Desarrollo de sólidos platónicos, geometría plana y visión espacial

Raúl Rivilla Bastante

SUMA+ núm. 103
pp. 87-92
Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2022 y aceptado en enero de 2023

Desde que el programa ESTALMAT se implantó en Castilla-La Mancha, he venido impartiendo a los alumnos de primer año (primer ciclo de ESO) dos sesiones correspondientes a sólidos platónicos y arquimedianos. Tras las primeras experiencias intenté mejorar el material que había preparado y, en lo posible, introducir mejoras o incluso algún contenido nuevo o diferente al que suele verse en este contexto, y en lo posible trasladarlo a mi docencia en un IES.

Uno de los objetivos que me fijé fue construir los poliedros, intentando huir de su construcción con cartulina y pegamento que recordaba de niño por la falta de tiempo. Las primeras veces, supliendo la falta de material con algo de imaginación (usando palillos y chuches, pajitas y celofán, ¡hasta cartón!). En la actualidad hay material de calidad y relativamente asequible para trabajar con comodidad.

Teniendo piezas con formas de triángulos equiláteros, y juntando consecutivamente cada vez más triángulos equiláteros en el vértice, tanto a mi como a los alumnos, nos resulta sorprendentemente sencillo razonar la existencia y las características del tetraedro, del octaedro y del icosaedro. Análogamente, del cubo (cuadrados), del dodecaedro (pentágonos); así como la imposibilidad de que existan más poliedros regulares (con caras hexagonales, heptagonales,…) y el teorema de Euler.

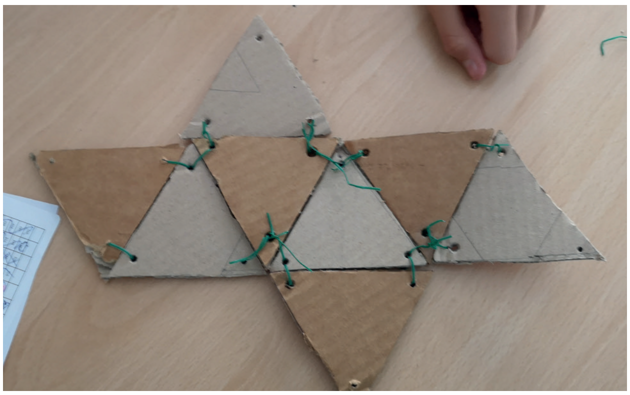

Figura 1

Figura 2

No obstante, el problema surgía, normalmente, al intentar montar los cuerpos. Me di cuenta de que existía un salto entre el desarrollo plano en dos dimensiones y el cuerpo geométrico en tres dimensiones. Por otra parte, buscando material, observé que los desarrollos planos que solemos encontrar en webs, libros…, son sorprendentemente parecidos, y de ahí surgieron inquietudes naturales a los alumnos, ¿cuántos desarrollos hay?, ¿cuáles son?, ¿qué características tienen?

Hexominós y cubos

En 1954, el matemático Solomon W. Golomb acuñó el término «poliminó» para las figuras formadas por cuadrados que comparten una arista. Así, un dominó es un rectángulo formado por dos cuadrados unidos. Generalizando, tendríamos triminós, tetraminós, pentaminós, hexominós… Relacionándolo con nuestros poliedros, en concreto con el cubo, su desarrollo plano debe ser por fuerza un hexominó. Si buscamos diferentes desarrollos planos, tendremos una magnífica oportunidad para dar a conocer a los alumnos los poliminós; su definición, su historia, cuáles de ellos conocen a través de juegos como el tetris, minecraft, …

Dependiendo del tiempo disponible o de las características del alumnado con que trabajemos, podemos realizar un «descubrimiento conjunto» de los 35 hexominós existentes, o darles el listado de estos.

