En 9 caben todos. Un límite a cámara lenta

Montserrat Prieto Morera

SUMA+ núm. 103
pp. 11-19

Artículo recibido en septiembre de 2020 y aprobado en junio de 2022

Comprender la existencia de números irracionales trascendentes, o no claramente algebraicos, es una tarea axiomática en la enseñanza secundaria y el bachillerato. En estos niveles, solo procede generalizar varios ejemplos y, en ciertos casos, recurrir al apoyo histórico. Con el uso de buenos programas informáticos aparecen numerosas estrategias plásticas y especialmente motivadoras. Las más interesantes son las que convierten al alumno en el actor principal de su aprendizaje. Un número irracional, con alta probabilidad de trascendencia, cuya justificación completa excede a la enseñanza secundaria, pero que podemos abordar en las aulas con un buen software.

Palabras clave: Constantes, Geometría, Irracional, Recurso Didáctico, Motivación.

They all fit in 9. A limit in slow motion // Understanding the existence of transcendent, or not clearly algebraic, irrational numbers is an axiomatic task in middle and high school. At these levels, it is only appropriate to generalize several examples and, in some cases, to draw on historical support. With the use of good computer programs numerous accessible and specially motivating strategies appear. The most interesting are those that make the students the main actors in their own learning. An irrational number with high likelihood of being transcendent, whose full justification exceeds secondary education, can be approached in classrooms with a good computer package.

Keywords: Constants, Geometry, Irrational, Didactic Resource, Motivation.

Los problemas pequeños o grandes de la matemática son y han sido siempre retos, la mayoría de las veces trabajosos, pero indudablemente han muy sido adictivos gracias a la fascinación de una ciencia que quiere rozar lo perfecto. A parte de admirar el trabajo de los grandes pensadores y reconocer su esfuerzo, inteligencia y, en muchos casos, grandeza, nuestra ciencia tiene una vocación eterna: si algo está demostrado, siempre será una piedra valiosa sobre la que construir o tener muy en cuenta en posteriores desafíos. Tremendo.

A una escala más modesta los que la explicamos sabemos que, curiosamente, tiene una innegable atracción por la belleza (aquí estoy viendo la sonrisa displicente de mis alumnos, o veladamente una socarrona carcajada al darme la vuelta…). Pues ¡sí!, hay demostraciones, todas geniales, que son farragosas o sencillas, agradables o tediosas, sorprendentes o aburridas, pero algunas decididamente son bellas…, es decir sencillas, agradables y sorprendentes. Muchas veces la belleza se consigue en el futuro, cuándo se cierra el círculo de la perfección y el conocimiento, es decir con mucho trabajo de muchos sin olvidar el empeño y ciertas dosis de genialidad.

Muchos sencillamente admiramos, tratamos de comprender y estamos atrapados en resultados que nos fascinan por diferentes razones. Siempre están ahí, retándonos, divirtiéndonos, ayudándonos a conciliar el sueño y muchas veces enseñándonos a «tirar la toalla» porque un nuevo hallazgo acaba de demostrar que nuestro planteamiento era erróneo o que se ha conseguido cerrar el círculo de la perfección correspondiente.

He profundizado en un problema ya resuelto, he procurado hacerlo más asequible para utilizarlo en el aula, lo he explorado con la ayuda de GeoGebra y os lo cuento… me atrapó hace tiempo. ¿A que es bonito?

Los inicios

Estuve suscrita durante un tiempo a la revista *American Monthly;* en aquellos tiempos buscaba cualquier excusa para auto-forzarme a trabajar en inglés. El artículo de R.S.Pinkham, «Mathematics and Modern Technology»[1] me interesó, en principio, porque trataba de estimular el uso de las tecnologías de la información (entonces eran modernas) para conseguir llegar más allá en la enseñanza de la matemática. Es decir, partiendo de tres ejemplos sobre series infinitas convergentes, se preguntaba precisamente cómo conseguir mejorar la expresión decimal de la suma. Para ello utilizaba métodos que permitían aprovechar las potencialidades de un buen programa informático. Para la matemática teórica clásica, cuyo soporte eran las máquinas de cálculo, este era un asunto menor. Si alguien necesitaba un límite, podía disponer de suficientes teoremas, paciencia y calculadoras programables para lograrlo. El primer ejemplo llamado «una construcción Kepleriana» atrajo más mi interés por su carácter geométrico y porque definía un irracional entonces desconocido para mí. Utilizando el criterio integral, operación que realizaba con un software adecuado, acotaba el límite y conseguía mejorar el número de sus decimales correctos.

