



Las matemáticas de los volcanes

MARÍA CHARCO ROMERO

Día Escolar de las Matemáticas

12 de mayo de 2023

Un poco de historia

A lo largo de la historia de la humanidad han sido numerosos los ejemplos del poder destructivo de los volcanes: erupciones catastróficas han producido cientos de miles de víctimas, así como incontables daños materiales. Sin ir muy lejos, la figura 1 muestra los ríos de lava originados como consecuencia de la erupción de La Palma (Islas Canarias, España) que comenzó el 19 de septiembre y finalizó el 13 de diciembre de 2021, tras 85 días de actividad ininterrumpida. El balance final de daños causados ascendió a 842,33 millones de euros.

En contrapartida al riesgo que supone vivir en las inmediaciones de un volcán, estos proporcionan recursos minerales, agrícolas, energéticos..., es decir, muchos beneficios que podemos aprovechar para facilitar nuestra vida. Los volcanes han sido piezas clave para la formación de nuestro planeta. Se asocian con el reciclado geológico de la corteza terrestre y contribuyen al ciclo geológico del carbono que, hoy en día, los humanos estamos alterando. La pregunta es, si tan necesarios son para el funcionamiento del planeta y tan beneficiosos para el desarrollo de nuestra vida sobre él, ¿qué podemos hacer como científicos para paliar los efectos de los peligros asociados con la actividad volcánica?

La erupción mencionada, así como la de Hunga Tonga (Reino de Tonga) ocurrida poco después (15 de enero de 2022) y con una magnitud que ha causado efectos a nivel global, han puesto en la órbita mediática ciencias como la vulcanología, que se encarga del estudio de los fenómenos volcánicos. Tradicionalmente, esta disciplina se encontraba restringida al ámbito de la geología, con la que viajamos al pasado para obtener respuestas de cómo y cuándo se formó la roca fundida (magma) que da origen a una erupción. No obstante, hoy en día estudios sobre sismicidad, deformación, gravedad, conductividad eléctrica..., permiten identificar regiones en las que se produce la fusión de rocas y, por tanto, el origen de los magmas así como el tamaño y la forma de las zonas en las que se acumula este material. Si con la geología viajamos al pasado, con la física y las matemáticas lo hacemos hacia el interior del volcán.

Desde el punto de vista matemático, el análisis e interpretación de los datos registrados en estas erupciones permitirán, con total certeza, mejorar modelos y herramientas utilizados para el co-



Figura 1. Bocas eruptivas y coladas de lava emitidas de la erupción de Cumbre Vieja en La Palma (19/09/2021-13/12/2021).

Fuente: @eldiarioes

nocimiento de sistemas magmáticos y, por tanto, mejorar la prevención, mitigación y pronóstico de riesgos futuros en lugares como La Palma. Además, el alcance de estos fenómenos ofrece la oportunidad de mostrar el uso de las matemáticas para comprender mejor la naturaleza de los volcanes.

El objetivo de este cuaderno, escrito con motivo del Día Escolar de las Matemáticas 2023, es intentar mostrar algunas de las posibilidades que ofrecen los volcanes como recurso para enseñar y aprender matemáticas a la par que conocer un poco más sobre ciencias de la Tierra y, en particular, sobre vulcanología. Para ello, se proponen una serie de actividades como recursos para el aula que engloban desde el trabajo de búsqueda en una base de datos hasta cómo se interpretan los cambios de forma que experimenta un volcán.

1. Periodo de retorno

El volcanismo ha jugado un papel muy importante en el pasado geológico del planeta, sin embargo, a escala humana la actividad volcánica puede afectar de forma adversa a la sociedad. Aproximadamente 300 0000 personas perdieron la vida entre los años 1600 y 2010 como causa de la actividad volcánica en muchos puntos del planeta. Uno de los ejemplos más famosos de tragedia volcánica es la erupción del Monte Pelée (Martinica) en 1902, donde perdieron la vida aproximadamente 30 000 personas. En ese momento, se supuso que la erupción sería similar a la ocurrida en el año 1851, en la que los habitantes de la población de St. Pierre, situada a las faldas del volcán, sufrieron principalmente los efectos de las cenizas expulsadas. Generalizar es difícil considerando la complejidad de las erupciones volcánicas. Incluso en un mismo volcán, la localización, el tamaño, estilo y ocurrencia de actividad tiende a cambiar.

Esta variabilidad natural, o incertidumbre de las erupciones volcánicas y de los riesgos asociados, es muy difícil de cuantificar. Para hacerlo se realizan análisis probabilísticos que requieren la recolección y uso de gran cantidad de datos geológicos y geofísicos. Sin embargo, los datos son escasos en la gran mayoría de volcanes. Actualmente existen algunas bases de datos que recopilan la información que se utiliza en este tipo de análisis. Entre ellas, las más conocidas son Global Volcanism Program, GVP <<https://volcano.si.edu/>> y WOVOdat <<https://www.wovodat.org/>>.

Actividad 1

Esta actividad supone la búsqueda en la base de datos del GVP <<https://volcano.si.edu/>> con el fin de responder una serie de preguntas. Un volcán se considera activo si ha mostrado signos de actividad en los últimos 10 000 años (periodo correspondiente al Holoceno). De estos volcanes, ¿cuántos han entrado en erupción? ¿Cuántos volcanes se encuentran en erupción hoy?, y, ¿en esta semana? ¿Qué países presentan un mayor número de volcanes que han entrado en erupción? ¿Cuántos volcanes activos hay en España? ¿Conoces alguno que haya entrado en erupción recientemente?

Si nos centramos en nuestras islas de origen volcánico, las Canarias, el registro histórico del que se tiene constancia comienza en el siglo XVI. Desde entonces se han confirmado 14 erupciones volcánicas: 7 en La Palma (1585, 1646, 1677–1678, 1712, 1949, 1971 y 2021), 4 en Tenerife (1704–1705, 1706, 1798 y 1909), 2 en Lanzarote (1730–1736 y 1824) y la erupción submarina de El Hierro (2011–2012). La figura 2 muestra las erupciones históricas en la isla de La Palma. Todas ellas se han producido en distintas localizaciones. Si nos centramos en la más reciente, su carácter fisural fue responsable de que se abrieran varias bocas eruptivas. Además, su estilo varió repetidas veces en el transcurso de la erupción (efusivo, estromboliano y freatomagmático).

