

# Mapas de c@lor con GeoGebra

Rafael Losada Liste

**Suma** núm. 102  
pp. 43-57

Artículo recibido en *Suma* en mayo de 2021 y aceptado en septiembre de 2021

Revisaremos las posibilidades que ofrece GeoGebra para crear mapas de calor (o color) y algunas de las aplicaciones a la visualización de relaciones matemáticas. Primero, resumiremos los métodos, algunos novedosos, que podemos usar para visualizar lugares geométricos. Después, describiremos la propiedad `ColorDinámico`, clave para construir un escáner automático que barra el plano generando el mapa de calor correspondiente a la relación deseada. Por último, trasladaremos el escáner del plano a cualquier otra superficie, ejemplificando su uso en la visualización de las funciones complejas.

**Palabras clave:** GeoGebra, superficies, lugares geométricos, mapas de color, mapas de calor.

Las figuras de este artículo proceden de construcciones realizadas por el autor y reunidas en el libro GeoGebra <<https://www.geogebra.org/m/cpuye9j7>>.

Estamos acostumbrados a ver e interpretar mapas de calor e isolíneas (*curvas de contorno* o *curvas de nivel*), como los que recogen las variaciones de altitud en topografía y de presión o temperatura en meteorología. En este artículo detallaremos cómo crear un mapa de calor (*heat map*) o mapa de color (*color map*) matemático con GeoGebra. ¿Cuál puede ser su interés?

**Heat maps with GeoGebra** // We will review the possibilities that GeoGebra offers to create heat (or color) maps and some of the applications to the visualization of mathematical relationships. First, we will summarize the methods, some novel, which we can use to visualize loci. Then, we will describe the `DynamicColor` property, key for constructing an automatic scanner that sweeps the plane generating the heat map corresponding to the desired relationship. Finally, we will transfer the scanner from the plane to any other surface, exemplifying its use in the visualization of complex functions.

**Keywords:** GeoGebra, surfaces, loci, color maps, heat maps.

Para contestar a esta pregunta, imaginemos que poseemos un método general para visualizar cualquier relación o propiedad matemática, incluyendo las tradicionales gráficas de funciones, curvas algebraicas, lugares geométricos, etc. pero también permitiendo la representación de relaciones más complejas, difíciles de recoger mediante una fórmula.

Por ejemplo, pensemos que tenemos dos puntos en el plano y estamos interesados en averiguar desde qué posiciones la distancia al punto más lejano es el doble

que la distancia al más cercano. Tal vez podamos resolver esta cuestión usando algunos procedimientos geométricos o algebraicos elementales, obteniendo dos circunferencias (puntos blancos en la figura 1, izquierda). Pero si elevamos el número de puntos, el problema matemático subyacente se complica notoriamente (figura 1, derecha) y no es trivial de modelar —no digamos ya de representar. Sin embargo, como veremos en este artículo, la obtención de ambas figuras (la «fácil» y la «difícil») es igual de sencilla aplicando el método general que describiremos.

Este método será, por tanto, particularmente interesante para explorar la más amplia gama de relaciones matemáticas entre objetos geométricos, tanto en la enseñanza como en la investigación, por la independencia conceptual del protocolo de visualización que contempla este método respecto de la complejidad de la naturaleza o del número de los objetos implicados en la relación que se trata de estudiar.

Para enmarcar este tipo de gráficas, antes resumiremos los seis métodos disponibles para la visualización de un lugar geométrico. Los dos últimos resultan especialmente interesantes, tanto por lo novedoso como por lo atractivo, pero será otro, como veremos, el que desarrollaremos en profundidad.

Compararemos estos métodos mediante un ejemplo sencillo:

Queremos visualizar la gráfica de la parábola de foco  $F(0,1)$  y directriz la recta  $r$  que pasa por los puntos  $(0,-1)$  y  $(1,0)$ .

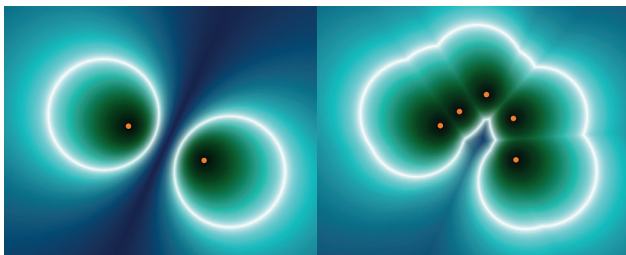


Figura 1. Mapas de calor de la misma relación, partiendo de 2 y de 5 puntos

## Método 1: comando específico

Podemos usar directamente la herramienta o el comando Parábola. Pero el número de comandos de GeoGebra es limitado, por lo que este procedimiento solo está disponible para unas pocas curvas básicas.

## Método 2: punto genérico

Construimos un punto que genere el lugar geométrico. Tomando un punto arbitrario de la directriz, creamos dos rectas: la perpendicular (azul) a la directriz por ese punto y la mediatriz entre ese punto y el foco. El punto que genera la parábola será la intersección de ambas rectas (figura 2). Ahora basta usar la herramienta o el comando LugarGeométrico. Pero no siempre es tan sencillo construir de modo similar un lugar geométrico (por ejemplo, al sustituir el foco y la directriz por sendas semirectas).

## Método 3: tanteo

Cogemos un punto libre  $P$ , calculamos las distancias de  $P$  al foco y a la directriz, y movemos  $P$  hasta encontrar posiciones equidistantes (figura 3). Localizar uno de los puntos —el vértice de la parábola— es sencillo, pero la posición del resto de puntos no es obvia. Es un trabajo muy didáctico, si bien después de varios ejercicios llega a resultar tedioso.

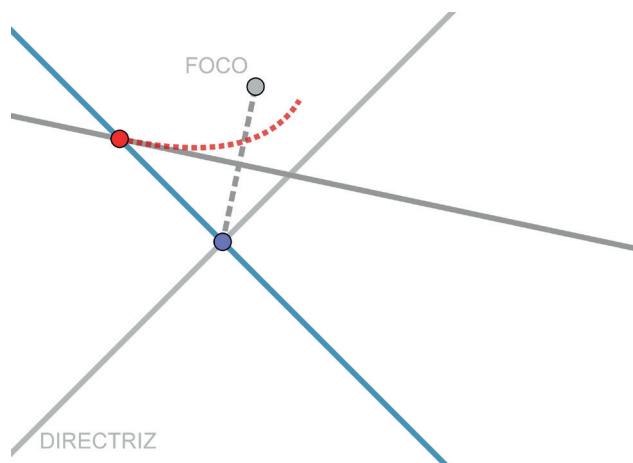


Figura 2. Construcción de un punto del lugar

### Método 4: ecuación

Introducimos la ecuación correspondiente a la condición que debe cumplir la parábola (o directamente la ecuación de esa cuadrática, si la conocemos). La diferencia de distancias al foco y a la directriz ha de ser nula:

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} - \text{abs}(-x + y + 1)/\sqrt{2} = 0$$

Pero para escribir esta ecuación necesitamos saber, además de la ecuación de la recta, las correspondientes fórmulas de la distancia entre dos puntos y la distancia de un punto a una recta. Esta es una limitación importante, especialmente en los niveles en los que el álgebra no se maneja con soltura.

### Método 5: ecuación con ayuda de la vista CAS o del comando EcuaciónLugar

Tanto este método como el siguiente son novedosos y especialmente atractivos desde el punto de vista didáctico.