La mencionada «construcción Kepleriana» aunaba las formas planas perfectas con el número irracional, el 8,700036625… No hay nada sorprendente en que encontremos irracionales, están por todas partes y hay muchos más que racionales. Aparte de la novedad, me sorprendía que no tuviera nada que ver con π u otras constantes conocidas. De forma intuitiva la construcción asemejaba al proceso de inscribir, de forma creciente, los infinitos *n*-ágonos regulares en una circunferencia, solo que en este caso aumentando el radio de la misma, pero cada vez en menor medida y cada vez más despacio… luego el proceso tendría fin. Claramente multiplicando infinitos cosenos (aquí me estoy adelantando… lo sé) nada racional debe esperarse y al estar la convergencia teóricamente asegurada, llegaremos a una constante (es decir hay límite) y es, además, un número probablemente trascendente[2 y 7].

Ya he comentado que el artículo utilizaba este ejemplo con un fin preciso pero a mi me suscitó otras cuestiones. Como profesora de Enseñanza Secundaria estaba acostumbrada solamente a justificar a los alumnos la existencia de irracionales algebraicos[3] como … o el número áureo. Respecto a los trascendentes, los estudiantes conocían a π (como mucho históricamente), les proporcionábamos algún ejemplo de decimal no-periódico ilimitado y, por supuesto, en la etapa del bachillerato, el número *e*. Es decir, un número nuevo, justificable geométricamente, posiblemente trascendente[7], visual, y apoyado por la tecnología… Por supuesto no teníamos acceso a buenos software matemáticos (por ejemplo Mathematica), pero ¡ya llegaría!, así que empecé a buscar información histórica y teórica sobre 8,700036625…

Los problemas pequeños o grandes de la matemática son y han sido siempre retos, la mayoría de las veces trabajosos, pero indudablemente han muy sido adictivos.

La construcción

A partir del círculo de radio 1 se van encajando ordenadamente los polígonos regulares (figura 1). Es decir, círculo de radio 1 y luego triángulo equilátero circunscrito, después circunferencia circunscrita al triángulo, continuando con el cuadrado circunscrito a la circunferencia anterior y luego una nueva circunferencia que estará, a su vez, inscrita a un pentágono regular y así sucesivamente. Cada polígono circunscribe a un círculo y a su vez está inscrito en el círculo siguiente. Es sencillo ver que para un polígono cualquiera de n lados, los radios r (círculo inscrito) y R (círculo circunscrito) se relacionan:

$$r = R \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

O lo que es lo mismo $R = \dfrac{r}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}$

En este caso $\dfrac{\frac{2\pi}{3}}{2} = \dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$ y en general $\dfrac{\frac{2\pi}{n}}{2} = \dfrac{2\pi}{2n} = \dfrac{\pi}{n}$

Así, infinitos polígonos encajados con sus circunferencias correspondientes tiene la relación:

$$K = \frac{R\ \mathit{final}}{r\ \mathit{inicial}} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \ldots} =$$

$$= \sec\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sec\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sec\left(\frac{\pi}{5}\right) \ldots = \prod_{n=3}^{\infty} \sec\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

donde el símbolo Π, desde 3 a ∞, indica el producto infinito.

Utilizando logaritmos (con sus magníficas propiedades) podemos pasar una serie infinita convergente:

$$K = \exp\left[\sum_{n=3}^{\infty} \ln \sec\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]$$

Kasner y Newman (1989) y, previamente, Haber (1964) habían estimado que $K = 12$, sin embargo está probado el valor: $K = 8{,}7000366252081945\ldots$ Al final se trata de la convergencia de una suma infinita y en aquel artículo se aseguraban nueve cifras decimales correctas.

En <https://oeis.org/A051762> se encuentra una expresión decimal generosa de K a base de expandir el producto infinito.

Como el planteamiento es sencillo, probé con una hoja de cálculo (fue un descubrimiento en aquellas épocas pues la herramienta enganchaba a los alumnos y, por fin, estaba en las aulas) y decidí que, a pesar del espejismo en las primeras iteraciones, la tarea era imposible; recuerdo que no pude alcanzar los decimales del artículo. Una convergencia lenta, muy lenta; no es de extrañar que Christoffel Jacob Bouwkamp (1965)[5] buscara formas de acelerarla. Me resultó curioso observar que la constante funciona como un factor, es decir si comenzamos con un

