Preguntas que generan otras preguntas

Aina Maria González Juan, Magdalena Martí Pons,
Susanna Morell Torrens, Catalina Maria Pizà Mut,
Maria Àngels Portilla Rueda

SUMA+ núm. 100
pp. 99-107
Artículo publicado originalmente en el número 93 de *Suma* en abril de 2020

Los maestros[1] que participarán en esta sección «Diario de experiencias matemáticas» queremos agradecer a la dirección de la revista *Suma* la oportunidad que nos brinda de colaborar durante los próximos cuatro años. Nuestro punto de unión es la Societat Balear de Matemàtiques SBM-XEIX, a la que pertenecemos. La intención de los artículos de esta sección es dar a conocer algunas de las experiencias matemáticas que se están llevando a la práctica en las aulas de educación primaria en nuestras islas, con la finalidad de iniciar y desarrollar las competencias matemáticas de nuestros alumnos.

La propuesta que presentamos se inicia a partir de una pregunta abierta que permite que cualquier alumno de cualquier etapa educativa pueda participar. Para poder ser contestada, necesita del planteamiento de nuevas preguntas. Nos ubicamos en el terreno de la resolución de problemas. Queremos poner en valor y trabajar todos aquellos procesos matemáticos que desde el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) constituyen la base para desarrollar las competencias matemáticas:

— Resolución de problemas
— Razonamiento y demostración
— Conexiones
— Comunicación
— Representación

Teniendo en cuenta el currículum oficial de las Illes Balears, los objetivos que se desarrollan son cuatro:

— Expresar verbalmente y de forma razonada el proceso seguido para solucionar problemas del entorno cercano.

Se observará, potenciará e incentivará el proceso de la comunicación, el diálogo y la justificación de las respuestas.

— Utilizar procesos de lectura, reflexión, razonamiento y estrategias de resolución de problemas, hacer los cálculos necesarios y comprobar las soluciones.

Se dará protagonismo a otros procesos como las conexiones con los aprendizajes previos y el razonamiento y prueba con la comprobación de las respuestas.

— Elaborar y utilizar instrumentos y estrategias personales (aproximación, estimación de cálculos mentales, medidas...) en la resolución de problemas.

Se hará hincapié en el proceso de comunicación y representación de estas estrategias a través del lenguaje matemático.

— Plantear pequeñas investigaciones iniciándose en el método científico.

Se utilizarán algunos aspectos del método científico, como formular hipótesis, diseñar pequeños experimentos o comprobar estimaciones.

Presentación de la propuesta

La propuesta se ha llevado a cabo en 4 centros:

— CEIP Maria Antònia Salvà (Son Sardina, Palma): Centro de una línea situado en la periferia de Palma.
— CEIP Marian Aguiló (Son Cotoner, Palma): Centro de tres líneas situado en el área urbana de Palma.
— CEIP Mestre Colom (Bunyola): Centro de dos líneas situado en un pueblo de la Sierra de Tramuntana de Mallorca.
— CEIP Son Anglada (Son Anglada, Palma): Centro de una línea situado en la periferia de Palma.

Una mañana, suena la música que indica el inicio de la jornada escolar, los alumnos entran y se encuentran, en un lugar visible de la escuela, diversos recipientes llenos de agua acompañados de un rótulo con la siguiente pregunta (figura 1):

> ¿Sería suficiente toda esta agua que veis aquí para pasar una mañana en la escuela?

El reto se plantea como una actividad rica competencialmente, según los indicadores propuestos por el CESIRE, de tal manera que cualquier grupo pueda participar, desde 3 años hasta 6.º de Primaria. Durante un mes, aproximadamente, la propuesta estará expuesta y los alumnos tendrán la oportunidad de resolver el problema.

Cabe decir que el formato de presentación es diferente en cada centro, como se puede observar en las siguientes imágenes.

— CEIP Marian Aguiló: Todas las botellas son iguales.
— CEIP Mestre Colom: Recipientes sin ningún tipo de información.
— CEIP Maria Antònia Salvà y CEIP Son Anglada: Mezcla de los formatos anteriores, con información.