En algunos casos particulares, pero muy frecuentes, la limitación del método anterior puede obviarse mediante la introducción del comando `Distancia((x,y), objeto)` en la Vista CAS, cuando el *objeto* sea un punto,

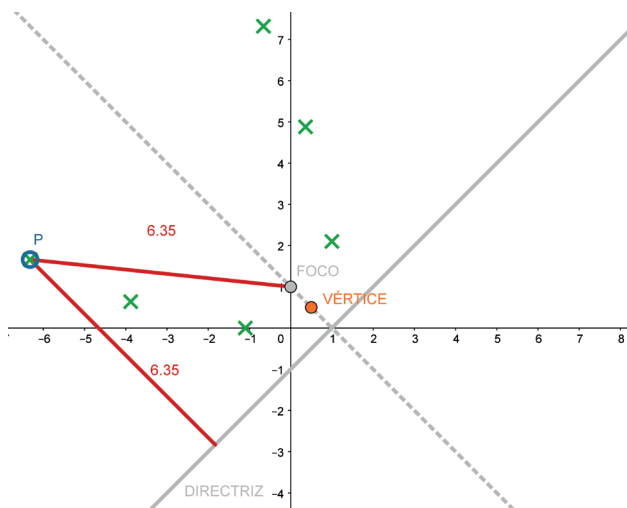


Figura 3. Explorando el terreno

una recta o una circunferencia, lo que proporciona automáticamente la ecuación de dicha distancia. En nuestro caso:

$$XF(x, y) := \text{Distancia}((x, y), F)$$

$$Xr(x, y) := \text{Distancia}((x, y), r)$$

Ahora basta introducir en la barra de entrada la expresión  $XF - Xr = 0$  para mostrar la curva implícita<sup>1</sup> correspondiente a esa ecuación (figura 4).

Si bien no siempre es posible definir funciones multivariantes (como  $XF$  y  $Xr$ ) en la vista CAS usando comandos de GeoGebra, este método cuenta con una gran ventaja en los niveles medios de aprendizaje, pues no es necesario conocer previamente las correspondientes fórmulas para establecer la ecuación del lugar.

Así, podemos introducir fácil e intuitivamente lugares como las cónicas y, además, explorar otros más complejos (cúbicas, cuárticas, etc.) como, por ejemplo,  $XF - Xr^2 = 0$ .

Alternativamente, podemos usar el comando `EcuaciónLugar` para dejar que GeoGebra intente encontrar la ecuación, a la vez que traza el lugar. Para ello, si tomamos un punto libre  $P$  y llamamos  $s$  al segmento que une  $P$  con el foco y  $t$  al segmento que une  $P$

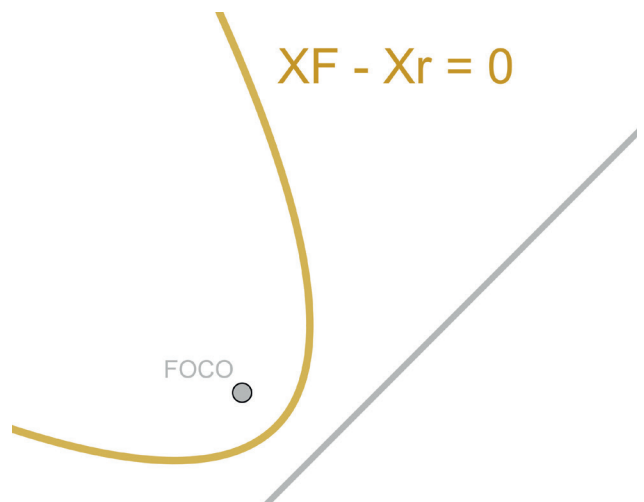


Figura 4. Curva implícita sin uso directo del álgebra

con su proyección en la directriz, basta introducir  $\text{EcuaciónLugar}(s==t, P)$  para obtener la parábola, o  $\text{EcuaciónLugar}(s==t^2, P)$ , etc., para otros lugares más complejos.

## Método 6: *offset* (curva paralela) con rastro activado

Ahora usaremos el rastro de rectas y circunferencias, junto con un deslizador y el comando  $\text{VectorNormalUnitario}$  (concepto algo avanzado, pero fácil de asimilar). El resultado es didáctico y vistoso.

- Creamos un deslizador  $d$ , entre 0 y 5, y le asignamos el valor 5.
- Creamos dos rectas azules paralelas (*offset*) a la recta  $r$ , a distancia  $d$ :

$\text{Traslada}(r, d\text{VectorNormalUnitario}(r))$ .

$\text{Traslada}(r, -d\text{VectorNormalUnitario}(r))$ .

- Creamos una circunferencia roja a esa misma distancia  $d$  del foco  $F$ :

$\text{Circunferencia}(F, d)$

(Si consideramos el foco  $F$  como una circunferencia de radio 0, podemos interpretar la anterior circunferencia como un *offset* de  $F$  a distancia  $d$ ).

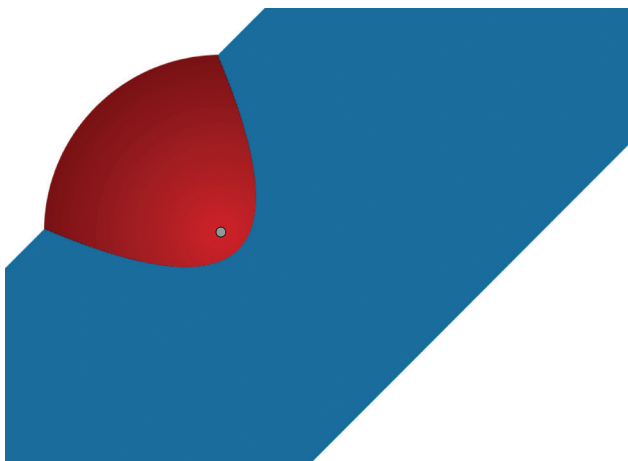


Figura 5. Técnica de *offset* con rastro activado

- Activamos el rastro de los tres objetos (rectas y circunferencia) y animamos el deslizador  $d$ .

A medida que el valor del deslizador varíe de 5 a 0, las rectas azules se aproximarán a la directriz al tiempo que la circunferencia roja se aproxima al foco. Al final del proceso, el rastro azul corresponderá a puntos más próximos a la directriz que al foco y el trazo rojo a puntos más próximos al foco que a la directriz. En la frontera de color se sitúa la parábola buscada (figura 5).

El inconveniente es que solo podemos usar este método con puntos, rectas, circunferencias u otras curvas en las que podamos calcular el vector normal en un punto arbitrario.

Por lo demás, es un método sencillo de implementar y a veces con resultados espectaculares, como muestra el diagrama de Voronoi<sup>2</sup> de 15 puntos de la figura 6, creado con el rastro de circunferencias de igual radio decreciente controlado por un único deslizador.

## El humilde tanteo

De los métodos anteriores, el que parece menos eficaz (didáctica aparte) es el tercero, el de aproximación por tanteo. Sin embargo, puede mejorarse hasta llegar a ser el más versátil de todos.

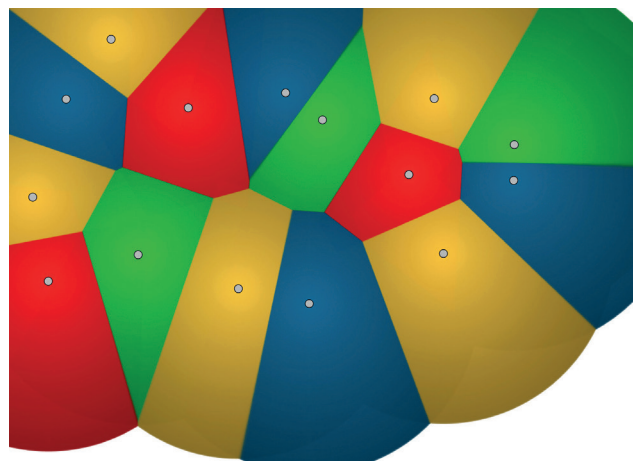


Figura 6. Diagrama de Voronoi de 15 puntos

Lo enriqueceremos paulatinamente. Para empezar, recordemos que podemos dotar de rastro de color al punto libre P que usamos para comparar la distancia al foco y a la directriz.

Al contrario que en el último método, donde hemos usado un color constante para las rectas y circunferencias, ahora nos conviene un color que varíe en función de la diferencia de distancias al foco y a la directriz. Esto se consigue gracias a la propiedad Color Dinámico, presente en todos los objetos gráficos de GeoGebra. Veamos pues, antes de continuar, las características de esta propiedad.

### El color dinámico de GeoGebra

El color dinámico consiste en una composición de color resultado de tres canales independientes que, combinados, otorgan color al objeto. Habitualmente<sup>3</sup> se reserva 1 byte (8 bits) para cada canal, lo que se traduce en que cada valor viene representado por un número entero entre 0 (byte 00000000) y 255 (byte 11111111).

