

VERSIÓN INGLESA

La esencia de las matemáticas

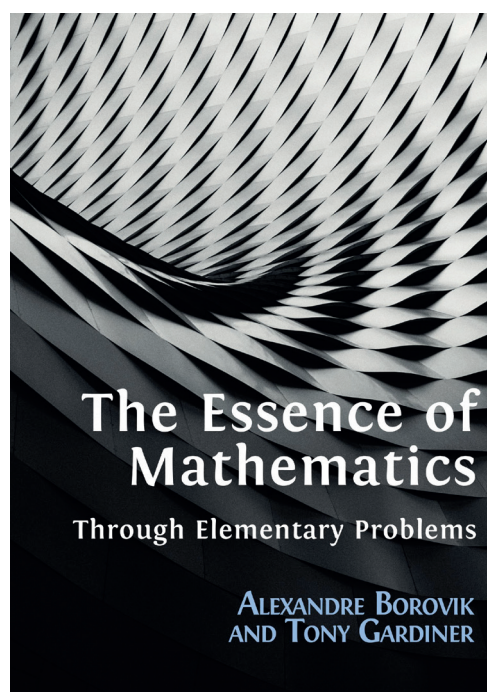
Maite Aranés Maza

suma núm. 103
pp. 123-127

Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2022 y aceptado en enero de 2023

El libro que comento en esta ocasión continúa con la temática de problemas/actividades para el aula de las últimas reseñas, pero desde una perspectiva distinta. La premisa de *The Essence of Mathematics* es precisamente lo que dice su título: la esencia de las matemáticas se aprecia resolviendo problemas. Los autores por tanto nos proponen una colección de 270 problemas de matemáticas elementales, que consideran que serán de particular interés tanto para alumnado interesado en continuar con estudios matemáticos a nivel avanzado como para profesorado de secundaria.

The Essence of Mathematics está publicado bajo una licencia creativecommons, y puede descargarse o leerse online en la correspondiente página web de la editorial Open Books Publishers. Con respecto a los autores, Tony Gardiner es un matemático británico conocido principalmente por fundar el United Kingdom Mathematics Trust, organización sin ánimo de lucro



Alexandre Borovik y Tony Gardiner,
374 páginas (2019)

que gestiona y organiza competiciones matemáticas a nivel nacional en el Reino Unido, incluyendo olimpiadas matemáticas, Canguro matemático y diversos «desafíos matemáticos» (UKMT Challenges). Además Gardiner es autor de libros de problemas y desafíos matemáticos, así como de artículos y textos sobre educación matemática en Reino Unido. Alexandre Borovik es un matemático de origen ruso residente en Gran Bretaña y actualmente profesor emérito de la Universidad de Manchester.

Gardiner y Borovik comienzan el libro comentando las dificultades con las que se encuentra un principiante que intenta averiguar qué son las matemáticas. Según ellos, puede encontrarse una respuesta en el campo de la popularización de las matemáticas. Otra posibilidad, en la que se puede incluir su texto, es pedir al lector que tome un papel activo. Su idea es que a través de la resolución de problemas o conjuntos de problemas de carácter elemental se puede experimentar de forma personal lo que es hacer matemáticas. Con este objetivo han escogido problemas que en su opinión ejemplifican algún aspecto universal de las matemáticas.

Our goal in this book is universal (namely to illustrate the idea that a suitably selected elementary microcosm can capture something of the essence of mathematics): hence the problems have all been chosen because we believe they convey something universal in a relatively elementary setting. But the particular set of problems chosen to illustrate the central goal is personal.

Con respecto a la estructura del libro, empieza con tres capítulos más básicos o funcionales, «Habilidades Mentales», «Aritmética» y «Problemas», que según Gardiner y Borovik persiguen dos objetivos simultáneamente. Primero servir como introducción a formas de pensar matemáticas y herramientas básicas necesarias en el resto del libro, y el segundo, demostrar que la «esencia de las matemáticas» se puede apreciar a niveles elementales. Los otros tres capítulos, «Álgebra», «Geometría» e «Infinito: recursividad, inducción y descenso infinito», son más sofisticados. En cualquier caso los conocimientos previos necesarios para abordar los problemas propuestos en el texto son las matemá-

ticas de la educación secundaria, añadiendo algunos elementos de trigonometría y números complejos.

