Programación lineal y hojas de cálculo

Carlos González Martín

SUMA+ núm. 103
pp. 61-74
Artículo recibido en *Suma* en octubre de 2021 y aceptado en agosto de 2022

En este trabajo se hacen aplicaciones de hojas de cálculo (spreadsheets) para resolver distintos casos relevantes de problemas de Programación Lineal. El enfoque pretendido es, esencialmente, divulgativo de la «popularidad» del término, resaltando la facilidad de uso de hojas de cálculo para resolver algunos problemas de programación lineal en un contexto docente.

Palabras clave: Programación Lineal, Método del Simplex, Hojas de Cálculo, Resolución de problemas relevantes.

Linear Programming and spreadsheets // In this paper spreadsheets applications to solve different relevant cases of Linear Programming problems are used. The intended approach is essentially informative on the «popularity» of the term, focussing in the use of spreadsheets to solve some Linear Programming problems in teaching areas.

Keywords: Linear Programming, Simplex Method, Spreadsheets, Resolution of relevant problems.

Para comprobar la «popularidad» de la programación lineal (en inglés, *linear programming*), basta con usar cualquier buscador de Internet y ver la ingente cantidad de resultados que aporta. Este hecho viene propiciado por la importancia que tiene en diferentes ámbitos que involucran la participación de las ciencias, diferentes ingenierías, la economía, la gestión y el gobierno de instituciones, las comunicaciones… El iniciador y máximo exponente de la programación lineal es G. B. Dantzig (Cottle, Johnson y Wets, 2007), el cual desarrolló, a partir de 1947, el método del simplex.

La programación lineal es uno de los hitos científicos más importantes del siglo xx. Así fue reconocido cuando la Academia Sueca otorgó el Premio Nobel de Economía de 1975 a T. C. Koopmans y L. K. Kantorovich por sus *contribuciones a la teoría de la asignación óptima de recursos*; es decir, programación lineal o, en términos económicos, a su extensión como *linear* *activity analysis*. El método del simplex es el segundo algoritmo más usado durante el siglo XX.

Para ratificar las argumentaciones anteriores, el lector puede acudir, entre otros, a Vanderbei (2014) o Ahuja, Magnanti y Orlin (1993) como dos magníficas referencias en las que queda patente la enorme dimensión de la programación lineal.

En el contexto docente, la programación lineal es, indudablemente, una parte destacada de los contenidos cuantitativos impartidos en distintos grados universitarios. También se estudia, a nivel introductorio, en los programas de algunos itinerarios de enseñanza secundaria. Hay suficientes razones para considerar que este tópico es básico y que debería ser parte de los conocimientos y competencias de los titulados en cualquier grado de ciencias, de cualquier ingeniería, de economía, de gestión…

El uso práctico de la programación lineal es, esencialmente, computacional. Existen programas que, bajo distintas denominaciones y marcas comerciales, dan soporte a la resolución de diferentes problemas de programación lineal. Las dimensiones de dichos problemas exige el uso del software con la potencia y eficiencia adecuadas. También, el manejo intuitivo y facilidad de acceso son características a considerar.

Las hojas de cálculo son herramientas de uso generalizado para realizar distintas actividades. Además de hacer más potentes las tareas de las calculadoras electrónicas, incorporan, entre otras, herramientas gráficas y de análisis de datos que las convierten en útiles estadísticos básicos. De la misma forma, disponen de complementos que permiten resolver algunos problemas de optimización. En particular, problemas de programación lineal.

Por tanto, la existencia de dichos complementos en estas herramientas de uso universal, también se puede tomar como indicador de la popularidad atribuida al principio a la programación lineal. En este trabajo haremos un repaso del uso de distintas hojas de cálculo en la resolución de problemas de programación lineal.

Generalidades sobre hojas de cálculo

Son, esencialmente, tablas de doble entrada cuyas celdas pueden contener datos alfanuméricos o fórmulas (que involucran distintas operaciones matemáticas y/o funciones elegidas de un menú de opciones). Permiten usar volúmenes importantes de información y son muy útiles para ejecutar con efectividad distintas tareas científicas, técnicas, comerciales…

Entre las hojas de cálculo actuales, una de las más populares es Excel integrada en el paquete Microsoft Office. También son de uso generalizado Spreadsheet (Docs de Google) y Calc (Libre Office Calc) del paquete Open Office (Libre Office). Las dos últimas son de acceso gratuito.

Generalmente, en una hoja de cálculo se distinguen filas y columnas en la forma:

	A	B	C	D	E	F	G	…
1								
2								
3								
4								
…								

Figura 1

Entre las múltiples operaciones que se pueden realizar fácilmente con una hoja de cálculo, interesa señalar, exclusivamente, la suma de los productos, término a término, de dos matrices de igual dimensión. En el caso de matrices fila o columna, esta operación se reduce al cálculo del producto escalar de dos vectores.

