Cómo jugársela a la incertidumbre*

F. Thomas Bruss

SUMA+ núm. 100
pp. 57-61
Artículo publicado originalmente en el número 47 de *Suma* en noviembre de 2004

Si tienes que elegir entre dos alternativas, sin saber cuál es la más favorable, no pierdes nada por tomar la decisión lanzando una moneda al aire. ¿Es así? No, hay métodos mejores.

If you have to decide between two alternatives without knowing which one is more favourable, then you may quite as well flip a coin - Right? No, you can do better.

Quieres vender tu casa. Tu anuncio «Se vende a quien haga la mejor oferta por encima de 800 000 euros» lleva ya varias semanas apareciendo en el periódico. Y, por fin, el próximo domingo vence el plazo.

Dos potenciales compradores han anunciado su firme interés. El Sr. X, de París, llamó y dijo que ofrecerá más de 800 000 euros, pero que le gustaría ver la casa otra vez el próximo sábado antes de concretar su oferta. Y luego está la Sra. Y, que llamó desde Londres para decir esencialmente lo mismo, salvo que solo puede venir el próximo domingo. Tanto el Sr. X como la Sra. Y insistieron en que necesitan que les des el Sí o No definitivo el mismo día de su visita.

¡Te habría gustado tanto conocer más detalles! ¡Si al menos hubieses conseguido alguna indicación de cuál es el límite que el Sr. X y la Sra. Y están dispuestos a pagar!

Pero todo lo que lograste por teléfono fue una breve risa y algo del estilo de «Por favor, permita que vea la casa otra vez».

¡Autenticas personas de negocios los dos! Por tu parte, ya has hecho también tus averiguaciones: ambos son serios y de fiar y los dos cuentan con los fondos necesarios. En consecuencia, parece difícil adivinar cuál de ellos podría esperarse que esté más interesado.

Ha llegado el momento de analizar las circunstancias exactas de tu situación. Claramente, volverás a tener ocasión de señalar las espléndidas características de tu casa. Pero esto no va a alterar tu dilema: si aceptas la oferta del Sr. X perderás la de la Sra. Y y si quieres esperar a la oferta de la Sra. Y pierdes la del Sr. X. ¡Parece un juego de azar! Perderás la mejor de las dos ofertas con probabilidad 1/2, ¿o no?

Se te ocurre otra idea. París... Londres..., no es probable que el Sr. X y la Sra. Y se conozcan. ¿Deberías quizá tratar de que el precio suba diciéndole a cada uno de ellos lo muy interesado que está el otro? ¿A lo mejor probando primero con el Sr. X? —Pero no, desechas esta idea, un hombre como el Sr. X difícilmente se dejaría impresionar así— más bien al contrario. ¿Intentándolo quizá con la Sra. Y? Pero, en ese caso, el día que ella venga el Sr. X estará ya fuera del juego y no podrá seguir sirviendo como instrumento de presión.

Y vuelves a llegar a la misma conclusión que antes: daría igual que lanzases una moneda al aire para decidir. ¡Quizá deberías simplemente cerrar el trato con el Sr. X para al menos tener el domingo libre!

Un juego con dos tarjetas

En la vida real se dan muy diversas variantes de situaciones como esta. Un descuento especial en el supermercado, un bonito apartamento, una atractiva oferta de trabajo, o incluso la mujer o el hombre de nuestra vida: debemos con frecuencia elegir sin saber si todavía nos espera algo mejor.

Para aclarar el panorama del problema, resumimos su esencia en un pequeño juego: pides a tu hijo y a tu hija que cada uno escriba, en secreto y sin consultar entre ellos, un número arbitrario en una tarjeta. Les haces notar que «arbitrario» quiere realmente decir el que quieran: grande, pequeño, negativo, decimal, cualquiera está permitido. Luego colocan las tarjetas, boca abajo, sobre la mesa. Ahora debes volver la tarjeta de tu hijo, mirar el número y decidir si lo aceptas. Si lo rechazas, optas automáticamente a la tarjeta de tu hija. Entonces se comparan los dos números. Si has elegido el número mayor ganas, si no, pierdes.