Por su parte, GeoGebra no asigna un número entero entre 0 y 255 a cada canal de color de un objeto. En su lugar, usa un número decimal en el intervalo [0, 1]. Como podemos adivinar, basta dividir entre 255 cada valor de la anterior asignación para obtener esta otra. No debe extrañar que GeoGebra haya optado por el intervalo [0, 1] pues, además de ser más simple, coincide con el recorrido positivo de algunas funciones elementales (seno, coseno, *random*, probabilidad...).

Podemos elegir, para cada objeto, entre tres composiciones de color:

RGB. Cada canal (Red, Green, Blue: rojo, verde, azul) asigna el valor del color-luz primario correspondiente.

R	G	B	Síntesis	Nombre	R	G	B	Síntesis	Nombre
0	0	0		Negro	1	1	1		Blanco
1/3	1/3	1/3		Gris oscuro	2/3	2/3	2/3		Gris claro
1	0	0		Rojo	0	1	1		Cian
0	1	0		Verde	1	0	1		Magenta
0	0	1		Azul	1	1	0		Amarillo

Tabla 1

HSV. Cada canal (Hue, Saturation, Value: matiz, saturación, valor) asigna, respectivamente, el color-luz, su intensidad y su brillo. Para H y S constantes, al variar V entre 0 y 1, el color pasa de negro a la tonalidad saturada.

H	S	V	Síntesis	Nombre	H	S	V	Síntesis	Nombre
0	0	0		Negro	1	0	1		Blanco
1	0	1/3		Gris oscuro	1	0	2/3		Gris claro
1	1	1		Rojo	3/6	1	1		Cian
2/6	1	1		Verde	5/6	1	1		Magenta
4/6	1	1		Azul	1/6	1	1		Amarillo

Tabla 2

HSL. Cada canal (Hue, Saturation, Lightness: matiz, saturación, luminosidad) asigna, respectivamente, el color-luz, su intensidad y su luminosidad. Para H y S constantes, al variar L entre 0 y 1, el color va de negro a blanco, pasando (en 1/2) por la tonalidad saturada.

H	S	L	Síntesis	Nombre	H	S	L	Síntesis	Nombre
0	0	0		Negro	1	0	1		Blanco
1	0	1/3		Gris oscuro	1	0	2/3		Gris claro
1	1	1/2		Rojo	3/6	1	1/2		Cian
2/6	1	1/2		Verde	5/6	1	1/2		Magenta
4/6	1	1/2		Azul	1/6	1	1/2		Amarillo

Tabla 3

En el libro GeoGebra mencionado en la introducción se puede experimentar libremente con cada una de estas composiciones (figura 7).

Cuando en el canal se introduce un valor que no se encuentra entre 0 y 1, GeoGebra le reasigna un valor en ese intervalo, siguiendo la siguiente norma:

- 1) Si el valor numérico no está entre 0 y 2, toma su resto módulo 2.
- 2) Si el valor numérico «c» obtenido está entre 1 y 2, toma «2 - c».

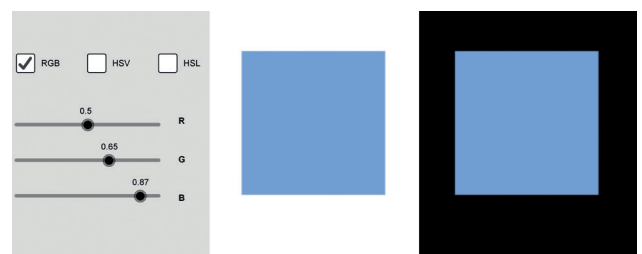


Figura 7. Las tres composiciones de color dinámico

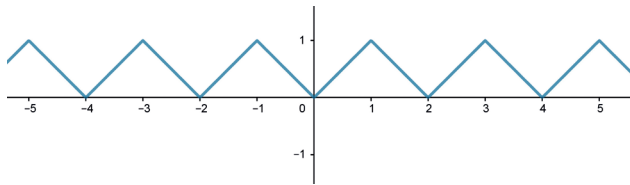


Figura 8. Gráfica de un canal de color dinámico

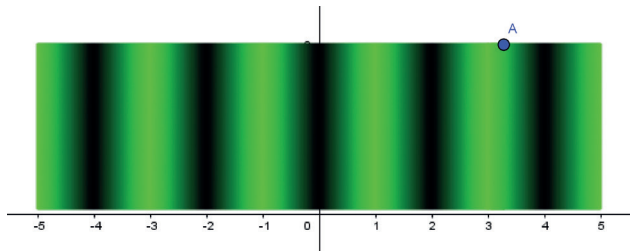


Figura 9. Periodicidad del canal verde

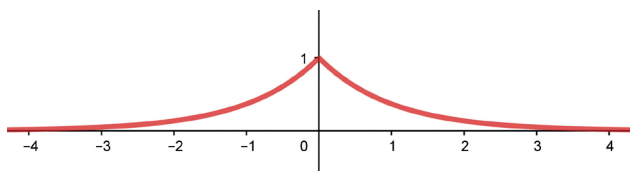


Figura 10. Gráfica de la función  $y = \exp(-\text{abs}(x))$

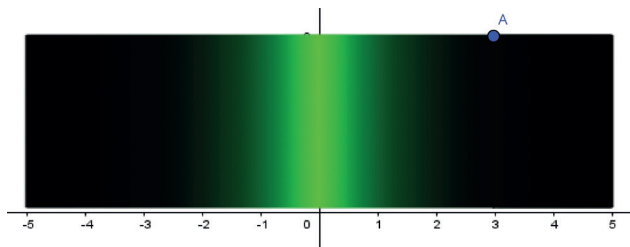


Figura 11. Eliminación de la periodicidad del canal verde

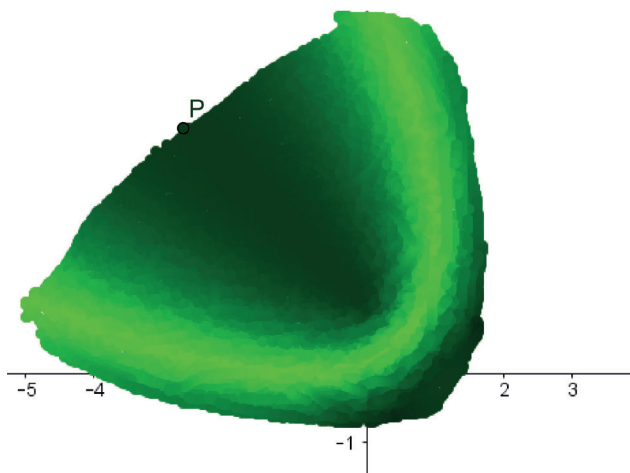


Figura 12. El color verde revela la parábola

O, si se prefiere, sigue la siguiente función (figura 8):

$$c(x) = 1 - \text{abs}(1 - x + 2 \text{ floor}(x/2))$$

El motivo de este comportamiento es evitar cambios bruscos de color entre dos valores numéricos próximos. Obsérvese el periodo 2.

Elegiremos la composición de color RGB. Creamos un punto A y un segmento vertical que lo contenga, al que asignamos el color dinámico Rojo: 0, Verde:  $x(A)$ , Azul: 0. Al activar el rastro del segmento y moverlo, obtenemos la distribución del canal verde (figura 9).

Para evitar la periodicidad, algo que desearemos frecuentemente para facilitar la interpretación gráfica, sustituimos la expresión  $x(A)$  por la expresión  $\exp(-\text{abs}(x(A)))$ , de modo que cuando  $x(A)$  valga 0, la exponencial valdrá 1. La gráfica de la función  $y = \exp(-\text{abs}(x))$  aparece en la figura 10.

Realizada la sustitución, obtenemos la distribución de color que muestra la figura 11.

## Rastro de color dinámico

Con estos procedimientos que acabamos de detallar, ya podemos asignar a nuestro punto libre P un color dinámico que dependa de la diferencia de distancias al foco y a la directriz. Esta es la clave que permitirá la creación de mapas de color con GeoGebra (Losada, 2009, 2010, 2014 y 2017).