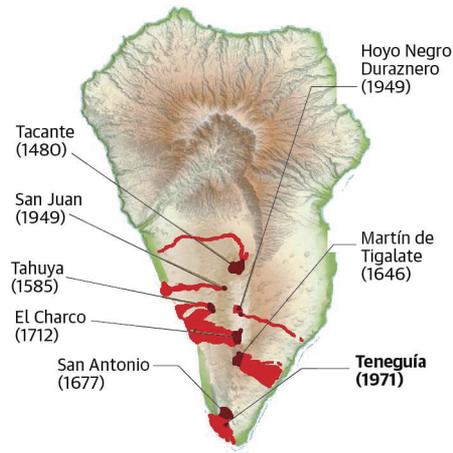


Figura 2. Coladas de lava de las erupciones históricas de la isla de La Palma. En rojo se muestra la colada de la erupción de 2021. Esta colada ocupa un área de 1241,1 ha de terreno frente a las 480 ha de la erupción de El Charco (1712) o las 20 ha de Teneguía (1971).

Fuente: @VolcansCanarias

Actividad 2

Realiza una tabla para cada isla del archipiélago canario que contenga información de cuándo se produjeron sus erupciones históricas y ordena estas erupciones de forma cronológica. Incluye los años transcurridos entre dos erupciones. Agrupa esta información en una única tabla y vuelve a realizar el mismo procedimiento de ordenación cronológica y de los años transcurridos entre dos erupciones aunque no se hayan producido en una misma isla. Calcula la media de los años transcurridos entre dos erupciones.

El tiempo de retorno es el tiempo estimado para que ocurra una nueva erupción. En general, las erupciones muy violentas tienen periodos de retorno de varios miles de años, mientras que las erupciones menos virulentas son más frecuentes, con retornos de pocas decenas de años. Dada la

tasa de alimentación del sistema magmático de las Islas Canarias así como el tipo de erupciones que generalmente se producen, se estima que el tiempo medio de retorno es de 39 ± 24 años para erupciones efusivas y poco virulentas. Este intervalo se calcula mediante técnicas estadísticas a partir de la tabla realizada considerando que las erupciones históricas que se han producido en las islas son suficientemente representativas del volcanismo canario. Este tipo de estimaciones se utiliza con el fin de realizar pronósticos probabilísticos de erupción.

Actividad 3

¿Se encuentra la media que has calculado dentro del intervalo indicado anteriormente? ¿Qué ocurre si realizamos una media ponderada considerando el número de veces que un intervalo de tiempo determinado ha transcurrido sin erupciones?

El periodo de retorno o recurrencia es un concepto estadístico que indica hasta qué punto un suceso puede considerarse como «raro». De forma exacta, se define como «la cantidad de tiempo necesaria para que la probabilidad de ocurrencia de un determinado evento se distribuya de forma uniforme en las unidades que componen dicha cantidad de tiempo». Así, en el caso de las erupciones en Canarias, el periodo de retorno mencionado no debe interpretarse como que es probable que en 39 años haya al menos una erupción, sino que indica que la probabilidad de que se produzca una erupción en un año cualquiera de los que comprenden los 39 años es de $P = 1/39 \approx 0,03$, es decir, de un 3%.

Actividad 4

Si P es la probabilidad de que en un año se produzca una o más de una erupción, $1 - P$ será la probabilidad de que en un año no haya erupción. Puesto que las erupciones son sucesos independientes, ¿cuál es la probabilidad de que en un intervalo de 39 años no haya ninguna erupción? Finalmente, ¿cuál es la probabilidad de que se produzcan una o más erupciones en un periodo de 39 años? *Esta probabilidad define el riesgo de que haya una erupción en los próximos 39 años.*

2. Índice de Explosividad volcánica (IEV)

En el punto anterior hemos mencionado el carácter más o menos virulento de las erupciones volcánicas. Sin lugar a dudas, las erupciones volcánicas constituyen una de las manifestaciones más potentes e impresionantes de la naturaleza. El Índice de Explosividad Volcánica (IEV) es una escala de 8 grados con la que se mide la magnitud o nivel de explosividad de una erupción volcánica y se corresponde con un crecimiento exponencial de 10^n con $n = 0, \dots, 8$. El índice comprende varios parámetros cuantificables de la actividad volcánica. Por ejemplo, se considera el volumen total de los productos emitidos por el volcán (lava, piroclastos, ceniza volcánica), altura alcanzada por la nube eruptiva, duración de erupción, inyección troposférica y estratosférica de productos expul-

sados, y algunos otros factores sintomáticos. La tabla 1 muestra la clasificación de una erupción en función del IEV. A mayor valor en la escala, la peligrosidad del volcán aumenta exponencialmente, de forma que un aumento de 1 indica una erupción 10 veces más potente y peligrosa que la que tiene un IEV de 0; de 2 es 100 veces más y así sucesivamente.

Las cinco grandes extinciones de la historia geológica del planeta, incluida la de los dinosaurios acaecida hace 66 millones de años, han sido atribuidas a distintos fenómenos entre los que destacan, por ejemplo, los asteroides o las supererupciones volcánicas. Las supererupciones son las más explosivas de la escala con un IEV = 8. Son erupciones muy poco habituales con un periodo de retorno aproximado de 10 000 años. Aunque los registros geológicos evidencian que ha habido erupciones de este tipo en la historia del planeta como la que originó la caldera de Yellowstone (EE.UU.) hace aproximadamente 640 000 años, no se cuentan con registros de este tipo de erupciones en los últimos 10 000 años. No obstante, la historia de la humanidad sí ha sido testigo de erupciones devastadoras. Algunas de las erupciones históricas más potentes son:

- Huaynaputina, 1600: IEV = 6.
- Krakatoa, 1883: IEV = 6.
- Santa María, 1902: IEV = 6.
- Novarupta, 1912: IEV = 6.
- Pinatubo, 1991: IEV = 6.

El 15 de enero de 2022, casi un mes después de finalizar la erupción de la isla de La Palma, la actividad registrada en el volcán Hunga Tonga dio lugar a una gran erupción explosiva (figura 3). Mientras que la de La Palma tuvo lugar en un volcán terrestre, el volcán Hunga Tonga se encuentra semisumergido en el mar, lo que hace que las erupciones tengan un carácter más explosivo dadas las reacciones químicas que se desencadenan cuando el magma se mezcla con el agua. Además, este volcán se encuentra en el Anillo de Fuego del Pacífico, una zona de subducción en la que las erupciones son más explosivas. Esto no ocurre, por ejemplo, en Canarias ya que el archipiélago se encuentra localizado en un «hotspot» o punto caliente. Mientras que la erupción de La Palma presentó un IEV medio de 2, Hunga Tonga se caracterizó por un IEV = 5.