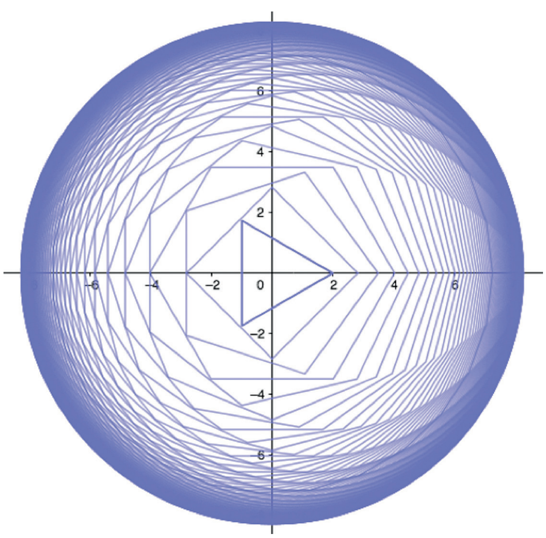


Figura 1. Construcción

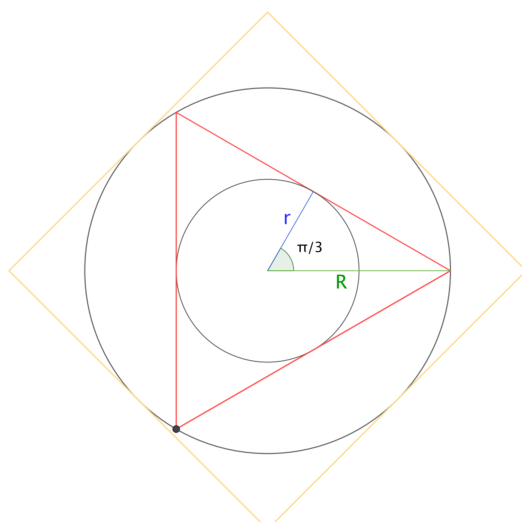


Figura 2. Explicación

círculo de radio *r*, cualquiera, podemos rellenar una parte del plano con polígonos regulares y circunferencias hasta alcanzar un radio 8,7000366252… veces el radio inicial y recíprocamente si comenzamos en una circunferencia de radio *r* y hacemos el proceso al revés, es decir inscribiendo primero un triángulo, luego la circunferencia inscrita, después el cuadrado inscrito etc., llegaremos a $r \cdot 1/8{,}7000366252\ldots$, pues aparece, inversamente, el mismo producto infinito.

Por ello no me sorprendió que Steven R. Finch en su libro *Mathematical Constants* (2003), llamara *constante de Kepler–Bouwkamp* a su inverso, es decir 1/8,7000366252… Me gustó el homenaje a Kepler. Efectivamente la construcción recuerda al modelo cosmográfico de nuestro sistema solar que fascinó a Kepler utilizando los poliedros regulares y sus correspondientes esferas circunscritas. Por supuesto los poliedros no estaban ordenados, de hecho utilizó al tetraedro para alejar las órbitas menores de las mayores y así saltar de la órbita de Marte a la de Júpiter. Obviamente a Kepler le gustaban las construcciones bellas pero en este caso llegó a ser consciente de que el asunto no encajaba.

Por cierto que una de las fórmulas que obtuvo el matemático Bouwkamp[4] para acelerar la convergencia, tiene que ver, efectivamente, con π (aunque obtuvo otra que convergía más rápidamente relacionada con la función Z de Riemann y la lambda de Dirichlet).

La construcción geométrica es muy bonita, sencilla y plástica. La he realizado con distintos programas de geometría dinámica. Reseño aquí exclusivamente la más reciente utilizando GeoGebra (GeoGebra Classic 6).

Así ha dormido el problema en mi carpeta de trabajos con esporádicas intervenciones. No recuerdo exactamente cuando, siempre en veranos, me planteé describir la primera curva que se observa (es decir la curva formada por los segundos vértices de cada polígono).

Aquí presento una pequeña casuística en el aula y fuera de ella.

Los infinitos polígonos con GeoGebra

No descubro nada nuevo… GeoGebra es un software matemático, frase que lejos de ser una redundancia es el mejor de los adjetivos. Aparte de plástico y manejable es especialmente riguroso; la primera vez que mis alumnos construyeron raíz cuadrada de dos con las herramientas del programa (regla y compás) fue una agradable sorpresa ver que a cada golpe de zoom aparecía una cifra decimal correcta de la expresión ilimitada del número. Los más juguetones «colgaban» el ordenador… (¿2007?). En resumen, constituye una herramienta intuitiva en el aula sin menospreciar su uso más experto.

Las imágenes han sido elaboradas, finalmente, con la versión Geogebra Classic 6.