La búsqueda en si misma, ya es una oportunidad de aprendizaje, pues podemos enseñarles a ser sistemáticos y ordenados: solo habrá una forma de colocar 6 cuadrados alineados, después con 5 cuadrados alineados, de cuántas formas podemos colocar el sexto de manera que sean figuras distintas (salvo giros), y así sucesivamente. Si todo va bien, debemos obtener algo parecido a esta colección:

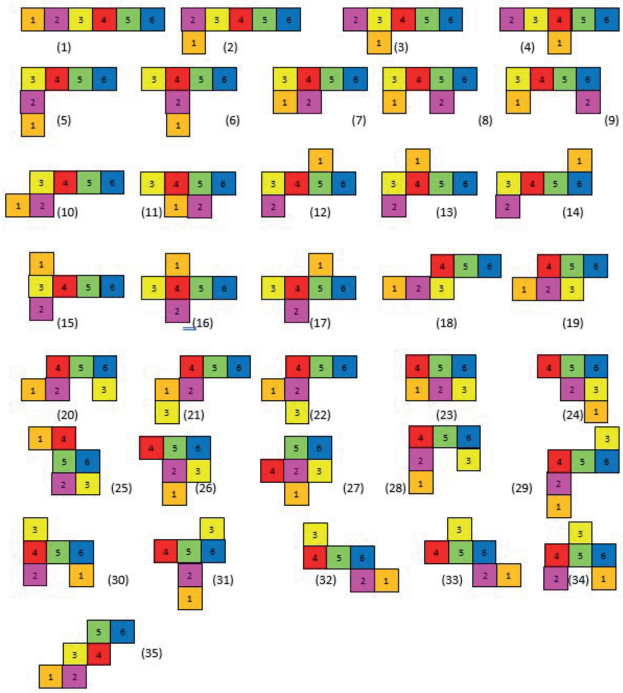

Figura 3

Once de estos hexominós son el desarrollo plano de un hexaedro. Una estrategia interesante para trabajar con este recurso sería:

- —Pedir a los alumnos que intenten imaginar con cuales de ellos se podría formar un cubo. Los que encontramos habitualmente en libros, webs… son los correspondientes a las figuras de 12 a 17. Son los más fáciles de visualizar pues corresponden a un anillo central y las tapas superior e inferior. A los alumnos con más dificultad este símil en estos desarrollos le ayudará a poder tratar con otros más complicados.
- —Hacerles ver que directamente pueden descartar aquellos con vértices de orden 4 pues no podrán plegarse.
- —Pedirles que distingan cuáles seguro que no pueden formar el cubo y cuáles seguro que sí pueden.

- Tras ese primer análisis, usar material manipulativo de algún tipo para aquellos que no lo tienen claro.
- Identificar qué caras quedarán enfrentadas al construir el cubo. Obtendremos los valores de la tabla 1:

Forman Cubo los nº	Caras Enfrentadas		
12	1	3	4
	2	5	6
13	1	3	4
	2	5	6
14	1	3	4
	2	5	6
15	1	3	4
	2	5	6
16	1	3	4
	2	5	6
17	1	3	4
	2	5	6
18	1	2	4
	3	5	6
31	1	2	4
	5	3	6
32	1	2	4
	5	3	6
33	1	2	4
	4	3	6
35	1	2	3
	4	5	6

Tabla 1

Una vez tengamos este terreno de juego, es una lástima abandonarlo sin sacarle todo el jugo, así podemos pedirles que busquen aquellos hexominós que:

- Solo tienen un eje de simetría paralelo a los lados: 4, 9, 11, 15, 16, 34.
- Solo tienen un eje de simetría a 45º: 1, 14, 17, 18, 19, 23 y 35.
- Que tienen simetría rotacional: 24 y 27.
- Que tienen dos ejes de simetría: 1 y 23.

Esta actividad nos permite trabajar los conceptos de eje de simetría, giro…, y usar material manipulativo como espejos para comprobar si su suposición de simetría es cierta o no.

