Trigonometría en la expedición Malaspina

Antonio Arribas de Costa

SUMA+ núm. 102
pp. 31-42
Artículo recibido en *Suma* en abril de 2021 y aceptado en enero de 2022

Se resume la situación científica en la España del XVIII así como uno de sus mayores logros: la expedición Malaspina cuyos métodos cartográficos se exponen con cierto detalle.

La parte central se dedica al desciframiento de las operaciones matemáticas que aparecen en las «hojas de cuentas» elaboradas por los oficiales de la expedición, en las que afloran los dos temas: trigonometría y logaritmos.

Por último se hace una propuesta de ejercicios para Secundaria o Bachillerato, contextualizados en el marco de conocimientos y en el espíritu de aquella época.

Palabras clave: Investigación histórica, Trigonometría, Logaritmos, Enseñanza y aprendizaje, Secundaria y Bachillerato.

Trigonometry in the Malaspina expedition // The scientific situation in Spain's XVIII is summarized as well as one of its greatest achievements: the Malaspina's expedition, whose cartographic works are presented in some detail.

The central part is devoted to the decipherment of the mathematical operations that appear in the «tally sheets» prepared by the expedition officers, in which show up the two topics: Trigonometry and Logarithms.

Finally a proposal of exercises for Mid- or High-School pupils and contextualized within the framework of the knowledge and in the spirit of that timeframe is made.

Keywords: Historical research, Trigonometry, Logarithms, Teaching and learning, Mid- or High-School.

En este artículo tratamos de contar cómo logramos descifrar los cálculos que aparecen en las «hojas de cuentas» con las que se elaboraban los derroteros de la Expedición Malaspina (1789-1794) para aportar un poco de inspiración a la hora de contextualizar históricamente problemas geométricos en nuestras aulas.

La tarea de comprender los cálculos fue complicada para nosotros, puesto que al leer textos antiguos normalmente nos encontramos con soluciones a las que no estamos habituados (Oller, 2018). Aún así pensamos que este trabajo enriqueció nuestra visión de las matemáticas mostrándolas dentro de un ambiente histórico y científico más amplio.

El espíritu investigador en el Siglo de las Luces

La navegación y la Astronomía siempre han ido de la mano, en especial a partir del descubrimiento de América y de la salida a mares abiertos sin un litoral de referencia. La confección de mapas de las costas (la Hidrografía), así como los procedimientos para conocer la posición y el rumbo de un barco en alta mar necesitaban de los conocimientos astronómicos.

La determinación de la latitud ya estaba controlada, bien mediante la altura del polo celeste sobre el horizonte o bien, mucho más práctico, mediante la máxima altura meridiana del Sol. Este segundo método fue empleado sistemáticamente ya en la primera vuelta al mundo de Magallanes-Elcano (1519-1523) por el piloto Francisco Albo.

En cambio la determinación de la longitud fue un verdadero quebradero de cabeza hasta la aparición de los cronómetros marinos fiables (John Harrison, 1693-1776). Con ellos se podía medir la diferencia horaria entre un mismo fenómeno astronómico (el mediodía solar, por ejemplo) visto desde dos lugares distintos (un barco en alta mar y una ciudad de referencia para la que ese fenómeno estaba tabulado) y convertirla en diferencia de longitud geográfica. Este adelanto facilitó grandes travesías, como las memorables del capitán James Cook (1728-1779).

En la España del siglo XVIII, el Siglo de las Luces, la época de la Ilustración, fue una centuria en la que los borbones reinantes manifestaron un cierto interés por la ciencia; hubo algunos científicos extranjeros que trabajaron aquí, como el químico Louis Proust, y españoles que cooperaron con sabios extranjeros, como los marinos Jorge Juan y Antonio de Ulloa. Podemos decir que el nivel de la ciencia en España mejoró notablemente hasta verse detenido con brusquedad por los acontecimientos de 1808. La lucha con otras potencias europeas (Francia, Inglaterra, y Holanda) por el control de los mares propició que en 1717 se creara la Academia de Guardias Marinas, en Cádiz. También aparecieron varias obras sobre técnicas de construcción de barcos y de navegación. Y se realizaron diversas expediciones, viajes de estudio y exploración, la mayoría por mar, en las que se sumaban los intereses científicos (botánicos, zoológicos, cartográficos) con los políticos y económicos.

La más famosa fue la conocida como expedición Malaspina (figura 1) que recorrió buena parte de las costas del mundo entre los años 1789 y 1794 a bordo de dos corbetas, la Descubierta comandada por Alejandro Malaspina y la Atrevida por José de Bustamante. Había numerosos científicos (naturalistas, astrónomos, marinos) entre los expedicionarios. La película *Master and Commander* puede ofrecernos una idea de cómo eran este tipo de viajes. Recientemente para conmemorar y poner en valor la original se ha realizado la llamada expedición Malspina 2010 (Rebok, 2013).