Un escollo que me ocurrió en la construcción con los alumnos: GeoGebra no admite que un polígono regular se pueda interpretar como una línea poligonal cerrada susceptible de limitar un área o, todo lo contrario, cosa que no le ocurre al círculo pues existe el comando circunferencia. Es decir, al ser siempre un área, la herramienta polígono regular no rastrea los polígonos encajados (con opacidad 0 cada uno tapa al anterior pues el área es blanca). Para resolverlo tuve que darles los parámetros de una opacidad variable y decreciente (figura 3). Me interesaba especialmente que con el simple comando *Polígono Regular* y la explicación de la figura 2 fueran encajando polígonos y consiguieran algo parecido a la figura 4.

Basta proporcionar el comando:

$$\text{c} = \text{Producto(Secuencia(cos }(\tfrac{\pi}{\text{n}})\text{,n,3,a+2))}$$

que calcula los productos de cosenos de $\frac{\pi}{n}$ desde 3 hasta el valor $a+2$ (siendo a el deslizador), para ir conociendo los radios de las progresivas circunferencias, que al haber utilizado cosenos es $1/c$. Así herramienta **Polígono (regular)** de segmento $P(1/c,0)$, $Q\left(\frac{1}{c}\cos\left(\frac{2\pi}{a+2}\right),\frac{1}{c}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{a+2}\right)\right)$ y $a+2$ es fácil de deducir pues utiliza las coordenadas de un punto Q sobre una circunferencia conocidos radio y ángulo. Activando el rastro se consigue la construcción.

Si hubiera utilizado las secantes (me pareció más rebuscado), hubiera evitado el valor $1/c$.

Un intento de acelerar la convergencia

Si utilizamos solamente polígonos impares podría parecer, en un principio, que la convergencia se acelera. Realmente lo que conseguimos es que las iteraciones del deslizador, para un valor a del mismo, sean del orden $2a+1$. Lógicamente para cada valor de $2a+1$, acumulamos *todos* los productos consecutivos anteriores, en caso contrario evaluaríamos otro límite, y obtenemos el polígono regular de $2a+1$ lados.

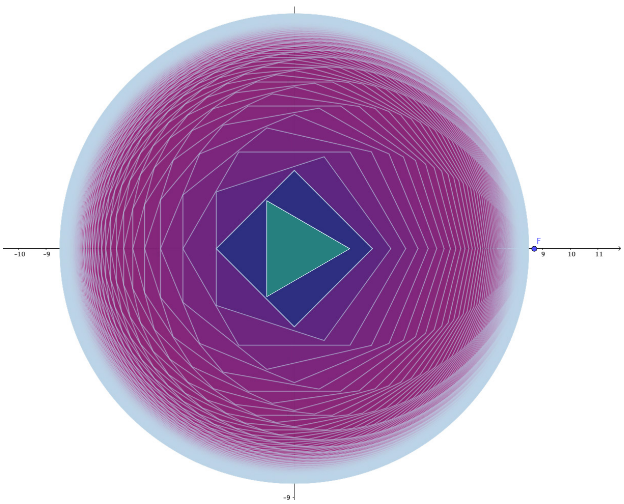


Figura 3. Solo la progresión de polígonos. Color dinámico con opacidad decreciente

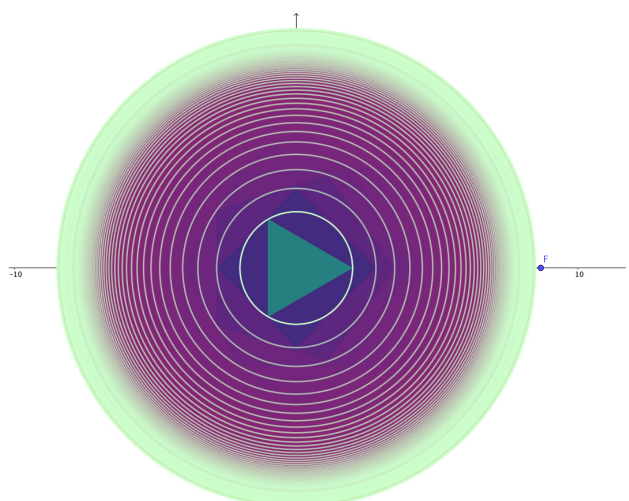


Figura 4. Con sus circunferencias

Iteraciones	Radio
$a=16$	6,66
$2a+1=33$	7,51
$a=33$	7,57
$2a+1=67$	8,09

Tabla 2

Pero vuelve a observarse el espejismo, la diferencia en 2000 iteraciones se reduce a una centésima, de 8,68 a 8,69. Es lo que tienen los límites lentos.