La pregunta inicial genera otras muchas preguntas que marcarán el camino de trabajo de cada grupo. A

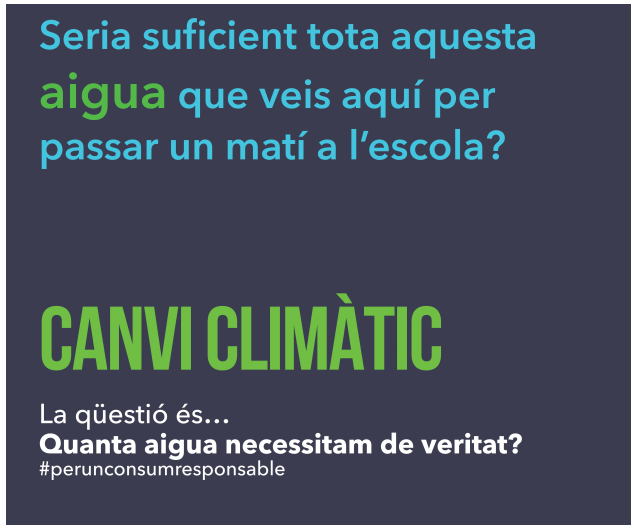

Figura 1. La pregunta

Figura 2. CEIP Marian Aguiló

Figura 4. CEIP Maria Antònia Salvà

Figura 3. CEIP Mestre Colom

Figura 5. CEIP Son Anglada

partir de este momento lo primero que se plantean es acotar la situación. Las preguntas que van surgiendo para delimitar el trabajo son:

— Factores temporales: «¿Qué significa una mañana en la escuela? ¿A qué estación del año se refiere? ¿Qué día de la semana?» Según la fecha en que se realice el estudio la solución puede variar, ya que no se consume la misma cantidad de agua si hace más o menos calor. En la escuela, en las horas no lectivas (comedor, actividades extraescolares…) también se consume agua. No todos los días de la semana se consume la misma cantidad de agua, depende de las actividades como educación física, plástica, etc.

— Factores humanos: «¿Para cuántas personas debemos hacer el cálculo?» Alumnos, maestros, personal administrativo de la escuela, personal del comedor. Es imprescindible delimitar nuestra muestra.
— Factores de consumo: «¿Solo el agua para beber? ¿En qué gastamos el agua? ¿Tenemos que contar también el agua de: lavarse las manos, ir al baño, regar el huerto, lavar los platos, cocinar, limpieza del colegio, limpieza de utensilios de plástica…)?»

Analizados y consensuados los datos, quedan delimitadas las condiciones del problema. ¡Adelante!

Métodos y estrategias de análisis

En el diseño de esta actividad abierta pretendemos trabajar de manera competencial y, por tanto, se tienen presentes los indicadores competenciales del CESIRE, es decir:

— Que responda a una pregunta enmarcada en un entorno cotidiano.
— Que pueda plantearse en diferentes niveles y que presente una gradación de desafíos.
— Que estimule la conversación matemática, la reflexión, la justificación y la toma de decisiones.
— Que admita múltiples enfoques.
— Que implique la experimentación y fomente la colaboración.
— Que fomente la curiosidad y la iniciativa de los alumnos.
— Que lleve a aplicar conocimientos ya adquiridos y a realizar nuevos aprendizajes.
— Que facilite las conexiones entre los diferentes bloques de contenidos matemáticos y con otras materias provocando transferencia de conocimientos.

A pesar de que el formato de la propuesta es diferente en cada colegio y que estos son independientes en metodologías de trabajo se constatan una serie de coincidencias:

— Todos los alumnos en su diversidad muestran curiosidad ante la propuesta presentada.
— Los alumnos de infantil y primer ciclo contestan directamente a la pregunta sin plantearse nada más, al menos en un primer momento. La investigación continúa a partir de las preguntas de los maestros.
— Los alumnos de segundo ciclo hacen muchas observaciones, proponen diversas soluciones que requieren argumentación y, por tanto, la investigación se desarrolla a partir de sus propias propuestas.
— Los alumnos de segundo ciclo necesitan información adicional, acotar la situación, para poder dar respuesta a la pregunta inicial.
— Como consecuencia de la discusión, aparece nuevo vocabulario matemático cada vez más preciso.
— Surge la necesidad de utilizar diversos instrumentos de medida: cantimploras, botellas o jarras medidoras con capacidad diferente.
— A partir de la necesidad de cuantificar surge el concepto de unidad.

Los alumnos de infantil utilizan su propia cantimplora como unidad.

En el primer ciclo ya aparece el concepto de litro y medio litro, pero también aparecen unidades no convencionales y hacen aportaciones como por ejemplo: «¿Qué pasa si las botellas no dan un litro entero?»