IEV	Volumen	Descripción	Altura	Frecuencia
0	< 10000 m ³	Efusiva, no explosiva	< 100 m	Continua
1	> 10000 m ³	Ligera	100 m – 1 km	Diaria
2	> 1000000 m ³	Explosiva	1 – 5 km	Quincenal
3	>10000000 m ³	Violenta	5 – 15 km	Cada 3 meses
4	> 0,1 km ³	Catastrófica	> 10 km	Cada 18 meses
5	> 1 km ³	Cataclísmica	> 10 km	Cada 12 años
6	> 10 km ³	Colosal	> 10 km	Cada 50 - 100 años
7	> 100 km ³	Supercolosal	> 10 km	Cada 500 – 1000 años
8	> 1000 km ³	Apocalíptica	> 10 km	Cada 50000 años

Tabla 1. Índice de Explosividad Volcánica (IEV)

Actividad 5

Compara los efectos y magnitud de las dos erupciones. Para ello, ten en cuenta la Tabla 1 y la definición del IEV.

Actividad 6

Recaba información acerca de los efectos producidos por las dos erupciones. A finales de noviembre de 2021, aunque el carácter efusivo con episodios explosivos muy puntuales de la erupción de La Palma no cambió, el Plan de Emergencias de VOLcanes CANarios (PEVOLCA), decidió aumentar el IEV a 3, ¿a qué crees que se debió este cambio?



Figura 3. Imágenes de satélite mostrando la virulencia de la erupción del volcán Hunga Tonga (Indonesia).

Fuente: Copernicus/ESA/Sentinel Hub, PlanetLabs, Maxar

3. Peligros volcánicos

El IEV proporciona una medida de la magnitud de una erupción volcánica considerándola como un fenómeno geológico aislado. Sin embargo, estimar el riesgo que entraña una erupción o la actividad volcánica en una determinada zona es algo mucho más complejo, ya que conlleva estimar los peligros asociados así como la interacción de estos con el medio y actividades humanas.

A diferencia de otros riesgos que pueden desencadenar desastres naturales, el riesgo volcánico se debe estimar considerando múltiples factores de peligro. La mayoría de los peligros volcánicos están relacionados con las erupciones, sin embargo, algunos de ellos pueden producirse sin necesidad de una erupción. En general, se distinguen seis tipos principales: caída de tefra, coladas o flujos de lava, lahares o flujos de lodo, gases volcánicos, flujos piroclásticos y deslizamientos o avalanchas (figura 4).

Los estudios de peligrosidad en zonas volcánicas se realizan centrándose en cada uno de estos peligros definiendo su magnitud y alcance. Para estimar el peligro que entraña una colada de lava hemos de tener en cuenta tanto el camino que seguirá la lava como su velocidad. Estos factores dependen principalmente de la topografía del terreno, de las propiedades físicas de la lava (especialmente de la viscosidad) y del ritmo de emisión. En general, las lavas muy fluidas, es decir poco viscosas, tienden a ocupar grandes extensiones de terreno con poco espesor, mientras que las lavas más viscosas se acumulan en extensiones menores de mayor altura. Lejos del centro de emisión, la velocidad típica de las lavas es de pocos metros por hora ya que al enfriarse su viscosidad aumenta ralentizando el flujo. Las coladas de lava ocasionadas durante la erupción de la isla de La Palma han ocupado un área 1 225 ha y un volumen de $200 \cdot 10^6 \text{ km}^3$ (figura 5). Esto ha supuesto daños a cultivos, instalaciones, vías de comunicación y una pérdida de 1345 viviendas según los datos del Cabildo Insular de La Palma <<https://www.cabildodelapalma.es/es>>.

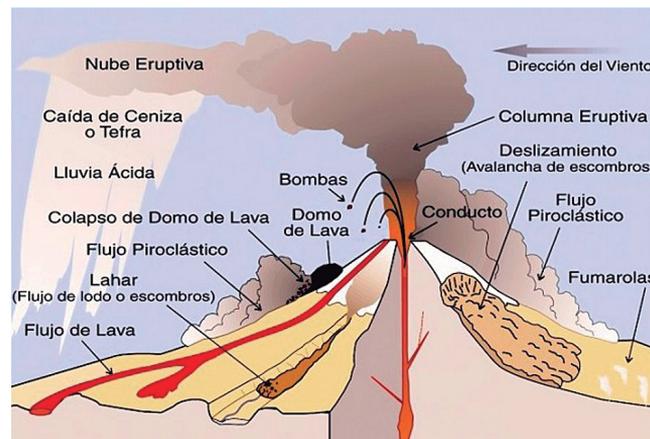


Figura 4. Principales peligros volcánicos. Aparte de los mencionados en el texto podemos incluir peligros como la lluvia ácida, generada al mezclarse los gases emitidos con la atmósfera en determinadas condiciones meteorológicas y los tsunamis en islas oceánicas o zonas costeras desencadenados por la llegada al mar de nubes piroclásticas o deslizamientos del terreno.