De momento, usaremos solo el canal verde de la composición RGB. Asignamos el valor 0 a los otros dos canales y al verde la expresión:

$$\text{Verde: } \exp(-\text{abs}(\text{Distancia}(P, r) - \text{Distancia}(P, F)))$$

Cuando las distancias coincidan el exponente se hará 0, por lo que la expresión valdrá 1. Al desplazar P, después de activar su rastro, obtenemos la figura 12.

Es preferible que la expresión del canal no sea una función discreta, sino continua. No debemos intentar



visualizar solo los puntos exactamente equidistantes, sino un gradiente de intensidades según la cercanía a esa exactitud. Esta característica es *fundamental* para servirnos de este método como ayuda en la exploración de relaciones entre los distintos objetos implicados.

## Construcción del escáner de color dinámico

Para mejorar la imagen, reduciremos todo lo posible (1 píxel) el tamaño del punto P y lo renombramos como B1 (en breve descubriremos por qué). La expresión del canal verde queda así:

Verde:  $\exp(-\text{abs}(\text{Distancia}(\text{B1}, r) - \text{Distancia}(\text{B1}, F)))$

El lienzo sobre el que vamos a pintar medirá 12 x 8 unidades. Sea el punto C que hará de centro de ese lienzo. Situamos un punto B0 en la esquina superior izquierda del lienzo:

$$B0 = C + (-12, 8)/2$$

Añadiremos un deslizador y la hoja de cálculo. El deslizador permitirá animar automáticamente B1. La hoja de cálculo convertirá rápidamente B1 en una columna de 400 puntos Bi.

Creamos un deslizador  $t$ , de 0 a 12 con paso 1/50. Elegimos este paso porque en la vista gráfica estándar de GeoGebra cada unidad ocupa 50 píxeles. Asignamos a la velocidad del deslizador el valor 0.3 (que tal vez deba corregirse, según sea el resultado, pues depende del procesador).

En la hoja de cálculo, asignamos  $A1=1, A2=2$ . Seleccionando ambas celdas y arrastrando hasta la fila 400, obtenemos los valores auxiliares  $Ai = i$ , entre 1 y 400. Ahora definimos:

$$\begin{aligned} B1 &= B0 + (t, (-A1) / 50) \\ C1 &= \text{Distancia}(B1, r) \\ D1 &= \text{Distancia}(B1, F) \end{aligned}$$

En el color dinámico de B1, sustituimos la expresión del canal verde por:

$$\text{Verde: } \exp(-\text{abs}(C1 - D1))$$

Basta arrastrar B1, C1 y D1 hasta B400, C400 y D400 para obtener la columna de 400 puntos que constituye el escáner. Por último, animamos el deslizador (figura 13).

En lo sucesivo se sobrentiende que, después de actualizar la primera fila de la hoja de cálculo, se actualizan todas las demás filas.

## Policromía

Podemos asignar diferentes expresiones algebraicas a cada canal de color. Esto convierte al escáner en una herramienta a medio camino entre matemáticas y arte, permitiéndonos exhibir nuestro personal sentido estético. Por ejemplo, podemos asignar a B1 el color dinámico (figura 14):

$$\text{Rojo: } \exp(-\text{abs}(C1 - D1) D1 / C1)$$

$$\text{Verde: } \exp(-\text{abs}(C1 - D1))$$

$$\text{Azul: } \exp(-\text{abs}(C1 - D1) C1 / D1)$$

Observemos que cuando las distancias de B1 al foco y a la directriz sean iguales, el valor será 1 en todos los canales, es decir, el rastro dejado por B1 será de color blanco. Las expresiones anteriores destacan no solo la parábola sino también su foco y directriz.

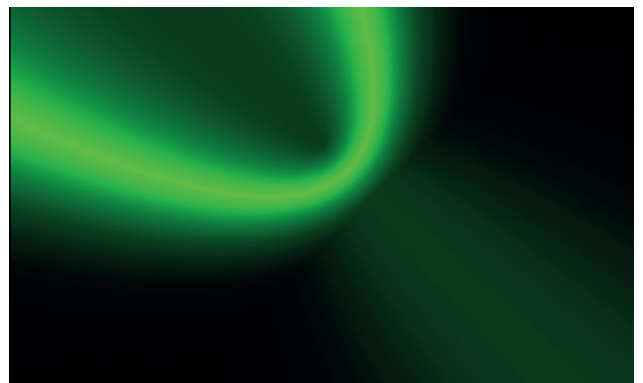


Figura 13. Mapa de color monocromo

La policromía, además de mejorar la estética, es especialmente útil cuando queremos remarcar otras características de las expresiones usadas, como sus signos (figura 15):

$$\begin{aligned} \text{Rojo: } & C1 \geq D1 \\ \text{Verde: } & \exp(-\text{abs}(C1-D1)) \\ \text{Azul: } & C1 \leq D1 \end{aligned}$$

O bien, cuando deseamos establecer hasta tres condiciones independientes, una para cada canal de color (figura 16):

$$\begin{aligned} \text{Rojo: } & \exp(-\text{abs}(C1^2-D1)) \\ \text{Verde: } & \exp(-\text{abs}(C1-D1)) \\ \text{Azul: } & \exp(-\text{abs}(C1-D1^2)) \end{aligned}$$

Vemos una cuártica roja, la anterior parábola verde y una circunferencia azul.

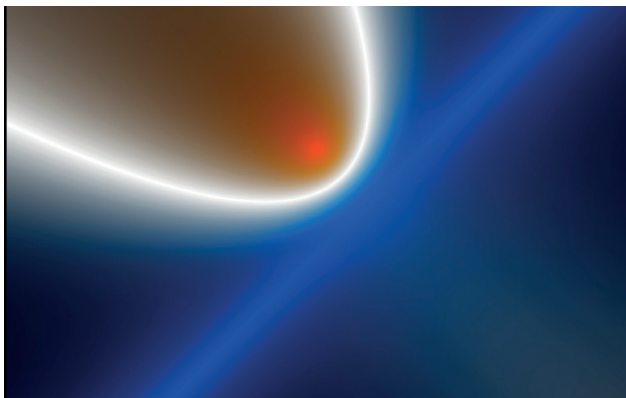


Figura 14. Mapa de color. El color blanco revela la parábola

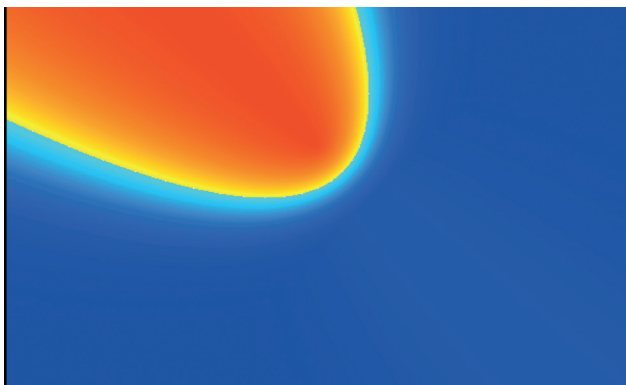


Figura 15. Usando desigualdades (o signos)

## Ajuste del gradiente de color

Con frecuencia desearíamos poder ajustar la densidad del gradiente de color de la curva resaltada por el escáner. Si es poco denso, el lugar puede quedar impreciso, mientras que si es demasiado denso tal vez sea difícil distinguir la curva.

Para este ajuste, basta añadir un factor  $k$  al exponente de las expresiones RGB:

$$\begin{aligned} \text{Rojo: } & \exp(-k \text{ abs}(C1-D1) D1/C1) \\ \text{Verde: } & \exp(-k \text{ abs}(C1-D1)) \\ \text{Azul: } & \exp(-k \text{ abs}(C1-D1) C1/D1) \end{aligned}$$

Ensayamos el escáner para diferentes valores de  $k$  (figura 17) y elegimos el que prefiramos.

## Ajuste del zum

El escáner deja de funcionar bien si realizamos zum sobre la vista gráfica. En tal caso, debemos corregir el efecto del zum reajustando algunos valores.