Hay otros conceptos menos habituales como la concavidad y la convexidad que también podemos trabajar. Por ejemplo, la figura 1 es convexa pues si pensamos en cualquier pareja de puntos del interior de la misma, el segmento que los une estaría totalmente contenido en la figura; sin embargo, en la figura 34, un segmento que uniera el interior de un punto de la cara 1 y otro punto de la cara 2 no estaría totalmente incluido.

Por otra parte, podemos también trabajar conceptos geométricos como el perímetro y el área. Suponiendo que el lado de cada cuadrado es 1, buscar el hexominó:

- Con mayor perímetro. Hay varios: 1, 3, 35,… que tienen perímetro 14. Podemos hacerles ver que el perímetro de la figura coincidirá con el rectángulo que sea el cerramiento convexo de la figura; por ejemplo, la figura 32 puede inscribirse en un rectángulo 3×4, luego su perímetro será 14.
- Con menor perímetro: 10. La figura 23, la más compacta.
- Con vértices a la mayor distancia posible (figura 1), o a la menor distancia posible (figura 23).
- Con mayor/menor área. Sorprendentemente, les causa un gran *shock* pues la gran mayoría de los alumnos la calculan diligentemente y se sorprenden al ver que coinciden todos. Es un pretexto magnífico para que interioricen el concepto de metro/centímetro cuadrado.

Otras actividades para las que se pueden utilizar estos hexominós podrían ser similares a las que planteaba el Grupo Alquerque (2001) para pentominós:

- Creatividad, usándolos al estilo del *Tangram*. Una primera actividad sería construir figuras (con todas las piezas, o varias) que tuvieran un parecido razonable a algo y darle nombre. La segunda fase sería la inversa, es decir, dar solo el nombre, el contorno de la figura y decir cuantas o cuales se utilizan, de entre todas o un determinado subconjunto (según se quiera dar el nivel de dificultad) e intentar construirla.

— Cada uno de los hexominós por separado teselan el plano, pero, ¿podríamos hacer encajar a todos juntos sin dejar ningún espacio vacío? En otras palabras, tenemos 35 hexominós, lo que significa 210 cuadrados. ¿Pueden colocarse todos en un rectángulo 30×7? ¿Y en uno 7×30, ¿6×35? ¿10×21? ¿14×15? En caso negativo, ¿cuál sería el menor rectángulo que podrían «casi» teselar? ¿Cuántos «huecos» se quedarían?

Tras esta primera experiencia, los propios alumnos reclamaban el estudio de los otros poliedros regulares. Por sencillez, los siguientes fueron el tetraedro y el octaedro.

Tetraedro y tetramantes

En 1961, Thomas H. O'Beirne, bautizó como *polidiamante* a las figuras formadas por triángulos equiláteros que comparten una arista. El nombre venía por la analogía hecha por Golomb en 1954 pero en esta ocasión por los *diamantes* de la baraja francesa que están formados por dos triángulos equiláteros. No obstante, es frecuente encontrar (al menos en castellano) referencias a estas figuras como *poli-amantes* frente a los *di-amantes* de la baraja.

El tetraedro proporciona escaso juego, de los 3 tetramantes posibles, el primero y el tercero serían desarrollos planos del tetraedro. No obstante, ya se puede apreciar que el nivel de dificultad para imaginar cómo formar cuerpos a partir de triángulos se complica bastante en relación al cubo.

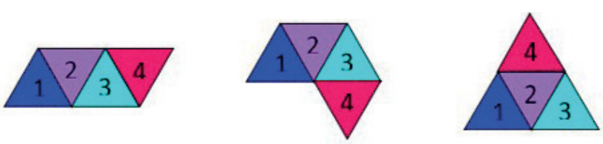

Figura 4

Así, el orden de los vértices se convierte en una herramienta poderosa, al menos, para descartar figuras. Para el octaedro, hay 66 posibles octamantes[1] (figura 5).