Si en el ejemplo de hoja anterior introducimos datos:

	A	B	C	D	E	F	G	…
1	2	4	−3					
2	4	4	6		2	1	5	
3					−5	3	6	
4								
…								

Figura 2

La suma de los productos, término a término de las matrices $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, se puede realizar ejecutando, en una celda libre, la fórmula:

= A1 · E2 + B1 · F2 + C1 · G2 +
+ A2 · E3 + B2 · F3 + C2 · G3

Alternativamente, la misma operación puede ejecutarse a través del uso de la función SUMAPRODUCTO (o su traducción equivalente al inglés), ejecutando (barra de fórmulas):

= SUMAPRODUCTO(A1: C2; E2: G3)

En ambos casos, el resultado es 21.

Hay que indicar que las fórmulas pueden usar constantes, el contenido de otras celdas, operaciones (suma, resta, producto, división, exponenciación…), funciones disponibles… Antes de escribirlas (en el formato estándar correspondiente) hay que poner, en la celda libre elegida, el símbolo =.

REPRESENTACIÓN DE UN PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL EN UNA HOJA DE CÁLCULO

Un problema de programación lineal tiene la forma:

$$\text{mín } c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$
$$s.\,a{:}\; a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + (\geq,\leq) b_i,\; i = 1, \ldots, m$$
$$x_j \geq 0,\; j = 1, \ldots, n$$

Se minimiza (maximiza) una función lineal (*función objetivo*) en un contexto definido por ecuaciones o inecuaciones lineales (*restricciones*) que definen la *región factible*.

Su resolución admite la previa representación como un sistema de ecuaciones (inecuaciones): el formado por las restricciones más la ecuación dada por la función objetivo igualada al valor objetivo (la condición de no negatividad de las variables de decisión, $x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n$, se maneja de forma implícita). La traducción sobre una hoja de cálculo sería:

	A	B	…	*N*	…	…	…
1							
2	a_{11}	a_{11}	…	a_{1n}		b_1	
3	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}		b_2	
…							
m+1	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}		b_m	
m+2	c_1	c_1		c_1			

Figura 3

Las celdas coloreadas en gris claro (segunda fila) se reservan para los valores de las variables de decisión. Las celdas en gris algo más oscuro (antepenúltima columna), contienen las fórmulas que establecen los lados izquierdos de las restricciones:

= SUMAPRODUCTO(A1: N1; A2: N2)
= SUMAPRODUCTO(A1: N1; A3: N3)
…
= SUMAPRODUCTO(A1: N1; A(m+1): N(m+1))

La celda gris más oscura contiene la fórmula de la función objetivo:

= SUMAPRODUCTO(A1: N1; A(m+2): N(m+2))

En estos casos, las fórmulas correspondientes involucran los productos escalares de los coeficientes del respectivo vector fila por el vector fila de variables de decisión.

APLICACIÓN DE COMPLEMENTOS DE OPTIMIZACIÓN EN HOJAS DE CÁLCULO

En Excel existe un complemento instalable que se denomina SOLVER. Una vez instalado, se ejecuta desde la pestaña Datos. En la versión en español de la hoja de cálculo de Google, el complemento Resolver aparece en la pestaña Herramientas. En Calc de LibreOffice, Solucionador aparece también en la pestaña Herramientas.

La ejecución de uno de estos complementos abre una ventana de diálogo en la que se pueden señalar los elementos esenciales del problema:

- Las celdas donde aparecerán los valores de las variables de decisión. Los valores de las variables de decisión pueden elegirse como reales no negativos, enteros o binarios (0,1).
- La celda donde aparece la fórmula de la función objetivo.
- La especificación del tipo de problema (mínimo o máximo)
- Para cada restricción:
  - celda donde está la fórmula de la expresión del lado izquierdo
  - tipo (ecuación o inecuación)
  - celda donde aparece la correspondiente constante del lado derecho.
- En el caso de Excel, elección del optimizador (admite seleccionar distintos métodos). En el caso de Google, no hay opciones. En Calc sí hay opciones.

Cuando se ejecuta, devuelve información que indica la no factibilidad, la no acotación o el encuentro de una solución óptima que escribe en los lugares reservados para las variables de decisión. También, en las celdas correspondientes, aparecen los valores que alcanzan los lados izquierdos de las restricciones (por tanto, se tendrá información del consumo de cada recurso por la solución óptima) y el valor óptimo de la función objetivo.

Ejemplo 1

Un proceso productivo incluye tres actividades (I, II y III) que utilizan dos recursos (A y B). Los datos relativos a consumos de recursos por unidad de nivel de actividad, las cantidades de recursos disponibles y los beneficios por nivel de actividad aparecen en la siguiente figura:

	I	II	III	Disponibilidad
Consumo de recursos/ unidad	4	2	−2	20 (A)
	−2	1	2	16 (B)
Beneficio/unidad	5	4	5	

Figura 4

El problema que se plantea es el de determinar los niveles que deben alcanzar las distintas actividades de forma que, consumiendo todos los recursos disponibles, se obtenga el máximo beneficio global. Por tanto, si $x_j, j = 1, 2, 3$, es la variable de decisión asociada al nivel de cada actividad, el modelo correspondiente es:

$$\begin{aligned} &\text{máx } 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ &s.\ a\text{: } 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 20 \\ &-2x_1 + x_2 - 2x_3 = 16 \\ &x_j \geq 0, j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

La hoja de cálculo en la que se resuelve este problema, contiene la información:

4	2	−2	0	20
−2	1	2	0	16
5	4	5	0	

Figura 5

(al ser, inicialmente, los valores de las variables de decisión iguales a cero, la penúltima columna solo contiene ceros).