La curva de los primeros vértices poligonales

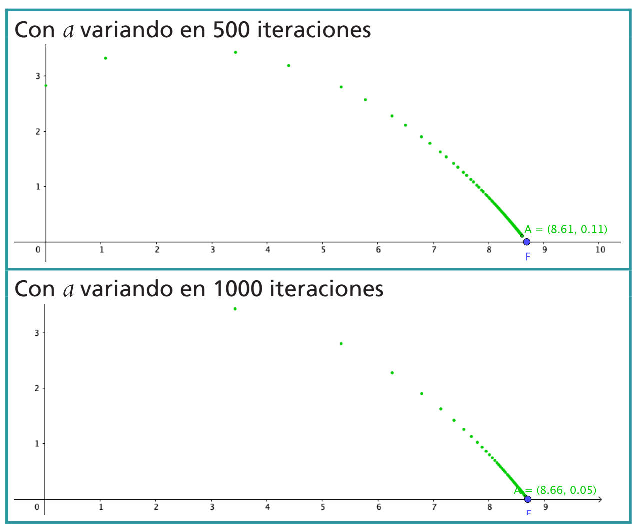
Está definida por sus ecuaciones paramétricas en función de los distintos valores del producto infinito c. Ecuación paramétrica de la curva:

$$A = \left(\left(\frac{1}{c}\right)\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{a+2}\right),\frac{1}{c}\,\mathrm{sen}\left(2\cdot\frac{\pi}{a+2}\right)\right)$$

Es decir los mismos puntos que se utilizan para definir el lado de cada polígono regular.

El rastreo, al doblar las iteraciones, se hace menos preciso visualmente y, por otra parte, no se produce una gran mejora. Las ordenadas disminuyen en 6 centésimas y las abscisas se incrementan en 5 centésimas.

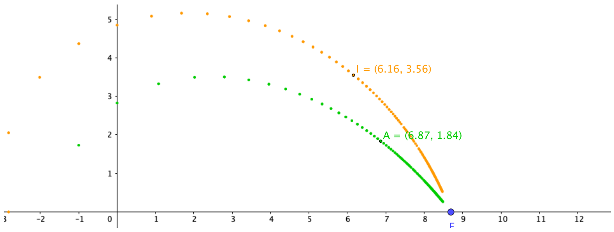
VISUALIZACIÓN 1:



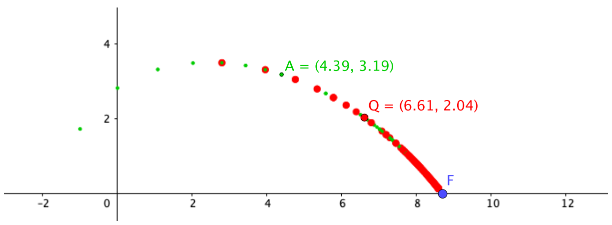
Figuras 5 y 6

VISUALIZACIÓN 2:

Los vértices *segundo* y *tercero* de cada polígono: Claramente la segunda curva (en verde) converge más lentamente, si cabe, que la primera



La animación simultánea, del caso general y del citado en el apartado «Un intento de acelerar la convergencia», de los primeros vértices poligonales es simpática. Los correspondientes a los polígonos impares, en rojo, son perseguidos por los primeros vértices, en azul, de todos los polígonos



Figuras 7 y 8

Una imagen de la constante Kepler-Bouwkamp

Como he comentado más arriba, si hacemos el proceso en sentido inverso, comenzando con una circunferencia de radio 1, terminaremos en el radio 1/8,700036625… = 0,114942044…

Dicho irracional llamado constante de Kepler-Bouwkamp es, en consecuencia, el producto de cos $\frac{\pi}{n}$ desde 3 a ∞, y se representa utilizando los mismos comandos que en la construcción expansiva.

La ayuda geométrica

La búsqueda de la ecuación de la curva de los primeros vértices, me indujo a intentar un comportamiento análogo, es decir, puntos acercándose al límite pero con los ángulos disminuyendo por mitades (en vez de usar el factor coseno).

Si nos situamos en un punto cualquiera, en el gráfico es A = (8,7; 0), y elegimos otro punto a su izquierda, en el gráfico el origen de coordenadas B = (0,0), al trazar la circunferencia c (de centro B y que pasa por A), el punto C sobre ella representa a todos los ángulos centrales del proceso. Basta dibujar la circunferencia d (de centro A pasando por C) para que el lugar geométrico del punto intersección, H, de las bisectrices del ángulo $\widehat{CAE}$ (E punto de corte de d con OX) con la circunferencia d, nos proporcione una curva muy similar a la buscada y sospechosamente parecida a un Pétalo.