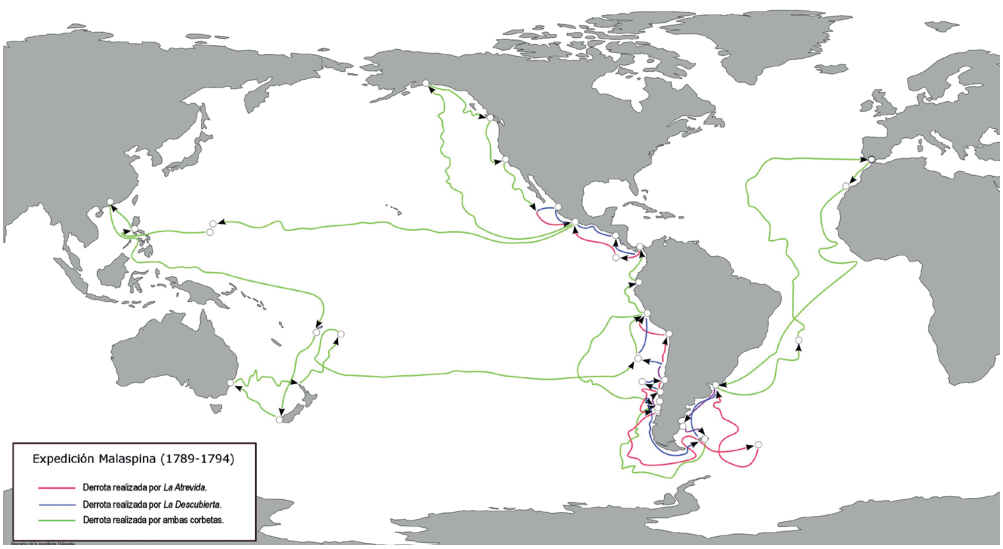


Figura 1. Itinerarios de la expedición Malaspina

Los trabajos hidrográficos de la Expedición Malaspina (1789-1794)

Una de las misiones más importantes que se les encomendó fue la realización de trabajos hidrográficos, es decir, levantamiento de cartas lo más exactas posible de las costas que fueran explorando. La realización de buenos mapas de los territorios, la cartografía, era crucial para la seguridad de futuros navegantes y también desde el punto de vista estratégico, económico y político. Y no era una tarea sencilla. Es necesario conocer con la mayor precisión posible las coordenadas geográficas (latitud y longitud) de muchos puntos del litoral para poder trasladarlos al papel.

La expedición contaba con cronómetros marinos, pero se utilizaron también otros métodos para la determinación de la longitud: el de las distancias lunares u ocultaciones de alguna estrella por la Luna y, con mucha frecuencia, el de los eclipses de los satélites de Júpiter, sobre todo en algunos puntos destacados que se calculaban con mayor precisión desembarcando y haciendo *in situ* las observaciones necesarias.

En cada una de las corbetas figuran siete oficiales astrónomos e hidrógrafos. Felipe Bauzá era el director de cartas y planos del conjunto de la expedición (Higueras, 1985). Todos ellos conocían al detalle el procedimiento para efectuar los trabajos hidrográficos, el establecido por Vicente Tofiño en su *Atlas Marítimo de España* y descrito en la segunda parte de la introducción del *«Derrotero de las costas de España en el Mediterráneo»* (Tofiño, 1847) que se seguía de forma sistemática, habitual, y consistía en lo siguiente.

El objetivo es determinar las coordenadas geográficas de puntos destacados del litoral (cabos, promontorios, islotes, desembocaduras de ríos, montañas). Ocasionalmente se enviaba a tierra un pequeño destacamento para efectuar sobre el terreno algunas observaciones más detalladas en puertos o ciudades importantes que servirían de jalones seguros. En estos casos se calculaba la latitud mediante observaciones de pasos meridianos de estrellas y la longitud a través de los satélites de Júpiter o de ocultaciones de estrellas por la Luna. Pero los trabajos, en su mayor parte, se hacían desde el mar. Los dos navíos iban navegando en paralelo a la costa localizando los puntos del litoral que iban a cartografiar y realizando todas las tareas necesarias para ello.

Algunas de las labores se efectuaban a diario de forma rutinaria:

a) Cada día se corrige el rumbo que marca la brújula teniendo en cuenta la variación magnética; de esta manera se puede determinar el rumbo verdadero del buque respecto al norte geográfico.
«Se mide la inclinación con una aguja construida por Nairne como la que lleva el Capitán Cook en su tercer viaje [1776-1779]; y para observar la variación magnética empleamos los teodolitos de la colección remitida de Londres por el Señor Magallanes hechos por Jorge Adams». (Espinosa y Tello, 1809).
Por ejemplo, si la brújula marca un rumbo de 50° E (ángulo entre el norte magnético y la dirección de navegación) y la declinación magnética es d = – 3° (el norte magnético está 3° al oeste del geográfico), entonces el rumbo verdadero es 47° E (figura 2).

b) También cada día se hacen observaciones astronómicas que permitan calcular las coordenadas geográficas de la nave; generalmente se trata de tomar la altura del sol a mediodía lo que nos da la latitud utilizando las tablas de la declinación (la distancia al ecuador) del Sol en esa fecha y la hora a la que esto sucede medida con un cronómetro marino ajustado a la hora de Cádiz; una

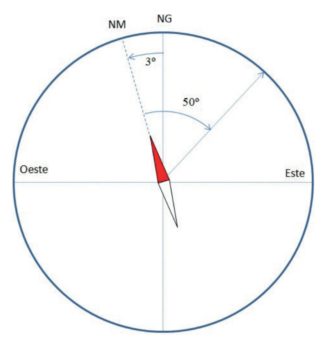


Figura 2

vez conocida la diferencia de tiempo entre el instante del mediodía en la capital gaditana y en el barco, solo queda convertirla en diferencia de longitud geográfica. Las cartas elaboradas en la expedición casi siempre toman como referencia para las longitudes el meridiano de Cádiz.

Por ejemplo, si al mediodía la máxima altura del Sol fue de 63° (medidos desde el punto cardinal N, lo que indica que estaban en el hemisferio sur) un día que la declinación del Sol era 10° S, entonces la máxima altura del ecuador (desde N) es 53° y la altura del Polo Sur celeste (desde S) 37°, por lo que su latitud era 37° S.