La solución que aporta la aplicación del complemento es:

18	0	26		
4	2	−2	20	20
−2	1	2	16	16
5	4	5	220	

Figura 6

Es decir, una solución óptima (que consume todos los recursos disponibles) es $x_1 = 18, x_2 = 0, x_3 = 26$ y el valor óptimo es igual a 220.

Ejemplo 2

El problema de transporte es uno de los importantes de la programación lineal. Está ligado a autores relevantes como Koopmans y Kantorovich (citados previamente).

Se trata de un problema en el que se ha de diseñar una política de transporte de un producto entre almacenes (puntos de oferta) y mercados (puntos de demanda). En los almacenes hay cantidades disponibles de producto (a_i). En los mercados se conocen las demandas del mismo (b_j). Además, el transporte por unidad de producto, entre cada almacén y cada mercado, tiene un costo (c_{ij}). El modelo con m almacenes y n mercados, sin capacidades en las conexiones, tiene la forma:

$$\text{mín} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.a{:} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \forall i \in \{1, \ldots, m\}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \forall j \in \{1, \ldots, n\}$$

$$x_{ij} \geq 0, \forall i \in \{1, \ldots, m\}, \forall j \in \{1, \ldots, n\}$$

x_{ij} es la variable de decisión que expresa la cantidad de producto que se ha de transportar entre el almacén i y el mercado j. Este modelo corresponde con el caso balanceado en el que se transportan todas las unidades de producto ofertadas en los almacenes y llegan a los mercados, exactamente, las cantidades demandadas.

Los datos necesarios para identificar un problema de transporte se pueden escribir en una tabla con m filas y n columnas. En cada una de las casillas o celdas de la tabla aparecerá el costo unitario de transporte. Una columna adicional contendría las cantidades ofertadas en los almacenes y en una fila adicional aparecerían las demandas de los mercados.

Ejemplo
Supongamos que tenemos un problema de transporte de mínimo entre 5 almacenes y 12 mercados. Los datos correspondientes aparecen en la figura:

4	5	6	7	6	5	4	5	6	7	2	9	**25**
3	5	3	6	7	5	4	3	6	7	8	9	**38**
5	6	7	4	8	9	2	3	4	5	6	7	**43**
4	5	6	7	6	7	4	5	6	31	4	5	**23**
7	8	9	5	2	4	3	7	4	6	6	4	**37**
17	**13**	**11**	**19**	**12**	**9**	**8**	**15**	**16**	**14**	**10**	**22**	

Figura 7

Se observa que la suma de las ofertas de los almacenes coincide con la suma de las demandas de los mercados. Esto se denomina *condición de consistencia* o *de equilibrio*. Un problema de transporte para el que se verifica la condición de consistencia *siempre* tiene solución óptima. Si dicha condición no es cierta, en el caso de exceso de oferta, la adición de un mercado ficticio, con costos iguales a cero desde todos los almacenes y con demanda igual al citado exceso, permite recuperar el equilibrio. Cuando exista exceso de demanda, añadiendo un almacén ficticio, con costos iguales a cero hasta todos los mercados y con oferta igual al exceso de demanda, también se recupera el equilibrio.

Solución con una hoja de cálculo
Escribimos la tabla anterior en una hoja de cálculo y reservamos un espacio similar para:

- —Salvo la última columna y la última fila, escribir los valores de las variables en la solución óptima.
- —En la última columna (celdas resaltadas en gris fuerte) escribimos fórmulas de las restricciones que afectan a los almacenes (=SUMA(fila de variables)).
- —En la última fila (celdas resaltadas en gris fuerte) escribimos las restricciones que afectan a los mercados (=SUMA(fila de variables)).

Además, reservamos una celda (en gris más fuerte) para escribir la fórmula de la función objetivo (=SUMAPRODUCTO(matriz de costos; matriz de variables)).

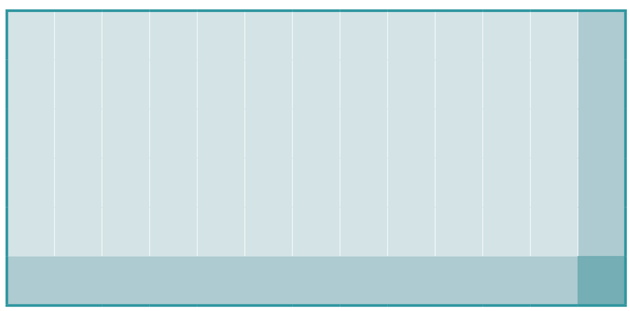

Figura 8

Una vez escrito adecuadamente y ejecutado, la respuesta sería similar a la siguiente:

17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	0	**25**
0	3	11	0	0	9	0	15	0	0	0	0	**38**
0	0	0	19	0	0	8	0	2	14	0	0	**43**
0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	2	11	**23**
0	0	0	0	12	0	0	0	14	0	0	11	**37**
17	**13**	**11**	**19**	**12**	**9**	**8**	**15**	**16**	**14**	**10**	**22**	**561**

Figura 9

Las cantidades a transportar entre cada almacén y cada mercado aparecen en las celdas correspondientes.