La diferencia entre los dos números no tiene en este momento ninguna importancia, solo quieres ganar. Si los dos números coincidiesen, habría que repetir el juego, aunque este caso es muy poco probable. Además, si crees que quizá juegues con ventaja porque conoces bien a tus hijos, puedes pensar que en lugar de ellos son unos extraños. Como alternativa, también puede ser la misma persona quien rellene ambas tarjetas. Ciertamente, esto tiene ya el aspecto de un puro juego de azar con probabilidad de ganar 1/2.

En la vida real se dan muy diversas variantes de situaciones como esta. Un descuento especial en el supermercado, un bonito apartamento, una atractiva oferta de trabajo, o incluso la mujer o el hombre de nuestra vida: debemos con frecuencia elegir sin saber si todavía nos espera algo mejor.

Pero ahora viene la sorpresa: hay una estrategia que te permite conseguir que tu probabilidad de ganar sea mayor que 1/2. Se basa en una idea del profesor Thomas Cover (de la Universidad de Stanford). Sean X e Y los dos números diferentes que aparecen en las cartas.

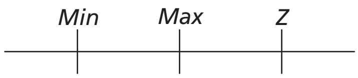
Estrategia. Piensa un número cualquiera Z. Descubre ahora el primer número X, y elígelo si es estrictamente mayor que Z, si no, elige Y.

¿Por qué motivo debería esta estrategia ser mejor que elegir X o Y aleatoriamente? Aquí tienes la demostración:

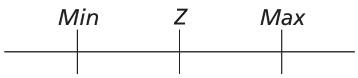
Recuerda que X es el primer número, Y el segundo. Sea $Min = \min\{X, Y\}$ el menor de ellos y $Max =$

$=\max\{X,Y\}$ el mayor. Hay exactamente tres posibilidades:

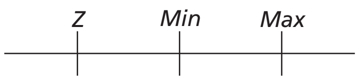
(a) Ni X ni Y son mayores que Z,



(b) Z está entre X e Y (quizá coincida con el menor de ellos),



(c) Tanto X como Y superan a Z.



Con arreglo a la estrategia, eliges el número Y en el caso (a) y el número X en el caso (c). En estos dos casos terminas eligiendo al azar entre el número mayor y el menor, y por tanto ganas con probabilidad $1/2$. En el caso (b), sin embargo, ganas seguro, porque si X es el mayor de los dos números lo aceptas, mientras que si es el menor lo rechazas. Por tanto tu probabilidad total de ganar es ahora

$$g=\frac{a}{2}+\frac{c}{2}+b$$

donde a, b y c denotan respectivamente las probabilidades de los sucesos (a), (b) y (c). Por supuesto, uno de estos sucesos debe darse, es decir $a+b+c=1$, de modo que

$$g=\frac{(a+b+c)}{2}+\frac{b}{2}=\frac{1}{2}+\frac{b}{2}.$$

Así pues, la probabilidad de ganar excede lo equiprobable en $b/2>0$, ya que (b) puede ocurrir.

[Observación: para hacer esto preciso basta elegir Z de acuerdo con una densidad cualquiera que sea estrictamente positiva en toda la recta real.]

¿Como puedes aplicar esta estrategia con la máxima destreza? Evidentemente deberías intentar que (b) fuese tan probable como se pueda. Esto significa que deberías elegir un Z que tenga la máxima probabilidad de estar entre X e Y. Puesto que estos dos números son desconocidos, no se puede dar una receta que sea valida en general. Ante un caso concreto, sin embargo, bien podrían ocurrírsenos algunas ideas.

Elección óptima de un umbral

Nuestro problema de la venta de la casa es uno de estos casos concretos. En la primera tarjeta está la oferta del Sr. X, y no conocerás el número de la otra tarjeta, la oferta de la Sra. Y, cuando tengas que decir «sí» o «no» al Sr. X. Una primera diferencia con el juego de las tarjetas con números arbitrarios es que sabes que tanto X como Y están por encima de 800 000. La segunda diferencia es que ahora te interesa, y mucho, la cantidad $|X-Y|$.

