SUMA+

Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas · **abril 2023**

– núm. 103 –

SUMA+ 103

Revista para la enseñanza y el aprendizaje
de las matemáticas · **abril 2023**

Artículos

Secciones

FESPM & Cía

Suma digital <revistasuma.fespm.es>

Enlaces referenciados en este número

EDITORIAL

La evaluación en un enfoque competencial del aprendizaje

El enfoque competencial del aprendizaje y la enseñanza no es una novedad de la LOMLOE (2020), pues ya estaba presente de manera explícita en la LOE (2006).

La principal novedad en la LOMLOE, respecto del enfoque competencial del currículo, es la definición del perfil de salida del alumnado al término de la enseñanza básica. Dicho perfil conecta las competencias clave con la realidad del alumnado y nos proporciona a los docentes un referente para el diseño de situaciones de aprendizaje relevantes y significativas. Un enfoque competencial del proceso de enseñanza y aprendizaje requiere definir lo que hay que aprender, cómo aprenderlo y para qué, en términos de competencias específicas, criterios de evaluación y saberes básicos; y reconocer al alumno como agente de su propio aprendizaje.

Por otra parte, los criterios de evaluación ya no vienen formulados a partir de contenidos sino a partir de las competencias específicas de cada área o materia que deben contribuir a la adquisición de las competencias clave.

En este marco, a los docentes nos preocupa y nos ocupa no solo el diseño de situaciones de aprendizaje sino también la evaluación de los aprendizajes del alumnado.

La LOMLOE establece el carácter de la evaluación de los aprendizajes en cada etapa educativa. En todos los casos determina que debe ser continua, lo que implica su carácter formativo, por lo que la metodología de evaluación también deberá ser continua y formativa.

> Artículo 20. Evaluación durante la etapa. (Primaria)
> 1. La evaluación del alumnado será continua y global y tendrá en cuenta su progreso en el conjunto de los procesos de aprendizaje.
>
> Artículo 28. Evaluación y promoción. (Secundaria)
> 1. La evaluación del proceso de aprendizaje de los alumnos y alumnas de educación secundaria obligatoria será continua, formativa e integradora.

> Artículo 36. Evaluación y promoción. (Bachillerato)
> 1. La evaluación del aprendizaje del alumnado será continua y diferenciada según las distintas materias. […]

Tras décadas en las que la evaluación, en la mayoría de las ocasiones, se ha reducido a una calificación numérica obtenida a partir de pruebas escritas puntuales sobre contenidos, nos conduce a reflexionar sobre algunos aspectos de la evaluación: ¿En qué consiste evaluar? ¿Cuál es el objetivo de la evaluación? ¿Qué técnicas e instrumentos utilizar para evaluar?

¿En qué consiste evaluar?

Evaluar no es examinar, no es calificar.

Evaluar es una tarea compleja, consiste en un proceso sistemático y riguroso de recogida de datos de manera que proporcione información continua y significativa del proceso de enseñanza-aprendizaje con la que se puedan formar juicios de valor y tomar las decisiones que permitan mejorar los aprendizajes del alumnado de manera progresiva. Así pues, la evaluación debe proporcionar al profesorado la información necesaria para poder valorar con precisión y rigor los logros progresivos del alumnado y ajustar su programación.

Los logros de los estudiantes no se pueden valorar si se utilizan únicamente los tradicionales exámenes. La calificación del examen no es sinónimo de evaluación, a lo sumo, es un medio que permite comprobar determinados conocimientos del alumno cuyo resultado se deberá añadir a la evaluación de las competencias obtenida mediante las técnicas e instrumentos previstos en el desarrollo de las situaciones de aprendizaje realizadas en el aula.

Aunque la evaluación cuantitativa se expresa numéricamente, se debe obtener después de un proceso riguroso de recogida y análisis de la información que permita obtener datos válidos y fiables.

En definitiva, la evaluación es un proceso que debe comenzar a la vez que el proceso de enseñanza y aprendizaje para que proporcione al docente la información continuada precisa que le permita tomar las decisiones inmediatas para corregir las dificultades o necesidades detectadas con el fin de mejorar el aprendizaje del alumnado. La evaluación, atendiendo al carácter formativo, debe ser descriptiva valorando el nivel de logro de las competencias y los objetivos previstos en la programación.

¿Cuál es el objetivo de la evaluación?

La evaluación del alumno es una parte esencial de su proceso de aprendizaje cuyo objetivo es la mejora de su aprendizaje. Así pues, debe tener un enfoque global, continuado y formativo. En el marco de la legislación vigente, la evaluación de los aprendizajes del alumno debe contribuir a la consecución de las competencias clave a través de las competencias específicas. Por ello, en la planificación de las situaciones de aprendizaje es imprescindible prever qué se quiere evaluar y cómo hacerlo con el fin de seleccionar la metodología, las actividades (iniciales, de aprendizaje, de evaluación, de refuerzo, de ampliación…), los recursos y las técnicas e instrumentos que permitan evaluar tanto el proceso de enseñanza como los logros de aprendizaje del alumnado.

Ahora bien, es fundamental marcar unos objetivos evaluadores coherentes con lo que queremos conseguir a través de las situaciones de aprendizaje. De lo contrario, los objetivos de evaluación se impondrán sobre los del diseño curricular. Si el objetivo es la consecución de las competencias y estas no se evalúan, nunca sabremos si se han alcanzado o no y se dejarán de trabajar en el aula.

¿Qué técnicas e instrumentos utilizar para evaluar?

La metodología de la evaluación debe ser, como la evaluación, continua y formadora, y deberá procurar que todo el alumnado, al finalizar su educación obligatoria, haya alcanzado las competencias clave.

El artículo 15 del Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria, en el apartado 10. El Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato, contiene el artículo 20, evaluación en términos similares.

> Se promoverá el uso generalizado de instrumentos de evaluación variados, diversos, accesibles y adaptados a las distintas situaciones de aprendizaje que permitan la valoración objetiva de todo el alumnado garantizándose, asimismo, que las condiciones de realización de los procesos asociados a la evaluación se adapten a las necesidades del alumnado con necesidad específica de apoyo educativo.

La evaluación formativa evalúa procesos, por ello es necesario disponer de datos continuos y rigurosos acerca de su desarrollo de manera que facilite la toma de decisiones inmediatas para la consecución de los objetivos previstos. La variedad de técnicas de recogida de datos e instrumentos de evaluación garantiza la posibilidad de obtener información completa en relación con los aprendizajes del alumnado en las diferentes situaciones de aprendizaje programadas. Ahora bien, las técnicas de recogida de datos deben estar planificadas y previstas en la evaluación de los aprendizajes y, deberían incluir, al menos, una relación clara y precisa de los objetivos y los datos que se van a recoger, así como los instrumentos y soportes que se van a utilizar para registrarlos.

Es evidente que es imposible realizar un listado exhaustivo de técnicas e instrumentos de evaluación. Así pues, expondremos brevemente algunas técnicas de recogidas de datos e instrumentos para una evaluación continua y formativa del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Técnicas de recogida de datos

La observación. Es una técnica que se aplica a diario, de modo más o menos sistemático, que nos puede ofrecer datos fiables y válidos para la evaluación si se realiza de forma consciente y planificada.

La entrevista y la grabación. Se puede considerar la entrevista como una conversación intencionada. Se puede plantear como una serie de preguntas formuladas y respondidas de forma oral en la que se pueden aclarar todas las dudas que surjan durante la conversación y profundizar en las respuestas obtenidas. Esta técnica presenta algunas dificultades como el tiempo que precisan para su realización, el afán del alumno por ser bien valorado o el modo de registrarlas. Es obvio que la mejor forma de registrarla es mediante la *grabación* de audio o vídeo, pero para ello es necesario contar con el permiso de la persona entrevistada e informarle detalladamente del uso que se hará de la grabación. Si no se puede realizar la grabación, es conveniente anotar la información más relevante por escrito, durante la entrevista o inmediatamente después para evitar interpretaciones alejadas de la realidad.

La encuesta. Se utiliza para obtener información sobre un tema determinado. Habitualmente se realiza mediante la aplicación de *cuestionarios*, orales o escritos. En la evaluación de los procesos de enseñanza y de aprendizaje, se suele concretar la aplicación de la encuesta (cuestionario) para obtener información acerca de las competencias y aprendizajes que el alumno ha alcanzado tras el trabajo desarrollado en un determinado periodo de tiempo.

El coloquio. Consiste en un intercambio oral entre varias personas sobre un tema prefijado. Su principal función es compartir opiniones, ideas, valoraciones, comunicar resultados... Esta técnica favorece la comunicación y resulta muy útil para conocer las ideas previas del alumnado antes de comenzar una situación de aprendizaje y es imprescindible en la coevaluación alumnado profesorado del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Trabajos del alumnado. El trabajo del alumnado debe incluir tareas y actividades variadas en las que sea necesario activar los saberes básicos que permitan valorar el nivel de adquisición de las competencias a través de los criterios de evaluación. Así pues, los criterios de evaluación constituyen el punto de partida en el diseño de las situaciones de aprendizaje.

Instrumentos de evaluación

Lista de control. Es un instrumento grupal que consiste en una tabla de doble entrada en la que se puede registrar, mediante indicadores, el logro de los aprendizajes, criterios de evaluación o competencias específicas del alumnado en el desarrollo de una situación de aprendizaje o en un periodo de tiempo determinado.

Escalas de valoración. Dentro del abanico de las escalas de valoración destacamos las *escalas descriptivas y las rúbricas*. Las escalas de valoración descriptivas son adecuadas para registrar, mediante expresiones verbales, el estado y el grado de consecución de las competencias de un alumno.

En las *rúbricas* se detalla con gran precisión la consecución de las competencias o los criterios de evaluación. Su uso es interesante cuando se quieren describir distintos niveles de complejidad de los indicadores de logro.

En los instrumentos de evaluación, la formulación de los indicadores de logro debe ser clara, precisa y unívoca, de modo que sean fáciles de evaluar y estén exentos de ambigüedades. Además, es recomendable establecer un número par de niveles (cuatro o seis) para valorar el progreso en relación con cada indicador.

En resumen, la evaluación de las competencias es un proceso complejo y determinante en el enfoque competencial del proceso de enseñanza y aprendizaje que no se puede llevar a cabo únicamente con los tradicionales exámenes.

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Comisión Ejecutiva

Presidente: **Julio Rodríguez Taboada**
Secretario General: **Agustín Carrillo de Albornoz Torres**
Vicepresidente: **Onofre Monzó del Olmo**
Tesorera: **Encarnación Amaro Parrado**
Secretaría técnica adjunta: **Bienvenido Espinar Cepas**
Secretaría de relaciones internacionales: **M.ª Claudia Lázaro del Pozo**
Revista Suma: **Iolanda Guevara Casanova**
Servicio de publicaciones: **Juan Martínez-Tébar Giménez**
Secretaría de actividades y formación del profesorado: **Juana M.ª Navas Pleguezuelos**
Secretaría de actividades con alumnos: **Francisco Haro Laguardia**
Secretaría de divulgación: **Juan Carlos Toscano Grimaldi**

Sociedades Federadas

Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática «Miguel de Guzmán»
Presidenta: **Sonsoles Blázquez Martín**
IES Pío del Rio Hortega, Avda. R. J. Montero 7, 47160 Portillo, Valladolid

Asociación Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)
Presidente: **Julio Rodríguez Taboada**
Facultade de Ciencias da Educación da Universidade da Coruña
Campus de Elviña, 15071 A Coruña

Euskadiko Matematika Irakasleen Elkartea «EMIE 20+11»
Presidenta: **Ana Fernández de Betoño Sáenz de Olamendi**
IES Miguel de Unamuno BHI, c/ Vicente Gonzalez de Etxabarri, s/n
01009 Vitoria-Gasteiz. 01009 Vitoria-Gasteiz (Araba)

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT)
Presidenta: **M.** Carme Vicens Andrés
C/ Alcalde Joaquim Jardí, 3. 3r 2a. 43780, Gandesa

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»
Presidente: **Salvador Guerrero Hidalgo**
Centro de Documentacion SAEM Thales, Facultad de Ciencias, Dpto Matemáticas, Campus Río San Pedro s/n, Torre Central 4º planta
11510 Puerto Real (Cádiz)

Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas
Presidenta: **Esther García Giménez**
IUMA, Edificio de Matemáticas, 1.ª planta, Universidad de Zaragoza, C/ Pedro Cerbuna s/n. 50009 Zaragoza

Sociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de Pedrayes»
Presidente: **Rubén Pérez Zamanillo**
IES Mata Jove, Plaza Club Patín Gijón Solimar, 33213 Gijón (Asturias)

Sociedad Canaria «Luis Balbuena Castellano» de Profesores de Matemáticas
Presidente: **Juan Francisco Hernández Rodríguez**
C/ La Isa, 33, Cercado Mesa. 38205 La Laguna (Santa Cruz de Tenerife)

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: **Serapio García Cuesta**
IES Universidad Laboral, Avda. de la Mancha s/n, 02006 Albacete

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidente: **Bienvenido Espinar Cepas**
Facultad de Matemáticas. Universidad de Murcia. Campus de Espinardo. 30100 Murcia

Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»
Presidente: **José Pedro Martín Lorenzo**
Centro Educativo Municipal, 2,ª planta, C/ San Juan nº 3A, 06400 Don Benito (Badajoz)

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»
Presidente: **José Luis Muñoz Casado**
Facultad de CC. Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid, Plaza de las Ciencias, 3, 28040 Madrid

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: **Carmen Espeso Ortiz**
Avda. del Deporte s/n. 39012 Santander

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidente: **Jesús Diego Rodríguez García**
IES Enrique Nieto. Departamento de Matemáticas, C/ Avenida de la Juventud, 4. 52005 Melilla

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira»-Matematika Irakasleen Nafar Elkartea
Presidente: **J. Javier Jiménez Ibáñez**
IES Alhama, Avda. Villar, 44. 31591 Corella (Navarra)

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas
Presidente: **José Javier Etayo Gordejuela**
Facultad de Educación. Despacho 3215
C/ Rector Royo Villanova, s/n. 28040 Madrid

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas «A prima»
Presidenta: **Clara Jiménez Gestal**
Facultad de Ciencia y Tecnología Edificio Científico Tecnológico, CCT; C/ Madre de Dios, 53. 26006 Logroño

Sociedade de Ensinantes de Ciencias de Galicia (ENCIGA)
Coord. Sección Matemáticas: **Iria Fernández Fontenla**
Facultade de Ciencias, Rúa Alfonso X o Sabio, s/n. 27002 Lugo

Societat Balear de Matemàtiques SBM-XEIX
Presidente: **Daniel Ruiz Aguilera**
C/ Miquel Capllonch, 30, 3A. 07010 Palma (Illes Balears)

Societat d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»
Presidente: **Onofre Monzó del Olmo**
Departamento de Didáctica de la Matemática, Apdo. 22045. 46071 València

LOS artículos

En 9 caben todos. Un límite a cámara lenta

Montserrat Prieto Morera

SUMA+ núm. 103
pp. 11-19

Artículo recibido en septiembre de 2020 y aprobado en junio de 2022

Comprender la existencia de números irracionales trascendentes, o no claramente algebraicos, es una tarea axiomática en la enseñanza secundaria y el bachillerato. En estos niveles, solo procede generalizar varios ejemplos y, en ciertos casos, recurrir al apoyo histórico. Con el uso de buenos programas informáticos aparecen numerosas estrategias plásticas y especialmente motivadoras. Las más interesantes son las que convierten al alumno en el actor principal de su aprendizaje. Un número irracional, con alta probabilidad de trascendencia, cuya justificación completa excede a la enseñanza secundaria, pero que podemos abordar en las aulas con un buen software.

Palabras clave: Constantes, Geometría, Irracional, Recurso Didáctico, Motivación.

They all fit in 9. A limit in slow motion // Understanding the existence of transcendent, or not clearly algebraic, irrational numbers is an axiomatic task in middle and high school. At these levels, it is only appropriate to generalize several examples and, in some cases, to draw on historical support. With the use of good computer programs numerous accessible and specially motivating strategies appear. The most interesting are those that make the students the main actors in their own learning. An irrational number with high likelihood of being transcendent, whose full justification exceeds secondary education, can be approached in classrooms with a good computer package.

Keywords: Constants, Geometry, Irrational, Didactic Resource, Motivation.

Los problemas pequeños o grandes de la matemática son y han sido siempre retos, la mayoría de las veces trabajosos, pero indudablemente han muy sido adictivos gracias a la fascinación de una ciencia que quiere rozar lo perfecto. A parte de admirar el trabajo de los grandes pensadores y reconocer su esfuerzo, inteligencia y, en muchos casos, grandeza, nuestra ciencia tiene una vocación eterna: si algo está demostrado, siempre será una piedra valiosa sobre la que construir o tener muy en cuenta en posteriores desafíos. Tremendo.

A una escala más modesta los que la explicamos sabemos que, curiosamente, tiene una innegable atracción por la belleza (aquí estoy viendo la sonrisa displicente de mis alumnos, o veladamente una socarrona carcajada al darme la vuelta…). Pues ¡sí!, hay demostraciones, todas geniales, que son farragosas o sencillas, agradables o tediosas, sorprendentes o aburridas, pero algunas decididamente son bellas…, es decir sencillas, agradables y sorprendentes. Muchas veces la belleza se consigue en el futuro, cuándo se cierra el círculo de la perfección y el conocimiento, es decir con mucho trabajo de muchos sin olvidar el empeño y ciertas dosis de genialidad.

Muchos sencillamente admiramos, tratamos de comprender y estamos atrapados en resultados que nos fascinan por diferentes razones. Siempre están ahí, retándonos, divirtiéndonos, ayudándonos a conciliar el sueño y muchas veces enseñándonos a «tirar la toalla» porque un nuevo hallazgo acaba de demostrar que nuestro planteamiento era erróneo o que se ha conseguido cerrar el círculo de la perfección correspondiente.

He profundizado en un problema ya resuelto, he procurado hacerlo más asequible para utilizarlo en el aula, lo he explorado con la ayuda de GeoGebra y os lo cuento… me atrapó hace tiempo. ¿A que es bonito?

Los inicios

Estuve suscrita durante un tiempo a la revista *American Monthly;* en aquellos tiempos buscaba cualquier excusa para auto-forzarme a trabajar en inglés. El artículo de R.S.Pinkham, «Mathematics and Modern Technology»[1] me interesó, en principio, porque trataba de estimular el uso de las tecnologías de la información (entonces eran modernas) para conseguir llegar más allá en la enseñanza de la matemática. Es decir, partiendo de tres ejemplos sobre series infinitas convergentes, se preguntaba precisamente cómo conseguir mejorar la expresión decimal de la suma. Para ello utilizaba métodos que permitían aprovechar las potencialidades de un buen programa informático. Para la matemática teórica clásica, cuyo soporte eran las máquinas de cálculo, este era un asunto menor. Si alguien necesitaba un límite, podía disponer de suficientes teoremas, paciencia y calculadoras programables para lograrlo. El primer ejemplo llamado «una construcción Kepleriana» atrajo más mi interés por su carácter geométrico y porque definía un irracional entonces desconocido para mí. Utilizando el criterio integral, operación que realizaba con un software adecuado, acotaba el límite y conseguía mejorar el número de sus decimales correctos.

La mencionada «construcción Kepleriana» aunaba las formas planas perfectas con el número irracional, el 8,700036625… No hay nada sorprendente en que encontremos irracionales, están por todas partes y hay muchos más que racionales. Aparte de la novedad, me sorprendía que no tuviera nada que ver con π u otras constantes conocidas. De forma intuitiva la construcción asemejaba al proceso de inscribir, de forma creciente, los infinitos *n*-ágonos regulares en una circunferencia, solo que en este caso aumentando el radio de la misma, pero cada vez en menor medida y cada vez más despacio… luego el proceso tendría fin. Claramente multiplicando infinitos cosenos (aquí me estoy adelantando… lo sé) nada racional debe esperarse y al estar la convergencia teóricamente asegurada, llegaremos a una constante (es decir hay límite) y es, además, un número probablemente trascendente[2 y 7].

Ya he comentado que el artículo utilizaba este ejemplo con un fin preciso pero a mi me suscitó otras cuestiones. Como profesora de Enseñanza Secundaria estaba acostumbrada solamente a justificar a los alumnos la existencia de irracionales algebraicos[3] como … o el número áureo. Respecto a los trascendentes, los estudiantes conocían a π (como mucho históricamente), les proporcionábamos algún ejemplo de decimal no-periódico ilimitado y, por supuesto, en la etapa del bachillerato, el número *e*. Es decir, un número nuevo, justificable geométricamente, posiblemente trascendente[7], visual, y apoyado por la tecnología… Por supuesto no teníamos acceso a buenos software matemáticos (por ejemplo Mathematica), pero ¡ya llegaría!, así que empecé a buscar información histórica y teórica sobre 8,700036625…

Los problemas pequeños o grandes de la matemática son y han sido siempre retos, la mayoría de las veces trabajosos, pero indudablemente han muy sido adictivos.

La construcción

A partir del círculo de radio 1 se van encajando ordenadamente los polígonos regulares (figura 1). Es decir, círculo de radio 1 y luego triángulo equilátero circunscrito, después circunferencia circunscrita al triángulo, continuando con el cuadrado circunscrito a la circunferencia anterior y luego una nueva circunferencia que estará, a su vez, inscrita a un pentágono regular y así sucesivamente. Cada polígono circunscribe a un círculo y a su vez está inscrito en el círculo siguiente. Es sencillo ver que para un polígono cualquiera de n lados, los radios r (círculo inscrito) y R (círculo circunscrito) se relacionan:

$$r = R \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

O lo que es lo mismo $R = \dfrac{r}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}$

En este caso $\dfrac{\frac{2\pi}{3}}{2} = \dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$ y en general $\dfrac{\frac{2\pi}{n}}{2} = \dfrac{2\pi}{2n} = \dfrac{\pi}{n}$

Así, infinitos polígonos encajados con sus circunferencias correspondientes tiene la relación:

$$K = \frac{R\ \mathit{final}}{r\ \mathit{inicial}} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \ldots} =$$

$$= \sec\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sec\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sec\left(\frac{\pi}{5}\right) \ldots = \prod_{n=3}^{\infty} \sec\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

donde el símbolo Π, desde 3 a ∞, indica el producto infinito.

Utilizando logaritmos (con sus magníficas propiedades) podemos pasar una serie infinita convergente:

$$K = \exp\left[\sum_{n=3}^{\infty} \ln \sec\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]$$

Kasner y Newman (1989) y, previamente, Haber (1964) habían estimado que $K=12$, sin embargo está probado el valor: $K=8{,}7000366252081945\ldots$ Al final se trata de la convergencia de una suma infinita y en aquel artículo se aseguraban nueve cifras decimales correctas.

En <https://oeis.org/A051762> se encuentra una expresión decimal generosa de K a base de expandir el producto infinito.

Como el planteamiento es sencillo, probé con una hoja de cálculo (fue un descubrimiento en aquellas épocas pues la herramienta enganchaba a los alumnos y, por fin, estaba en las aulas) y decidí que, a pesar del espejismo en las primeras iteraciones, la tarea era imposible; recuerdo que no pude alcanzar los decimales del artículo. Una convergencia lenta, muy lenta; no es de extrañar que Christoffel Jacob Bouwkamp (1965)[5] buscara formas de acelerarla. Me resultó curioso observar que la constante funciona como un factor, es decir si comenzamos con un

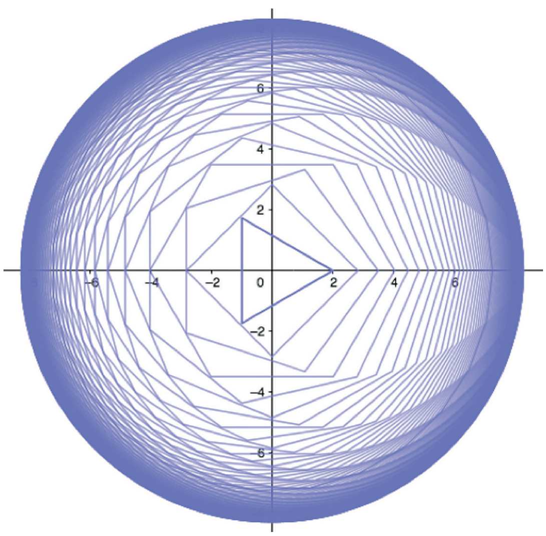


Figura 1. Construcción

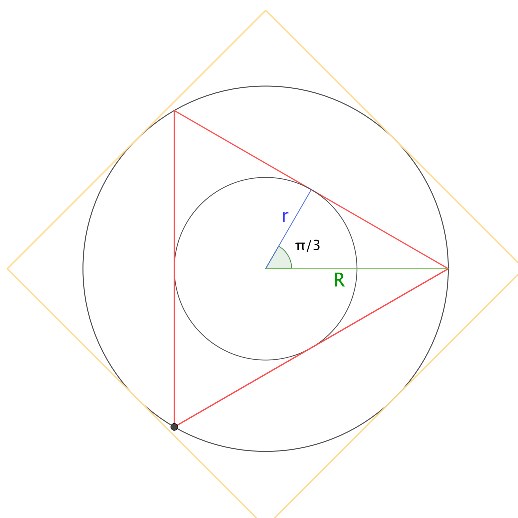


Figura 2. Explicación

círculo de radio *r*, cualquiera, podemos rellenar una parte del plano con polígonos regulares y circunferencias hasta alcanzar un radio 8,7000366252… veces el radio inicial y recíprocamente si comenzamos en una circunferencia de radio *r* y hacemos el proceso al revés, es decir inscribiendo primero un triángulo, luego la circunferencia inscrita, después el cuadrado inscrito etc., llegaremos a $r \cdot 1/8{,}7000366252\ldots$, pues aparece, inversamente, el mismo producto infinito.