Fuente:USGS <<https://pubs.usgs.gov/>>

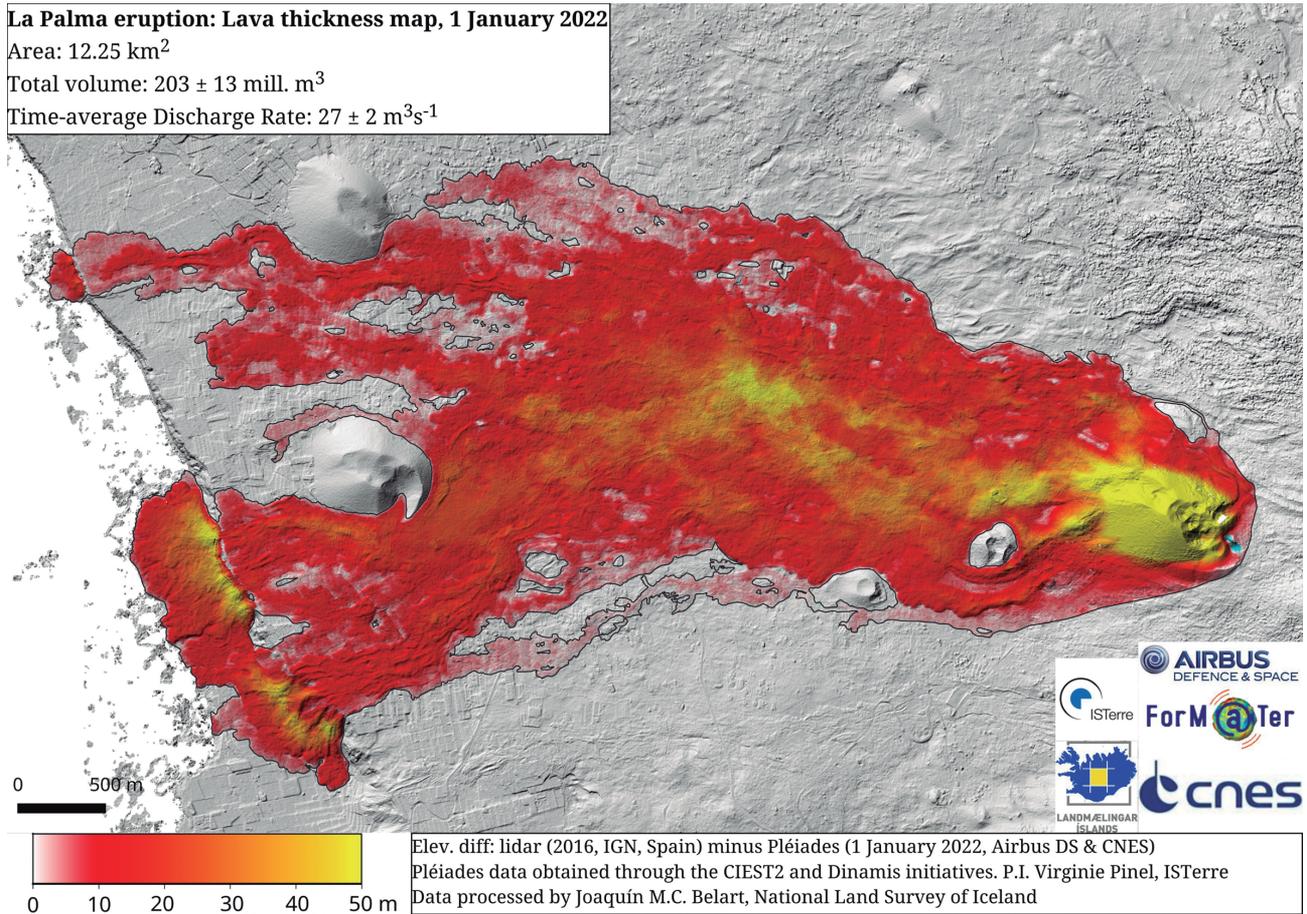


Figura 5. Altura de las coladas de lava originadas por la erupción de La Palma. Esta altura se ha obtenido a partir de los modelos de elevación generados mediante imágenes de la misión Pléiades de la Agencia Espacial Europea.

Fuente: @BelartJoaquin

Actividad 7

Pilar es una amante del peligro, le gusta ir a escalar los cráteres de volcanes activos. De repente, un ruido ensordecedor la deja sin aliento y decide salir rápidamente del volcán tomando todas las precauciones. El borde del cráter del volcán se encuentra a una altura de 1345 m sobre el nivel del mar mientras que Pilar, al oír el ruido se encuentra en el interior del cráter a una altitud de 1321 m. ¿Cuántos metros le faltan a Pilar por recorrer para alcanzar el cráter del volcán? Pilar se encontrará a salvo cuando esté fuera del volcán a 1150 metros de altitud, ¿cuántos metros recorrerá en total?

Actividad 8

Pilar escala a una velocidad constante. La siguiente tabla muestra a qué cotas se encuentra Pilar en distintos instantes de tiempo medido en segundos:

<i>Tiempo (T)</i>	<i>Cota (C)</i>
0 segundos	1 321 metros
4 segundos	1 324 metros
12 segundos	1 330 metros
24 segundos	1 339 metros

Tabla 2. Altitud de Pilar en el interior del cráter en distintos instantes de tiempo desde el comienzo de su ascenso hasta el cráter

¿Cuántos segundos tarda Pilar en alcanzar el cráter? ¿Qué velocidad de escalada lleva? Representa gráficamente la función $C(T)$. ¿Qué pendiente tiene la recta obtenida?

En caso de crisis en zonas como La Palma, que presentan un carácter eruptivo principalmente de tipo efusivo, uno de los peligros principales a tener en cuenta son las coladas de lava, por lo que se elaboran mapas de peligrosidad (figura 6) en los que se simula hacia dónde se dirige el material, indicando la probabilidad de que una zona determinada sea alcanzada por la lava.

La simulación de la dinámica y el recorrido de coladas de lava es un problema complejo debido a que la lava posee un comportamiento de fluido no-newtoniano. Además, sus propiedades físicas, como la viscosidad, cambian como consecuencia de su enfriamiento, lo que genera la aparición de túneles al solidificarse la parte superior en contacto con la atmósfera y cambios en la topografía original. Hasta ahora, los modelos físicos propuestos para realizar estas simulaciones no describen globalmente todos estos fenómenos observables sino solo algunos de ellos. Los modelos probabilísticos son los más apropiados en caso de crisis, ya que no requieren del conocimiento de muchos parámetros físicos, difíciles de determinar en caso de emergencia. Estos modelos reflejan, principalmente, la influencia de la topografía sobre el camino seguido por las coladas.

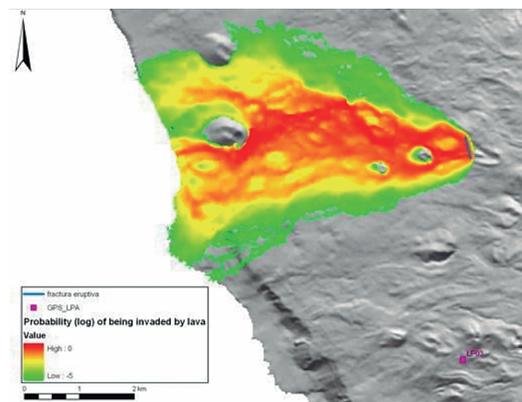


Figura 6. Mapa de peligrosidad donde se muestra la probabilidad que tiene una zona determinada del terreno de ser invadida por la lava.

Fuente: IGN, 20/09/2021

Actividad 9

Supongamos que la zona representada mediante la cuadrícula de la figura 7 es una zona volcánica en la que el cráter de un volcán se encuentra centrado en la celda resaltada en rojo.

3000	2980	2300	2150	2100	1880	1420	1415	1412	1405
3000	2980	2850	1700	1425	1418	1420	1410	1410	1408
3010	2990	1665	1520	1430	1420	1415	1418	1405	1405
3015	2995	1600	1510	1500	1495	1480	1412	1606	1403
3010	2990	1700	1495	1485	1490	1498	1458	1430	1400
3005	2980	1800	1850	1665	1555	1540	1502	1420	1401
3000	2970	1900	1885	1670	1580	1021	1000	1430	1403
3000	2970	1910	1900	1701	1530	1520	1490	1450	1410

Figura 7. Cuadrícula hipotética del terreno. En cada celda se representa la elevación media de todos los puntos que conforman la celda.