Del total de 66, 11 permiten montar el octaedro, los números: 15, 16, 17, 18, 19, 20, 32, 33, 34, 58 y 62. Hablando de visión espacial, trabajar con octamantes es un desafío considerablemente mayor en comparación con los hexominós. Probablemente usted tendrá el «ojo» entrenado y aún así, probablemente, le cueste encontrar más de la mitad. Por ello, para esta segunda parte el alumno puede, directamente a partir de 8 triángulos equiláteros probar aquellos que considere más prometedores y colectivamente ir encontrando los 11.

Otra forma de trabajar para encontrar los desarrollos planos sería a la inversa, a partir del cuerpo geométrico, ir «rompiendo» aristas, separando caras hasta conseguir la figura plana. El desafío en este caso será hacerlo de manera sistemática para encontrar todas las posibilidades.

Una vez desentrañado ese primer misterio, podemos ir trabajando de forma análoga a lo ya expuesto con los hexominós:

— Distintos tipos de simetría.
— Perímetros máximos y mínimos.
— Áreas, en este caso, si han interiorizado la idea con los hexominós, no hará falta hacer operación alguna para que se den cuenta que todos tienen la misma área.
— Teselaciones, todos los octamantes (u octadiamantes) teselan individualmente el plano, pero ¿podrían teselarlo conjuntamente? ¿Podrían hacerlo los 11 desarrollos del octaedro?

En los 70 estas preguntas se contestaban, al igual que hoy en muchas de nuestras clases, por ensayo y error y autoaprendizaje. Hoy en día, hay multitud de figuras producidas a partir de estas piezas mediante ordenador.

Al igual que los hexágonos que pueden apreciarse en la imagen, pueden formarse multitud de figuras geométricas planas, por ejemplo, un único paralelogramo de 4×66, 8×33, 11×24 o 12×22; trapecios 64×4, 29×8 y 16×12; o bien varios paralelogramos más pequeños a la vez, o también varios trapecios de menor tamaño de forma simultánea.