Por ello no me sorprendió que Steven R. Finch en su libro *Mathematical Constants* (2003), llamara *constante de Kepler–Bouwkamp* a su inverso, es decir 1/8,7000366252… Me gustó el homenaje a Kepler. Efectivamente la construcción recuerda al modelo cosmográfico de nuestro sistema solar que fascinó a Kepler utilizando los poliedros regulares y sus correspondientes esferas circunscritas. Por supuesto los poliedros no estaban ordenados, de hecho utilizó al tetraedro para alejar las órbitas menores de las mayores y así saltar de la órbita de Marte a la de Júpiter. Obviamente a Kepler le gustaban las construcciones bellas pero en este caso llegó a ser consciente de que el asunto no encajaba.

Por cierto que una de las fórmulas que obtuvo el matemático Bouwkamp[4] para acelerar la convergencia, tiene que ver, efectivamente, con π (aunque obtuvo otra que convergía más rápidamente relacionada con la función Z de Riemann y la lambda de Dirichlet).

La construcción geométrica es muy bonita, sencilla y plástica. La he realizado con distintos programas de geometría dinámica. Reseño aquí exclusivamente la más reciente utilizando GeoGebra (GeoGebra Classic 6).

Así ha dormido el problema en mi carpeta de trabajos con esporádicas intervenciones. No recuerdo exactamente cuando, siempre en veranos, me planteé describir la primera curva que se observa (es decir la curva formada por los segundos vértices de cada polígono).

Aquí presento una pequeña casuística en el aula y fuera de ella.

Los infinitos polígonos con GeoGebra

No descubro nada nuevo… GeoGebra es un software matemático, frase que lejos de ser una redundancia es el mejor de los adjetivos. Aparte de plástico y manejable es especialmente riguroso; la primera vez que mis alumnos construyeron raíz cuadrada de dos con las herramientas del programa (regla y compás) fue una agradable sorpresa ver que a cada golpe de zoom aparecía una cifra decimal correcta de la expresión ilimitada del número. Los más juguetones «colgaban» el ordenador… (¿2007?). En resumen, constituye una herramienta intuitiva en el aula sin menospreciar su uso más experto.

Las imágenes han sido elaboradas, finalmente, con la versión Geogebra Classic 6.

Un escollo que me ocurrió en la construcción con los alumnos: GeoGebra no admite que un polígono regular se pueda interpretar como una línea poligonal cerrada susceptible de limitar un área o, todo lo contrario, cosa que no le ocurre al círculo pues existe el comando circunferencia. Es decir, al ser siempre un área, la herramienta polígono regular no rastrea los polígonos encajados (con opacidad 0 cada uno tapa al anterior pues el área es blanca). Para resolverlo tuve que darles los parámetros de una opacidad variable y decreciente (figura 3). Me interesaba especialmente que con el simple comando *Polígono Regular* y la explicación de la figura 2 fueran encajando polígonos y consiguieran algo parecido a la figura 4.

Basta proporcionar el comando:

$$\text{c = Producto(Secuencia(cos }(\tfrac{\pi}{\text{n}})\text{,n,3,a+2))}$$

que calcula los productos de cosenos de $\frac{\pi}{n}$ desde 3 hasta el valor $a+2$ (siendo a el deslizador), para ir conociendo los radios de las progresivas circunferencias, que al haber utilizado cosenos es $1/c$. Así herramienta **Polígono (regular)** de segmento $P(1/c,0)$, $Q\ (\frac{1}{c}\cos(\frac{2\pi}{a+2}),\frac{1}{c}\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{a+2}))$ y $a+2$ es fácil de deducir pues utiliza las coordenadas de un punto Q sobre una circunferencia conocidos radio y ángulo. Activando el rastro se consigue la construcción.

Si hubiera utilizado las secantes (me pareció más rebuscado), hubiera evitado el valor $1/c$.

Un intento de acelerar la convergencia

Si utilizamos solamente polígonos impares podría parecer, en un principio, que la convergencia se acelera. Realmente lo que conseguimos es que las iteraciones del deslizador, para un valor a del mismo, sean del orden $2a+1$. Lógicamente para cada valor de $2a+1$, acumulamos *todos* los productos consecutivos anteriores, en caso contrario evaluaríamos otro límite, y obtenemos el polígono regular de $2a+1$ lados.

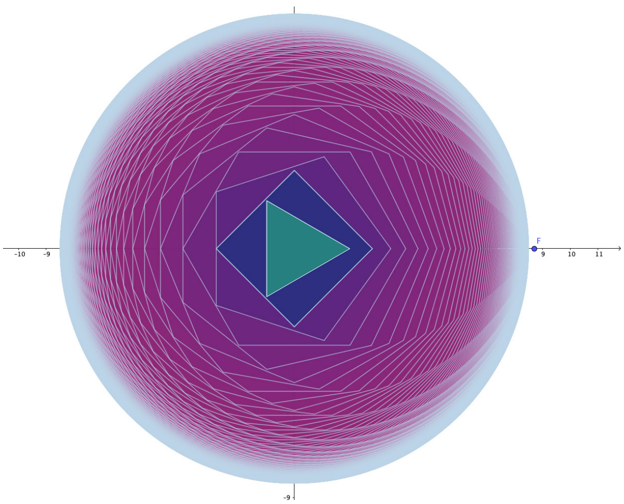


Figura 3. Solo la progresión de polígonos. Color dinámico con opacidad decreciente

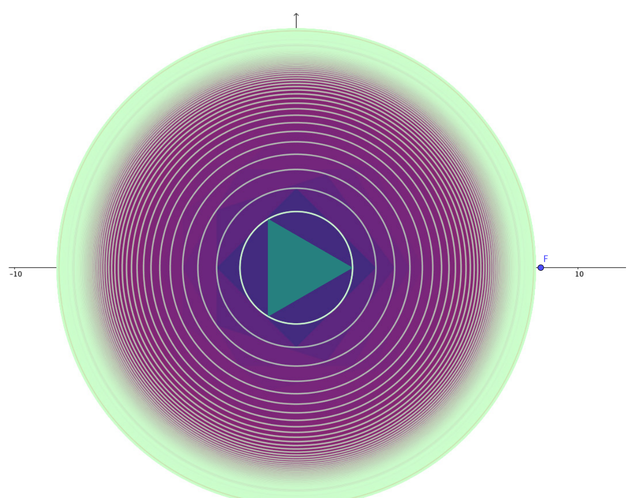


Figura 4. Con sus circunferencias

Iteraciones	Radio
$a=16$	6,66
$2a+1=33$	7,51
$a=33$	7,57
$2a+1=67$	8,09

Tabla 2

Pero vuelve a observarse el espejismo, la diferencia en 2000 iteraciones se reduce a una centésima, de 8,68 a 8,69. Es lo que tienen los límites lentos.

La curva de los primeros vértices poligonales

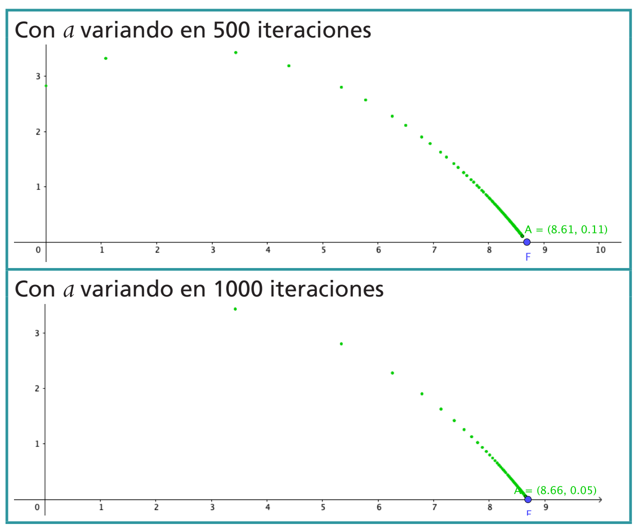
Está definida por sus ecuaciones paramétricas en función de los distintos valores del producto infinito c. Ecuación paramétrica de la curva:

$$A = (\frac{1}{c})\cos(2\cdot\frac{\pi}{a+2}),\frac{1}{c}\mathrm{sen}(2\cdot\frac{\pi}{a+2}))$$

Es decir los mismos puntos que se utilizan para definir el lado de cada polígono regular.

El rastreo, al doblar las iteraciones, se hace menos preciso visualmente y, por otra parte, no se produce una gran mejora. Las ordenadas disminuyen en 6 centésimas y las abscisas se incrementan en 5 centésimas.

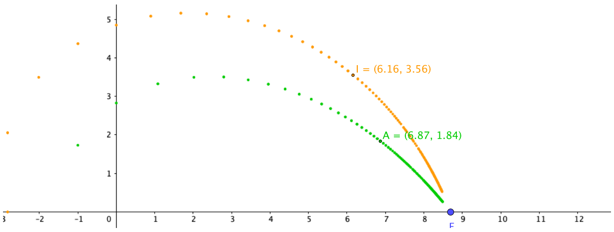
VISUALIZACIÓN 1:



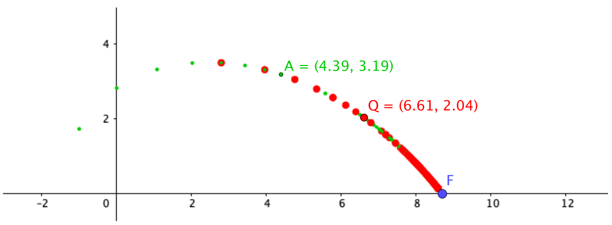
Figuras 5 y 6

VISUALIZACIÓN 2:

Los vértices *segundo* y *tercero* de cada polígono: Claramente la segunda curva (en verde) converge más lentamente, si cabe, que la primera



La animación simultánea, del caso general y del citado en el apartado «Un intento de acelerar la convergencia», de los primeros vértices poligonales es simpática. Los correspondientes a los polígonos impares, en rojo, son perseguidos por los primeros vértices, en azul, de todos los polígonos



Figuras 7 y 8

Una imagen de la constante Kepler-Bouwkamp

Como he comentado más arriba, si hacemos el proceso en sentido inverso, comenzando con una circunferencia de radio 1, terminaremos en el radio 1/8,700036625… = 0,114942044…

Dicho irracional llamado constante de Kepler-Bouwkamp es, en consecuencia, el producto de cos $\frac{\pi}{n}$ desde 3 a ∞, y se representa utilizando los mismos comandos que en la construcción expansiva.

La ayuda geométrica

La búsqueda de la ecuación de la curva de los primeros vértices, me indujo a intentar un comportamiento análogo, es decir, puntos acercándose al límite pero con los ángulos disminuyendo por mitades (en vez de usar el factor coseno).

Si nos situamos en un punto cualquiera, en el gráfico es A = (8,7; 0), y elegimos otro punto a su izquierda, en el gráfico el origen de coordenadas B = (0,0), al trazar la circunferencia c (de centro B y que pasa por A), el punto C sobre ella representa a todos los ángulos centrales del proceso. Basta dibujar la circunferencia d (de centro A pasando por C) para que el lugar geométrico del punto intersección, H, de las bisectrices del ángulo $\widehat{CAE}$ (E punto de corte de d con OX) con la circunferencia d, nos proporcione una curva muy similar a la buscada y sospechosamente parecida a un Pétalo.