Una oferta de 900 000 euros o más estaría bien, pero no es muy probable. Por otra parte, si aceptases la oferta del Sr. X de, digamos, 801 000 euros, no sentirías demasiado que la Sra. Y te fuese a ofrecer 802 000 euros. No tiene sentido intentar blindarse contra una pérdida muy modesta. Por tanto puede que lo mejor sea elegir Z claramente por encima de 800 000 euros, pero tampoco demasiado grande. Si me preguntases qué haría yo: lanzaría un dado y, por cada punto que mostrase, añadiría 5 000 euros a la cantidad de 800 500 euros. Así, por ejemplo, si saliese un 3, elegiría $Z=815\,500$ euros. Pero en absoluto hay nada especial en esta sugerencia y tú puedes sentirte mucho más cómodo con tus propias ideas.

¿Por qué lanzar un dado? ¿Por qué no fijar simplemente $Z=820\,000$ euros, por ejemplo, si tenemos la sensación de que este sería más o menos el orden correcto de magnitud? Aparte de nuestro argumento probabilístico hay otra razón: en una situación de teoría de juegos como esta, es preferible habitualmente ser impredecible. Si actuamos de un modo predecible, el otro jugador puede adaptar su comportamiento. De ahí la introducción de una componente de azar.

¿Cuánto vale nuestra estrategia? Ciertamente más que la elección aleatoria, como hemos visto. No podemos realmente cuantificar la ventaja con respecto a la elección aleatoria, pero bien podría suponer (en media) alrededor de 10 000 euros adicionales.

Demos un paso más y volvamos a considerar nuestro juego con las dos tarjetas. Ahora vamos a jugar tú y yo. Supongamos que tú eres quien escribe los dos números en las dos tarjetas y yo soy el que elige uno. Como antes, gano yo si elijo el mayor. Supongamos que te gustaría reducir mi probabilidad de ganar. ¿Qué deberías hacer?

La respuesta es sencilla. Basta con que elijas dos números que estén muy próximos. Digamos 6,123455 y 6,123456. No vale la pena debatir sobre las ventajas de que yo emplee la estrategia-Z porque el Z que elija tiene muy pocas posibilidades de estar entre estos dos números.

Pero en los problemas del mundo real las cosas son a menudo diferentes. Las estrategias del mundo real las desarrolla una de las partes interesadas y normalmente no se las comunica a la otra parte. ¿Supone esto alguna diferencia?

Para averiguarlo hice, hace varios años, una prueba con estudiantes de empresariales de Vesalius College. Entregué a cada uno de los presentes dos tarjetas para que escribiesen sus números y luego me paseé entre ellos y fui eligiendo. No había mencionado anteriormente las estrategias-Z.

Logré ganar 32 veces con 41 o 42 participantes. Eligiendo al azar esperaríamos unos 21 triunfos, y quizá tres o cuatro más con un poco de suerte. Pero 32 no deberían atribuirse solo a la suerte, como ellos sabían. Incluso los mejores estudiantes estaban desconcertados. Es difícil ver lo que uno no se espera. Pero tú, querido lector, tú probablemente has acertado: había aplicado una estrategia-Z, de hecho una especialmente inocente. Había elegido $Z = 0$.

¿Por qué tuve tanto éxito? Creo que fue porque pude abonar el terreno para la estrategia: parece que había conseguido que mi observación «los números también pueden ser negativos» sonase lo bastante intranscendente. Resultó que muchos estudiantes echaron mano de los números negativos, y todos aquellos que escribieron solo un número negativo me hicieron ganar automáticamente.

Pero en los problemas del mundo real las cosas son a menudo diferentes. Las estrategias del mundo real las desarrolla una de las partes interesadas y normalmente no se las comunica a la otra parte.