Emergencias da una alerta porque ha advertido que el volcán ha entrado en erupción. ¿Qué camino sigue la colada de lava originada por la erupción? En este caso, el número de cada celda de la cuadrícula indica la elevación media (h) de los puntos de la zona englobados en dicha celda. Dicha elevación se obtiene a partir de un Modelo Digital de Elevaciones (MDE). La lava sigue un camino de máxima pendiente, es decir, continúa por la celda que verifica que $h_i > h_0$ donde h_i con $i = 1, \dots, n$, es la elevación de las celdas que rodean la localización del cráter y h_0 la elevación de la celda en la que se encuentra el cráter. Colorea en verde las parcelas por las que la lava no va a fluir; en rojo por donde crees que va a ir la lava, en naranja por donde crees que a lo mejor va y en amarillo por donde irá muy poca lava.

Actividad 10

Considera las ocho celdas que rodean la celda en la que se encuentra el cráter del volcán. En este caso y como la lava sigue un camino de máxima pendiente, esta continúa por la celda que verifica que $h_i > h_0$ donde h_i con $i = 1, \dots, 8$, es la elevación de cada una de las ocho celdas mencionadas anteriormente y h_0 la elevación de la celda en la que se encuentra el cráter. Considerando este esquema, ¿qué camino sigue la lava?

Los modelos probabilísticos como el mostrado en la figura 6 siguen un esquema de este tipo considerando la topografía del terreno. Para obtener estos modelos, la superficie del terreno se divide en celdas como las de la cuadrícula anterior y a cada celda se le asigna una probabilidad que depende de su elevación.

Actividad 11

Considera la cuadrícula anterior y asigna probabilidades a cada una de las celdas del camino que sigue la lava. Para ello, considera que la probabilidad de que la lava se desplace a la celda i es:

$$P_i = \frac{d_i}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 + d_7 + d_8}$$

donde

$$d_i = \begin{cases} h_i - h_0 & \text{si } h_i - h_0 > 0 \\ 0 & \text{si } h_i - h_0 \leq 0 \end{cases}.$$

En general, la elección de la celda por la que fluirá la lava se realiza de forma aleatoria mediante un algoritmo de Montecarlo. Para evitar efectos de estancamiento que se pueden producir en zonas planas o de pequeña pendiente se introducen ciertos criterios para detener la simulación. Este tipo de simulaciones se realiza reiteradamente. La elección del camino más probable se efectúa considerando el número de veces que una celda ha sido cruzada por la lava.

4. Vigilancia volcánica mediante técnicas geodésicas

Hasta ahora hemos considerado factores meramente probabilísticos para establecer el riesgo de una posible erupción o de alguno de sus peligros asociados. Sin embargo, la experiencia nos dice que los volcanes vigilados, generalmente avisan y muestran signos de su actividad interna. Y, aunque no podemos descender a las profundidades para observar in situ dicha actividad como proponía Julio Verne en su *Viaje al centro de la Tierra*, podemos registrar, medir y analizar dichos signos sobre la superficie terrestre con el fin de inferir los mecanismos que causan dicha actividad. Entre los signos que somos capaces de registrar, medir y analizar se encuentran los terremotos, los gases emitidos y las deformaciones del terreno.

En La Palma, terremotos y deformaciones fueron clave para el pronóstico a corto plazo de la erupción iniciada en septiembre de 2021. Los terremotos comenzaron a registrarse una semana antes de la erupción. En los días previos, los temblores fueron migrando hacia la superficie y se detectó un aumento de la deformación del terreno, que se aceleró en las horas previas a la erupción. Esto no sucedió en otras crisis sísmicas recientes vividas en la isla como las de octubre de 2017 o febrero de 2018, por lo que en 2021 se dispararon las alertas.

La figura 8 muestra un esquema conceptual en el que observamos cómo el terreno se deforma, es decir, se desplaza como consecuencia del cambio de volumen que la entrada o salida de magma produce en el reservorio. Las deformaciones o cambios de forma y/o volumen observados en zonas volcánicas son objeto de estudio de una disciplina conocida como «geodesia volcánica».

Frente a técnicas clásicas, los avances tecnológicos de las últimas décadas han permitido que el uso de satélites artificiales se estandarice en la vigilancia de zonas volcánicas. Así, los Sistemas Glo-

bales de Navegación por Satélite (GNSS) y técnicas de teledetección como la Interferometría con Radar de Apertura Sintética (InSAR) permiten registrar de forma precisa la deformación del terreno con una gran resolución espacial y temporal. Como ejemplo, la figura 9 muestra la deformación registrada en La Palma en los días previos a la erupción mediante la técnica InSAR. Las franjas de color indican un movimiento del terreno en la dirección del satélite.

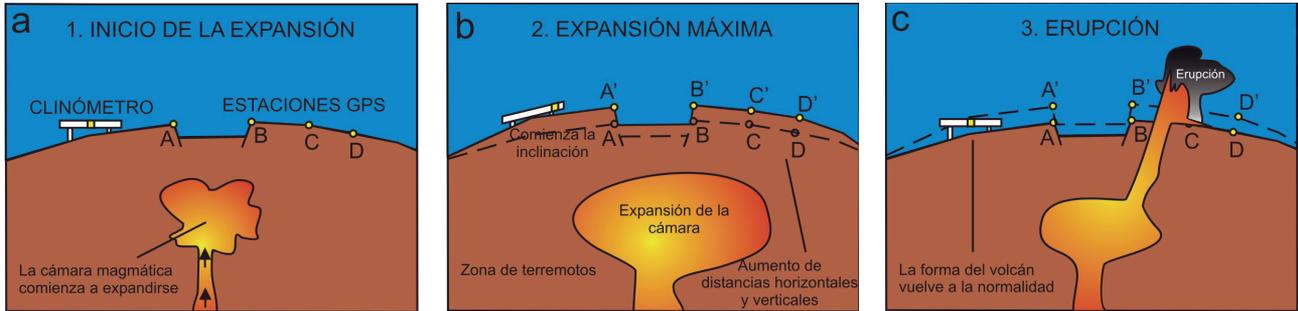


Figura 8. a. La entrada de magma en un reservorio provoca un cambio de volumen que se traduce en una inflación de la superficie terrestre. b. La inflación de la superficie se puede registrar mediante técnicas geodésicas. c. El terreno se hincha hasta que se supera el límite de ruptura de los materiales que lo conforman. A partir de este momento se generan fracturas que pueden dar lugar a terremotos y por las que el magma puede viajar hacia la superficie terrestre.