Primero definimos un número, llamémosle  $z_m$ , que recoja el valor aplicado al zum de acercamiento (que será de alejamiento cuando  $z_m$  valga entre cero y uno) y re-situamos, si así lo deseamos, el punto central  $C$  del lienzo.

Después, reajustamos los valores del deslizador  $t$ . Como antes iba de 0 a 12 con paso  $1/50$ , ahora irá de 0 a  $12/z_m$  con paso  $1/(50 z_m)$ .

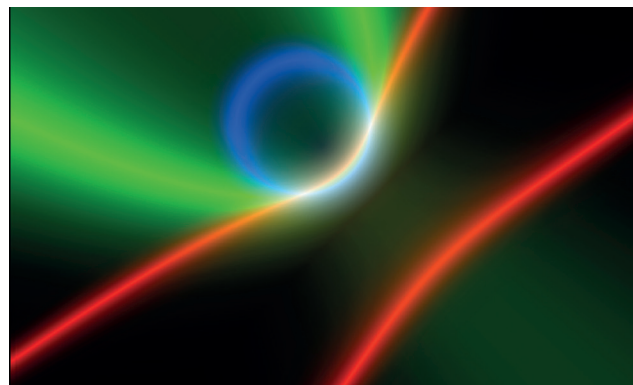


Figura 16. Revelando tres lugares independientes



Por último, redefinimos B0 y B1 como:

$$B0 = C + (-12, 8)/(2zm)$$

$$B1 = B0 + (t, -A1/(50zm))$$

Así, cada vez que realicemos un zum, como un alejamiento en un factor 10 (figura 18), bastará ajustar la constante  $zm$ .

### Isolíneas

Modificaremos los canales Rojo y Azul para crear isolíneas (figura 19), es decir, líneas que unan los puntos donde la diferencia de distancias al foco y a la directriz sea la misma, en valor absoluto. Para ello, introducimos la función *floor*:

Rojo:  $\exp(-5 \text{ abs}(C1-D1) D1/C1)$   
 Verde:  $\exp(-5 \text{ abs}(C1-D1) C1/D1)$   
 Azul:  $\exp(-2 (\text{abs}(C1-D1) - \text{floor}(\text{abs}(C1-D1))))$

Las isolíneas son especialmente útiles para resaltar un conjunto discreto de puntos. Veamos un ejemplo de lugar geométrico y otro de expresión algebraica.

En el primer ejemplo, partimos (agradeciendo al profesor Tomás Recio esta propuesta) del resultado de que en todo triángulo la razón entre su perímetro y el radio de su circunferencia circunscrita es menor o igual que tres veces la raíz cuadrada de tres. Queremos averiguar en qué tipo de triángulos se consigue la igualdad.

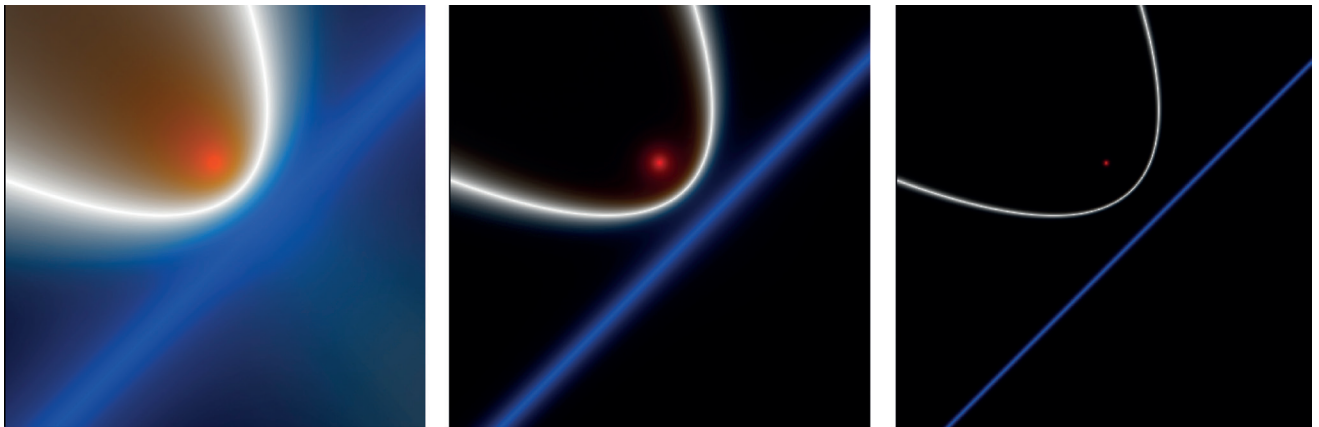


Figura 17. Diferentes ajustes del gradiente de color (k=1, k=5, k=25)

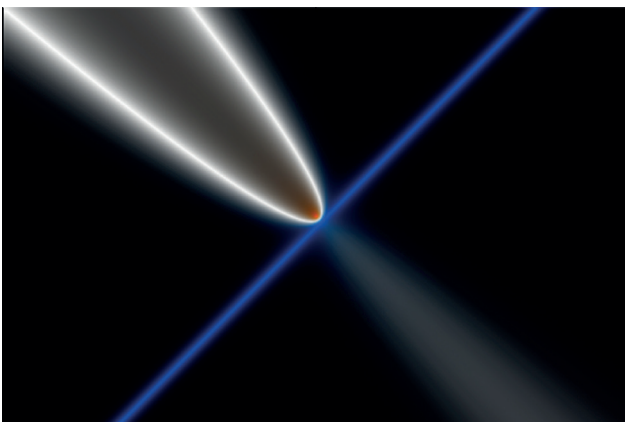


Figura 18. Mapa de color de la parábola, con k=1 y zm=0.1

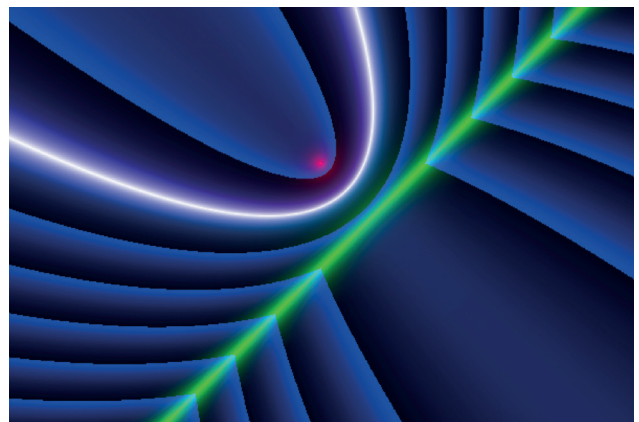


Figura 19. Familia de isolíneas a partir de la parábola

Sin pérdida de generalidad, podemos fijar dos vértices en los puntos (0,0) y (1,0). Cada punto  $B_i$  de nuestro escáner hará de tercer vértice. En la hoja de cálculo, definimos  $C1$  como el perímetro,  $D1$  como el radio de la circunferencia circunscrita y  $E1$  como la igualdad buscada:

$$\begin{aligned} C1 &= \text{abs}(B1-A) + \text{abs}(B1-B) + c \\ D1 &= \text{abs}(\text{CentroTriángulo}(A, B, B1, 3)) \\ E1 &= 3 \sqrt{3} D1 - C1 \end{aligned}$$

y establecemos como color dinámico de  $B1$ :

$$\begin{aligned} \text{Rojo: } & \exp(-5 \text{ abs}(E1)) \\ \text{Verde: } & \exp(-50 \text{ abs}(E1)) \\ \text{Azul: } & \exp(-2 (\text{abs}(\ln(\text{abs}(E1)) + 1) - \\ & \text{floor}(\text{abs}(\ln(\text{abs}(E1)) + 1)))) \end{aligned}$$

Observemos que, con el objeto de separar mejor las isolíneas, en el canal azul hemos elegido la expresión  $\ln(\text{abs}(E1)) + 1$  en vez de  $E1$ .

La figura 20 evidencia que la igualdad se consigue solo en el caso de los triángulos equiláteros.