Por supuesto representé el 4-pétalo de ecuaciones:

$$x = 8{,}7\cos(2t)\cos(2t)$$
$$y = 8{,}7\cos(2t)\,\mathrm{sen}(2t)$$

para trasladarlo y obtener el Pétalo centrado en A (figura 12).

Pero no hacía falta… Geogebra, aparte de detectar el **Lugar** (lugar1 en verde) reconocía su ecuación proporcionando el 4-pétalo (ec1 en azul claro):

Podría ser… la aproximación utilizada para la constante 8,7000366… en las vistas gráficas superior e inferior (A y F son el mismo punto) es 8,7. No descarto la necesidad de un conocimiento más experto de GeoGebra, pero el verdadero objetivo era su uso como herramienta … que es excelente.

Actualización: El primo análogo de la constante Kepler-Bouwkamp

En agosto de 2006 se publicó un artículo firmado por Adrian R. Kitson[6], relacionado con la constante que nos ocupa. En él se demuestra que el producto infinito de las secantes de $\frac{\pi}{p}$ con *p primo mayor que 2* (o lo que es lo mismo para primos impares) es, curiosamente, 3,1965944300… Con una simple división (8,7000366252…/3,1965944300…) se obtiene que el producto infinito de las secantes de $\frac{\pi}{n}$ con *n* no-primo mayor que 2 (4, 6, 8, 9…) es 2,7216579443… El inverso 1/3,1965944300=

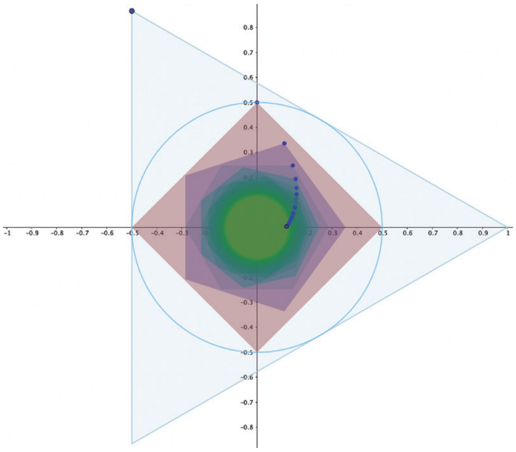


Figura 9. Comenzando en 1 terminamos en 0,114942…

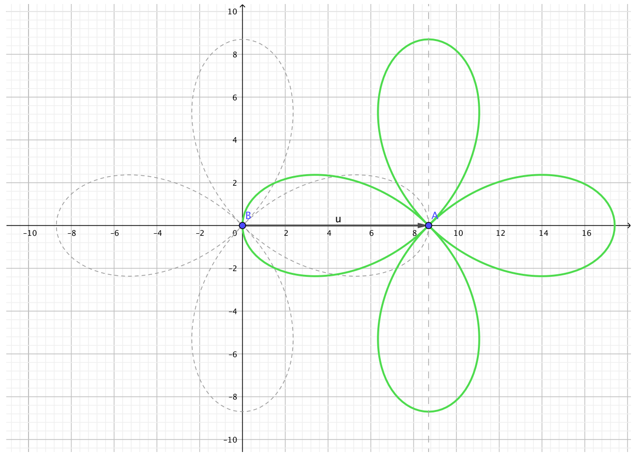


Figura 12

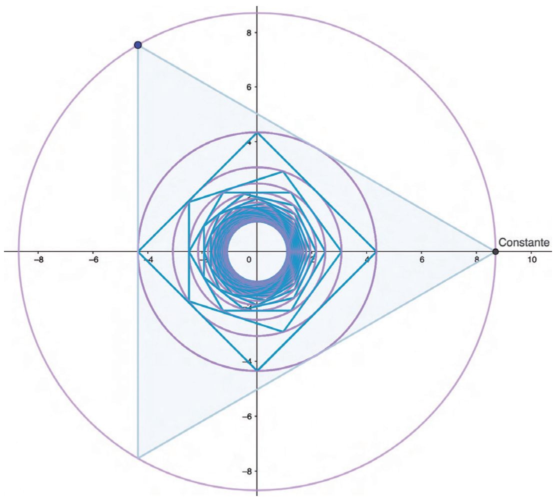


Figura 10. Comenzando en 8,700036…terminamos en 1

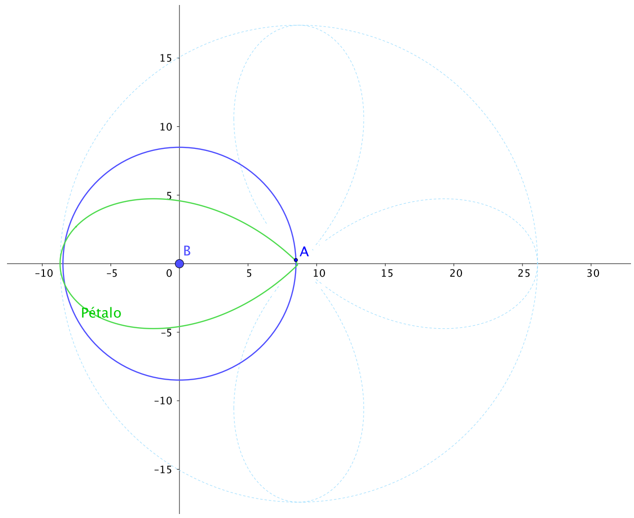


Figura 13

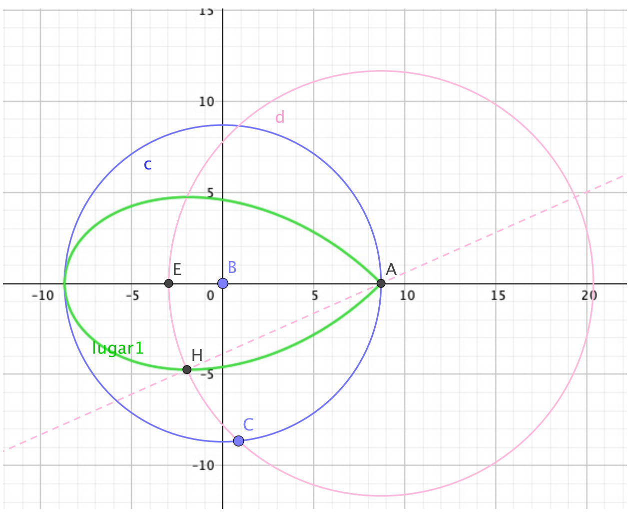


Figura 11

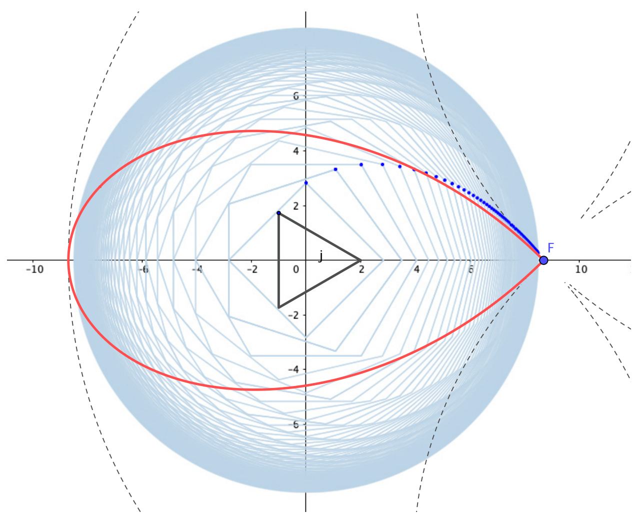


Figura 14. A partir del eneágono se atraviesa el Pétalo

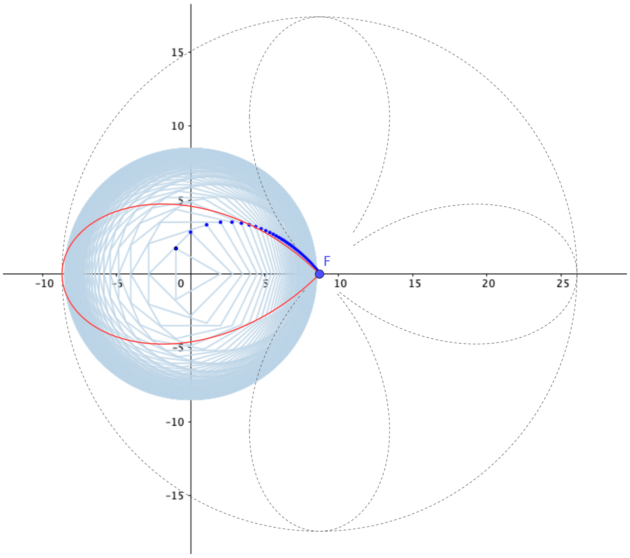


Figura 15. Vista más global

$=0{,}3128329295\ldots$ es la constante llamada «primo análogo de la Kepler-Boukamp». Como no existe una iteración para obtener números primos, termina aquí el juego. Una pena pues sería visualmente bonito y además el autor habla de una rápida convergencia.

Conclusiones

La existencia e inmensidad de los números irracionales es un concepto con un sesgo muy teórico en la etapa de bachillerato. Muchos profesores de este nivel hemos intentado apoyarnos en los, cada vez mejores, programas que iban surgiendo para que el alumnado cotejara sus cifras, entendiera las fórmulas que los generan y se convencieran de que los límites ayudan a entenderlos.

Esta actividad con el alumnado pretende que, de una forma sencilla, se encuentren con la constante probablemente trascendente 8,700036625… de una forma visual, intuitiva y utilizando GeoGebra (independientemente su experiencia en este programa).

Durante el proceso se afianza el concepto de límite con el apoyo de una geometría muy básica.

Sin necesitar la introducción de coordenadas polares, se refuerzan las funciones trigonométricas y su utilidad para expresar las coordenadas de un punto sobre la circunferencia de radio dado.

Los primeros polígonos (hasta el hexágono por ejemplo) se dibujan sin ayuda del profesor con las herramientas del programa. El desarrollo posterior necesita un cambio de estrategia.

El razonamiento de que los radios crecen dividiendo por el coseno correspondiente es muy asequible para este nivel.

Una consulta de la constante en internet es muy pertinente, tiene la ventaja de que se les ocurre a ellos y reafirmará las suposiciones de convergencia.

> La estrategia más importante es el contagio, profesor-alumno y viceversa, de la fascinación que produce una ciencia en general.

La idea del deslizador, *al proporcionarles la fórmula del producto infinito*, surge de forma natural. Es importante que la cotejen con su construcción previa para valores pequeños.

En algún momento aparecerá el asunto de que los polígonos son superficies y sus áreas, al rastrear, van ocultando la construcción. Basta impedir que estos se visualicen para ver que el rastreo de las circunferencias nos aproxima limpiamente al valor de la constante y que, sobretodo, no la rebasa. No obstante, a demanda, se les puede proporcionar el comando Poligonal editando los vértices de la construcción.

No es complicado que muestren la curva de los segundos vértices de cada polígono y que intenten estimar su ecuación con las herramientas que proporciona GeoGebra.

El resto, que excede a la propuesta con el alumnado, se incluye aquí como colofón. Aunque prescindible, tiene el interés de que la idea principal se ejecuta utilizado estrictamente las herramientas del programa y posteriormente es contrastada con las ecuaciones de una curva conocida.

A modo de reflexión

Divertirse matemáticamente en las aulas, o fuera de ellas, me parece un objetivo loable en sí mismo y para ello vale cualquier estrategia. En el primer caso, necesitamos planear metodológicamente las actividades complementarias y/o innovadoras porque el tiempo es nuestro peor enemigo. De todos modos, la estrategia más importante es el contagio, profesor-alumno y viceversa, de la fascinación que produce una ciencia en general.

Referencias bibliográficas

Finch, S. R. (2003), *Mathematical Constants,* Cambridge University Press, Cambridge.

Carrillo de Albornoz, A., e I. Llamas (2009), *GeoGebra. Mucho más que geometría dinámica,* RaMa, Madrid.

Montserrat Prieto Morera
IES Antonio García Bellido, Léon
<montseprm@gmail.com>

1 *Amer. Math. Monthly,* nº 103, 539-545, (1996).