Otra característica del libro es la falta de comentario en el texto principal. Después de dos o tres páginas de introducción, prácticamente todos los capítulos consisten básicamente en una lista de problemas, con algún párrafo explicativo o alguna definición ocasional. En opinión de los autores es más beneficioso haber intentado resolver o haber resuelto el problema antes de encontrarnos con aclaraciones o explicaciones. Por lo tanto es en la sección de soluciones de cada capítulo donde vamos a encontrar indicaciones sobre conexiones entre distintos problemas, y la mayoría de comentarios acerca de su importancia, su desarrollo histórico, etc. Intentaré ahora dar una idea del tipo de problemas que se ofrecen en cada capítulo, aunque por razones obvias esto no va a ilustrar demasiado bien la filosofía del libro.

El objetivo del primer capítulo, «Mental Skills», es destacar ciertos contenidos, técnicas e ideas en las matemáticas de secundaria. Para que no pensemos que las habilidades mentales se refieren solo a contenidos elementales, los autores incluyen algunos problemas que requieren matemáticas más avanzadas como trigonometría o números complejos. Gardiner y Borovik nos advierten además que, aunque necesitaremos lápiz y papel, el enfoque del capítulo es hacia aspectos que deberíamos tener memorizados (o interiorizados), o ser capaces de calcular mentalmente, o percibir de forma prácticamente inmediata. Los primeros problemas conllevan el ejercicio de cálculo mental con cuadrados, cubos, potencias de 2, números primos, radicales, múltiplos y divisores, algunos ejercicios clásicos de proporcionalidad (la proporción DIN A), etc (figura 1). Hacia la mitad del capítulo el tono de los problemas cambia un poco. A partir de aquí, según los autores, la idea de «habilidades mentales» se refiere a formas de trabajar más que a realizar cálculo mental (figura 2). Otra característica importante de este capítulo son las conexiones que encontramos entre los diversos problemas propuestos. Claro que este aspecto solo puede apreciarse realizando el trabajo con lápiz y papel que nos piden Gardiner y Borovik.

Problem 17 The 4 by 4 “multiplication table” below is completely familiar.

1	2	3	4
2	4	6	8
3	6	9	12
4	8	12	16

What is the total of all the numbers in the 4 by 4 square? How should one write this answer in a way that makes the total obvious? $\triangle$

Figura 1. Problema del apartado «Estructura en aritmética» del capítulo 1

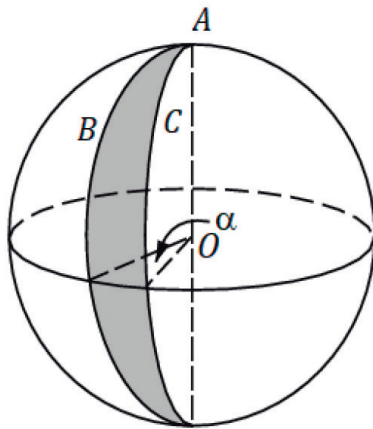


Figura 2. Como aplicación de la medida de ángulos en radianes, en el Problema 34 del Capítulo 1 se deduce la fórmula para calcular el área de un triángulo esférico en términos de sus ángulos

The chapter is largely devoted to underlining the need for mastery of a repertoire of instantly available techniques, that can be used mentally, quickly, and flexibly to analyse less familiar problems at sight. But it also seeks to emphasise *connections*. Hence readers should be prepared to challenge their previous experience, in case it may have led to methods and results being perceived too narrowly.

En el capítulo 2, «Arithmetic», se tratan sobre todo aspectos estructurales de la aritmética, con alguna pequeña excursión algebraica. Encontramos cuestiones típicas sobre reglas de divisibilidad, estructura de operaciones aritméticas (figura 3), el sistema de numeración decimal o el sistema de numeración binario, y otros problemas menos habituales sobre números de Fibonacci y números triangulares. El capítulo termina con una introducción a la distribución de los números primos, siendo el último problema una aproximación al teorema de los números primos.