Aunque hablan de mililitros, a menudo se confunden con los milímetros y, en cambio, son capaces de afirmar que «Los mililitros están muy lejos de los litros, son mucho más pequeños».

En el segundo ciclo ya conocen y utilizan litros, centilitros y mililitros. También se plantean la posibilidad de utilizar unidades de tiempo y de masa. Descubren que 1 l de agua pesa 1 kg.

— Los alumnos constatan que necesitan averiguar a la par la cantidad de agua presentada y el gasto total de agua para poder responder a la pregunta inicial.

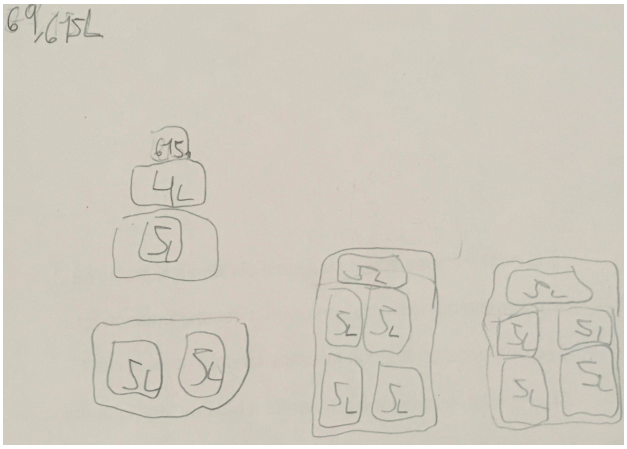

Figura 6. Representación con garrafas

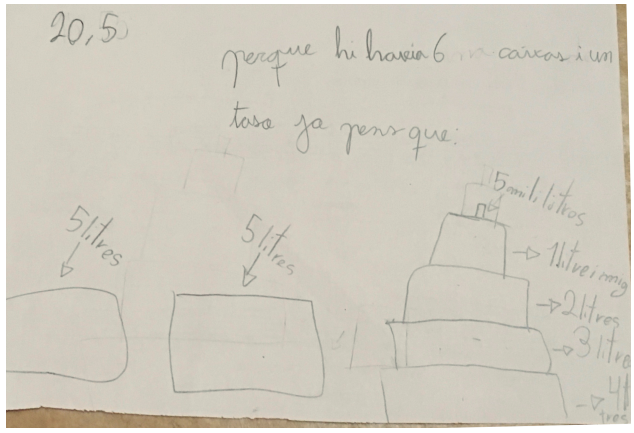

Figura 7. Representación comparando tamaños

Ante las muchas y diversas dificultades que se han encontrado, todos los grupos han intentado sortearlas y buscar soluciones alternativas:

- Repartir el agua entre todas las clases y comprobar si es o no suficiente.
- Decidir acotar el estudio solo a su grupo.
- Eliminar datos que previamente consideraban relevantes (wc, grifos del patio, riego, comedor…).
- Utilizar la media aritmética en lugar de contabilizar cada uno de los elementos (personas, litros).
- Buscar información teórica adicional para sustituir una comprobación empírica sobre el consumo diario de agua.
- Hacer aproximaciones y redondeos.

En todos los centros surgen cuestiones medioambientales relacionadas con el consumo excesivo de agua, son conscientes de la escasez de agua y aportan soluciones para reducir el gasto. En los cursos inferiores solo se ha planteado el recurso del agua como elemento básico para la vida y es únicamente en el segundo ciclo de primaria donde aparecen discusiones de carácter medioambiental.

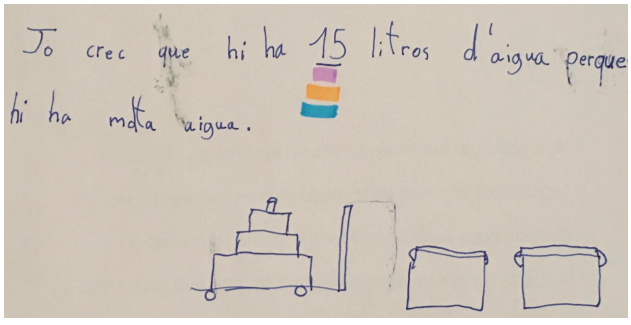

Figura 8. Estimación a la baja

Se puede constatar el problema en las siguientes afirmaciones:

> Entre todos bebemos mucha agua, más de medio litro cada uno. No podemos malgastar agua.
>
> Utilizamos agua para muchas cosas a lo largo del día.