2 Así se llama al irracional que no se puede conseguir resolviendo una ecuación algebraica con coeficientes enteros.

3 Los irracionales que se obtienen al resolver ecuaciones algebraicas con coeficientes enteros.

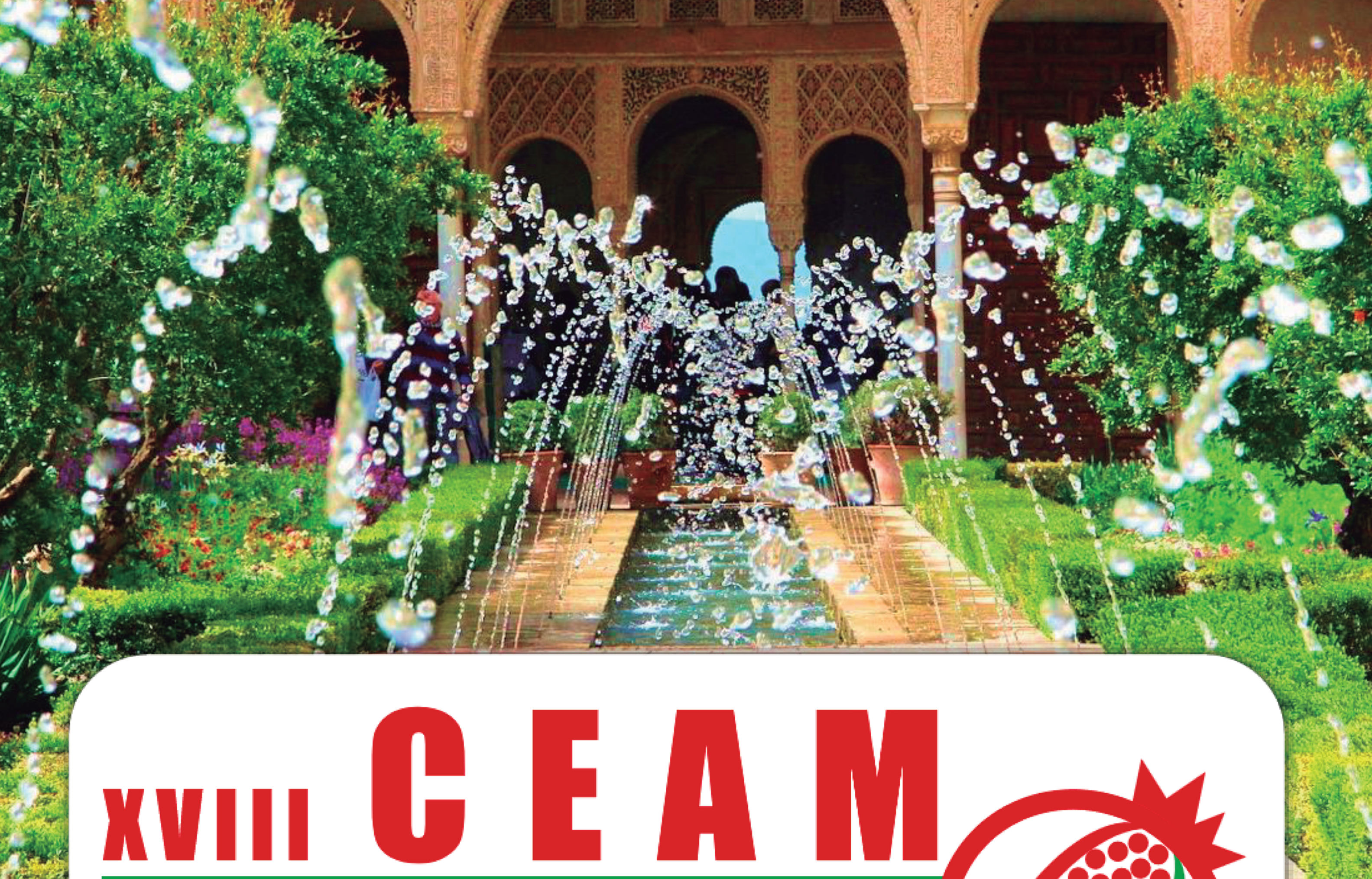
4 *An infinite product by C. J. Bouwkamp* (Communicated at the meeting of October 31, 1964)
<https://core.ac.uk/reader/82376060>

5 Christoffel Jacob Boukamp alcanzó los decimales correctos 8,7000366252081945… con el ordenador IBM 1620 de la *Universidad Tecnológica de Eindhoven*.

6 *The prime analog of the Kepler-Boukamp constant*, Kitson, Adrian R., Institute of Fundamental Sciences, Massey University, <https://arxiv.org/pdf/math/0608186.pdf>.

7 La naturaleza de la constante no está demostrada. Véase <https://www.wolframalpha.com>.

En <http://tcs.nju.edu.cn/wiki/index.php/Mathematical_constant> perteneciente al Department of Computer Science and Technology de la Universidad de Nanjing, se afirmaba en 2020 que $1/K$ era trascendente, por tanto también K. No parece muy algebraica pero para afirmar que es trascendente ¡hay que demostrarlo! Esa dirección web ha desaparecido ahora… cosas de la red.



XVIII CEAM

ENSEÑAR MATEMÁTICAS CON SENTIDO

Un viaje apasionante

Granada, del 3 al 5 de Julio de 2023

https://thales.cica.es/xviiiceam/

ceam2023@thales.cica.es

ORGANIZA:

S.A.E.M. THALES

COLABORAN:

UNIVERSITAS GRANATENSIS 1531

MAGISTER VESTER UNUS EST CHRISTUS

JUNTA DE ANDALUCIA

CASIO División Educativa

Stranger Numbers, una gamificación del cálculo mental

Isabel Izquierdo León

SUMA+ núm. 103
pp. 21-28
Artículo recibido en *Suma* en abril de 2021 y aceptado en noviembre de 2021

En mi experiencia diaria, compruebo que la mayoría de mis alumnos y alumnas de los últimos cursos de Primaria tienen dificultades a la hora de realizar cálculos sencillos, algo que les provoca una falta de seguridad que se traslada a toda la asignatura. Tras 4 años trabajando el cálculo mental a través de la gamificación, puedo decir que mis niños han mejorado notablemente no solo en el cálculo mental, sino en toda el área. La gamificación, en mi caso, ha resultado ser el mejor método para enseñar el cálculo mental ya que la motivación, el aumento progresivo de la dificultad y el trabajo cooperativo son sus elementos fundamentales.

Palabras clave: Cálculo mental, Gamificación, Ludificación, Educación Primaria.

***Stranger Numbers*, a gamification of mental calculation** // In my daily experience, I find than most of my students in the last years of Primary School have difficulties when carrying out simple calculations. This causes them insecurity in the whole subject. After four years working on mental calculation through gamification, I can say that my children have improved remarkably not only in mental calculation, bur in the whole subject. Gamification, in my case, has been the best method to teach mental calculation because motivation, the progressive increase in difficulty and cooperative work are its fundamental elements.

Keywords: Mental Calculation, Gamification, Primary Education.

El informe del Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes o Informe PISA se llevó a cabo por primera vez en el año 2000. En estos 18 años transcurridos, ya que el último informe PISA es de 2018, los resultados de matemáticas en España apenas han cambiado. Lo que sí ha cambiado es la ley educativa, la LOE en 2006 y la LOMCE en 2013, sin contar la LOMLOE de enero 2021. Dos reformas educativas y los resultados en matemáticas siguen estando por debajo de la media de los países de la OCDE y de la Unión Europea (media de España, 481 puntos; media de la OCDE, 489 y total de la UE, 494).

Estos resultados del Informe PISA los veo en mi día a día como maestra de sexto curso de Primaria. Con frecuencia me encuentro con alumnos que, a pesar de obtener notas altas en matemáticas durante los primeros cursos de Primaria, al llegar a sexto tienen dificultades en el área. Una de las causas se encuentra en los errores que comenten cuando realizan cálculos ya que muchos niños no recuerdan bien las tablas de multiplicar y no tienen interiorizadas la multiplicación y la división. Esto les supone una falta de seguridad y una baja autoestima cuando tienen que estudiar y hacer ejercicios matemáticos y crea en muchos alumnos frustración e inseguridad a la hora de afrontar esta asignatura en Secundaria.

A lo largo de mi experiencia como maestra (20 años) he comprobado que cuanto más competente es un niño en el cálculo mental, mayor es su rendimiento y mejores sus resultados en matemáticas. En mi opinión, el cálculo mental es esencial para poder dominar con agilidad conceptos matemáticos más complejos y para la adquisición, por parte del alumno, de la confianza en sí mismo en esta área.

Pero, ¿cómo trabajar en clase el cálculo mental de una forma que no sea rutinaria, de una manera atractiva y que fomente la participación activa? En mi caso, a través de la gamificación, más concretamente, a través de *Stranger Numbers*, una gamificación de cálculo mental que llevo a cabo desde hace dos años con mis alumnos de 6.º de Primaria basada en la serie *Stranger Things*.

Figura 1. Logo de la gamificación

La gamificación permite aumentar la dificultad progresivamente, evita la frustración, promueve la participación activa, fomenta el trabajo cooperativo y la cohesión de equipo.

¿Qué es gamificar?

Brian Burke, experto en la aplicación de la gamificación en el sector empresarial y autor del libro *Gamify, How gamification motivates people to do extraordinary things,* define la gamificación como «el uso de diseños y técnicas propias de los juegos en contextos no lúdicos con el fin de desarrollar habilidades y comportamientos de desarrollo».

Para Sebastián Deterding, investigador de diseño de juegos y uno de los primeros en usar este término para la educación, «la gamificación es un factor fundamental para aumentar la motivación de los usuarios. Motivar es despertar la pasión y el entusiasmo de las personas para contribuir con sus capacidades y talentos a la misión colectiva».

Además de motivar el aprendizaje, la gamificación permite aumentar la dificultad progresivamente, evita la frustración, promueve la participación activa, fomenta el trabajo cooperativo y la cohesión de equipo.

Por todo esto me decidí a gamificar el cálculo mental partiendo de los gustos y preferencias de mis niños, y por eso la elección de la serie *Stranger Things*. Además *Stranger Things* me daba la oportunidad de que la gamificación creciera cada curso como hace la propia serie con el estreno cada uno o dos años de nuevas temporadas.

¿En qué consiste *Stranger Numbers*?

La narrativa de la primera temporada —sigamos con el lenguaje cinematográfico— de *Stranger Numbers* parte de que una extraña criatura denominada demogorgon, se ha instalado en el Mundo del Revés del colegio y ha abierto seis portales por los cuales él pretende salir y sembrar el caos en el colegio y en el pueblo.

Para impedírselo, cada portal está vigilado por los seis protagonistas de *Stranger Things*: Eleven, Dustin, Mike, Lucas, Max y Will (figura 2). En cuanto se cierren los seis portales, el demogorgon desaparece.

En *Stranger Numbers 2*, el demogorgon ha capturado a los familiares y amigos de los seis chicos protagonistas y los esconde en el Mundo del Revés del colegio. Eleven, Dustin, Mike, Lucas, Max y Will piden ayuda a mis niños para que los liberen. Tienen que liberar al agente Hopper (padre de Eleven), a Steve (amigo de Dustin), a Erika (hermana de Lucas), a Nancy (hermana de Mike), a Billy (hermano de Max) y a Joyce (la madre de Will).

En ambas narrativas, para cerrar los 6 portales o para liberar a los familiares, los alumnos necesitarán puntos de experiencia (individuales) y puntos de sabiduría (grupales).

Con los puntos de experiencia (individuales) los niños subirán de nivel en la categoría profesional de la Agencia Stranger Numbers, pasando desde aprendiz, becario, agente en prácticas, agente junior, agente sénior hasta llegar a agente máster, seis niveles en total.

Además, con estos puntos conseguirán cartas de recompensas (como cambiarse de sitio, obtener medio punto en la nota final del trimestre…) y cartas edición coleccionista (cartas que creo e imprimo para que se las queden) (figura 3).

Los puntos de sabiduría (grupales) obtenidos en las pruebas de grupo se canjearán por una moneda denominada Dartañanes con la que los niños comprarán tres objetos para cerrar el portal o liberar al personaje en cuestión y así acabar con el demogorgon.