Si eso ocurrió cuando el cronómetro marcaba las 16 h 37 m (hora de Cádiz) y las tablas nos dicen que, en esa fecha, el mediodía en la capital gaditana sucedió a las 12 h 5 m, entonces la diferencia horaria es de 4 h 32 m que equivalen a 68° de longitud al O del meridiano de Cádiz.

c) La posición, las coordenadas, de las corbetas en cualquier otro momento del día se hacía por estimación; a partir de una situación conocida se marcaba el rumbo verdadero sobre el mapa, se estimaba mediante la corredera la velocidad y así se podía calcular la distancia recorrida en esa dirección sabiendo el tiempo transcurrido.

Otros trabajos se hacían una vez elegido el accidente del litoral que les interesaba.

d) Desde cada corbeta se observa el ángulo (α) que forma la visual a la otra embarcación con el Norte geográfico. Se tiene así la orientación de la «base» CC’. Supongamos $\alpha = 60°$ Oeste.

Se mide el ángulo a que forma, visto desde uno de los navíos, el nivel del mar (la línea de flotación)1 con el extremo superior (el «tope») del palo del trinquete de la otra corbeta. Como la altura del trinquete es conocida esto permite determinar la distancia que separa los dos barcos y ya tenemos la longitud de la «base» CC’ (figura 4).

Si $\alpha = 1°$, la altura del palo del trinquete es 30 m y aceptamos que el triángulo es prácticamente rectángulo (ver nota 1), la distancia d entre ambas corbetas es d = 30 m / tg 1° = 1.719 m.

e) Se miden, desde ambas naves, los ángulos β y γ que forman las visuales al accidente elegido (el islote A en la figura) y a la otra corbeta (figura 5).

Supongamos $\beta = 55°$ y $\gamma = 45°$.

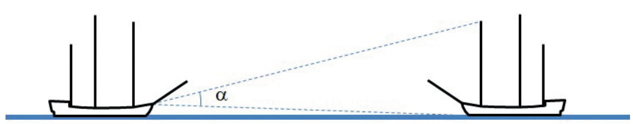


Figura 4

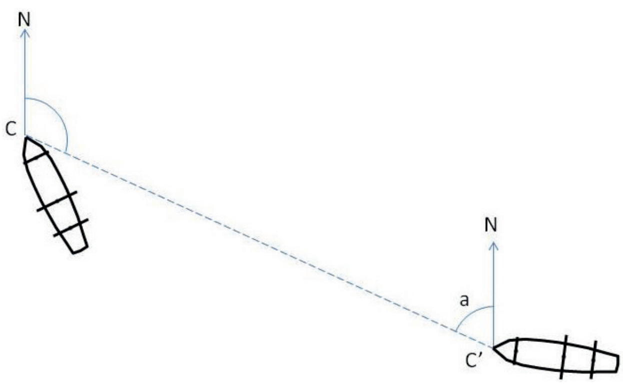


Figura 3

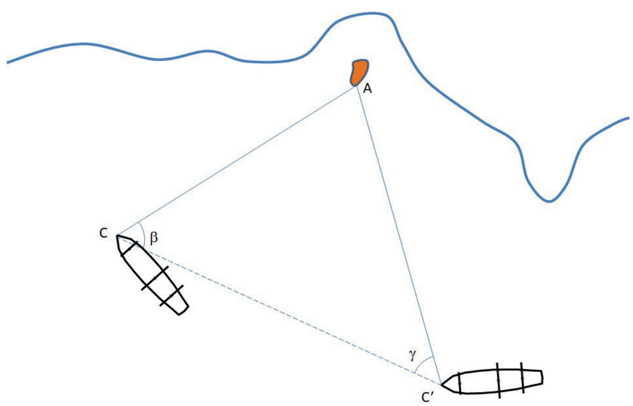


Figura 5

Cálculos de gabinete. Ya se tienen todos los datos. Ahora falta procesarlos. En el triángulo CC'A se conocen dos ángulos (y por tanto el tercero) y uno de los lados (el CC'). Así que se podrá resolver utilizando el teorema de los senos y calcular las longitudes CA y C'A.

Con los datos supuestos, C = 55°, C' = 45° (luego A = 80°) y CC' = 1.719 m, resulta AC' = 1.430 m.

Finalmente las coordenadas geográficas del punto A, objetivo de toda esta cadena agotadora de trabajos, se calculan en el triángulo rectángulo AC'A': AA' lleva dirección este-oeste y A'C' norte-sur por lo que A'=90°. Conocemos la hipotenusa AC' y el ángulo C' = a – γ, por lo que podemos calcular las longitudes de los catetos AA' y A'C'.

C' = 60° – 45° = 15°, AC' = 1.430 m, de donde AA' = 370 m y A'C' = 1.381 m.

Pero la distancia A'C' se puede convertir en la diferencia de latitud entre los puntos C' y A' puesto que sabemos la medida del radio terrestre y por tanto de todo un meridiano. Una simple proporción nos dará la $\Delta\varphi$ y la latitud de A.

Si todo el meridiano completo (360°) mide 40.000 km entonces 1,381 km corresponden a 45" de arco; la latitud φ(A) = φ(C') + 45" = 37° S + 45" = 36° 59'15" S.

Del mismo modo la distancia AA' corresponde a la diferencia de longitud entre A y C', puesto que AA' es un segmento del paralelo que pasa por A. Solo hay que calcular el radio de un paralelo situado a la latitud de A, obtener toda su circunferencia y otra proporción nos permitirá hallar la $\Delta\lambda$ y la longitud de A.

Considerando el radio terrestre R = 6.371 km, el radio de un paralelo a 37° S será r = R · cos 37° = = 5.088 km y toda su circunferencia (los 360°) medirá 31.970 km por lo que ese pequeño segmento de 0,370 km equivale a un arco de 15"; la longitud del punto A será λ(A) = λ(A') + 15" = λ(C') + 15" = = 68° 0' 15" al Oeste del meridiano de Cádiz.