Fuente: <<https://www.usgs.gov/>>

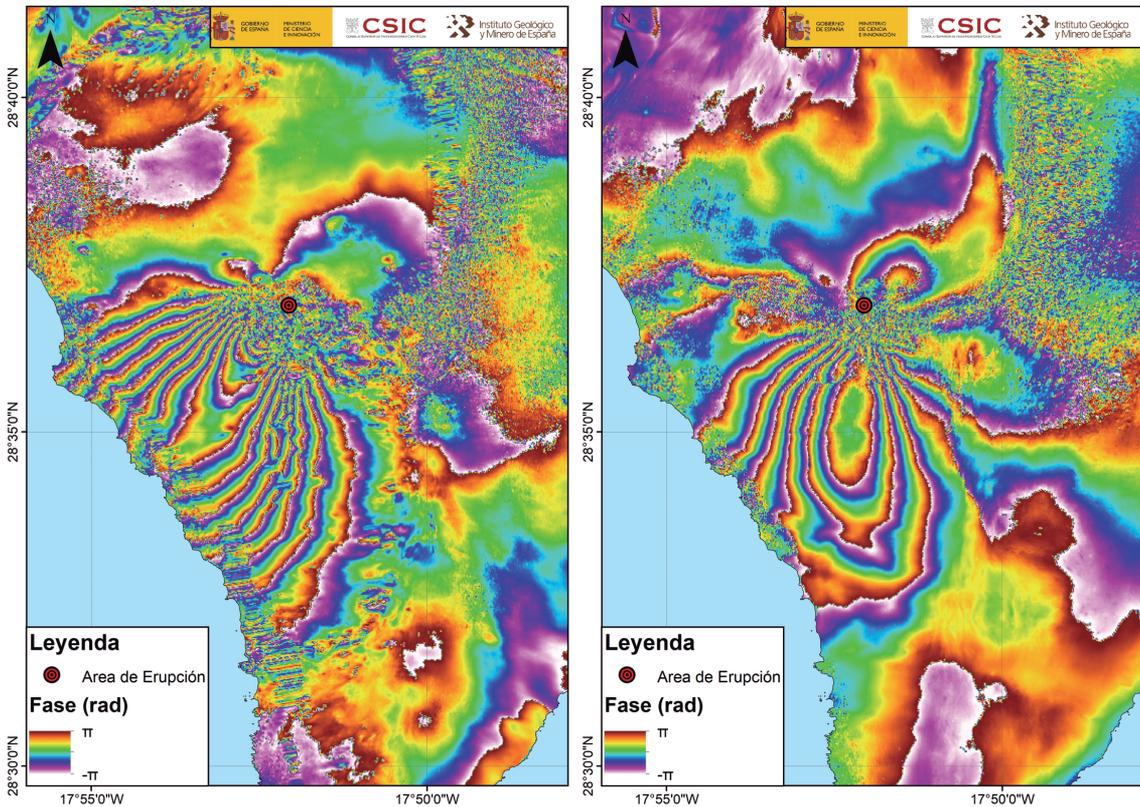


Figura 9. Interferogramas de La Palma en geometría ascendente del 14-20 de septiembre de 2021 (izquierda) y descendente del 16-22 de septiembre (derecha) obtenidos mediante imágenes Copernicus Sentinel-1. Cada franja de color representa un movimiento del terreno en la dirección del satélite de 2,8 cm.

Fuente: <<https://info.igme.es/eventos/Erupcion-volcanica-la-palma/informacion-igme>>

Nos vamos a centrar en cómo se determina este movimiento con el uso de sistemas de navegación a los que ya estamos acostumbrados, puesto que nuestros móviles llevan incorporadas numerosas funcionalidades que hacen uso de estos sistemas. En concreto, uno de ellos es el sistema estadounidense GPS (Global Positioning System) con el que podemos detectar variaciones de la posición de un punto en el espacio tridimensional con precisiones milimétricas.

La constelación GPS cuenta con 24 satélites artificiales situados a una altitud de 20 350 km sobre la superficie terrestre (figura 10). Para que el sistema cubra toda la superficie terrestre en 24 horas es necesario que cada uno de los satélites orbite dos veces alrededor de la Tierra en ese periodo de tiempo. Los satélites emiten señales de radio que se repiten de forma periódica y que pueden ser registradas por un observador situado en la Tierra mediante una antena y un receptor de la señal, como los que llevan incorporados nuestros móviles. Conociendo la velocidad de propagación de la señal emitida por el satélite y el tiempo que esta tarda en propagarse desde el satélite hasta el receptor, podemos determinar la distancia entre el satélite y el receptor. Este proceso puede asemejarse al que realizamos cuando hay una tormenta: cuando vemos el rayo, comenzamos a contar hasta que oímos el trueno. De esta forma, podemos concluir que el rayo ha caído en algún lugar que se encuentra aproximadamente a 1, 2, 3... km de nuestra posición. La pregunta es cómo determinamos la posición del receptor a partir de esa distancia.

Si bien la localización de un receptor mediante GPS se produce en el espacio tridimensional, podemos considerar un modelo bidimensional simplificado que permite ilustrar de forma sencilla algunos conceptos matemáticos involucrados en el proceso de localización.

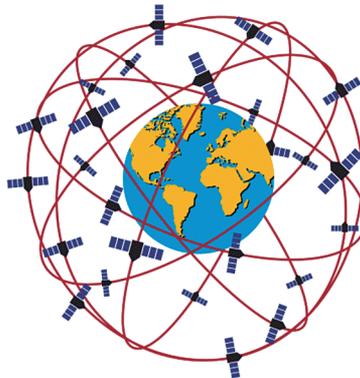


Figura 10. Órbitas de los 24 satélites que forman la constelación GPS con la que obtenemos coordenadas de puntos sobre la superficie terrestre.

Fuente: <<https://seos-project.eu>>

Actividad 12

Sean S_1 y S_2 dos satélites artificiales de posición conocida. Esta posición viene dada por las coordenadas $(0, 0)$ y $(0, l)$ en el sistema cartesiano de coordenadas. El receptor, R , se encuentra a una distancia d_1 del satélite S_1 y a una distancia d_2 del satélite S_2 . Considerando el teorema de Pitágoras y la fórmula de Herón determina las coordenadas de la posición del receptor R .

Actividad 13

A fin de ilustrar cómo sería el cálculo en espacio tridimensional, se pueden considerar tres satélites que se encuentran sobre el plano $z=0$ situados en $S_1(0, 0, 0)$, $S_2(l, 0, 0)$ y $S_3(a, b, 0)$. Sea $R(x_0, y_0, z_0)$ la posición del receptor. Conocidas las distancias d_1 , d_2 y d_3 de R a cada uno de los satélites, determina su posición.