Este experimento muestra que el pensamiento estratégico no sigue reglas sencillas. Hay quienes predican que la clave del éxito en los comportamientos estratégicos es siempre estrechar el campo de juego del adversario. Pero no es así. Si creemos que nuestro adversario no ha anticipado nuestra estrategia, puede ser una mala idea reducir su conjunto de posibles opciones. Cuantas menos alternativas se tienen, más se piensa cada paso. De hecho, en nuestro experimento, al admitir números negativos no redujimos sino que más bien aumentamos el conjunto de opciones de los estudiantes. Probablemente esto ayudó a que no prestasen demasiada atención a lo que hacían.

Unas palabras sobre las matemáticas

Acabas de aprender a entender un pequeño problema en un campo de las matemáticas que, comparado con otros campos, está todavía en su infancia: el pensamiento estratégico, como parte de la teoría de la probabilidad. Incluso en este nivel inicial hay todavía varias preguntas abiertas. Por ejemplo, ¿existe una estrategia para el juego de las dos tarjetas que sea en general más eficaz que una estrategia-Z? Demostrar la existencia o la no existencia sería ya un avance significativo. Pero, con lo que sabemos actualmente, no veo ninguna base suficientemente firme desde la que atacar dicha demostración, ni siquiera para plantear la pregunta con la necesaria precisión.

¿No es verdaderamente sorprendente que alguien pueda optimizar, en un sentido estrictamente matemático, la venta de una casa con dos potenciales compradores? A la vista de tantas cosas impresionantes como las matemáticas han logrado en nuestro mundo, creo que deberíamos estar de acuerdo en que realmente es sorprendente. Piensa en otros problemas de optimización que surgen, por ejemplo, de la ingeniería aeronáutica. Comparado con ellos nuestro pequeño problema parece ridículamente simple. Sin embargo, no es así. Los ingenieros aeronáuticos cuentan con una enorme ventaja histórica: pueden trabajar, de manera rutinaria, con muchos métodos cuyos cimientos matemáticos fueron sólidamente establecidos hace dos o tres siglos. No es este el caso de nuestro pequeño problema.

Estos contrastes se dan en muchos campos de las matemáticas.

¿Es esto un síntoma de la eterna juventud de nuestra disciplina?

Sí, yo así lo creo.

Referencias bibliográficas

BRUSS, F. T. (1998), «Unerwartete Strategien», *Mitteilungen der Deutschen Mathematikervereinigung,* Heft, n.º 3, 6-8.

— (2000), «Der Ungewissheit ein Schnippchen schlagen», *Spektrum der Wissenschaft,* Juni Heft, 106-107.

— (2003): «Playing a trick on uncertainty», *Newsletter of the EMS,* issue 50, 7-8.

COVER, T. M. (1987), «Problem 2.5 : Pick the largest number», *Open Prob. in Communication and Comp.,* Springer Verlag, Nueva York.

F. Thomas Bruss
Université Libre de Bruxelles

* Taducido al castellano por Adolfo Quirós Gracián (Universidad Autónoma de Madrid).