Ejemplo 3

Otro de los problemas relevantes de la programación matemática es el de asignación. Un contexto habitual para este problema nos remite al caso de n operarios y n máquinas. Conocido el costo originado por el operario i cuando es asignado a la máquina j, c_{ij}, se trata de asignar cada uno de los operarios a cada una de las máquinas (un operario por máquina y una máquina por operario) de forma que se minimicen los costos globales. El correspondiente modelo sería:

$$\text{mín} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.a{:} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

$$x_{ij} \geq 0, 1, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

$x_{ij} = 1$, si el operario i es asignado a la máquina j.
$x_{ij} = 0$, en caso contrario.

Estas variables de decisión, de tipo binario, hacen que el problema de asignación sea de programación entera. Sin embargo, se pueden sustituir por $x_{ij} \geq 0$, si tenemos en cuenta las propiedades matriciales del problema, que garantizan que las soluciones que aporta la programación lineal sean enteras. Esto hace, además, que tengamos un caso particular de un problema de transporte, con el mismo número de almacenes y de mercados, cuyas ofertas y demandas son iguales a uno.

Ejemplo
Dado el problema de asignación de mínimo con $n = 12$:

5	6	4	9	7	3	10	10	6	8	3	4
9	3	5	3	3	5	4	6	10	9	9	7
4	6	3	5	2	3	6	8	9	9	10	3
8	7	7	2	2	10	7	5	2	2	9	4
4	2	9	2	10	9	3	10	8	8	4	9
8	2	9	9	8	7	9	9	2	6	9	6
4	4	9	5	4	6	2	9	5	7	4	4
8	7	10	6	8	9	9	9	4	3	9	7
6	10	6	9	2	5	6	10	3	6	8	7
10	5	4	10	3	5	6	6	4	3	7	6
6	4	9	5	5	10	9	7	3	4	10	9
6	4	4	6	6	7	5	7	3	8	10	3

Figura 10

Una solución óptima, con valor óptimo igual a 37, es:

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	1
0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	1
0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	37

Figura 11

Ejemplo 4

Un caso importante de problema de programación lineal es el de flujo de coste mínimo. Se plantea sobre una red dirigida definida por un conjunto de n vértices, V, y un conjunto de m arcos (pares ordenados de vértices), A.

En los vértices hay disponibilidades de lo que genéricamente se denomina flujo (producto que puede circular por la red). Una disponibilidad positiva significa que el vértice correspondiente es de oferta (similar a la idea de almacén). Una disponibilidad negativa está asociada con una demanda y esto hace que el correspondiente punto sea un mercado de consumo de flujo. Una disponibilidad igual a cero corresponde con un vértice de transbordo.

En los arcos existen magnitudes referidas a las capacidades (mínimo y máximo de flujo que puede circular) y a los costos por unidad transportada.

El problema que se plantea es el de determinar las cantidades de flujo que deben circular por los arcos de forma que se minimicen los costos globales respetando las capacidades de los arcos, las disponibilidades de los vértices y haciendo que en estos se conserve el flujo (la cantidad de flujo que sale de cada vértice igual a lo que llega más la disponibilidad). Esto último se conoce como las *ecuaciones de conservación del flujo*, de *equilibrio* o de *Kirchoff*.

El modelo general del problema de flujo de costo mínimo es:

$$\text{mín} \sum_{i \in V} \sum_{j \in \text{Suc}(i)} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.a{:} \sum_{j \in \text{Suc}(i)} x_{ij} - \sum_{j \in \text{Pred}(i)} x_{ji} = b_i, \forall i \in V$$

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \forall (i,j) \in A$$

Suc(i) es el conjunto de vértices conectados directamente desde i y Pred(i) es el conjunto de vértices desde los que existe conexión directa hacia i.

b_i es la disponibilidad del vértice i, $\forall i \in A$. Las ecuaciones de conservación del flujo implican que $\sum_{i \in V} b_i = 0$ (condición de consistencia).

c_{ij}, l_{ij}, u_{ij} son, respectivamente, el costo por unidad transportada, la capacidad inferior y la capacidad superior de cada arco $(i,j) \in A$.

Ejemplo
Supongamos el siguiente caso particular en el que tenemos para los vértices los valores de la figura 12:

Vértices	Disponibilidad
1	20
2	−10
3	−5
4	20
5	−5
6	−5
7	−5
8	−5
9	−5

Figura 12

y para los arcos:

desde	hasta	cap_min	cap_max	costo
1	2	4	13	5
1	3	2	10	4
2	3	1	11	5
2	4	4	18	3
3	5	3	8	6
3	6	2	10	5
4	5	4	20	7
4	7	4	22	4
5	2	3	13	6
5	6	2	10	2
5	7	1	11	3
5	8	2	15	4
6	8	3	19	5
7	8	2	13	2
8	9	1	16	6
9	6	1	12	5
9	7	0	10	7

Figura 13

Gráficamente, la correspondiente red tiene la representación que se observa en la figura 15.