Estos son dos ejemplos ilustrativos del principio geométrico de trilateración que se utiliza para determinar las coordenadas de un punto de la superficie terrestre mediante GPS (figura 11). La realidad es algo más compleja ya que el tiempo de viaje de la señal no se conoce de forma precisa, por lo que en lugar de tres satélites, como los indicados en la *Actividad 12*, necesitamos al menos 4. Generalmente, se consideran todos los satélites visibles por el observador, por lo que tendremos que resolver un sistema con más ecuaciones que incógnitas. Además, el cálculo de la posición se puede complicar un poco, ya que la señal viaja a través de la atmósfera, lo que perturba la velocidad de la señal. A esto hay que añadir que la elevada velocidad de la señal (velocidad de la luz) hace que debamos considerar efectos relativistas.

Para obtener las deformaciones del terreno o variaciones temporales de la posición de un punto de la superficie terrestre que se producen, en nuestro caso, como consecuencia del transporte de magma en el interior del medio, bastaría con realizar observaciones en dos instantes de tiempo diferentes y observar si las coordenadas del punto han variado de un instante a otro.

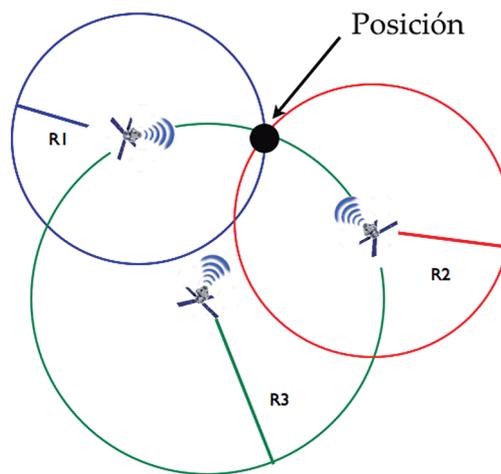


Figura 11. Principio geométrico de trilateración en el plano que se utiliza para determinar la posición de un punto de la superficie terrestre mediante el sistema GPS.

Fuente:

<<https://reglasyrelojes.wordpress.com>>

5. Modelización físico-matemática: pronóstico sobre el fin de una erupción volcánica

19 de septiembre de 2021, 12:10 UTC: El Instituto Geográfico Nacional (IGN) anuncia el comienzo de la erupción en la isla de La Palma en la zona de Cabeza de Vaca (El Paso). Los palmeros pasan de la magia a la tragedia en escasos minutos. Los días transcurren y, aunque es relativamente sencillo calcular la magnitud de la erupción volcánica (IEV), el gran impacto socio-económico de la erupción da paso a la pregunta de cuándo acabará la tragedia.

Los estudios de peligrosidad volcánica responden fundamentalmente a tres cuestiones: ¿qué probabilidad hay de que se produzca una erupción en un plazo determinado?; ¿dónde se situarán el centro o los centros de emisión de la erupción?, y, ¿cómo y cuándo acabará la erupción? La primera cuestión conlleva la realización de análisis de probabilidad de erupción considerando definiciones como el periodo de retorno mientras que las otras dos conllevan, además de cuestiones probabilísticas, el análisis de datos, como los que se registran con GPS, mediante modelos físico-matemáticos. Nos vamos a centrar en cómo, a través del estudio y análisis de deformaciones, podemos hacer un pronóstico del final de una erupción.

En erupciones efusivas como la de La Palma, la dinámica de fluidos, tras ciertas hipótesis sobre las propiedades físico-químicas del magma así como sobre la geometría del sistema de bombeo del volcán, proporciona la relación entre el cambio de volumen del reservorio en un instante t , $f(t)$, y el cambio de volumen que registraba el reservorio en el instante de inicio de la erupción, V_0 :

$$f(t) = e^{-(t/k)} \cdot V_0$$

donde k se conoce como tiempo de relajación del sistema. Esta sencilla relación se cumple siempre que el sistema sea cerrado, es decir, cuando el reservorio o cámara magmática no recibe nuevas aportaciones de magma desde el comienzo de la erupción. En el instante $t = k$:

$$f(k) = e^{-1} \cdot V_0 = \frac{1}{e} \cdot V_0 \approx 0,37 \cdot V_0$$

es decir, el volumen de lava emitido, o de forma equivalente, la pérdida de volumen del reservorio desde el momento en que se produce la erupción, decae exponencialmente y se corresponde con un 37 % del cambio de volumen que tenía el reservorio en el instante de inicio de la erupción.

Actividad 14

Si el tiempo de relajación del sistema es de 22 días, es decir, $k = 22$ midiendo t en días, ¿cuántos días hacen falta aproximadamente para que la pérdida de volumen del reservorio sea un 5 % del cambio de volumen que tenía el reservorio al inicio de la erupción? ¿Y del 1 %?

Actividad 15

Si el volumen al iniciarse la erupción es de $200\,000\text{ m}^3$, ¿qué volumen de magma quedará cuando hayan pasado 15 días?

Actividad 16

Representa gráficamente la serie de volumen desde $t=0$ hasta $t=T$, siendo T el instante de tiempo correspondiente a una pérdida de volumen del 1% considerando el volumen inicial dado en la actividad anterior.

Actividad 17

Sea la siguiente tabla que relaciona la cantidad de lava que hay bajo la tierra de un volcán, y el porcentaje de lava que queda pasados unos días:

Momento de la erupción	Día 5	Día 15	Día 25	Día 40	Día 65
100%	80%	50%	32%	16%	5%

Te vamos a dar cinco imágenes (figura 12) para que puedas colorear las reservas de magma del volcán en el momento de la erupción y pasados 5, 15, 25, 40 y 65 días.

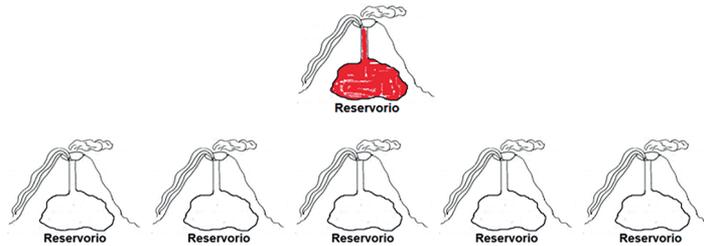


Figura 12. Esquema para el coloreado de las fracciones de volumen que quedan en el reservorio en los días sucesivos al comienzo de la erupción.

Actividad 18

El magma en su ascenso por flotabilidad hacia la superficie terrestre encuentra varios obstáculos lo que hace que llegado un momento determinado, el sistema vuelva a estar en equilibrio y la erupción se acabe. Supongamos que este equilibrio se alcanza cuando $f(t) \in [0,01 \cdot V_0, 0,05 \cdot V_0]$, o lo que es lo mismo, cuando el volumen del reservorio se encuentra entre el 1% y el 5% del volumen inicial. La erupción de La Palma finalizó el día 13 de diciembre de 2021, ¿se encuentra esta fecha en ese intervalo? Si es así, ¿podemos conocer el porcentaje aproximado de volumen que ha perdido el sistema desde el inicio de la erupción?