Por supuesto representé el 4-pétalo de ecuaciones:

$$x = 8{,}7\ \cos(2t)\ \cos(2t)$$
$$y = 8{,}7\ \cos(2t)\ \mathrm{sen}(2t)$$

para trasladarlo y obtener el Pétalo centrado en A (figura 12).

Pero no hacía falta… Geogebra, aparte de detectar el **Lugar** (lugar1 en verde) reconocía su ecuación proporcionando el 4-pétalo (ec1 en azul claro):

Podría ser… la aproximación utilizada para la constante 8,7000366… en las vistas gráficas superior e inferior (A y F son el mismo punto) es 8,7. No descarto la necesidad de un conocimiento más experto de GeoGebra, pero el verdadero objetivo era su uso como herramienta … que es excelente.

Actualización: El primo análogo de la constante Kepler-Bouwkamp

En agosto de 2006 se publicó un artículo firmado por Adrian R. Kitson[6], relacionado con la constante que nos ocupa. En él se demuestra que el producto infinito de las secantes de $\frac{\pi}{p}$ con *p primo mayor que 2* (o lo que es lo mismo para primos impares) es, curiosamente, 3,1965944300… Con una simple división (8,7000366252…/3,1965944300…) se obtiene que el producto infinito de las secantes de $\frac{\pi}{n}$ con *n* no-primo mayor que 2 (4, 6, 8, 9…) es 2,7216579443… El inverso 1/3,1965944300=