Figura 2. Eleven, Mike, Dustin, Max, Lucas y Will en versión Funko

Los objetivos de *Stranger Numbers* son:

- —Estimular la capacidad de razonamiento, las facultades para el pensamiento lógico, la visión espacial, etc.
- —Estimular el aprendizaje de las matemáticas y su comprensión a través de juegos lógicos, problemas de ingenio, juegos mágicos, etc.
- —Reivindicar y estimular un aspecto de vital importancia como es el gusto por las matemáticas.
- —Automatizar sumas y restas con números de una y dos cifras.
- —Tener automatizadas las tablas de multiplicar.
- —Adquirir desenvoltura mental al realizar algoritmos de una cifra.
- —Obtener un gran dominio de nuestro sistema de numeración: contar ascendente y descendentemente, determinar números anteriores y posteriores en una serie numérica, buscar la decena más próxima, buscar un número situado entre dos, determinar el número mayor o menor de entre dos números, mecanización de las potencias y las raíces, la simplificación.

Los contenidos que se trabajan son los referidos al cálculo mental en sexto de Primaria según el Decreto 89/2014 de la Comunidad de Madrid.

Figura 3. Carta de recompensa

La información obtenida en cada una de las pruebas será siempre para mejorar la nota del alumno, en ningún caso para lo contrario. La progresión de los ejercicios debe estar relacionada con los niveles de conocimientos del alumno. No hay que primar la rapidez en la contestación, ya que esto puede frustrar a los alumnos con aprendizaje lento, sino el avance de cada uno de los niños y niñas.

Pruebas para conseguir puntos de Experiencia (individuales)

Figura 4. Conjunto de pruebas para realizar individualmente

"No aprendes para la escuela, sino para la vida" Séneca

Nombre y apellidos: Respuestas correctas la vez anterior:____

$\frac{4}{2}:\frac{4}{2}=$	$\frac{3}{2}:\frac{5}{3}=$	$\frac{1}{6}:\frac{1}{7}=$	$\frac{2}{8}:\frac{3}{8}=$	$\frac{5}{7}:\frac{4}{7}=$
$\frac{11}{3}x\frac{3}{2}=$	$\frac{12}{5}x\frac{5}{3}=$	$\frac{1}{7}x\frac{7}{4}=$	$\frac{6}{5}x\frac{7}{6}=$	$\frac{2}{9}x\frac{9}{3}=$
$\frac{3}{5}:\frac{7}{5}=$	$\frac{4}{5}:\frac{4}{3}=$	$\frac{3}{7}:\frac{2}{7}=$	$\frac{5}{2}:\frac{3}{5}=$	$\frac{2}{5}:\frac{2}{5}=$
$\frac{2}{3}x\frac{3}{5}=$	$\frac{1}{4}x\frac{4}{1}=$	$\frac{3}{2}x\frac{5}{4}=$	$\frac{1}{6}x\frac{8}{4}=$	$\frac{3}{7}x\frac{7}{11}=$
$\frac{2}{3}:\frac{2}{3}=$	$\frac{2}{5}:\frac{5}{2}=$	$\frac{3}{2}:\frac{2}{3}=$	$\frac{11}{2}:\frac{10}{2}=$	$\frac{5}{2}:\frac{5}{2}=$
$\frac{4}{2}x\frac{2}{4}=$	$\frac{3}{5}x\frac{5}{3}=$	$\frac{4}{7}x\frac{4}{7}=$	$\frac{3}{5}x\frac{2}{5}=$	$\frac{1}{2}x\frac{3}{2}=$

Figura 5. Ejemplo de prueba de algoritmos que realizan los niños

PRUEBA DE ALGORITMOS

Consistirá en una ficha con 30 operaciones sencillas (sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, potencias…) basadas en el método Quinzet de Lluis Segarra que tendrán que realizar nuestros alumnos en 4 minutos y en un cuadrante con columnas (fugura 5).

Empezarán por la primera operación de la columna de la izquierda, y de arriba a abajo. Si el alumno/a no sabe un resultado, lo dejará en blanco. A la semana siguiente se les volverá a pasar la misma ficha, con el resultado obtenido la vez anterior. De esta forma se les estimula a superarse día a día para obtener una mejor nota.

Una misma ficha puede durar de 15 a 20 días, según los alumnos y las necesidades. Pasado ese tiempo se debe cambiar a otra con el mismo formato pero con diferente dificultad.

Esta prueba la evaluará el profesor. El baremo que seguirá será el siguiente:

— La primera vez que el alumno complete una hoja tendrá que resolver 20 operaciones correctamente. De esta forma nos aseguramos que el alumno está en el nivel que le corresponde.
— Si el alumno/a hace menos de 15 operaciones debemos darle una hoja de un nivel inferior.
— Si el alumno/a realiza siempre 30 bien, habrá que darle una de nivel superior.
— Si el alumno o alumna se estanca se le dará una hoja del nivel inferior.

Traducido a puntos y nota, quedaría de la siguiente forma:

Operaciones	Puntos y notas
30 - 28 operaciones	50 puntos y sobresaliente
27 - 21 operaciones	40 puntos y notable
20 - 18 operaciones	30 puntos y bien
17 - 15 operaciones	20 puntos y suficiente
14 - 5 operaciones	5 puntos e insuficiente
4 - 0 operaciones	0 puntos e insuficiente

Tabla 1

PRUEBA DE PROBLEMAS ORALES

El profesor leerá el siguiente día de la prueba de algoritmos, cinco problemas sencillos tipo «en un plato tengo 4 peras y en otro tengo 2, ¿cuántas tengo en total?». Los alumnos anotarán la solución al problema leído que no requerirá escribir la operación ya que son operaciones *disfrazadas* de palabras (ver modelos en la web).

Pasados cinco minutos, los niños corregirán los problemas y le dirán al profesor el número de respuestas correctas que han tenido cada uno y guardarán la hoja del cuadrante para la prueba de la semana siguiente.

Los criterios para su evaluación serán estos:

Problemas	Puntos y notas
5 problemas bien	50 puntos y sobresaliente
4 problemas bien	40 puntos y notable
3 problemas bien	30 puntos y bien
2 problemas bien	20 puntos y suficiente
1 problemas bien	10 puntos e insuficiente
0 problemas bien	0 puntos e insuficiente

Tabla 2

PRUEBA DE ESTRATEGIA NUMÉRICAS Y DE CÁLCULO (número posterior de, anterior de, número siguiente de una serie, etc.)

Una misma ficha durará entre 15 a 20 días dependiendo del ritmo de progresión de los niños (figura 6). La primera vez que un alumno complete una hoja tendrá que resolver 8 estrategias correctamente, ya que significará que está en el nivel adecuado. Si resuelve menos de 7 estrategias u observamos que se estanca le daremos una hoja de un nivel inferior. Si siempre realiza 11 bien le entregaremos una de nivel superior.

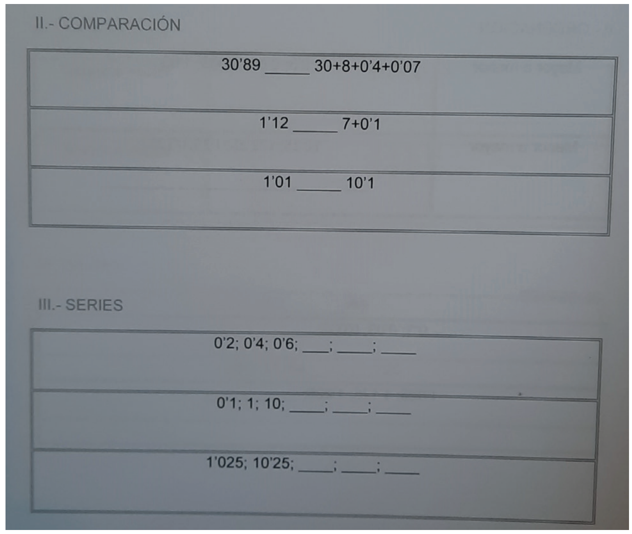


Figura 6. Ejemplo de estrategias numéricas

Los criterios que seguirá el profesor para evaluarla son:

Estrategias	Puntos y notas
11	50 puntos y sobresaliente
9 - 10	40 puntos y notable
8	30 puntos y bien
7	20 puntos y suficiente
6 - 4	5 puntos e insuficiente
3 - 0	0 puntos e insuficiente

Tabla 3

RETO

Todos los viernes se les entregará a los niños una hoja con un reto (problemas de lógica, de acertijos…) y los lunes se les dará la solución. Por cada reto bien resuelto el alumno recibe 30 puntos si lo tienen bien o 0 puntos si no es correcto.

Propondremos retos de distinta dificultad para dar respuesta a los diferentes ritmos de aprendizaje que tenemos en el aula.

De esta forma, todos los niños y todas las niñas, independientemente de su ritmo de aprendizaje, tendrán la posibilidad de adquirir puntos. Con esto fomentamos su autoestima y recompensamos su esfuerzo y motivación.

Pruebas para conseguir puntos de Sabiduría (grupales)

Figura 7. Conjunto de pruebas para realizar en grupo

BINGO MATEMÁTICO

Inspirado en el bingo del material *Construir las matemáticas* de Proyecto Sur, consiste en que los alumnos tachen los números que vayamos extrayendo haciendo para eso operaciones sencillas y automáticas (figura 8).

El profesor dirá el número en forma de operación o forma descompuesta, por ejemplo «cinco por quince, ocho decenas y cuatro unidades, los minutos de media hora», etc.

El bingo se realizará una vez cada dos semanas. No durará más de treinta minutos.

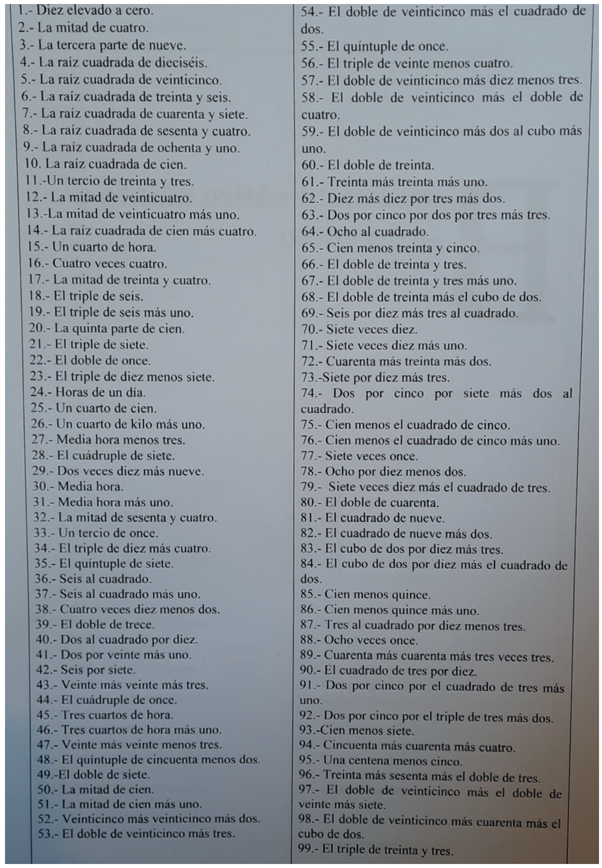
PROBLEMAS RETO

Los problemas retos (cuadros mágicos, sudokus...) son más complicados que los retos individuales y se realizarán en clase (figura 9). Se les dará 15 minutos.

La idea es que cada diez o quince días realicen un prueba de bingo, a los diez días una de problema reto y la última, la prueba de dados.

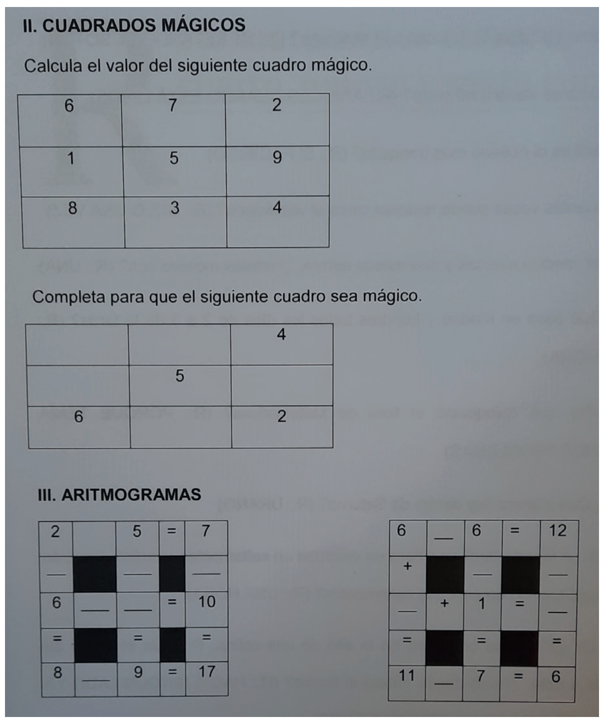
JUEGO DE DADOS

Conseguir mediante operaciones con los números que salgan en los cuatro dados de la parte inferior de la foto de la figura 10 (8, 5, 3 y 14) la cifra (o la más próxima) a la sacada por los dados de la parte superior (91 en el caso de la imagen).