Matemáticas para navegantes: las hojas de cuentas

Con motivo del VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM, Madrid, julio 2017) el Museo Naval nos facilitó el acceso a la documentación conservada en su archivo y tuvimos bajo nuestros ojos los detalles de las medidas y los cálculos efectuados que se recogen en el libro de *Padrones y marcaciones* de la expedición. En la página 26 (figura 7) aparece la determinación de un par de puntos (las Tetas de Biobio, en la costa de Chile, algo al sur de Santiago, cerca del Puerto de Concepción y de la población de Talcahuano).

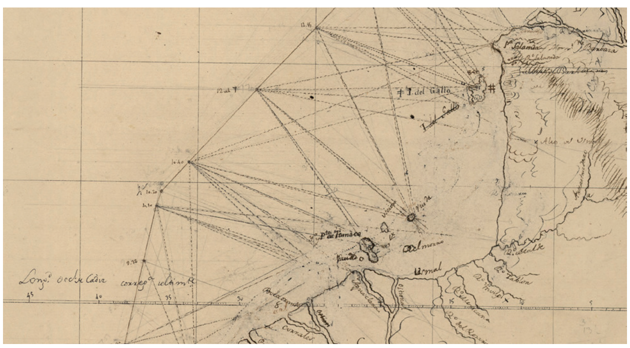


Figura 6. Expedición de Malaspina y Bustamante. Padrones y marcaciones AMN 0180 ms.0285, p. 26 (55 en la versión digitalizada)
Fuente: <www.bibliotecavirtualdefensa.es/BVMDefensa(pacifico/i18n/consulta/registro.cmd?id=14125>

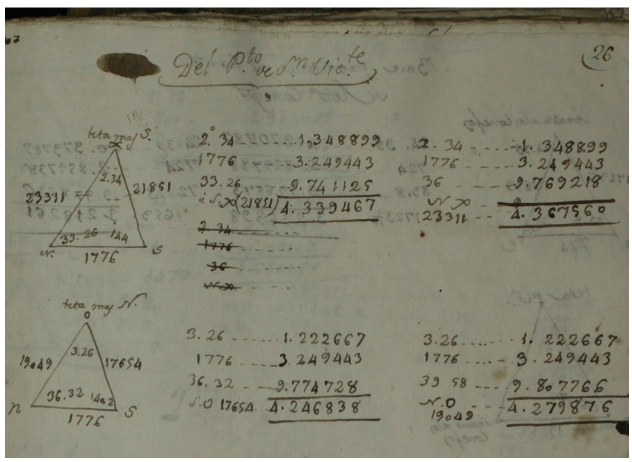


Figura 7

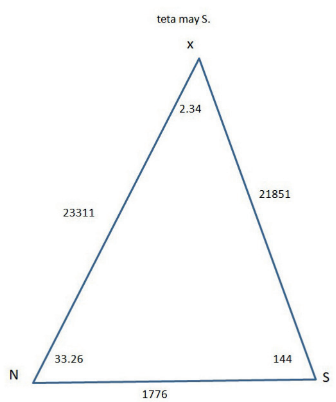
Transcribimos el croquis superior y el primer grupo de cifras, justo a su derecha (figura 8).

Al principio no entendimos nada. No sabíamos a qué correspondían exactamente los números de las pequeñas tablas. Intrigados, Ana Rubio (en aquél momento estudiante del Máster de Profesorado y quien me animó a escribir este trabajo) y yo decidimos devanarnos los sesos para intentar descifrar el trasfondo de estas operaciones.

Lo más fácil fue el triángulo. Es notable que el dibujo es solo orientativo; los ángulos no miden lo que tendrían que medir. El vértice superior X está señalado como la Teta Mayor Sur, el pico cuya posición se trata de determinar. Por tanto los otros dos vértices (N y S) tienen que ser las dos corbetas. La distancia entre ellas (1776)[2] aparece en este contexto como un dato, como algo ya calculado anteriormente. El valor de los tres ángulos está claro: los dos observados desde los navíos (33.26 y 144) y el restante hasta 180°.

¿Cómo debe leerse 33.26? ¿Como 33,26° en notación decimal o como 33° 26’ en sexagesimal? Pues del valor del tercer ángulo (que aparece como 2.34 en la figura o como 2°.34 en las cuentas) se deduce inmediatamente que trabajaban con notación sexagesimal; solo así cuadran los valores de los tres ángulos:

$$33°\ 26' + 144° + 2°\ 34' = 180°.$$



2°.34	1.348899
1776	3.249443
33.26	**9.741125**
SX (21851)	**4.339467**

Figura 8

Es claro que las incógnitas son las distancias de las corbetas al vértice X, es decir los lados NX y SX, por lo que las operaciones escritas deben tener como fin calcular SX (en la última fila) utilizando como datos los correspondientes a las tres primeras filas (los dos ángulos 2° 34’ y 33° 26’ y el lado, la «base», NS).

Pero ¿qué cuentas hay que hacer en la columna de la derecha para obtener el número inferior, el buscado SX? Tras varias pruebas sin obtener nada positivo se impuso este hecho:

$$1{,}348899 + 3{,}249443 + 9{,}741125 = 14{,}339467$$
(el número final + 10)

¿Por qué? ¿De dónde procedía esa coincidencia?

Buscando el fundamento de estas cuentas, pensamos en cómo lo haríamos nosotros ahora: utilizaríamos el teorema de los senos. Pero en él, para despejar SX, habría que hacer productos y divisiones y en la «hoja de cuentas» solo aparecen sumas. ¿Qué podemos hacer para convertir productos y divisiones en sumas? Pues tomar logaritmos.