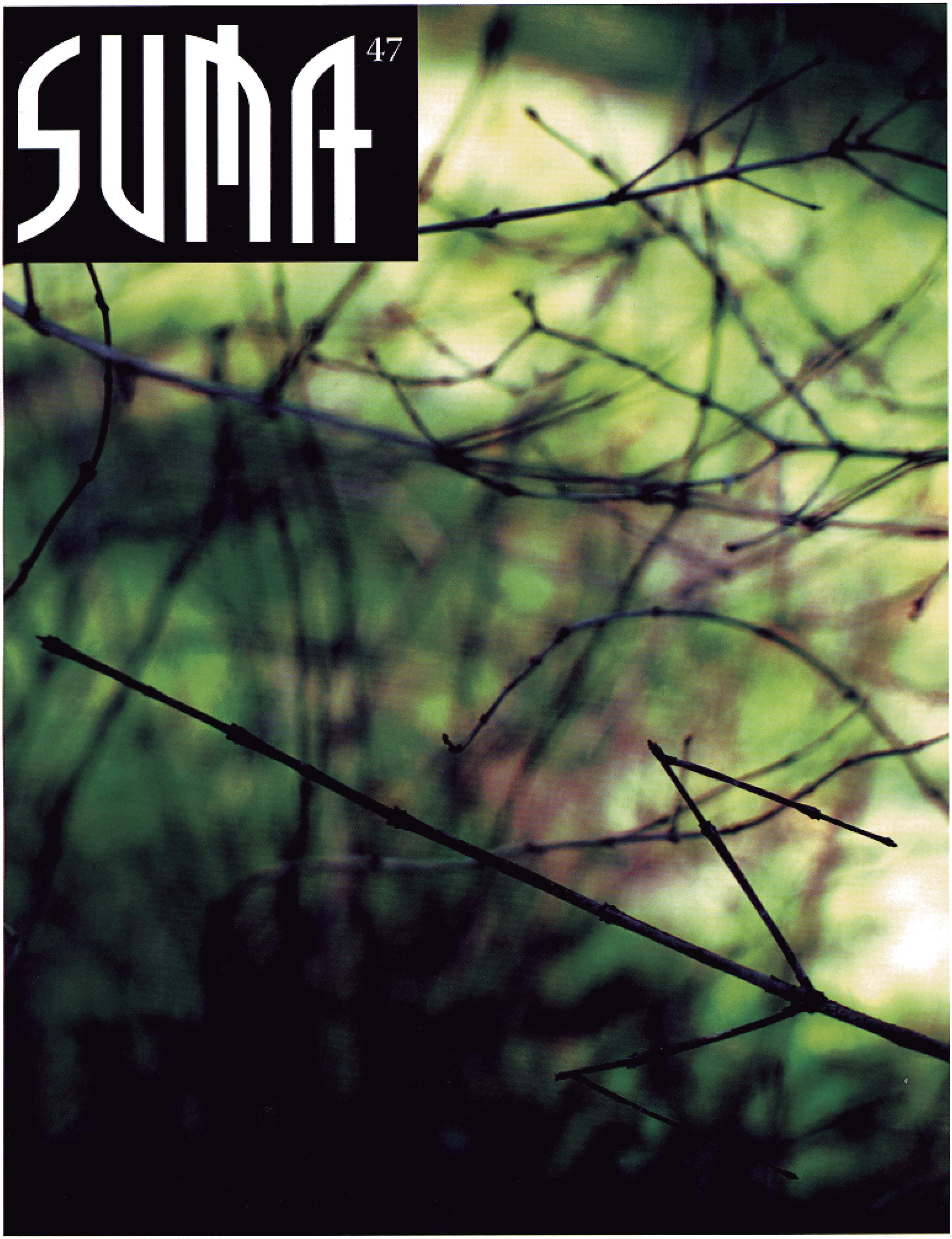
Notas del traductor

Este artículo es una traducción de «Der Ungewissheit ein Schnippchen schlagen», publicado en *Spektrum der Wissenschaft* (la edición alemana de *Investigación y Ciencia*). Está basado en «Unerwartete Strategien», trabajo del mismo autor que apareció en *Mitteilungen der Deutschen Mathematikervereinigung* (Sociedad Matemática Alemana). La idea está inspirada en el Problema de Cover (ver Referencias bibliográficas).

«Der Ungewissheit ein Schnippchen schlagen» obtuvo el segundo premio en el concurso organizado por la European Mathematical Society (EMS) para mejorar la percepción popular de las matemáticas. Apareció traducido al inglés en *Newsletter of the EMS,* y es dicha versión inglesa la que hemos utilizado para hacer nuestra traducción.

Agradecemos al Profesor Bruss, a *Spektrum der Wissenschaft,* a la Deutschen Mathematikervereinigung y a la Europan Mathematical Society su amabilidad al autorizarnos a publicar este notable artículo en castellano.

SUMA 47



SUMA. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las MATEMÁTICAS

MADRID · NOVIEMBRE 2004 · Nº. 47 · ISSN 1130-488X