1.- Diez elevado a cero.
2.- La mitad de cuatro.
3.- La tercera parte de nueve.
4.- La raíz cuadrada de dieciséis.
5.- La raíz cuadrada de veinticinco.
6.- La raíz cuadrada de treinta y seis.
7.- La raíz cuadrada de cuarenta y siete.
8.- La raíz cuadrada de sesenta y cuatro.
9.- La raíz cuadrada de ochenta y uno.
10. La raíz cuadrada de cien.
11.-Un tercio de treinta y tres.
12.- La mitad de veinticuatro.
13.-La mitad de veinticuatro más uno.
14.- La raíz cuadrada de cien más cuatro.
15.- Un cuarto de hora.
16.- Cuatro veces cuatro.
17.- La mitad de treinta y cuatro.
18.- El triple de seis.
19.- El triple de seis más uno.
20.- La quinta parte de cien.
21.- El triple de siete.
22.- El doble de once.
23.- El triple de diez menos siete.
24.- Horas de un día.
25.- Un cuarto de cien.
26.- Un cuarto de kilo más uno.
27.- Media hora menos tres.
28.- El cuádruple de siete.
29.- Dos veces diez más nueve.
30.- Media hora.
31.- Media hora más uno.
32.- La mitad de sesenta y cuatro.
33.- Un tercio de once.
34.- El triple de diez más cuatro.
35.- El quintuple de siete.
36.- Seis al cuadrado.
37.- Seis al cuadrado más uno.
38.- Cuatro veces diez menos dos.
39.- El doble de trece.
40.- Dos al cuadrado por diez.
41.- Dos por veinte más uno.
42.- Seis por siete.
43.- Veinte más veinte más tres.
44.- El cuádruple de once.
45.- Tres cuartos de hora.
46.- Tres cuartos de hora más uno.
47.- Veinte más veinte menos tres.
48.- El quintuple de cincuenta menos dos.
49.-El doble de siete.
50.- La mitad de cien.
51.- La mitad de cien más uno.
52.- Veinticinco más veinticinco más dos.
53.- El doble de veinticinco más tres.
54.- El doble de veinticinco más el cuadrado de dos.
55.- El quintuple de once.
56.- El triple de veinte menos cuatro.
57.- El doble de veinticinco más diez menos tres.
58.- El doble de veinticinco más el doble de cuatro.
59.- El doble de veinticinco más dos al cubo más uno.
60.- El doble de treinta.
61.- Treinta más treinta más uno.
62.- Diez más diez por tres más dos.
63.- Dos por cinco por dos por tres más tres.
64.- Ocho al cuadrado.
65.- Cien menos treinta y cinco.
66.- El doble de treinta y tres.
67.- El doble de treinta y tres más uno.
68.- El doble de treinta más el cubo de dos.
69.- Seis por diez más tres al cuadrado.
70.- Siete veces diez.
71.- Siete veces diez más uno.
72.- Cuarenta más treinta más dos.
73.-Siete por diez más tres.
74.- Dos por cinco por siete más dos al cuadrado.
75.- Cien menos el cuadrado de cinco.
76.- Cien menos el cuadrado de cinco más uno.
77.- Siete veces once.
78.- Ocho por diez menos dos.
79.- Siete veces diez más el cuadrado de tres.
80.- El doble de cuarenta.
81.- El cuadrado de nueve.
82.- El cuadrado de nueve más dos.
83.- El cubo de dos por diez más tres.
84.- El cubo de dos por diez más el cuadrado de dos.
85.- Cien menos quince.
86.- Cien menos quince más uno.
87.- Tres al cuadrado por diez menos tres.
88.- Ocho veces once.
89.- Cuarenta más cuarenta más tres veces tres.
90.- El cuadrado de tres por diez.
91.- Dos por cinco por el cuadrado de tres más uno.
92.- Dos por cinco por el triple de tres más dos.
93.-Cien menos siete.
94.- Cincuenta más cuarenta más cuatro.
95.- Una centena menos cinco.
96.- Treinta más sesenta más el doble de tres.
97.- El doble de veinticinco más el doble de veinte más siete.
98.- El doble de veinticinco más cuarenta más el cubo de dos.
99.- El triple de treinta y tres.

Figura 8. Ejemplo de bingo matemático



II. CUADRADOS MÁGICOS

Calcula el valor del siguiente cuadro mágico.

6	7	2
1	5	9
8	3	4

Completa para que el siguiente cuadro sea mágico.

		4
	5	
6		2

III. ARITMOGRAMAS

2		5	=	7
__	■	__	■	__
6	__	__	=	10
=	■	=	■	=
8	__	9	=	17

6	__	6	=	12
+	■	__	■	__
__	+	1	=	__
=	■	=	■	=
11	__	7	=	6

Figura 9. Ejemplo de retos para realizar en grupo

Figura 10. Juego de dados utilizados para esta prueba

Figura 11. Diploma de Dustin

OTROS

Además podrán conseguir puntos cuando se contesten preguntas hechas al grupo. Si éste no la sabe, habrá rebote para otro grupo; cuando se termine un trabajo en el tiempo fijado en clase de matemáticas, puntos también para el mejor trabajo.

Por otra parte se perderán puntos si hay peleas en el grupo, faltas de respeto o espionajes entre grupos.

Narrativa actualizada

Para mantener la atención de los niños es fundamental una narrativa actualizada, con novedades. Los personajes, en este caso representados a través de los muñecos Funko, tienen que tener una comunicación frecuente con los niños. Para ello utilizo vídeos realizados por mí cada vez que todos los grupos cierran un portal. En los vídeos el personaje que guardaba el portal o el familiar que es liberado les da las gracias.

Cada vez que cierran un portal o liberan a un personaje, le doy a cada alumno un diploma (figura 11). También aparecen de vez en cuando objetos como el chocolate de Eleven, la gorra de Dustin o de *Stranger Numbers 2*, un puzle con un mensaje, cartas escritas por los protagonistas (figura 12) que aparecen en diferentes sitios del aula o colegio, etc.

Figura 12. Cartas de recompensa creadas por mis alumnos

Conclusiones

A nivel académico mis niños y niñas han mejorado mucho en el cálculo mental y por ende ha aumentado el rendimiento en el área. Esto les ha reforzado su autoestima, ya que muchos niños pensaban que «no valían» —como dicen ellos— para las matemáticas. Ahora, se ha convertido para muchos en su asignatura favorita.

Pero lo más importante es que *Stranger Numbers* ha fomentado el compañerismo entre ellos, la cohesión de grupo y con ello han disminuido los conflictos en clase. Un ejemplo de este compañerismo es que muchos niños «compran» con sus propios puntos cartas a otros compañeros. Otras veces un grupo regala dartañanes a otro equipo que los necesita para llegar a un portal.

El resultado del proyecto ha superado todas las expectativas e ilusiones que tenía al principio de curso. Los niños han entrado en la narrativa de tal forma que son ellos los que me piden hacer todos los días las pruebas de cálculo mental para conseguir puntos y así cartas de recompensas y de colección. Incluso algunos de ellos diseñan nuevas cartas de recompensa para que las añada a las que ya hay.

Además, *Stranger Numbers* me ha hecho crecer como profesora ya que he aprendido a generar nuevos recursos y a estar al tanto a nivel tecnológico y de aplicaciones orientadas a la educación. Conozco mejor a mis alumnos, ellos a mí y la ilusión que muestran a diario por *Stranger Numbers* se contagia a otras áreas impartidas por mí.

Referencias bibliográficas

Burke, B. (2012), *Gamification 2020: what is the future of gamification?*, Gartnet, Standford.

Deterding, S. (2012), «Gamification: designing for motivation», *Interactions. Social Mediator*, julio y agosto, 14-17.

Izquierdo, I. (2014), *Plan de mejora de cálculo mental en Primaria. Diario, sencillo y práctico*, Bubok, Madrid.

Segarra, L. (1988), *El quinzet: centro de recursos matemáticos,* <http://www.elquinzet.org/>.

Stranger Numbers, <https://isaizquierdoleon.wixsite.com/strangernumbers>.

Stranger Numbers 2, <https://isaizquierdoleon.wixsite.com/strangernumbers2>.

Isabel Izquierdo León
CEIP Andrés Segovia, Cienpozuelos (Madrid)
<leon_izquierdo@hotmail.com>

Arte y matemáticas en el aula

Ángel Pastor Martín

SUMA+ núm. 103
pp. 29-41
Artículo recibido en *Suma* en junio de 2021 y aceptado en septiembre de 2021

Las Matemáticas constituyen una materia instrumental que, como tal, está perfectamente incorporada en diversas asignaturas, como Física, Economía y Dibujo Técnico. El presente proyecto intentará relacionar y asociar los contenidos matemáticos con los propios de otras asignaturas, introduciéndolos en el aula de Matemáticas y trabajando en coordinación con el profesorado de otros departamentos.

Palabras clave: Geometría, Artes, Transversal, Enseñanza Secundaria, Música, Plástica.

Art and Mathematics in the classroom // Mathematics constitutes an instrumental area that is perfectly incorporated in other subjects, such as Physics, Economics and Technical Drawing. This project aims to connect and combine the mathematical content with that of other subjects by introducing them in the mathematics classroom and working in coordination with the teaching staff from other departments.

Keywords: Geometry, Arts, Transverse, Secondary Education, Music, Plastic.

Día a día observamos que nos resulta difícil introducir en las clases de Matemáticas las diversas materias que se cursan en la enseñanza secundaria, a pesar de que en el currículo de la asignatura están incluidas la transversalidad y la interacción de las matemáticas con ellas.

¿A qué se puede deber esta dificultad? En buena medida, a que nuestra mayor preocupación es terminar el temario en cada curso. Y, a veces, no sabemos contestar con toda la claridad y contundencia necesarias las frecuentes preguntas de nuestros alumnos: *¿Para qué sirven las Matemáticas?, ¿qué matemáticas hay en las calle?, ¿cuándo voy a utilizar yo esto?…*

El proyecto que quiero comentar ha sido presentado y reconocido en el concurso organizado por el CEMAT, en la convocatoria del Día Internacional de las Matemáticas del año 2021 y se puede encontrar en la URL: <http://idm314.es/wp-

content/uploads/2021/03/Materiales-y-Recursos-Angel-Pastor-Angel-Pastor-Martin.pdf>.

A continuación expondré brevemente el proyecto, que podemos encontrar con mayor detalle en la citada URL, desarrollando la metodología y comentando la experiencia docente; experiencia que me hubiera gustado poner en práctica durante el curso 2019-2020, pero el confinamiento lo hizo imposible. Durante el curso 2020-2021, por fin, lo hemos podido llevar al aula, con precaución y algunos recortes sobre la idea original, motivados por las medidas de prudencia que se llevaron a cabo en todos los centros de enseñanza del país, incluido el instituto donde trabajo.

El curso idóneo para realizar este trabajo es 3.º ESO y, dentro de este curso, el bloque de geometría y las asignaturas con las que se interactuará son Música, Tecnología y Educación Plástica Visual y Audiovisual.

En Castilla y León todos los alumnos han cursado las asignaturas anteriores en 1.º o 2.º ESO. Además, los alumnos deben elegir dos en 3.º ESO, por lo que hay una asignatura que no están cursando cuando realicemos el proyecto. Esto no debe ser un obstáculo, pues los conceptos específicos de dichas asignaturas se adaptarán si fuera necesario para conseguir un perfecto seguimiento de la asignatura. Por otra parte, hay que tener en cuenta que lo previsible será encontrarnos en clase con un alumnado heterogéneo, que cursará distintas combinaciones de las tres asignaturas opcionales.