Además, los números de la columna derecha, con seis decimales, «suenan» inmediatamente a logaritmos. Así, log 1776 = 3,249443, con toda precisión. Vamos por buen camino. Se ve que manejaban buenas tablas. ¿Y los que aparecen a la derecha de los ángulos? Obviamente no pueden ser senos. ¿Podrían ser logaritmos de senos? Pues a comprobar.

Resulta que log sen 2° 34’ = –1,34889843. ¡Justo el número de la tabla, pero con signo negativo y una mínima desviación en la sexta cifra decimal!

Y log sen 33° 26’ = –0,258875. El número de la tabla asociado a 33° 26’ es 9,741125. La relación entre ambos salta a la vista: 9,741125 es el complemento a 10 de 0,258875, o mejor: 9,741125 = 10 + (–0,258875).

Y, lo mejor de todo, la última fila también corrobora esta idea pues log 21.851 = 4,339471 (hay un pequeño error en la quinta cifra decimal; en la tabla aparece 4,339467). O, más apropiadamente, 10 4,339467 = 21.850,78, pues en esa última fila SX es la incógnita final.

Podemos ya reconstruir todo el procedimiento: Para resolver el triángulo NSX vamos a utilizar el teorema de los senos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Aplicado a nuestro caso:

$$\frac{SX}{\text{sen}33°26’} = \frac{1.776}{\text{sen}2°34’}$$

$$\log \mathrm{SX} - \log(\text{sen } 33°26’) = \log 1.776 - \log(\text{sen } 2°34’)$$

$$\log \mathrm{SX} = -\log(\text{sen } 2°34’) + \log 1.776 + \log(\text{sen } 33°26’)$$

$$\log \mathrm{SX} = -(-1{,}348899) + 3{,}249443 + (-0{,}258875)$$

En los cálculos que aparecen escritos se añade 10 a cada miembro de la ecuación:

$$10 + \log \mathrm{SX} = 1{,}348899 + 3{,}249443 + (10 - 0{,}258875)$$

Con ello solo tenemos que hacer sumas. La única resta que sigue estando presente es 10 – 0,258875 y sustraer un número a 10 es siempre muy fácil. Un buen truco para evitar errores y hacerse la vida más cómoda:

$$10 + \log \mathrm{SX} = 1{,}348899 + 3{,}249443 + 9{,}741125$$

$$10 + \log \mathrm{SX} = 14{,}339467$$

$$\log \mathrm{SX} = 4{,}339467$$

$$\mathrm{SX} = 104{,}339467 = 21.851$$

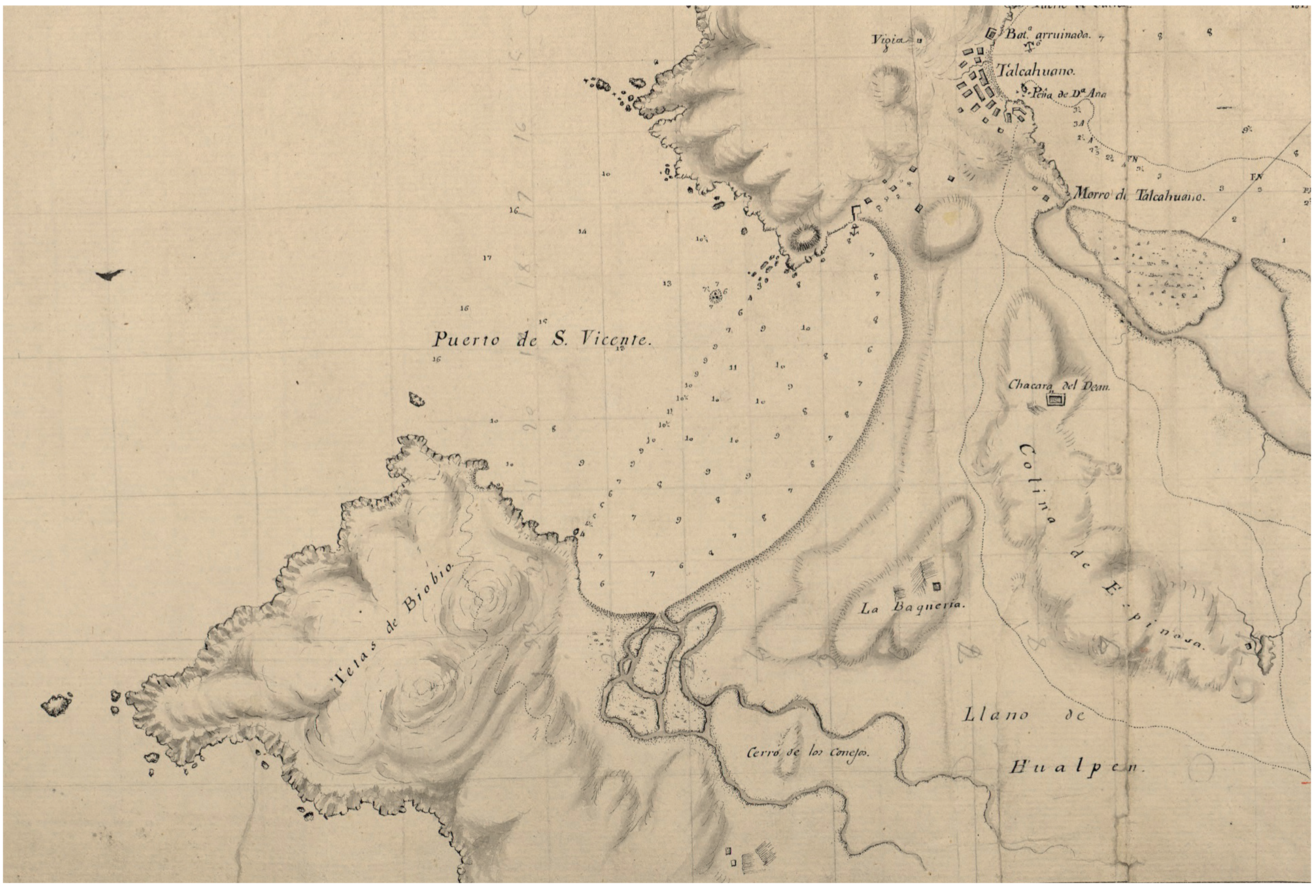


Figura 9. Plano del Puerto de Concepción de Chile, situada la población de Talcahuano en lat. S. de 36°42’28” y long. de 67°2’53” de Cádiz. Levantando en la comisión de las corbetas Descubierta y Atrevida, año 1790. (AMN 51-B-16). Aparece en 153_AMN_Catalogo_Malaspina_II_a_0 1679 - 1680

Conclusiones

Tras esta narración esperamos que el problema de los derroteros pueda resultar motivador para muchos profesores. Llevarlo a clase no es inmediato, pero se puede intentar hacer alguna adaptación para trabajar distintos contenidos de la asignatura de Matemáticas. En particular, para relacionarlos con dos contenidos nuevos en las Matemáticas Académicas de 4.º ESO como son la trigonometría (el teorema del seno) y los logaritmos. A continuación exponemos algunos ejercicios de aplicación que se podrían plantear en el aula.

Propuestas de trabajos escolares

1) Las corbetas de la expedición Malaspina controlaban la dirección en la que se movían mediante la brújula (o aguja de marear). La brújula marca el norte magnético (NM) que no coincide con el norte geográfico (NG). El ángulo que forman el NG con el NM se llama declinación magnética (δ) y puede ser positiva (si el NM está el este del NG) o negativa (si el NM está al oeste del NG).

La declinación magnética δ era conocida pues los navíos contaban con tablas e instrumentos para calcularla.

Cierto día desde la *Descubierta* se divisa la *Atrevida* 57° al Oeste del NM. La declinación magnética era $\delta = -3°$. ¿Qué ángulo forma la visual DA con el NG? (figura 11).

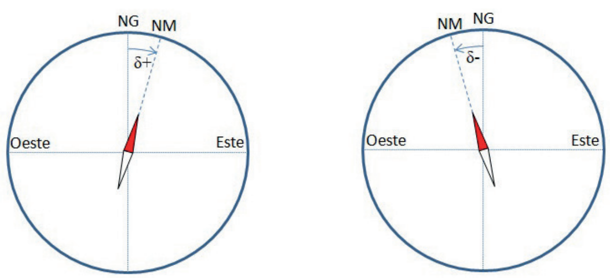


Figura 10

En otro momento desde D la dirección hacia A que marcaba la brújula era 55° Oeste. Efectuados los cálculos resultó $\delta = +2°$. ¿Qué ángulo formaba la línea DA con el NG?

2) Sabiendo que el tope del trinquete de la corbeta *Atrevida* medía 30 m y que al ángulo entre la horizontal y el tope, visto desde la *Descubierta*, era de 46'30'', ¿qué distancia separaba las dos corbetas? (figura 12).
3) Una vez identificado un accidente costero interesante (C) había que calcular la distancia DC desde la *Descubierta* hasta C. Para ello tenían que conocer la distancia entre los dos barcos y medir los ángulos β y γ.

Los datos obtenidos fueron estos: $\gamma = 53°$, $\beta = 65°$, DA = 2 km. Resuelve el triángulo DAC y calcula la distancia DC.

4) En esta situación se conocía el ángulo que formaba la visual DA con el NG: 60° oeste. ¿Qué ángulo formaba la visual DC con el NG?
5) Para hallar las coordenadas del punto C dibujamos el triángulo rectángulo DCC'. El lado DC' tiene dirección norte-sur y el CC' va de este a oeste. Ya conoces la hipotenusa DC. Calcula ahora los dos catetos.

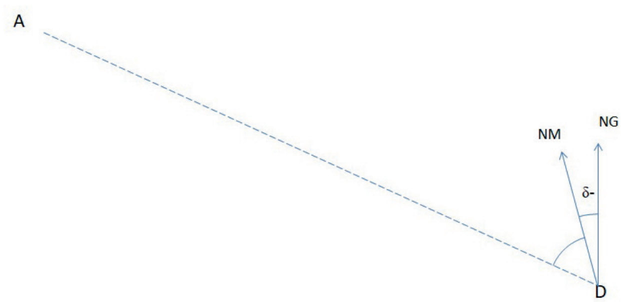


Figura 11

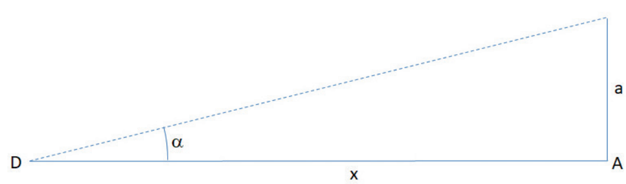


Figura 12

6) Ya tenemos situado el punto C respecto a la corbeta *Descubierta* (D): está al norte y al oeste de ella. Pero lo que tenemos son distancias y nos interesa calcular las coordenadas geográficas de C. Vamos primero con su latitud. El segmento DC' forma parte del meridiano que pasa por D. Todos los meridianos terrestres miden lo mismo: 40.000 km. Esa longitud abarca los 360° de toda la circunferencia. ¿Qué ángulo corresponderá a una distancia de 1 km? ¿Qué ángulo equivale a la distancia DC' sobre ese meridiano?