Las soluciones que proponen son:

> Deberíamos instalar grifos inteligentes para no desperdiciar ni una gota de agua.
>
> Podemos utilizar el mismo grifo dos personas a la vez para aprovechar el agua que sigue saliendo.
>
> Medio litro es más que suficiente para lavarse las manos.

Otras valoraciones:

> No todos los alumnos se lavan las manos después de ir al baño.
>
> No todos tiran la cadena del wc.
>
> Los maestros tienen que beber más porque se les seca la garganta.

El formato de presentación nos marca el inicio del estudio

CEIP MARIA ANTÒNIA SALVÀ

228 alumnos y 21 adultos

Ante toda esta variedad de envases y sus correspondientes etiquetas la primera prioridad que tienen los alumnos es descubrir cuánta agua hay en total. En un primer momento lo ven fácil. Basta sumar, dicen incluso los más pequeños, algunos ya observan que si hay envases iguales podemos multiplicar.

Pero al manipularlos empiezan las dificultades:

— Algunos envases tienen etiqueta, otros no.
— Las unidades son diferentes (ml, kg, cl).

A partir de este momento aparecen caminos distintos para poder resolver el cálculo:

— Pesar toda el agua.
— Vaciar el agua de las cajas en botellas de 1L para que resulte más fácil.
— Vaciar el agua de las cajas en garrafas ya que es la unidad más grande que tenemos disponible.
— Utilizar jarras medidoras.
— Calcular el volumen de la caja.

Saber la cantidad total de agua resulta más complejo de lo esperado, pero lo más interesante ha sido comprobar que esta información no es suficiente para contestar a la pregunta inicial: necesitan trabajar simultáneamente con la variante del gasto de agua por persona.

CEIP MESTRE COLOM

278 alumnos y 34 adultos

El formato de presentación es determinante a la hora de estimar la cantidad de agua. Como se aprecia en la figura 3, ningún recipiente tiene etiqueta ni marca indicativa de su capacidad, pero todos tienen algo en común: son cajas (forma de prisma rectangular). Por ello, muchos alumnos inician sus cálculos a partir de la capacidad estimada de alguna de las cajas pequeñas para continuar deduciendo, por comparación, la capacidad de las cajas mayores, ya que visualmente pueden imaginarse unas cajas dentro de otras. También la mayoría de grupos deciden que es suficiente averiguar la capacidad de una de las dos cajas grandes, pues son exactamente iguales.

Asimismo, al tratarse de cajas grandes, muchos grupos coinciden en la estrategia de vaciar el agua con jarras medidoras para realizar los cálculos exactos.

Sorprendentemente pocos alumnos intentan utilizar la estrategia de calcular el volumen de las cajas a partir de sus medidas, como se espera en un principio, aunque ello da lugar a no pocas reflexiones respecto a conceptos como capacidad, volumen, superficie de las caras...

Los más pequeños proponen repartir el agua sin necesidad de calcular la cantidad existente, es decir, comprobar directamente si es suficiente o no. Así pues, consideran la posibilidad de adjudicar determinadas cajas a los diferentes grupos, según su tamaño.

CEIP MARIAN AGUILÓ

645 alumnos y 48 adultos

Averiguar la cantidad de agua no ha supuesto mucha dificultad ya que todas las garrafas son de 6l, como se observa en la figura 2. A la hora de realizar los cálculos, para saber qué cantidad de agua hay, los más pequeños deciden contar todas las garrafas, una a una, y después sumar los litros.

Los alumnos de segundo ciclo directamente multiplican el número de garrafas por el número de litros. Entre los alumnos de 4.º hay un grupo reducido que va sumando los litros.

CEIP SON ANGLADA

La propuesta se lleva a cabo únicamente en el grupo de 4.º de Primaria, como una secuencia didáctica del proyecto que están trabajando. El formato, como se

observa en la figura 5, es más reducido, ya que en el grupo son 18 alumnos.

En los primeros cálculos los alumnos tienen que encontrar equivalencias entre las diferentes medidas para poder saber con exactitud la cantidad de agua que tienen. Algunos alumnos son capaces de sumar rápida y mentalmente las cantidades; otros necesitan descomponer los números, parte entera y parte decimal, y, a partir de aquí, agrupar y sumar.

Sin duda, la botella que más dificultades presenta es la de 33 cl por dos motivos:

— Es la única que se presenta en una cantidad diferente (el resto o son partes enteras o medias).
— Es la única que presenta una unidad de medida diferente (centilitros), mientras que el resto se presenta en litros y mililitros.

