaciones de las correspondientes propiedades distributivas respecto de la suma.

Finalmente, damos una prueba visual de la fórmula de la distancia de un punto a un plano, y una intuitiva visualización de la fórmula de la derivada direccional.

El objetivo de una demostración basada en la visualización es el de conseguir motivar a los alumnos. Ir más allá de la simple memorización. Hacer que sean capaces de entender los dibujos (a pesar de la escasez de tiempo) y con ellos lograr una intuición mucho más rica que la que se obtiene a través de una prueba analítica. Si los alumnos son capaces de entender las visualizaciones anteriores, no solo se habrá conseguido el recuerdo de una fórmula: habremos potenciado su intuición geométrica.

Referencias bibliográficas

Bradley, G., y K. Smith, (1998), *Cálculo de varias variables. Volumen 2*, Prentice Hall Iberia, Madrid.

Colera, J., y M. J. Oliveira (2009), *Bachillerato 2. Matemáticas II*, Anaya, Madrid.

Escoredo, A., M. D. Gómez, J. Lorenzo, P. Machín, C. Pérez, J. del Río y D. Sánchez (2009), *Matemáticas II. Bachillerato 2*, Santillana, Barcelona.

Edwards, C. H., y D. Penney, (1996) [4.ª ed.], *Cálculo con geometría analítica*, Prentice Hall Hispanoamérica, México.

González, C., J. Llorente y M. J. Ruiz (2009), *Matemáticas, 2.º bachillerato*, Editex, Madrid.

Guzmán, M. de (1996), *El rincón de la pizarra: ensayos de visualización en análisis matemático*, Pirámide, Madrid.

Larson, R., R. Hostetler y B. Edwards (1995) [5.ª ed.], *Cálculo y geometría analítica. Volumen 2*, McGraw Hill/Interamericana, Madrid.

Rey, J., y A. Castro (1981), *Elementos de Matemática,* S.A.E.T.A., Madrid.

Stein, S., y A. Barcellos (1995) [5.ª ed.], *Cálculo y geometría analítica. Volumen* 1, McGraw Hill/ Interamericana, Colombia.

Stewart, J. (1994) [2.ª ed.], *Cálculo*, Grupo editorial Iberoamérica, México.

Félix Martínez de la Rosa
Universidad de Cádiz
<felix.martinez@uca.es>