The place of arithmetic in elementary mathematics can only be understood if one realises that, from upper primary school onwards, mathematics should no longer focus on more and more complicated calculations. Rather it moves beyond a set of procedures for grinding out answers, and should become a *structural laboratory*, where we gain insight into simple phenomena, and where we begin to appreciate how calculation can be managed, or tamed. The focus on structure leads in the main to matters which can be best expressed *algebraically*.

El capítulo 3, «Word Problems», es el más breve del libro, con una lista de tan solo 13 problemas. Como sugiere el mismo título, se trata de una pequeña colección de problemas clásicos (figura 4). Los autores sugieren que la resolución de este tipo de ejercicios juega un papel importante, aunque limitado, en el desarrollo de la habilidad de identificar estructuras matemáticas. El primer problema del capítulo sirve como perfecta introducción a estas ideas, pues se trata de una colección de veinte situaciones que representan el cálculo $3 - 1 = 2$.

Con esto se terminan los problemas «introdutorios». En el capítulo 4, «Algebra», Gardiner y Borovik abordan una pequeña selección de ideas y conceptos del álgebra, que suponen que en sí mismos resultarán familiares para la mayoría de lectores. Lo que creen que quizás no nos resulte tan familiar es la perspectiva desde la que se enfocan estas ideas. Por ejemplo, el primer apartado del capítulo explora sistemas de ecuaciones en los que se puede utilizar algún razonamiento de tipo simétrico para simplificar su resolución. También en la sección sobre polinomios, raíces y factores, encontramos aspectos poco trabajados

Problem 75 Work out how to calculate the square root of any square given in *base 2*. $\triangle$

Figura 3. Gardiner y Borovik analizan el algoritmo para calcular raíces cuadradas a mano en base 10, y comentan que en base 2 el algoritmo queda muy simplificado

Problem 89 A paddle-steamer takes five days to travel from St Louis to New Orleans, and takes seven days for the return journey. Assuming that the rate of flow of the current is constant, calculate how long it takes for a raft to drift from St Louis to New Orleans. $\triangle$

Figura 4. Este problema se menciona también en el prefacio del libro

en el aula, como la relación entre la factorización de ciertos polinomios y la búsqueda de números primos, o la relación entre diversas expresiones simétricas de las raíces de un polinomio cuadrático y sus coeficientes. En los apartados sobre números complejos y resolución de la ecuación cúbica los autores se desvían un poco del estilo «colección de problemas» del resto del libro. En este caso nos ofrecen un pequeño resumen histórico y algunas reflexiones sobre la relación entre ambas cuestiones, que se ilustran en los problemas propuestos (figura 5).

El capítulo 5, «Geometry», es el más extenso del libro y contiene además el doble de problemas que el resto de capítulos (90 problemas frente a unos 40 en cada uno de los otros). Según Gardiner y Borovik la geometría es la rama de las matemáticas elementales a través de la que resulta más fácil transmitir «la esencia» de la disciplina. Pero para conseguir este efecto el lector debe estar familiarizado con la idea de «demostración» y los elementos básicos del proceso deductivo. Afirman además que en la mayoría de ocasiones, la «esencia» contenida en un problema geométrico sólo va a poder experimentarse si se aprecia el problema dentro de una jerarquía lógica previamente definida, es decir, si contamos con una secuencia de propiedades, resultados y métodos que nos permiten ir deduciendo los distintos pasos que llevan a la solución. Por esta razón en el apartado «Euclidean Geometry: a brief summary» los autores ofrecen una posible formalización de la geometría escolar, de carácter semi-formal, que van desarrollando a través de los primeros 37 problemas del capítulo.

En el resto de apartados del capítulo 5 encontramos ocasionalmente algún resultado típico de la geometría que se estudia en nuestra educación secundaria (por ejemplo, deducir la fórmula para el área lateral de un cono o demostrar el teorema del coseno), pero

Problem 129 Divide 10 into two parts, whose product is 40.