Si la latitud de D era 32° N, ¿cuál será la latitud φ de C, que es la misma que la de C'?

7) Para hallar la longitud geográfica de C tenemos la distancia CC', que está situada sobre el paralelo de C. Pero los paralelos terrestres no miden lo mismo que los meridianos. Eso solo pasa en el ecuador; conforme avanzamos hacia el norte (o hacia el sur) los paralelos van siendo más pequeños (figura 14).

7.1) Lo primero que tenemos que hacer es calcular el radio del paralelo terrestre que pasa por C, conociendo su latitud φ. La figura es un corte de la esfera terrestre: PN el polo norte, G el centro, GE el ecuador y CF el paralelo que pasa por C. R es el radio de la Tierra (R = 6.371 km) y r = CF es el radio del paralelo de latitud φ. Fíjate en el triángulo GCF y calcula r utilizando la latitud del punto C (calculada en el apartado anterior).

7.2) ¿Cuánto mide toda la circunferencia del paralelo de C? Ahora hay que repetir los cálculos de proporciones: si todos esos km que acabas de calcular corresponden a los 360° de ese paralelo, entonces ¿cuántos grados corresponderán a la distancia CC' (calculada en el apartado E)?

7.3) Si la longitud geográfica de la corbeta *Descubierta* era de λ = 110° al oeste de Cádiz, ¿cuál será la longitud geográfica del accidente costero C?

Soluciones:

1) 60°, 53°
2) x = 2.217,8 m
3) DC = 2.053 m
4) 7° Oeste
5) CC' = 250 m , DC' = 2.037,6 m
6) 1 km equivale a 0,009° = 32,4"; DC' = = 2,0376 km a 1' 6"; φ(C) = 32° 1' 6"

7.1) r = R·cos φ = 5.401,8 km
7.2) todo el paralelo mide 33.940,7 km; 1 km corresponde a 38"; CC' = 0,25 km equivale a 9,55"
7.3) λ(C) = 110° 0' 9,55" al Oeste del meridiano de Cádiz

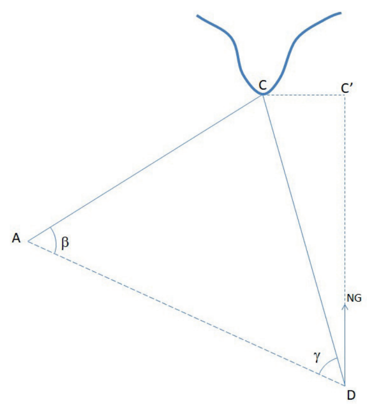


Figura 13

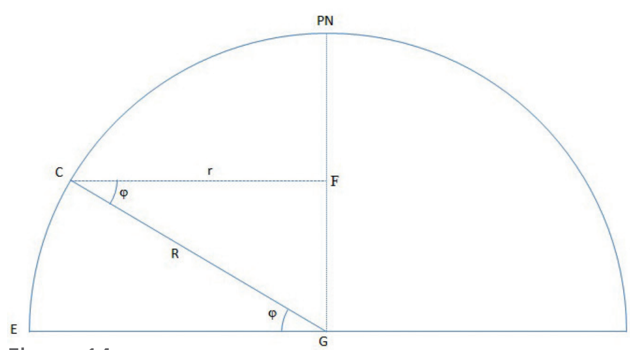


Figura 14

Logaritmos y cálculos

En la época de la expedición Malaspina no existían las calculadoras por lo que era muy importante simplificar al máximo los tediosos cálculos necesarios para los trabajos cartográficos. De lo que sí disponían era de tablas de las razones trigonométricas y de los famosos y terribles logaritmos. Estos comportaban una ayuda verdaderamente notable para hacer fácil lo que en apariencia iba a resultar muy complicado.

Vamos a ver un ejemplo en la resolución de un triángulo mediante el teorema de los senos. Y lo vas a hacer como los marinos de la expedición: a mano, sin calculadora. El triángulo a resolver es este:

A y D son las dos naves (la *Atrevida* y la *Descubierta*) y C es un punto destacado de la costa. Desde las dos corbetas se midieron los ángulos A = 33° 26' y D = 144° y la distancia entre ambas AD = 1.776 m. O sea que del triángulo DAC conocemos dos ángulos y un lado.

a) Calcula el valor del tercer ángulo, el C (sin calculadora).

El dato que interesa calcular es la distancia DC. Lo haremos utilizando el teorema de los senos:

$$\frac{DC}{sen\,A} = \frac{AD}{sen\,C} \quad [1]$$

En [1] la incógnita es DC y conocemos el lado AD y los ángulos A y C.

Para despejar DC tendríamos que hacer una división (AD/sen C) y luego una multiplicación (por sen A); los valores de senA o sen C son números con varios decimales y productos o divisiones con decimales son muy fastidiosos.