Situando al lado de cada vértice, en negrita, el valor de su disponibilidad y al lado de cada arco los valores de sus capacidades mínima y máxima y el costo por unidad transportada ((cap_min, cap_max, costo)).

Actuando sobre una hoja de cálculo, se obtiene una solución óptima como la siguiente:

desde	hasta	x
1	2	11
1	3	9
2	3	1
2	4	4
3	5	3
3	6	2
4	5	14
4	7	10
5	2	4
5	6	5
5	7	1
5	8	2
6	8	3
7	8	6
8	9	6
9	6	1
9	7	0
		387

Figura 14

Señalamos las cantidades de flujo que circulan por los arcos (en trazo grueso aparecen los arcos, denominados básicos, asociados a un árbol óptimo) (figura 16).

Ejemplo 5

Los problemas de rutas son de importancia capital en el transporte, en las comunicaciones, en la distribución, en las finanzas, etc. En investigación operativa se estudian este tipo de problemas bajo diversas denominaciones y tipologías. Una de ellas es la de problemas de caminos.

Entre los problemas de caminos, nos interesa el caso en el que, en una red dirigida y conexa con n vértices, se quieren determinar los caminos mínimos que conectan un vértice particular (por ejemplo, el vértice 1) con el resto de vértices. Este problema, denominado problema del árbol de caminos mínimos (con raíz en 1), es un caso particular del ejemplo 4 en el que la disponibilidad del vértice 1 es igual a $n-1$, la correspondiente a cada uno del resto de vértices es igual $a -1$, las capacidades inferiores y las capacidades superiores de los arcos son, respectivamente, iguales a cero e infinito (sin capacidades). c_{ij} es la longitud del arco (i, j). De esta forma, el modelo queda como:

$$\min \sum_{i\in V}\sum_{j\in \mathrm{Suc}(i)} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.a{:} \sum_{j\in \mathrm{Suc}(i)} x_{ij} - \sum_{j\in \mathrm{Pred}(i)} x_{ji} = \begin{cases} n-1, si\ i=1 \\ -1, \forall i \in V-\{1\} \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, \forall (i,j) \in A$$

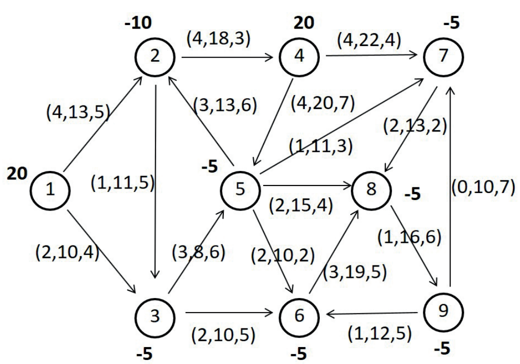

Figura 15

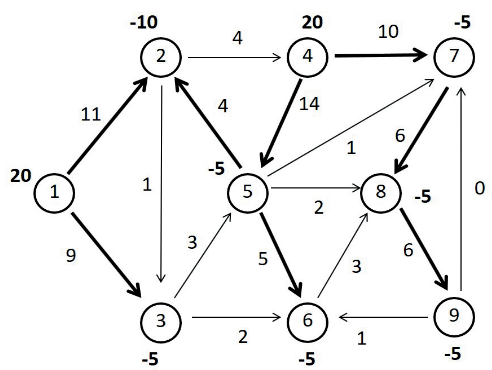

Figura 16

Ejemplo
Veamos el caso particular de la figura 17.

La resolución sobre una hoja de cálculo nos da la solución (los arcos del árbol aparecen en trazo más grueso de la figura 18).

La longitud de cada camino desde 1 es igual a la suma de las longitudes de los arcos correspondientes (en trazo grueso).

Ejemplo 6

Un problema relacionado con los anteriores es el de flujo máximo. Sobre una red dirigida conexa y con capacidades por la que circula un tipo de flujo, se distinguen dos vértices: fuente u origen (de donde solo salen arcos) y destino (a donde solo llegan arcos). El problema de flujo máximo consiste en determinar las cantidades de flujo que deben circular por los arcos (respetando las capacidades y verificando las ecuaciones de conservación) de forma que sea máximo el que circula desde el origen hasta el destino.