Como ejemplo de expresión algebraica, consideremos el polinomio de grado 4:

$$p(x, y) = 2x^2y^2 - 2xy^2 + 8x^2 + 25y^2 - 56xy - 8x + 28y + 100$$

que solo se anula en un par de valores  $(x, y)$  reales. Si introducimos en GeoGebra la expresión:

$$\text{ec: } p(x, y) = 0$$

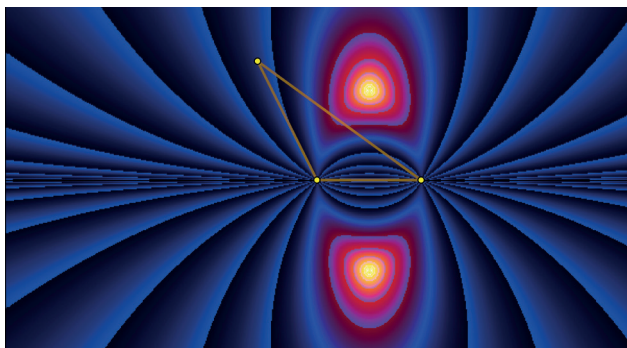


Figura 20. Los dos puntos que cumplen la igualdad

no aparece nada en la vista gráfica. Sin embargo, al pasar el escáner con la siguiente composición RGB, emergen las dos raíces reales del polinomio (figura 21):

$$\begin{aligned} \text{Rojo: } & \exp(-5 \text{ abs}(C1)) \\ \text{Verde: } & \exp(-2 \text{ abs}(C1)) \\ \text{Azul: } & \exp(-\text{abs}(C1 - \text{floor}(C1))) \\ & \text{donde } C1 = \ln(\text{abs}(p(B1)) + 1) \end{aligned}$$

## Versatilidad del escáner

El escáner no crea un nuevo objeto de GeoGebra, solo muestra un gráfico estático; cada vez que cambien las condiciones iniciales deberemos volver a pasar el escáner. Sin embargo, como adelantábamos, es el más versátil de todos los métodos gráficos, ya que no requiere ni la creación de un punto generador del lugar ni ningún tipo de expresión algebraica. Veamos dos ejemplos de esta versatilidad.

Dado un triángulo  $ABC$ , buscamos los puntos desde donde se vea cada par de lados del triángulo bajo el mismo ángulo. Los tres lugares obtenidos, cada uno con su color correspondiente, solo se cortarán en aquel punto en que los tres lados se vean con el mismo ángulo (punto isogónico). Si todos los ángulos del triángulo son menores que  $120^\circ$ , este punto caerá en el interior del triángulo y coincidirá con el punto de Fermat (figura 22):

$$\begin{aligned} \text{Rojo: } & \exp(-10 \text{ abs}(\text{Ángulo}(A, B1, B) - \\ & \text{Ángulo}(B, B1, C))) \end{aligned}$$

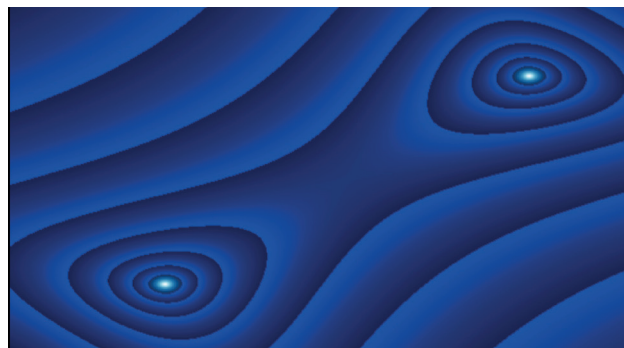


Figura 21. Valores reales de la curva  $p(x, y) = 0$

Verde:  $\exp(-10 \text{ abs}(\text{Ángulo}(B, B1, C) - \text{Ángulo}(C, B1, A)))$   
 Azul:  $\exp(-10 \text{ abs}(\text{Ángulo}(C, B1, A) - \text{Ángulo}(A, B1, B)))$

En el siguiente ejemplo partimos de cinco puntos dados. El lugar (figura 23) consiste en el conjunto de puntos cuya suma (C1) de distancias a los tres puntos blancos es la misma que la suma (D1) de distancias a los dos puntos naranjas. La composición de color que hemos usado en esta ocasión es:

Rojo:  $\exp(-\text{abs}(C1 - D1)) (C1 < D1)$   
 Verde:  $\exp(-\text{abs}(C1 - D1)) (C1 \geq D1)$   
 Azul:  $\exp(-\text{abs}(C1 - D1 - \text{floor}(C1 - D1))) (C1 \geq D1)$

En la región roja se cumple  $C1 < D1$ . La igualdad se alcanza en el borde de esa región.

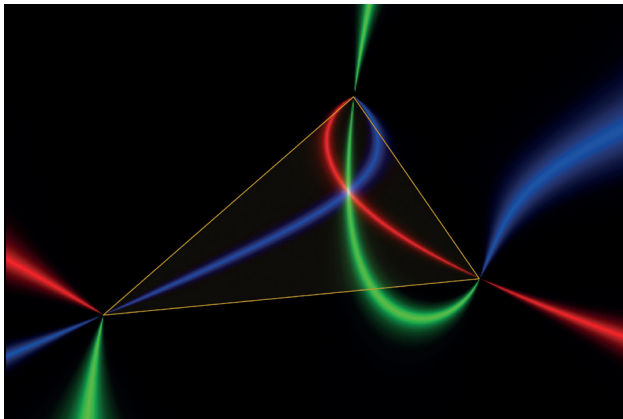


Figura 22. Punto de Fermat

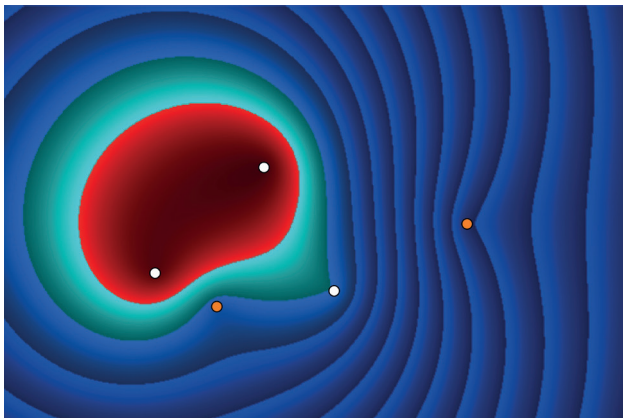


Figura 23. Equilibrio entre sumas

## Números complejos

GeoGebra apenas distingue entre un número complejo y su afijo (punto que representa al número complejo en el plano complejo), por lo que podemos usar el escáner para representar números complejos con la misma facilidad que representamos puntos del plano.

Por ejemplo, en la hoja de cálculo creamos la sucesión:

$$C1 = \$B1 + B12$$

$$D1 = \$B1 + C12$$

y así hasta T1. Ahora asignamos a B1 la composición de color:

Rojo:  $\exp(\text{abs}(L1)) (\text{abs}(T1) < 2)$   
 Verde:  $\exp(\text{abs}(P1)) (\text{abs}(T1) < 2)$   
 Azul:  $\exp(\text{abs}(T1)) (\text{abs}(T1) < 2)$

obteniendo la imagen de la figura 24, donde el color de cada afijo refleja la velocidad de convergencia del correspondiente número complejo.

Como GeoGebra permite exportar e importar imágenes, podemos usar las gráficas obtenidas para colocarlas de fondo de pantalla y explorar sobre ellas. En la figura 25 vemos otra imagen del conjunto de

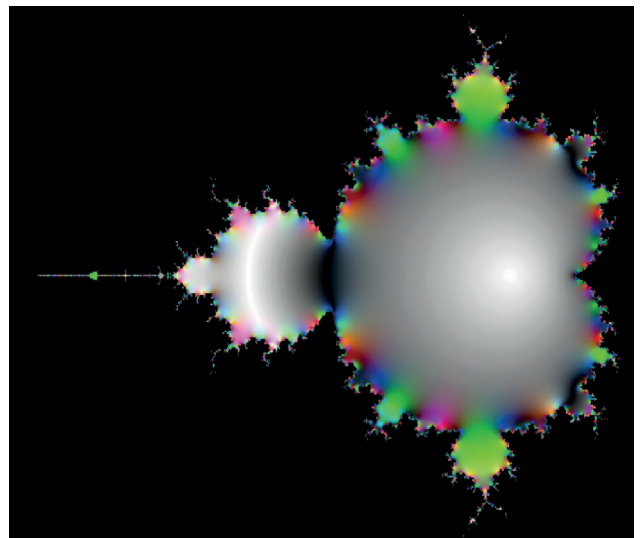


Figura 24. Conjunto de Mandelbrot

Mandelbrot, obtenida de modo similar a la anterior. De hecho, fue el primer mapa de color (Losada, 2009) obtenido con GeoGebra.