Pero si tomamos logaritmos en la igualdad [1] resulta:

$$\log DC - \log sen A = \log AD - \log sen\, C$$

¡Sólo hay sumas y restas! Ponemos ya los valores que conocemos:

$$\log DC - \log sen\, 33°\, 26' = \log 1.776 - \log sen\, 2°\, 34' \,[2]$$

En las tablas de que disponían aparecen estos valores:

$$\log sen\ 33°\, 26' = -0{,}258875$$
$$\log 1.776 = 3{,}249443$$
$$\log sen\, 2°\, 34' = -1{,}348899$$

sustituyendo en [2] nos queda:

$$\log\, DC + 0{,}258875 = 3{,}249443 + 1{,}348899$$

b) Haz la suma de la derecha (a mano)

Ahora ya despejamos log DC:

$$\log DC = 3{,}249443 + 1{,}348899 - 0{,}258875$$

Las restas con muchos decimales son incómodas. Los científicos de la expedición Malaspina usaban un pequeño truco: sumar 10 a cada lado de la igualdad. Así les quedaba:

$$10 + \log DC = 3{,}249443 + 1{,}348899 + \\ +(10 - 0{,}258875)\ [3]$$

Restar un número decimal a 10 es muy fácil, solo hay que poner lo que falta hasta 9 en todas las cifras menos en la última en la que ya se pone la resta a 10. Aplicando esta «receta», por ejemplo, $10 - 2{,}37052 = 7{,}62948$.

Completa ahora (seguimos a mano) las operaciones de la ecuación [3].

A ese resultado le restamos 10 y ya tenemos el valor del log DC. Solo les faltaba buscar en las tablas qué número tenía ese logaritmo. A ellos les dio 21.851.

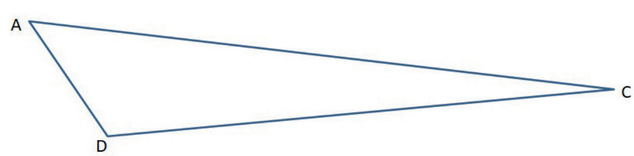


Figura 15

A partir de aquí ya puedes utilizar la calculadora.

c) Comprueba si los valores de las tablas que utilizaron eran correctos o si había algún error.
d) Haz, con la calculadora, estas cuentas:
  a) 10−7,2492
  b) 10−5,0047
  c) 10−3,7775681

Y comprueba que la «receta» funciona.

e) Resuelve, ahora directamente (sin utilizar logaritmos), la ecuación [1], calcula el valor de DC y compáralo con el obtenido en la expedición Malaspina.

Referencias bibliográficas

Biblioteca virtual de Defensa, <https://bibliotecavirtual.defensa.gob.es/BVMDefensa/es/inicio/inicio.do>, [En esta página web pueden consultarse multitud de documentos referentes a la expedición Malaspina].

Espinosa y Tello, J. (1809), *Memorias sobre las observaciones astronómicas,* Imprenta Real, Madrid. <http://www.cervantesvirtual.com/obra/memorias-sobre-las-observaciones-astronomicas-hechas-por-los-navegantes-espanoles-en-distintos-lugares-del-globo-tomo-ii/>.

Galera, A. (2010), *Las corbetas del rey. El viaje alrededor del mundo de Alejandro Malaspina,* Fundación BBVA, Madrid.

González, J. I. (2004), *«La Expedición Malaspina y la cartografía sobre Chile», Revista de Geografía Norte Grande,* n.º 31, 7-29.

Higueras, M.ª D. (1985), *Catálogo crítico de los documentos de la expedición Malaspina (1789-1794) del Museo Naval,* Museo Naval, Madrid. <https://bibliotecavirtual.defensa.gob.es/BVMDefensa/pacifico/es/consulta/registro.cmd?id=1668>.

Martínez-Cañavate, L. R. (1995), *La expedición Malaspina 1789-1794, tomo VI: trabajos astronómicos, geodésicos e hidrográficos,* Museo Naval, Madrid.

Oller, A. M. (2018), «Leyendo problemas antiguos. Dos ejemplos del siglo XVII español»*, Suma,* n° 88, 19-26.

Rebok, S. (2013), «Una experiencia reciente en el Pacífico: La expedición Malaspina 2010»*, Anuario de Estudios Americanos,* nº 70, 557-578.

Sampaio, H. R., e I. de L. Batista (2018), «Mathematics history and cognitive values on a didactic sequence Teaching trigonometry», *Journal of Research in Mathematics Education,* vol. 7, nº. 3, 311-332.

Tofiño de San Miguel, V. (1847), *Derrotero de las costas de España en el Mediterráneo y su correspondiente de África, para inteligéncia y uso de las cartas esféricas.* Imprenta Nacional, 3ª edición,1847.

Vicente Tofiño de San Miguel, <https://es.wikipedia.org/wiki/Vicente_Tofi%C3%B1o_de_San_Miguel>.

Antonio Arribas de Costa
<antarrcos@gmail.com>

1 Tal y como aparece en Martínez-Cañavate (1995, p.114) el cálculo de la distancia entre las dos corbetas se hacía midiendo desde una de ellas el ángulo entre la línea de flotación y el tope del trinquete de la otra, siendo conocida la altura del trinquete. El triángulo formado por el observador, la línea de flotación y el tope no es un triángulo rectángulo y, sin más datos, no se podría resolver. Haría falta saber, además, la altura del observador sobre el nivel del mar.
Los oficiales de la expedición contaban con tablas para hallar esa distancia en función del ángulo citado. El título de la tabla reza así: «Tabla de ángulos a que deben medirse las alturas de los topes de las corbetas a determinadas distancias, calculadas para de 100 en 100 pies de Burgos, en la suposición de que la altura del tope sobre el nivel del mar es 121 pies y la del observador 14 pies y de 300 en 300 pies para distancias mayores» (Martínez-Cañavate, 1995, p.114, nota 241).
El pie de Burgos mide 27,87 cm. La «vara de Burgos» era equivalente a tres pies (83,6 cm) y la «braza» a seis pies (1,671 m).

2 Aunque en las «hojas de cuentas» no aparece explícita la unidad utilizada doy por sentado que vuelve a tratarse de pies, en concreto del llamado «pie de Burgos». 1.776 pies equivalen a unos 500 m, una distancia que parece razonable entre dos barcos que navegan uno en pos del otro.