Figura 5. Este problema, propuesto por Gardiner y Borovik en el apartado sobre números complejos del capítulo 4, aparece en el capítulo xxxviii del *Ars Magna* (1545) de Girolamo Cardano

la mayoría de aspectos tratados en los problemas no se trabajan habitualmente en las aulas (figura 6). En este sentido, los autores también hacen algunos comentarios sobre la enseñanza de la geometría en la educación secundaria. Opinan que las alternativas que se plantearon a partir de los años 60 (utilizar ideas de movimiento y transformación; concentrarse en vectores y álgebra lineal, etc.) no han resultado exitosas:

And although each approach has its attractions, none of the alternatives has succeeded in helping more students to visualise, to reason, and to calculate effectively in geometrical settings.

Gardiner y Borovik creen que la respuesta es una combinación de geometría estática (tipo la geometría euclidiana tradicional) y de geometría analítica:

Despite the lack of an accepted consensus, the experience of the last 50 years would seem to suggest that the most relevant framework for beginners at secondary level involves some combination of:

- *static*, relatively traditional Euclidean geometry, and
- Cartesian, or coordinate (analytic) geometry.

Con esto llegamos al último capítulo, «Infinity: recursion, induction and infinite descent», que definitivamente es el más técnico del libro. Aquí Gardiner y Borovik ofrecen introducciones y explicaciones más extensas de lo habitual dentro del texto principal, ya que se trata de un contenido que no suponen bien conocido para los lectores a los que se dirigen. La mayoría de problemas consisten en demostraciones (por inducción) de igualdades y desigualdades,

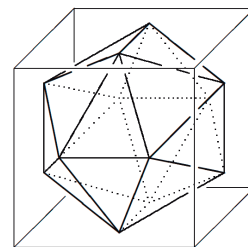
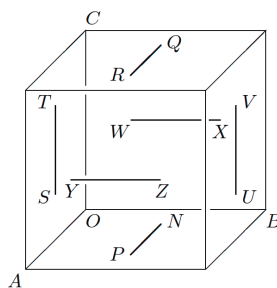


Figura 6. En el problema 189 se estudia una construcción del icosaedro regular utilizando coordenadas cartesianas

y en algunos casos nos guían hasta obtener resultados clásicos como la definición del número e o la divergencia de la serie armónica. También encontramos problemas menos típicos, por ejemplo sobre poliedros esféricos o árboles binarios. Concluyen el capítulo con una breve introducción al método de descenso infinito.

Dada la naturaleza del libro y los objetivos de los autores, éstos no ofrecen ningún tipo de conclusión o reflexión al final del texto. Lo único que encontramos es, al final de la sección de soluciones del capítulo 6, una cita al efecto de que es asunto del lector continuar su viaje matemático («Now do without me»). Personalmente me parece interesante la propuesta de Gardiner y Borovik, aunque me resulta imposible confirmar si consiguen o no su objetivo (entre otras cosas, aún no he terminado de resolver todos los ejercicios...). Los mismos autores nos ad-

vierten en el prefacio que, en condiciones ideales, una colección de problemas como esta debería de refinarse y mejorarse con tiempo y trabajo durante años.

A problem sequence such as ours should ideally be distilled and refined over decades. However, the best is sometimes the enemy of the good [...] Hence, as a mild contribution to this process of rediscovering the essence of elementary mathematics, we risk this collection in its present form. And we encourage interested readers to take up pencil and paper, and to join us on this voyage of discovery through elementary mathematics.

En cualquier caso, como mínimo vamos a encontrar ideas que pueden ayudarnos a enfocar de forma distinta algunos de los contenidos que trabajamos habitualmente en el aula. Y por otro lado tenemos horas de diversión aseguradas resolviendo problemas interesantes. Así que por mi parte, lectura recomendada.

Maite Aranés Maza

IES de Villanueva de Gállego,
Villanueva de Gállego (Zaragoza)
<maite.aranés@gmail.com>