La imagen se creó en marzo de 2009 y no es hasta junio del mismo año, con la aparición de la versión 3.2, cuando GeoGebra incorpora la hoja de cálculo. Así que el escáner era muy rudimentario, un único punto que barría la pantalla línea a línea. Solo le llevó cuatro horas... Sobre la imagen, una exploración dinámica de las espirales típicas del proceso de convergencia (ver el libro de GeoGebra mencionado en la introducción).

## Funciones complejas

Dado que el plano complejo tiene dos dimensiones (qué otra cosa se puede esperar de un plano), la gráfica de una función compleja de variable compleja queda sumergida en un espacio de cuatro dimensiones, espacio con el que estamos «poco familiarizados».

No obstante, existen diversos métodos para intentar una representación gráfica que ayude a visualizar el comportamiento de una función compleja. Exponemos a continuación los principales ya existentes y la nueva propuesta, aplicados a la misma función:

$$f(z) = (z-1) / (z^2 + 1)$$

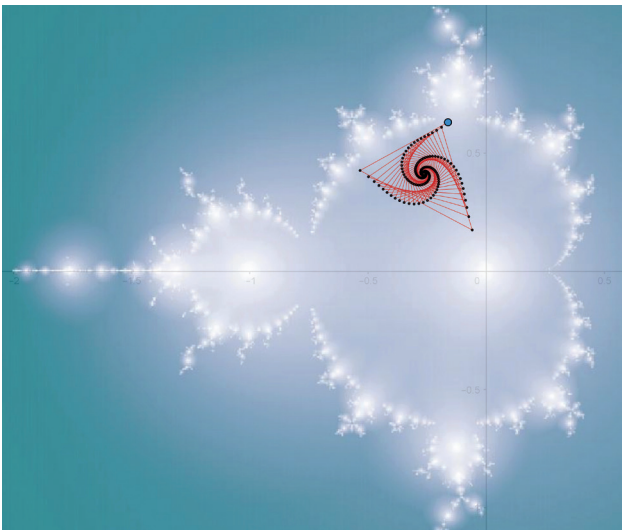


Figura 25. Exploración sobre el conjunto de Mandelbrot

## MÉTODO 1: SOLO LA IMAGEN DE LA FUNCIÓN, F(Z)

Representamos el efecto que produce la función compleja sobre un conjunto determinado, como por ejemplo una circunferencia. Lo más habitual, y es el método que usa GeoGebra, es elegir como conjunto del dominio los complejos cuyos afijos ocupan una cuadrícula plana (figura 26).

Interpretaremos mejor esta figura si diferenciamos la imagen de las horizontales de la cuadrícula de la imagen de las verticales (figura 27). Usando secuencias:

Secuencia(Curva(real(f(a + b i)), imaginaria(f(a + b i)), a, -10, 10), b, -10, 10)

Secuencia(Curva(real(f(a + b i)), imaginaria(f(a + b i)), b, -10, 10), a, -10, 10)

La primera secuencia son las imágenes (en rojo) de las rectas horizontales de la cuadrícula. La segunda secuencia, de las verticales (en verde).

## MÉTODO 2: PARTE REAL E IMAGINARIA (O MÓDULO Y FASE), INDEPENDIENTEMENTE

Gracias a la incorporación de la vista 3D, podemos representar en ella las superficies resultantes de separar la parte real y la parte imaginaria (o, alternativamente, el módulo y la fase) de la imagen de la función (figura 28).

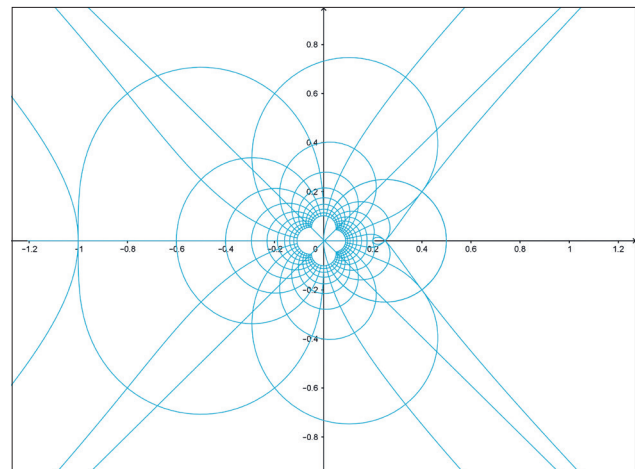


Figura 26. Imagen de la función  $f(z) = (z - 1) / (z^2 + 1)$



### MÉTODO 3: COLORACIÓN DE DOMINIO

Representamos en el plano tanto el módulo como la fase de la imagen  $f(z)$ ; el módulo mediante isolíneas y la fase mediante un código de color. Este procedimiento se denomina «coloración de dominio» (*domain coloring*; Farris, 1997).

Como la fase (o argumento principal) tiene periodicidad  $2\pi$ , conviene sustituir el código RGB por el de HSL, pues el canal H (matiz) produce el mismo color (rojo) en 0 y  $2\pi$ , lo que concuerda bien con la periodicidad de la fase. Para provocar la aparición de las isolíneas, usaremos el canal L (luminosidad).

Definimos las siguientes funciones auxiliares (Ponce, 2019) para el matiz y la luminosidad:

$$H(x, y) = 1/2 + (-\text{atan}2d(y, -x)) / (2\pi)$$

$$L(x, y) = 1/2 - (6H(x, y) - \text{floor}(18H(x, y)) / 3)$$

Abrimos la hoja de cálculo, definimos C1 y D1 como:

$$C1 = \text{real}(f(x(B1) + i y(B1)))$$

$$D1 = \text{imaginaria}(f(x(B1) + i y(B1)))$$

y asignamos la composición de color HSL a B1:

Matiz:  $H(C1, D1)$   
 Saturación: 1  
 Luminosidad:  $L(C1, D1)$

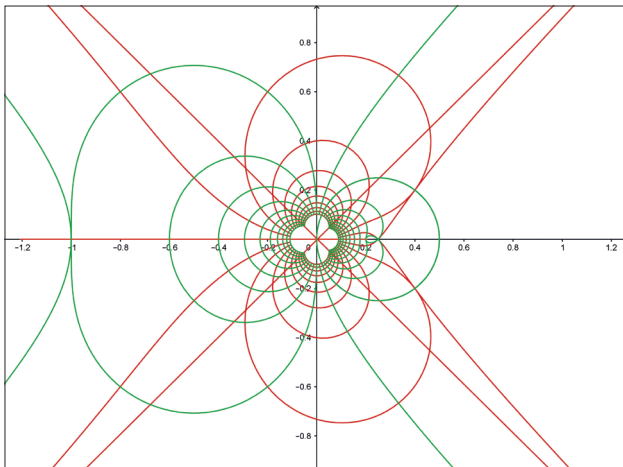


Figura 27. Imagen  $f(z)$  de horizontales (rojo) y verticales (verde)

Observemos (figura 29) los remolinos de color que se forman alrededor de la raíz y los polos de la función, aunque no se distingue bien cuál es cuál.

### MÉTODO 4: ESCÁNER 3D

Veamos un cuarto y novedoso método (Losada, 2021), combinación de los dos últimos métodos. Al igual que en el segundo método, representamos el módulo de la imagen de la función. Es decir, para cada complejo  $z = a + b i$ , representamos la superficie que contiene a los puntos  $(a, b, \sqrt{a^2 + b^2})$ .