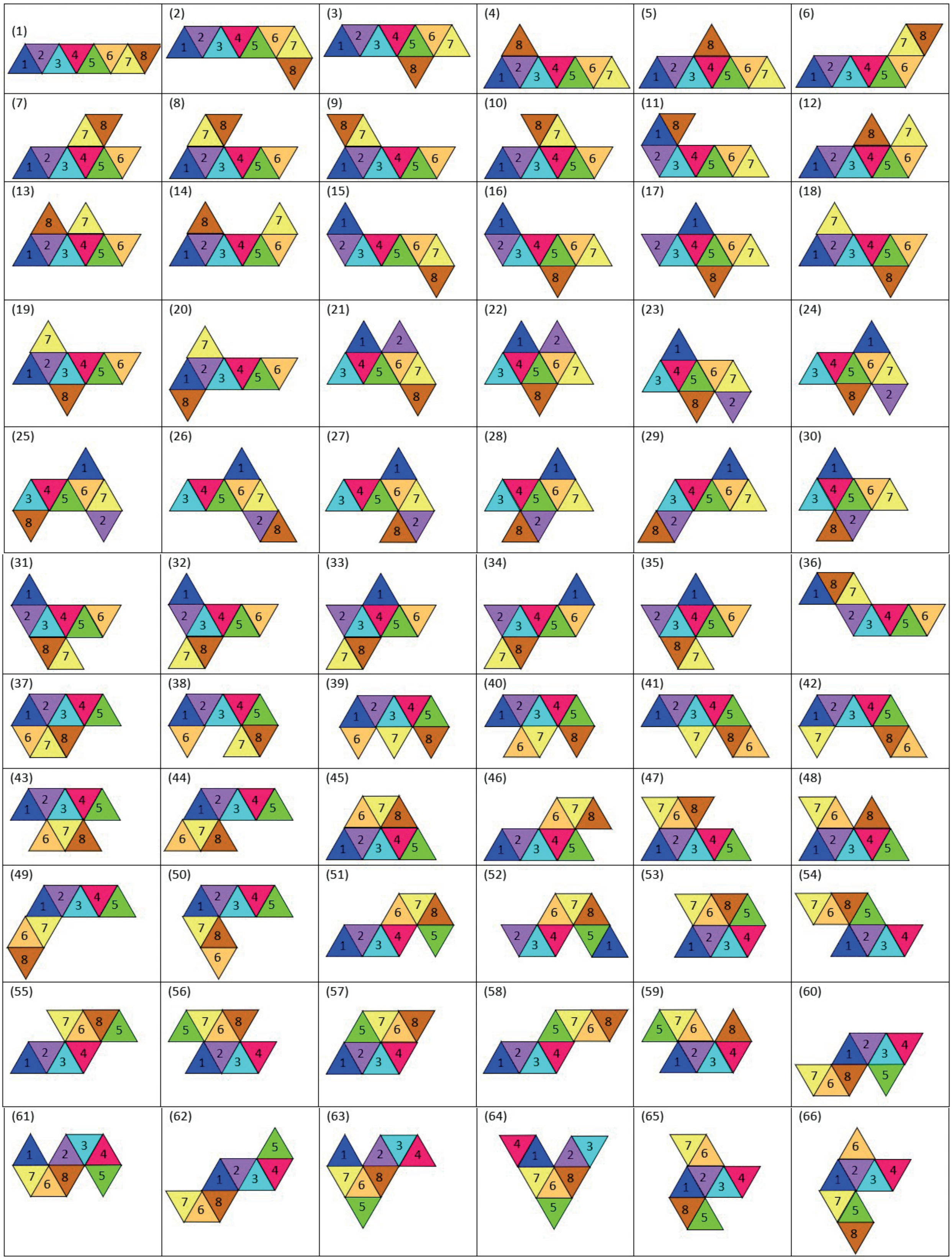

Figura 5

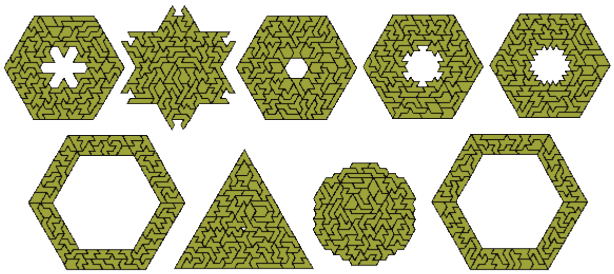

Figura 6. Contrucciones con octamantes <www.recmath.org/Polypages>

Conclusiones

En resumen, tanto los hexominós como los octominós son herramientas muy versátiles para trabajar en geometría plana y visión espacial. Ambos proporcionan a nuestros estudiantes una oportunidad de trabajar, entender y entrenar conceptos como la simetría o la teselación, y habilidades más avanzadas como la visión espacial.

Así mismo, nos permiten organizar una situación de aprendizaje en la que el alumnado construya su propio material conjuntamente y podamos trabajar contenidos relativos a los poliedros con conceptos tales como caras, vértices, aristas, órdenes, áreas y volúmenes, teorema de Euler, poliedros duales…, o conceptos de geometría plana como simetría, giro, perímetro, área, distancia, teselación…, dejando espacio a la creatividad y pasando con naturalidad y según demande el propio grupo de unos a otros.

Referencias bibliográficas

Grupo Alquerque (2001), «Hexamantes», *Suma,* nº38, 103-105.

Grupo Alquerque (2010), «Poliábolos», *Suma,* nº 64, 55-59.

<https://es.wikipedia.org/wiki/Polidiamante>

<http://www.recmath.org/PolyPages/index.htm>

Raúl Rivilla Bastante
IES Fray Andrés, Puertollano (Ciudad Real)
<raul_rivilla@yahoo.es>

1 El número de n-polidiamantes distintos para n = 1, 2, 3,… es 1, 1, 1, 3, 4, 12, 24, 66, 160,… (sucesión A000577 en OEIS).