Los alumnos son capaces de recurrir a instrumentos de medida para poder encontrar equivalencias entre las diferentes capacidades.

Complicaciones matemáticas que dan un giro a la propuesta

Una de las dificultades con las que se encuentran los alumnos es que la línea de trabajo que proponen, a veces, es una vía sin salida, bien porque no poseen los conocimientos necesarios o porque estos no son factibles para su edad evolutiva.

Algunos ejemplos que se dan son:

> No sabemos qué es un cuarto de litro ni sabemos sumarlo (3.º EP)
>
> Calcular con decimales es más difícil que sin (4.º EP).
>
> Nos resulta imposible hacer un cálculo exacto del gasto de agua (6.º EP): Hay demasiados condicionantes para poder realizar el cálculo.
>
> Las estimaciones en capacidad son muy difíciles: hay variaciones de 10 l a 25 000 l para la misma cantidad de agua (4.º y 5.º EP)
>
> Si 1 cl es más grande que 1 ml, ¿por qué hay menos centrilitros que mililitros en la misma botella? (4.ºEP)

Surgen dudas a la hora de calcular el volumen de la caja: «¿Basta multiplicar el ancho por el largo de todas las caras?»; «¿faltan medidas?»; «¿hay que incluir la tapa y la base?»... (5.º EP)

Descubrimientos matemáticos

Los descubrimientos matemáticos que los alumnos van haciendo a lo largo de la propuesta solo se dan en la educación primaria.

En los alumnos de educación infantil surgen intuiciones que serán el inicio de futuros aprendizajes y consolidan conceptos relacionados con las medidas, tamaños, ordenaciones, cantidades...

En el primer ciclo se dan cuenta de la cantidad de información que aportan las etiquetas de los envases.

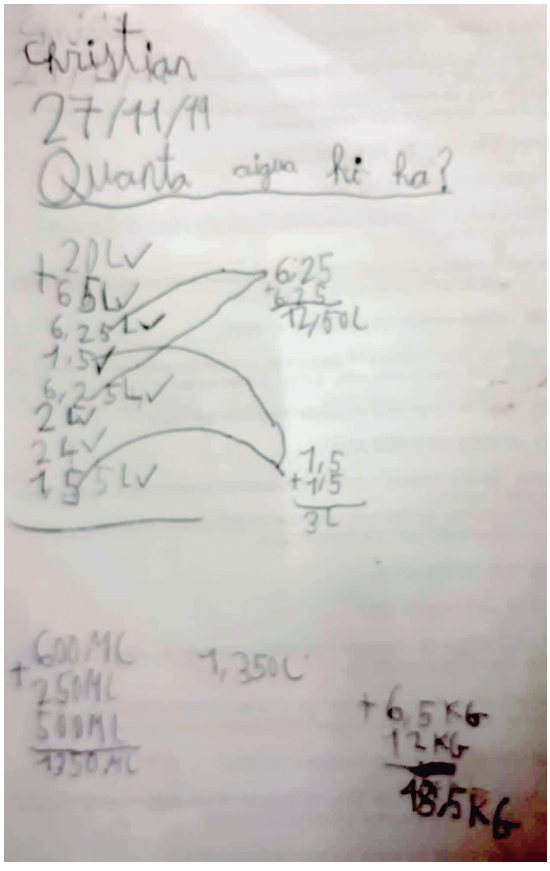

Figura 9. Algunas dificultades para sumar diferentes unidades

A la vez, son conscientes de la dificultad que tienen para interpretarla o para entenderla.

Los descubrimientos que se dan en el segundo ciclo se refieren a las medidas. Algunos de estos son:

> Un litro de agua pesa un kilogramo, pero no ocurre lo mismo con otros líquidos. [Se pueden observar conocimientos previos sobre la densidad].
> Las cantimploras tienen capacidades muy variadas. [Ya hay un dominio tanto en la unidad de medida como en la medida en sí].
> Se puede obtener la cantidad exacta de agua corriente consumida gracias a un contador. [Hay conocimiento sobre instrumentos de medida actuales, los avances en la vida cotidiana de la sociedad en la que vivimos].
> Medio litro se puede escribir de diferentes maneras: ½ litro, 0,5 l, 50 cl, 500 ml. [Se observa un dominio de la unidad de medida y de los números decimales].
> Puedes pesar una caja grande para averiguar su peso apoyándola en varias básculas: su peso se reparte. [Se buscan métodos alternativos para calcular el peso y, por tanto, la cantidad de agua].