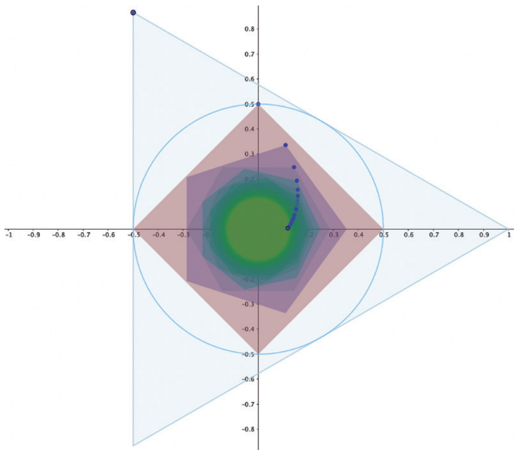


Figura 9. Comenzando en 1 terminamos en 0,114942…

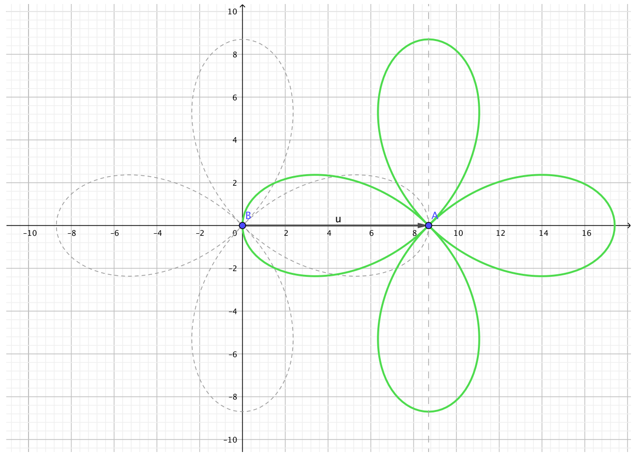


Figura 12

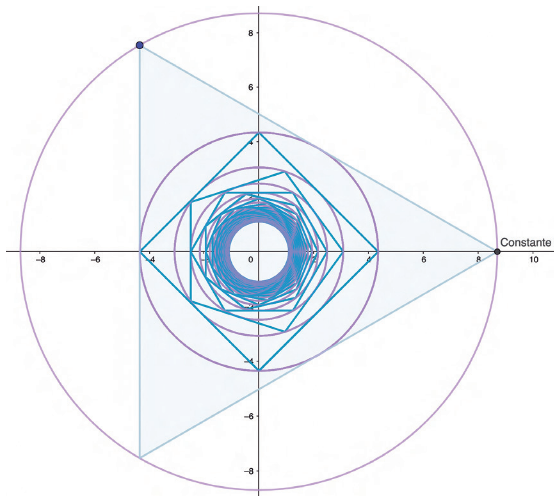


Figura 10. Comenzando en 8,700036…terminamos en 1

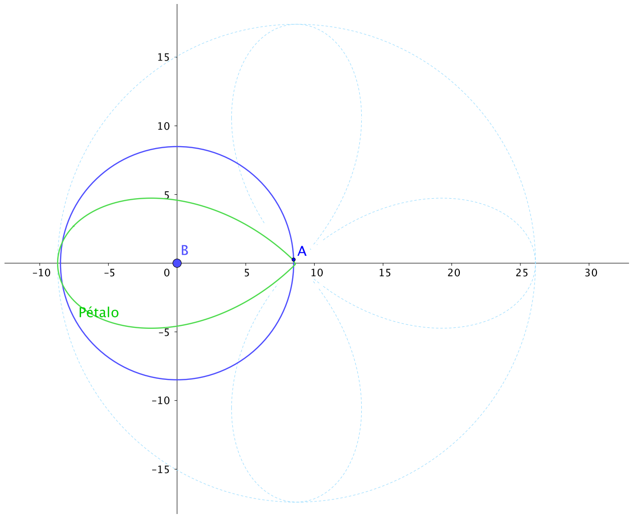


Figura 13

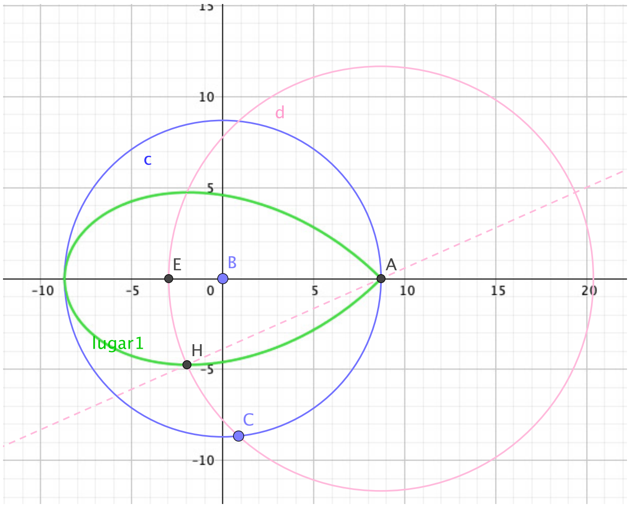


Figura 11

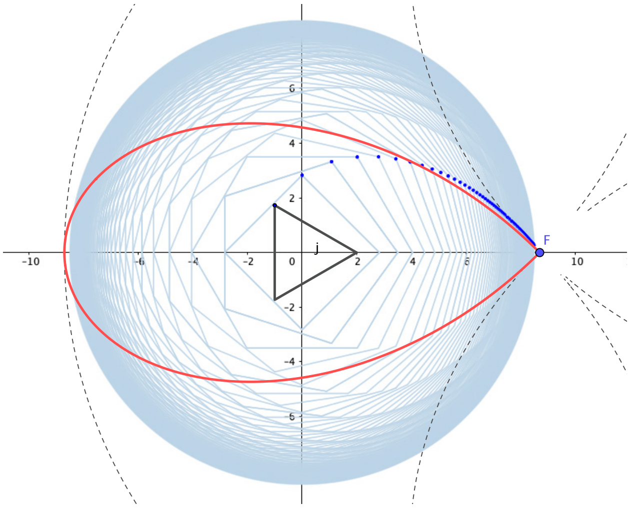


Figura 14. A partir del eneágono se atraviesa el Pétalo

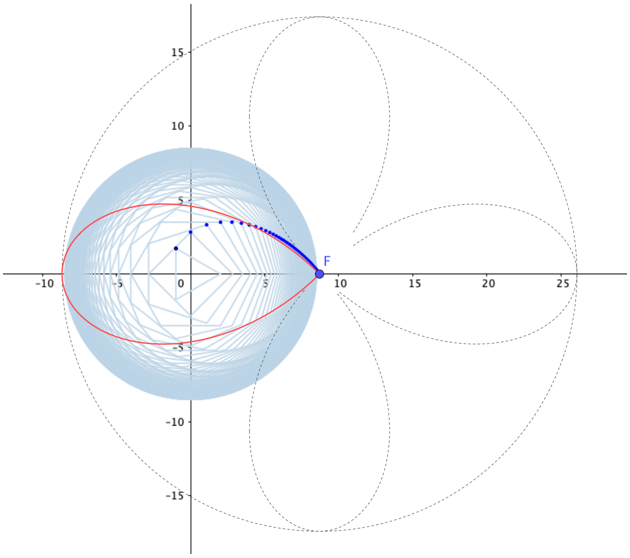


Figura 15. Vista más global

$=0{,}3128329295\ldots$ es la constante llamada «primo análogo de la Kepler-Boukamp». Como no existe una iteración para obtener números primos, termina aquí el juego. Una pena pues sería visualmente bonito y además el autor habla de una rápida convergencia.