Actividad 19

El tiempo de relajación depende de las propiedades de los magmas emitidos, que se pueden determinar mediante técnicas geoquímicas, y de la geometría del sistema que se puede determinar de forma indirecta. Todas estas técnicas dependen de medidas que presentan errores. Teniendo esto en cuenta, ¿el modelo propuesto habría sido válido para realizar un pronóstico para el final de la erupción en La Palma?

Agradecimientos

Me gustaría agradecer a Francisco Haro Laguardia, José López Gómez, Rafael Orive Illera e Inés Represa Cuevas las valiosas sugerencias que han realizado tras la atenta lectura del borrador del trabajo.

Referencias bibliográficas

- CHARCO, M. (2004), *Modelización de la deformación y variaciones de gravedad causadas por actividad volcánica*, <<https://eprints.ucm.es/id/eprint/50948/1/T27192.pdf>>.
- FELPETO, A. (2002), *Modelización física y simulación numérica de procesos eruptivos para la generación de mapas de peligrosidad volcánica*, <<https://eprints.ucm.es/id/eprint/50948/1/T27192.pdf>>.
- GARCÍA-CANADA, L. (2016), *Análisis de series temporales en estaciones permanentes GPS*, <<https://eprints.ucm.es/id/eprint/37138/1/T37001.pdf>>.
- MARTÍ, J. (2011), *Los volcanes. ¿Qué sabemos de?*, CSIC, Catarata.
- SEGALL, P. (2010), *Earthquake and Volcano Deformation*, Princeton University Press.
- Instituto Geográfico Nacional (IGN, MITMA), <<http://www.ign.es>>.
- Instituto Geológico y Minero de España (IGME, CSIC), <<https://www.igme.es>>.
- United States Geological Survey (USGS, EE.UU.), <<https://www.usgs.gov>>.
- Smithsonian Institution, Global Volcanism Program, <<https://volcano.si.edu/>>.
- World Organization of Volcano Observatories (WOVOdat), <<https://www.wovodat.org/>>.



Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Comisión Ejecutiva

Presidente: Julio Rodríguez Taboada
Secretario General: Agustín Carrillo de Albornoz Torres
Vicepresidente: Onofre Monzó del Olmo
Tesorera: Encarnación Amaro Parrado
Secretaría técnica adjunta: Bienvenido Espinar Cepas
Secretaría de relaciones internacionales: M.ª Claudia Lázaro del Pozo

Revista Suma: Iolanda Guevara Casanova
Servicio de publicaciones: Juan Martínez-Tébar Giménez
Secretaría de actividades y formación del profesorado: Juana M.ª Navas Pleguezuelos
Secretaría de actividades con alumnos: Francisco Haro Laguardia
Secretaría de divulgación: Juan Carlos Toscano Girmaldi

Sociedades Federadas

Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática «Miguel de Guzmán»

Presidenta: M.ª Encarnación Reyes Iglesias
IES Comuneros de Castilla, C/Batalla Villalar, s/n. 09006 Burgos

Asociación Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)

Presidente: Julio Rodríguez Taboada
Facultade de Ciencias da Educación da Universidade da Coruña
Campus de Elviña, 15071 A Coruña

Euskadiko Matematika Irakasleen Elkartea «EMIE 20+11»

Presidenta: Ana Fernández de Betoño Sáenz de Olamendi
IES Miguel de Unamuno BHI, c/ Vicente Gonzalez de Etxabarri, s/n
01009 Vitoria-Gasteiz. 01009 Vitoria-Gasteiz (Araba)

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT)

Presidente: Bernat Ancochea Millet
C/ Itàlia, 84B. 08320 El Masnou (Barcelona)

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»

Presidente: Salvador Guerrero Hidalgo
Centro de Documentacion SAEM Thales, Facultad de Ciencias, Dpto Matemáticas, Campus Río San Pedro s/n, Torre Central 4º planta
11510 Puerto Real (Cádiz)

Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas

Presidente: Daniel Sierra Ruiz
IUMA, Edificio de Matemáticas, 1.ª planta, Universidad de Zaragoza, C/ Pedro Cerbuna s/n. 50009 Zaragoza

Sociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de Pedrayes»

Presidente: Rubén Pérez Zamanillo
IES Mata Jove, Plaza Club Patín Gijón Solimar, 33213 Gijón (Asturias)

Sociedad Canaria «Luis Balbuena Castellano» de Profesores de Matemáticas

Presidenta: Agar Arrocha Reyes
C/ La Isa, 33, Cercado Mesa. 38205 La Laguna (Santa Cruz de Tenerife)

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas

Presidente: Serapio García Cuesta
IES Universidad Laboral, Avda. de la Mancha s/n, 02006 Albacete

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia

Presidenta: Catalina Ayala Molina
Facultad de Matemáticas. Universidad de Murcia. Campus de Espinardo. 30100 Murcia

Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»

Presidente: José Pedro Martín Lorenzo
Centro Educativo Municipal, 2.ª planta, C/ San Juan nº 3A, 06400 Don Benito (Badajoz)

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»

Presidente: José Luis Muñoz Casado
Facultad de CC. Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid, Plaza de las Ciencias, 3, 28040 Madrid

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria

Presidenta: Carmen Espeso Ortiz
Avda. del Deporte s/n. 39012 Santander

Sociedad Melillense de Educación Matemática

Presidente: Jesús Diego Rodríguez García
IES Enrique Nieto. Departamento de Matemáticas, C/ Avenida de la Juventud, 4. 52005 Melilla

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira»-Matematika Irakasleen Nafar Elkartea

Presidente: J. Javier Jiménez Ibáñez
IES Alhama, Avda. Villar, 44. 31591 Corella (Navarra)

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas

Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Facultad de Educación. Despacho 3215
C/ Rector Royo Villanova, s/n. 28040 Madrid

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas «A prima»

Presidenta: Clara Jiménez Gestal
Facultad de Ciencia y Tecnología Edificio Científico Tecnológico, CCT; C/ Madre de Dios, 53. 26006 Logroño

Sociedade de Ensinantes de Ciencias de Galicia (ENCIGA)

Coord. Sección Matemáticas: Iria Fernández Fontenla
Facultade de Ciencias, Rúa Alfonso X o Sabio, s/n. 27002 Lugo

Societat Balear de Matemàtiques SBM-XEIX

Presidente: Daniel Ruiz Aguilera
C/ Miquel Capllonch, 30, 3A. 07010 Palma (Illes Balears)

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»

Presidente: Onofre Monzó del Olmo
Departamento de Didáctica de la Matemática, Apdo. 22045. 46071 València