Figura 10. Calculando el peso

Conclusiones

Estas son algunas de las conclusiones que podemos extraer después de llevar a cabo la propuesta y analizar las diferentes estrategias de resolución:

- Los alumnos de educación infantil, primero y segundo curso de primaria contestan directamente a la pregunta sin plantearse ninguna otra cuestión, ni siquiera las relacionadas con la cantidad de agua o el número de personas. Es decir, no formulan cuestiones más allá del uso personal: beber, lavarse las manos e ir al baño, es decir, necesidades básicas. Solo es a partir de intervenciones del maestro que surgen otras preguntas.
- Muchos alumnos que en un primer momento contestaron que sí, que la cantidad de agua sería suficiente, cuando se inicia un diálogo y escuchan las propuestas de otros compañeros, cambian de opinión.
- En todos los centros se ha llegado a resolver la pregunta, cosa que no sucede siempre con los problemas convencionales, bien sea porque ha sido un trabajo en grupo, más práctico, más cercano, más de actualidad o bien porque están más concienciados con la temática.
- Los diferentes tipos de agrupaciones a la hora de trabajar han permitido que todos los alumnos puedan participar en el nivel que se encuentran, ya sea proponiendo alternativas, enriqueciéndose de las propuestas de los compañeros y teniendo la oportunidad de éxito, sea cual sea su nivel académico.
- El hecho de presentar una actividad abierta, con soluciones diversas y posibles, da pie a atender la diversidad de la clase, a la inclusión.
- Observamos que los alumnos que están más acostumbrados a trabajar con este tipo de propuestas desarrollan mayores competencias y son capaces de aplicar los conceptos matemáticos aprendidos en otras áreas así como también son capaces de interrelacionar los contenidos matemáticos de diversos bloques.
- El análisis objetivo del trabajo es posible cuando existen registros tanto del alumno

como del maestro, que servirán como guion de trabajo y de evaluación para avanzar en la posterior toma de decisiones.

— Los alumnos son conscientes de que el redondeo es factible cuanto mayor es el número de alumnos, mientras que en escuelas pequeñas se requiere de mayor precisión.

— Las estimaciones en términos de capacidad son muy difíciles para los alumnos, pues creemos que no se trabajan tan a menudo como otras magnitudes.

— La temporalización limita poder comprobar todas las hipótesis que surgen en el trabajo.

— No solo una pregunta o propuesta genera la aparición de determinados contenidos o procesos, sino que también el formato de presentación, el material utilizado y una gestión adecuada del maestro, propician que aparezcan o no, unos u otros conceptos. Por ello, tenemos la responsabilidad de elegir bien tanto los materiales como la propuesta concreta para que el resultado sea verdaderamente enriquecedor.

Referencias bibliográficas

Currículum de l'educació primària a les Illes Balears, BOIB núm. 97, de 19 de juliol de 2014.Govern de les Illes Balears.

Generalitat de Catalunya, Departament d'Educació , Centre de Suport a la Innovació i Recerca Educativa (CESIRE) (2014), «Preguntes que poden servir d'indicadors del nivell de riquesa competencial d'una activitat», <http://srvcnpbs.xtec.cat/creamat/joomla/images/stories/documents/indicadors_competencials.pdf>.

National Council of Teachers of Mathematics (2000), *Principios y estándares para la educación matemática*, SAEM Thales, Sevilla.

Aina Maria González Juan
CEIP Marian Aguiló, Palma
<ainamgonzalez@gmail.com>

Magdalena Martí Pons
CEIP Marian Aguiló, Palma
<magdalenmarti@gmail.com>

Susanna Morell Torrens
Centre d'Aprenentatge Cientificomatemàtic (CENTMAT), Palma
<susannamorell@gmail.com>

Catalina Maria Pizà Mut
CEIP Mestre Colom, Palma
<ppizam@gmail.com>

Maria Àngels Portilla Rueda
CEIP Son Anglada, Palma
<manangels@gmail.com>

1 Con el fin de facilitar la lectura hemos decidido utilizar el genérico maestros y alumnos en nuestro artículo. Así cuando hablamos de maestros incluimos tanto a maestros como a maestras y lo mismo para alumnos y alumnas.

SUMA+

Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje
de las matemáticas · **abril 2020**

– núm. 93 –