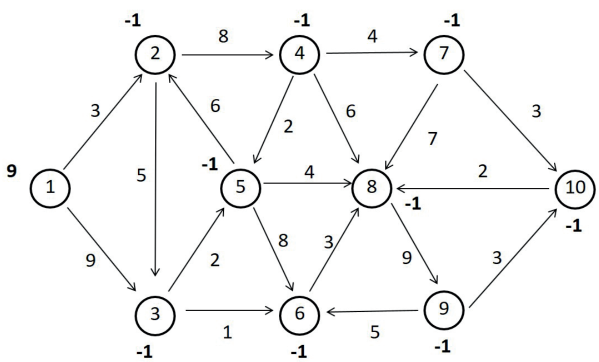

Figura 17

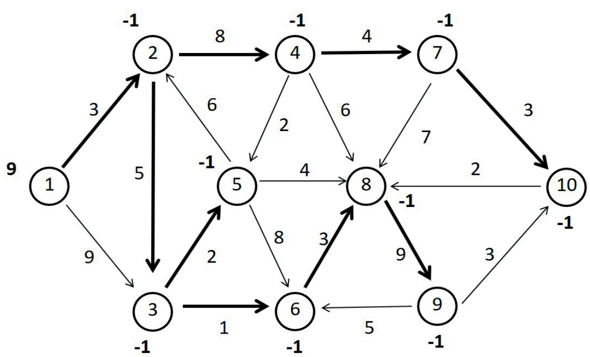

Figura 18

Si , $V = \{1, ..., n\}$, 1 es el vértice origen y n es el vértice destino, el correspondiente modelo sería:

$$\text{máx } f$$

$$s.a{:}\sum_{j\in Suc(i)} x_{ij} - \sum_{j\in Pred(i)} x_{ji} = \begin{cases} f, si\ i = 1 \\ \text{-}f,\ si\ i = n \\ 0, \forall i \in V - \{1,2\} \end{cases}$$

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij},\ \forall (i,j) \in A$$

Ejemplo
Veamos un caso particular con $V = \{1, ..., 10\}$ y con arcos según la siguiente tabla:

desde	hasta	cap min	cap max
1	2	4	22
1	3	1	19
1	4	3	14
2	3	1	10
2	5	4	18
2	6	3	15
3	4	2	13
3	6	3	11
4	6	3	16
4	7	2	10
5	6	4	20
5	8	1	11
5	9	4	22
6	8	2	15
6	7	2	10
7	8	3	19
7	10	1	12
8	10	1	16
8	11	3	17
9	8	2	13
9	11	2	24
10	11	5	18

Figura 19

La gráfica correspondiente es la que aparece en la figura 21.

Al aplicar una hoja de cálculo obtenemos la solución con $f = 46$:

desde	hasta	cap min	cap max	flujos
1	2	4	22	22
1	3	1	19	12
1	4	3	14	12
2	3	1	10	1
2	5	4	18	18
2	6	3	15	3
3	4	2	13	2
3	6	3	11	11
4	6	3	16	4
4	7	2	10	10
5	6	4	20	4
5	8	1	11	1
5	9	4	22	13
6	8	2	15	12
6	7	2	10	10
7	8	3	19	8
7	10	1	12	12
8	10	1	16	6
8	11	3	17	17
9	8	2	13	2
9	11	2	24	11
10	11	5	18	18

Figura 20

Su representación gráfica se puede ver en la figura 22.

Ejemplo 7

Dentro de la investigación operativa, los problemas de planificación (*scheduling*) ocupan un lugar de privilegio. Uno de los casos particulares de estos problemas es el de redes de proyectos. Una versión sencilla de este sería la siguiente:

Dada una red acíclica, dirigida y conexa, supongamos que los n vértices son instantes de tiempo en los que comienzan o terminan los trabajos de que consta un proyecto. Cada trabajo tiene una duración asociada. Entre los trabajos hay un orden de precedencia que queda plasmado en el conjunto de arcos. Se trata de ejecutar el proyecto (completar todos los trabajos) en el mínimo tiempo posible.

Si $R = (V, A)$, sean t_i el instante de tiempo asociado al vértice i, $\forall i \in V$, y d_{ij} la duración del trabajo (i, j), $\forall (i,j) \in A$.

El problema de programación lineal que corresponde es:

$$\text{mín } t_n - t_1$$

$$s.a\!: t_j - t_i \geq d_{ij}, \forall (i, j) \in A$$

$$t_i \geq 0, \forall i \in V$$

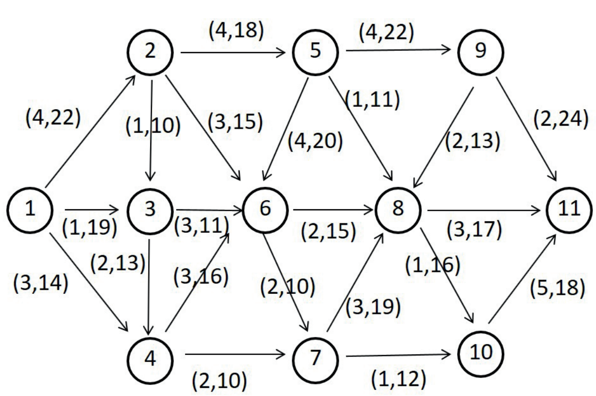

Figura 21

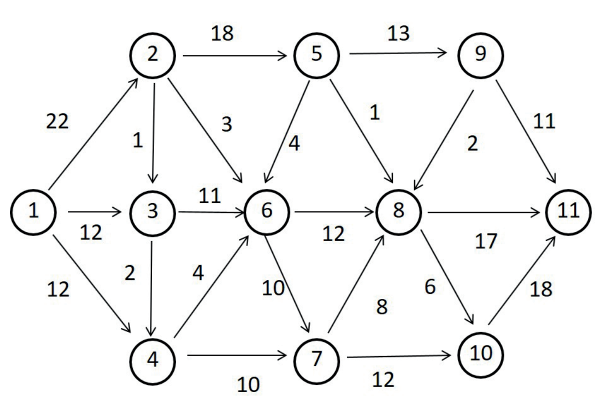

Figura 22

Ejemplo
Para el caso siguiente:

Trabajo	Precedencia	Duración
A	-	3
B	-	8
C	-	9
D	A	5
E	B,D	8
F	A	8
G	C,E	2
H	C,E	1
I	F	2
J	F	4
K	F	6
L	A	6
M	G,I,L	8
N	G,I,L	4
Ñ	H,M	3
O	H,M	5
P	J	7
Q	J	3
R	K,N,Ñ,P	6
S	K,N,Ñ,P	2
T	O,R	3

Figura 23

La correspondiente red se muestra en la imagen 24.

Se observa que se usan 11 instantes de tiempo en los que comienzan o concluyen distintos trabajos.

Aplicando convenientemente una hoja de cálculo obtenemos la solución óptima:

$t_1=$	$t_2=$	$t_3=$	$t_4=$	$t_5=$	$t_6=$	$t_7=$	$t_8=$	$t_9=$	$t_{10}=$	$t_{11}=$
0	3	8	16	11	18	26	15	29	35	38

Figura 25

A partir de dicha solución, se resaltan los arcos que se corresponden con las restricciones del problema de programación lineal que se dan con igualdad (figura 26).

Cualquier camino, de arcos en trazo más grueso, que conecte 1 con 11 se denomina camino crítico. Recibe este nombre porque el hipotético aumento de la duración de cualquiera de los trabajos de que consta, implica un retraso en la ejecución del proyecto. La longitud de dicho camino es máxima. En este caso vale 38.

El conocimiento del camino crítico posibilita la creación de la tabla del proyecto en la que se calculan los tiempos mínimos y máximos de comienzo y terminación de cada trabajo:

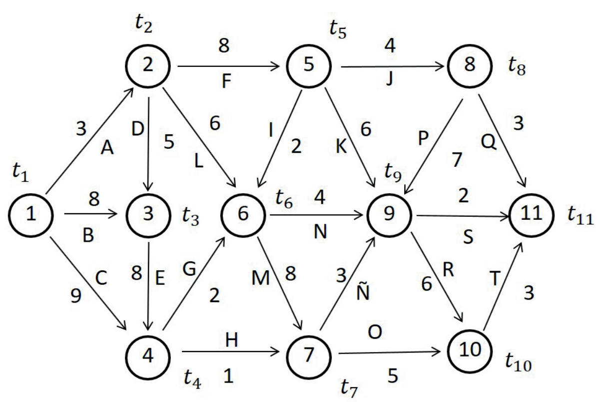

Figura 24

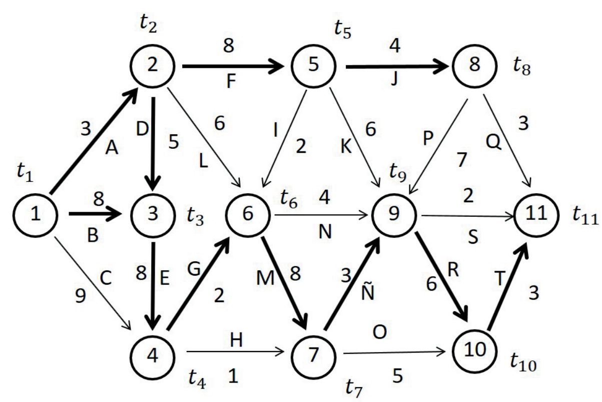

Figura 26

Trabajo	Precedencia	Duración	T° mín. com.	T° máx.com.	T° mín.term.	T° máx.term.	Holgura
A	-	3	0	0	3	3	0
B	-	8	0	0	8	8	0
C	-	9	0	7	9	16	7
D	A	5	3	3	8	8	0
E	B,D	8	8	8	16	16	0
F	A	8	3	6	11	14	3
G	C,E	2	16	16	18	18	0
H	C,E	1	16	25	17	26	9
I	F	2	11	16	13	18	2
J	F	4	11	18	15	22	7
K	F	6	11	23	17	29	12
L	A	6	3	12	9	18	9
M	G,I,L	8	18	26	18	26	8
N	G,I,L	4	18	25	22	29	7
Ñ	H,M	3	26	26	29	29	3
O	H,M	5	26	30	31	35	4
P	J	7	15	22	22	29	7
Q	J	3	15	35	18	38	20
R	K,N, Ñ,P	6	29	29	35	35	0
S	K,N, Ñ,P	2	29	36	31	38	7
T	O,R	3	35	35	38	38	0

Figura 27

La holgura indica el retraso posible del inicio de cada trabajo a partir del instante óptimo asociado al vértice del que parte según la relación de precedencia. Por ejemplo, el trabajo C tiene siete unidades de tiempo para ser iniciado a partir del instante inicial. Los trabajos (arcos) con holgura igual a cero son críticos.