Pero ahora someteremos cada uno de los puntos de esta superficie a la acción del escáner, que se encarga de colorearlos según sea su fase, como se ha hecho en el método de coloración de dominio. Esto nos ahorra las isolíneas del módulo, al tiempo que diferenciamos perfectamente raíces y polos.

Este tipo de representación ya ha sido implementado en el comando *colorplot* de CindyJS (Montag y Ri-

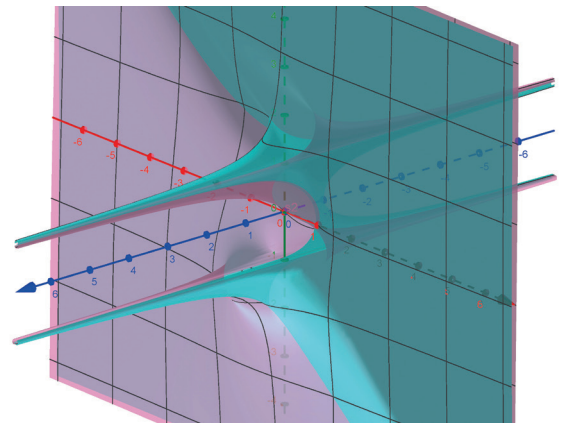


Figura 28. Parte real (verde) e imaginaria (rojo) de  $f(z)$

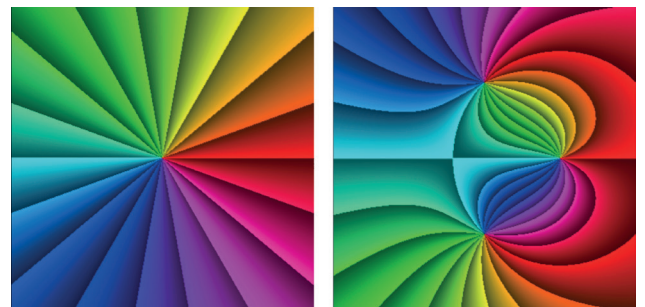


Figura 29. Dominio coloreado (izquierda) y su imagen  $f(z)$

chter-Gebert, 2018), el proyecto de código abierto complementario del programa (no gratuito) Cinderella. Sin embargo, GeoGebra carece, al menos en el momento de escribir estas líneas, de un comando similar, por lo que debemos usar el escáner para obtener este tipo de gráficas.

Para construir este escáner 3D necesitamos una columna más de la hoja de cálculo, que aloje los puntos de la superficie:

$$E1 = (x(B1), y(B1), \text{abs}(f(x(B1) + i y(B1))))$$

Estos puntos  $E_i$  sustituirán a los puntos  $B_i$  en el escáner. Solo tenemos que aplicarles el código de color correspondiente a la fase de la imagen  $f(z)$ :

Matiz:  $H(C1, D1)$

Saturación: 1

Luminosidad:  $1/2$

Aquí nos encontramos con un problema técnico. Como el procesado gráfico en la vista 3D de GeoGebra consume más recursos que la 2D, se bloquea al intentar pasar el escáner de 400 puntos. Nos vemos obligados a reducir el número de puntos a la mitad, aumentando su tamaño al doble. Perdemos definición, pero incluso así el resultado merece la pena.

La figura 30 muestra dos puntos de vista de la misma gráfica. A la izquierda, se aprecia la superficie que

representa el módulo de  $f(z)$ . A la derecha, el punto de vista ortogonal al plano XY, que coincide (sin las isolíneas del módulo, ahora obsoletas) con la imagen derecha de la figura 29.

## Conclusión: hacia el mapa dinámico de calor

El color aporta una nueva dimensión a una superficie, de modo que la información de un punto viene dada no solo por su posición, sino también por su color. Esta dimensión extra nos permite representaciones gráficas con gran densidad de información: los mapas de c@lor.

Podemos concebir un escáner de color  $12 \times 8$ , como el que hemos construido, como una matriz  $600 \times 400$  donde cada elemento es un vector que aporta, además de la posición del punto, los valores del color dinámico correspondiente a ese punto.

Sería deseable que GeoGebra, como ya están haciendo otros programas, incorporase un comando específico que permitiese definir y trabajar con esta matriz prescindiendo de la creación de los 200 o 400 puntos que integran el escáner, esto es, de la necesidad del uso de la hoja de cálculo y el deslizador. No solo se abreviaría todo el proceso, sino que se agilizaría su ejecución hasta el punto de poder crear y manipular mapas dinámicos de c@lor.

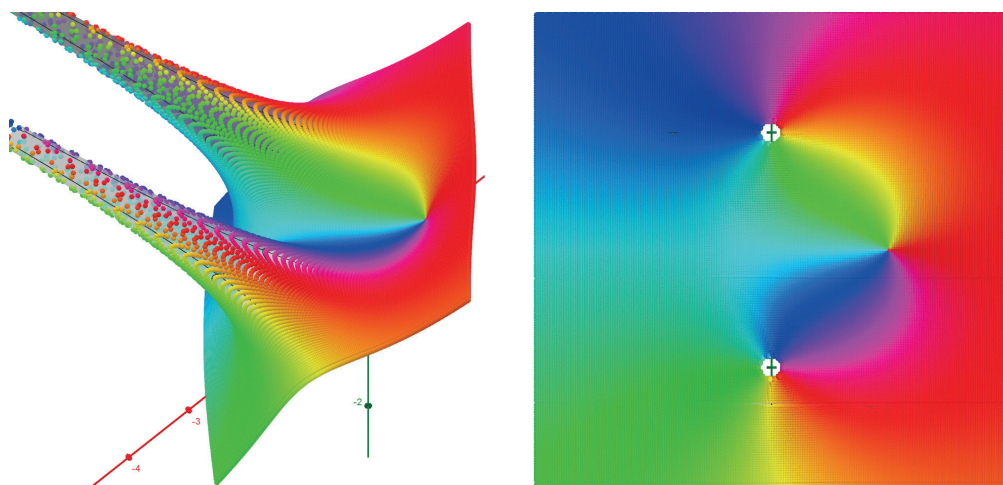


Figura 30. Escáner 3D. A la derecha, vista XY



## Referencias bibliográficas

- LOSADA, R., RECIO, T. y J. L. VALCARCE (2010), «On the automatic discovery of Steiner-Lehmus generalizations», *Proceedings of ADG 2010*, 171–174, J. Richter-Gebert y P. Schreck editores, München.
- LOSADA, R. (2014), «El color dinámico de GeoGebra», *La Gaceta de la RSME*, Vol. 17 (n° 3), 525–547.
- PONCE, J. C. (2019), «Representación de funciones complejas con GeoGebra usando el método de dominio coloreado», *Números*, Vol. 101, 85–101, <<http://www.sinewton.org/numeros>>
- FARRIS, F. (1997), *Visualizing complex-valued functions in the plane*, <[http://www.maa.org/pubs/amm\\_complements/complex.html](http://www.maa.org/pubs/amm_complements/complex.html)>.
- LOSADA, R. (2009), *Magic color: Ghost constructions*, GeoGebra User Forum, <<https://help.geogebra.org/topic/magic-color-ghost-constructions>>.
- (2017), *Color dinámico (libro de GeoGebra)*, <<https://www.geogebra.org/m/d6j2nhYG>>.
- (2021), *Variable compleja (libro de GeoGebra)*, <<https://www.geogebra.org/m/edby4fdr>>.
- MONTAG, A. y J. RICHTER-GEBERT (2018), *Bringing Together Dynamic Geometry Software and the Graphics Processing Unit*, <<https://arxiv.org/pdf/1808.04579>>.

---

### Rafael Losada Liste

IES de Pravia

<[rafael.losada@gmail.com](mailto:rafael.losada@gmail.com)>

1 GeoGebra usa algoritmos numéricos para crear esta curva implícita, por lo que a veces pueden faltar pequeños trazos.

2 Diagramas de Voronoi <[https://es.wikipedia.org/wiki/Pol%](https://es.wikipedia.org/wiki/Pol%C3%ADgonos_de_Thiessen)

[C3%ADgonos\\_de\\_Thiessen](https://es.wikipedia.org/wiki/Color)>

3 Teoría del color <<https://es.wikipedia.org/wiki/Color>>