Conclusiones

La existencia e inmensidad de los números irracionales es un concepto con un sesgo muy teórico en la etapa de bachillerato. Muchos profesores de este nivel hemos intentado apoyarnos en los, cada vez mejores, programas que iban surgiendo para que el alumnado cotejara sus cifras, entendiera las fórmulas que los generan y se convencieran de que los límites ayudan a entenderlos.

Esta actividad con el alumnado pretende que, de una forma sencilla, se encuentren con la constante probablemente trascendente 8,700036625… de una forma visual, intuitiva y utilizando GeoGebra (independientemente su experiencia en este programa).

Durante el proceso se afianza el concepto de límite con el apoyo de una geometría muy básica.

Sin necesitar la introducción de coordenadas polares, se refuerzan las funciones trigonométricas y su utilidad para expresar las coordenadas de un punto sobre la circunferencia de radio dado.

Los primeros polígonos (hasta el hexágono por ejemplo) se dibujan sin ayuda del profesor con las herramientas del programa. El desarrollo posterior necesita un cambio de estrategia.

El razonamiento de que los radios crecen dividiendo por el coseno correspondiente es muy asequible para este nivel.

Una consulta de la constante en internet es muy pertinente, tiene la ventaja de que se les ocurre a ellos y reafirmará las suposiciones de convergencia.

> La estrategia más importante es el contagio, profesor-alumno y viceversa, de la fascinación que produce una ciencia en general.

La idea del deslizador, *al proporcionarles la fórmula del producto infinito*, surge de forma natural. Es importante que la cotejen con su construcción previa para valores pequeños.

En algún momento aparecerá el asunto de que los polígonos son superficies y sus áreas, al rastrear, van ocultando la construcción. Basta impedir que estos se visualicen para ver que el rastreo de las circunferencias nos aproxima limpiamente al valor de la constante y que, sobretodo, no la rebasa. No obstante, a demanda, se les puede proporcionar el comando `Poligonal` editando los vértices de la construcción.

No es complicado que muestren la curva de los segundos vértices de cada polígono y que intenten estimar su ecuación con las herramientas que proporciona GeoGebra.

El resto, que excede a la propuesta con el alumnado, se incluye aquí como colofón. Aunque prescindible, tiene el interés de que la idea principal se ejecuta utilizado estrictamente las herramientas del programa y posteriormente es contrastada con las ecuaciones de una curva conocida.

A modo de reflexión

Divertirse matemáticamente en las aulas, o fuera de ellas, me parece un objetivo loable en sí mismo y para ello vale cualquier estrategia. En el primer caso, necesitamos planear metodológicamente las actividades complementarias y/o innovadoras porque el tiempo es nuestro peor enemigo. De todos modos, la estrategia más importante es el contagio, profesor-alumno y viceversa, de la fascinación que produce una ciencia en general.

Referencias bibliográficas

Finch, S. R. (2003), *Mathematical Constants,* Cambridge University Press, Cambridge.

Carrillo de Albornoz, A., e I. Llamas (2009), *GeoGebra. Mucho más que geometría dinámica,* RaMa, Madrid.

Montserrat Prieto Morera
IES Antonio García Bellido, Léon
<montseprm@gmail.com>

1 *Amer. Math. Monthly,* nº 103, 539-545, (1996).

2 Así se llama al irracional que no se puede conseguir resolviendo una ecuación algebraica con coeficientes enteros.

3 Los irracionales que se obtienen al resolver ecuaciones algebraicas con coeficientes enteros.

4 *An infinite product by C. J. Bouwkamp* (Communicated at the meeting of October 31, 1964)
<https://core.ac.uk/reader/82376060>

5 Christoffel Jacob Boukamp alcanzó los decimales correctos 8,7000366252081945… con el ordenador IBM 1620 de la *Universidad Tecnológica de Eindhoven*.

6 *The prime analog of the Kepler-Boukamp constant*, Kitson, Adrian R., Institute of Fundamental Sciences, Massey University, <https://arxiv.org/pdf/math/0608186.pdf>.

7 La naturaleza de la constante no está demostrada. Véase <https://www.wolframalpha.com>.
En <http://tcs.nju.edu.cn/wiki/index.php/Mathematical_constant> perteneciente al Department of Computer Science and Technology de la Universidad de Nanjing, se afirmaba en 2020 que 1/K era trascendente, por tanto también K. No parece muy algebraica pero para afirmar que es trascendente ¡hay que demostrarlo! Esa dirección web ha desaparecido ahora… cosas de la red.