Ejemplo 8

Los problemas de producción-inventarios constituyen una parte relevante de la investigación operativa. Algunos de ellos se pueden formalizar como problemas de programación lineal.

Supongamos que son conocidas las demandas de un producto en n períodos: D_i, $i = 1, ..., n$. Para atenderlas se puede usar producto almacenado o producido en el correspondiente período. Sea I_i la cantidad de producto almacenado al finalizar el período i y x_i la cantidad producida en dicho período. Los correspondientes costos de almacenamiento y producción serán ca_i y cp_i.

El problema de producción-inventario que permite atender las demandas minimizando costos globales, se puede formular como:

$$\text{mín} \sum_{i=1}^{n} ca_i I_i + \sum_{i=1}^{n} cp_i x_i$$

$$s.a{:}\ x_i + I_{i-1} - l_i = D_i, \text{i} = 1, \dots, n$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \dots, n \qquad l_i \geq 0, i = 0, \dots, n$$

Si no hay producto almacenado al inicio ni al final del último período, $I_0 = I_n = 0$.

Ejemplo
Podemos referirnos al caso particular siguiente:

Período	Costo Prod.	Costo Inv.	Demanda
1	5	5	20
2	6	4	30
3	7	1	40
4	8	3	50
5	5	2	25
6	9	5	35
7	4	2	20
8	3	4	30

Figura 28

Al aplicar una hoja de cálculo, obtenemos:

Período	x_i	I_i
1	20	0
2	30	0
3	90	50
4	0	0
5	60	35
6	0	0
7	20	0
8	30	0

Figura 29

En este caso $I_0 = I_8 = 0$ y el valor objetivo óptimo es igual a 1 500.

Puede suceder que la puesta en funcionamiento del sistema de producción (*setup*) tenga distinto costo en función de período. Sea $csu_i, i = 1, \dots, m$ dicho costo. Habrá que decidir en qué períodos hay que producir a través de la consideración de la variable binaria:

$$y_i = \begin{cases} 1, \text{ si se produce en el periodo } i \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

El modelo anterior debe, entonces, cambiar a:

$$\text{mín} \sum_{i=1}^{n} ca_i I_i + \sum_{i=1}^{n} cp_i x_i + \sum_{i=1}^{n} csu_i y_i$$

$$s.a\!: x_i + I_{i-1} - I_i = D_i, i = 1, \dots, n$$

$$x_i \geq y_i \sum_{i=1}^{n} D_j, i = 1, \dots, n$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \dots, n,\ y_i = 0{,}1, i = 1, \dots, n\ I_i \geq 0, i= = 0, \dots, n$$

Se observa que en la restricción $x_i \leqslant y_i \sum^{n}_{j=1} D_j, \sum^{n}_{j=1} D_j$ puede ser sustituido por cualquier cota superior de este valor.

Ejemplo
Si al ejemplo anterior le añadimos costos de *setup*:

Período	Costo Prod.	Costo Inv.	Costo setup	Demanda
1	5	5	3	20
2	6	4	2	30
3	7	1	4	40
4	8	3	5	50
5	5	2	4	25
6	9	5	3	35
7	4	2	6	20
8	3	4	3	30

Figura 30

La solución obtenida al aplicar una hoja de cálculo, en la que se han declarado las variables como binarias, es:

Período	x_i	y_i	I_i
1	20	1	0
2	30	1	0
3	90	1	50
4	0	0	0
5	60	1	35
6	0	0	0
7	20	1	0
8	30	1	0

Figura 31
con valor óptimo igual a 1522.

Conclusiones

La programación lineal es una de las partes más importantes de la investigación operativa. Es un tópico básico en estudios de Matemáticas, Ciencias, Ingeniería, Economía, Gestión… Contiene problemas relevantes de gran importancia en lo que se entiende por formas civilizadas modernas de vivir: comunicación, transporte, distribución, organización…

Las populares hojas de cálculo son herramientas válidas para la docencia y, en particular, para algunas importantes aplicaciones de la programación lineal. Su uso es aconsejable en la impartición de los correspondientes contenidos de materias de grados universitarios que incluyan la optimización. Dicho uso se podría extender a los cursos finales de la enseñanza secundaria.

Referencias bibliográficas

Ahuja, R. K., T. L. Magnanti, y J. B. Orlin (1993), *Network Flows. Theory, Algorithms and Applications,* Prentice Hall, Hoboken.

Cottle, R., E. Johnson y R. Wets (2007), *George B. Dantzig (1914–2005)*, <https://stanford.edu/group/SOL/GBD/cottle-johnson-wets-2007.pdf>.

Vanderbei, R. J. (2014), *Linear Programming. Foundations and Extensions,* Springer Verlag, Nueva York.

Carlos González Martín
Universidad de La Laguna
<cgonmar@ull.edu.es>