En ningún caso se pretende con este proyecto abrir totalmente los ojos de nuestro alumnado en lo que se refiere a la percepción matemática del mundo, pero sí esperamos encender una pequeña luz para que sepan encontrar una parte de matemáticas en las diversas artes, además de indicarles el camino para que vean en las matemáticas algo más que el currículo que les impartimos en la enseñanza reglada (primaria, secundaria e incluso universitaria más adelante).

Movimientos en el plano

> Ante todo es necesario entender que las matemáticas son un arte. La diferencia entre las matemáticas y el resto de las artes, como la música y la pintura, es que nuestra cultura no la reconoce como tal.
>
> Paul Lockhart[1]

METODOLOGÍA

Esta unidad se llevará a cabo en colaboración con el departamento de Música. Estudiaremos algunas partituras musicales en las que se aprecian los tres movimientos que debemos estudiar:

—Giros
—Simetrías
—Traslaciones

En la primera sesión se aportarán conceptos sobre la teoría y algunos elementos que utilizaremos: eje de simetría, vector o ángulo de giro.

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
– Movimientos del Plano: Traslaciones Giros Simetrías – Elementos dobles o invariantes – Reconocimiento de los movimientos y valoración de su belleza en el arte y la naturaleza	– Reconocer las transformaciones que llevan de una figura a otra mediante movimientos en el plano – Aplicar dichos movimientos y analizar diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza – Identificar centros, ejes y planos de simetría de figuras planas	– Identifica los elementos más característicos de los movimientos en el plano presentes en la naturaleza, en diseños cotidianos u obras de arte – Genera creaciones propias mediante la composición de movimientos, empleando herramientas tecnológicas cuando sea necesario – Identifica centros, ejes y planos de simetría en figuras planas y en el arte

Tabla 1. Elementos curriculares para Movimientos en el plano

Las sesiones siguientes se dedicarán a explicaciones y ejercicios sobre partituras de obras más o menos conocidas en las que el compositor utiliza alguno de los tres movimientos citados anteriormente.

Las últimas sesiones las utilizaremos para la creación por parte del alumnado de frases musicales que sean ejemplo de los diferentes movimientos estudiados; este trabajo se puede realizar en el aula de informática, trabajando con algún programa de edición de partituras, o también en clase, con partituras manuscritas.

En el aula de música se mejoran las «composiciones» realizadas o se crean otras nuevas. También se ejecuta la música realizada con los instrumentos que el profesorado crea conveniente.

Giros

Esta pieza (figura 1) es invariante con un giro de 180°. Comprobamos que se puede interpretar según está girando la partitura 180° y el resultado musical será idéntico.

Mozart escribió el «Dúo del espejo», una pieza para dos violinistas que tocan la misma partitura mirándola uno «al derecho» y el otro «al revés». La situación descrita produce un efecto curioso, con los dos músicos enfrentados y moviendo los brazos y las manos a la vez (figura 2).

Simetrías

El siguiente fragmento pertenece a la sinfonía 47 de Haydn y en él se puede observar una simetría respecto del eje vertical. El nombre de la sinfonía es el palíndromo[2], en ella todo el tercer movimiento está compuesto por frases musicales y cada una de ellas es un palíndromo (figura 3).

Traslaciones

Un ejemplo de traslación es el famoso canon de Pachelbel (1653- 1703) (figura 4).

Tras comentar las características geométricas de cada partitura, es conveniente escucharlas en un audio o verlas en un vídeo.

Figura 1. <https://ztfnews.eus/2013/09/18/>

Figura 2. Imagen diseñada por Jesús Pastor

Figura 3. <https://musopen.org/es/music/5434-symphony-no-47-in-g-major-hob-i47/>

Figura 4. <https://es.wikipedia.org/wiki/Canon_en_re_mayor_de_Pachelbel>

Figuras planas

> Un matemático, como un pintor o un poeta, es un creador de patrones. Si sus patrones son más permanentes que los de otros artistas, es porque están hechos de ideas.
>
> G.H. Hardy

METODOLOGÍA

Esta unidad se llevará a cabo en colaboración con el departamento de Educación Plástica y Visual.

En la primera sesión podemos introducir el estilo pictórico sobre el que vamos a trabajar e imitar

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
– Geometría del plano. Mediatriz, bisectriz, circunferencia. – Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales – Uso de herramientas tecnológicas para estudiar y construir formas, configuraciones y relaciones geométricas	– Reconocer y describir los elementos y propiedades características de las figuras planas, los cuerpos geométricos elementales y sus configuraciones geométricas, y reconocerlos en la realidad – Utilizar el teorema de Tales y las fórmulas usuales para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener las medidas de longitudes y áreas de los cuerpos elementales, de ejemplos tomados de la vida real – Representaciones artísticas como pintura o arquitectura, o de la resolución de problemas geométricos	– Maneja las relaciones entre ángulos definidos por rectas que se cortan o por paralelas cortadas por una secante y resuelve problemas geométricos sencillos – Calcula el perímetro y el área de polígonos y de figuras circulares en problemas contextualizados aplicando fórmulas y técnicas adecuadas – Divide un segmento en partes proporcionales a otros dados y establece relaciones de proporcionalidad entre los elementos homólogos de dos polígonos semejantes – Reconoce triángulos semejantes y, en situaciones de semejanza, utiliza el teorema de Tales para el cálculo indirecto de longitudes en contextos diversos

Tabla 2. Elementos curriculares para Figuras planas

—la abstracción geométrica—, comentando su surgimiento en los años 20 del siglo pasado como reacción ante tendencias anteriores que intentan representar la realidad en tres dimensiones[3].

Los autores de la abstracción geométrica exaltan las dos dimensiones, simplificando las formas hasta llegar a la más elemental (*Abstracción geométrica*: Wikipedia). También se hará una recopilación de toda la teoría que se va a trabajar en sesiones sucesivas y la forma de hacerlo mediante «cuadros geométricos», el teorema de Tales, los distintos polígonos con sus características, áreas y volúmenes…

En las sesiones siguientes trabajaremos la proporcionalidad, circunferencias, triángulos y polígonos en general a partir de cuadros de la etapa de la abstracción geométrica, que se localiza en la primera mitad del siglo xx.

Las últimas clases en las que trabajaremos esta unidad didáctica se realizarán en el aula de informática, en la que debemos disponer de un ordenador por cada alumno. La secuenciación será la siguiente:

- —En la primera sesión habrá una toma de contacto con el programa GeoGebra, se explicarán algunas nociones básicas sobre la representación de puntos, segmentos, rectas, polígonos, circunferencias y colorear tanto perímetro como superficie de las diversas figuras.
- —Los días siguientes cada alumno/a hará un trabajo en un archivo de GeoGebra que consistirá en la «creación» de un cuadro de abstracción geométrica, en dicho cuadro tendrán que aparecer algunos de los aspectos geométricos estudiados en la unidad.
- —En el aula de Educación Plástica se puede explicar ya, por especialistas en el tema, las formas, los colores y sus combinaciones para mejorar el trabajo. También sería conveniente repetir las obras que hemos realizado en GeoGebra, ahora con los materiales que el profesorado crea conveniente y oportuno.

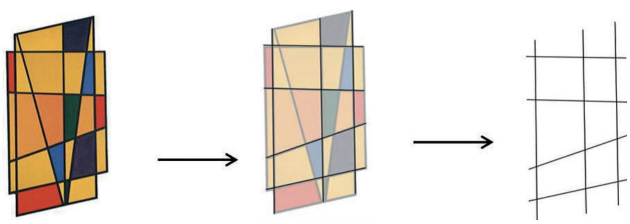


Figura 5. <https://www.march.es/arte/madrid/exposiciones/america/los-artistas.aspx>

TEOREMA DE TALES

Para la presentación del teorema de Tales podemos apoyarnos en el cuadro de la figura 5.

TEOREMA DE PITÁGORAS

Está representado muchas veces y desde distintos puntos de vista por autores de diversos estilos pictóricos, casi todos tienen en común que representan la terna pitagórica 3-4-5. La siguiente obra (figura 6) tiene de original que las superficies relacionadas con los lados, en lugar de cuadrados son círculos.

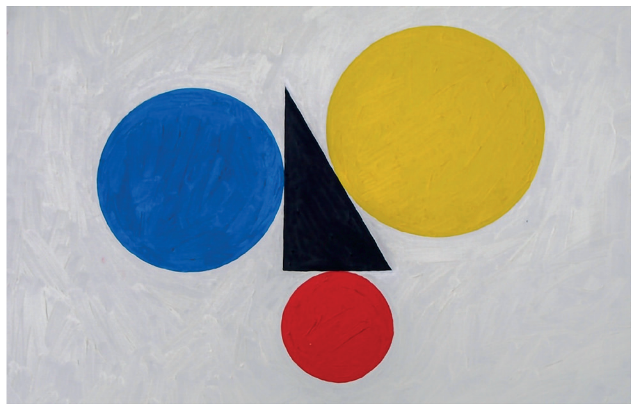


Figura 6. <https://culturacientifica.com/2013/05/22/cultura-pitagorica-arte/>

Figura 7. <https://www.wikiart.org/es/nassos-daphnis/all-works#!#filterName:all-paintings-chronologically,resultType:masonry>

TRIÁNGULOS, RECTÁNGULOS Y POLÍGONOS REGULARES

Se pueden trabajar a partir de las obras de las figuras 7, 8 y 9.

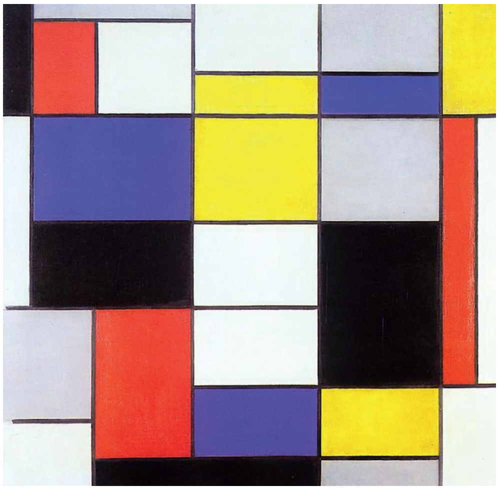


Figura 8. <https://www.wikiart.org/es/piet-mondrian/all-works#!#filterName:all-paintings-chronologically,resultType:masonry>

Figura 9. <https://graffica.info/max-bill-obras-de-arte-multiplicadas-como-originales/>

Figura 10. <https://www.wikiart.org/es/robert-delaunay>

CÍRCULOS Y CIRCUNFERENCIAS

Robert Delaunay tiene varias obras apropiadas. En este caso elegimos «Rythm», pintura en la que aparecen circunferencias variadas y casi cualquier elemento que queramos estudiar de un círculo o de una circunferencia.

Reduciendo el cuadro a estas cinco circunferencias, tenemos circunferencias concéntricas, interiores, exteriores, tangentes interiores, tangentes exteriores y secantes, incluso coronas circulares.

Cuerpos geométricos

> No intentes convencer a un niño de que las matemáticas están presentes en su vida, muéstrale la vida y que él descubra las matemáticas.
>
> Francisco Martínez[4]

METODOLOGÍA

Esta unidad didáctica la realizaremos en coordinación con el Departamento de Tecnología. Secuenciaremos la actividad conforme al siguiente esquema:

- —La primera sesión será de presentación del volumen, utilizando para ello imágenes, especialmente las que analizaremos en los días sucesivos. Con la ayuda de estas imágenes podremos hacer una introducción de los distintos poliedros y cuerpos curvos con ejemplos de construcciones diversas que hay repartidas por el mundo.
- —En las siguientes sesiones estudiaremos el volumen de las distintas figuras que aparecen en el currículo de 3.º ESO, mostrando diversos ejemplos de obras arquitectónicas; en algunos casos, de monumentos conocidos. Analizaremos cada construcción, estudiaremos los cuerpos que aparecen en ella, calcularemos área y volumen y de algunos construiremos maquetas a escala.
- —Las últimas clases en las que trabajaremos esta unidad didáctica serán en el aula de informática, en la que debemos disponer de un ordenador por cada alumno, se realizará un trabajo que consistirá en:

- Buscar construcciones en internet con alguna de las formas estudiadas, elegir una de ellas y diseñar un desarrollo plano a escala para construir la maqueta. Por ello es importante que podamos conocer las dimensiones reales de las construcciones elegidas.
- Además, se puede hacer un trabajo en un archivo de GeoGebra que consistirá en representar la construcción elegida anteriormente en tres dimensiones.
- En la clase de tecnología se realizará la misma construcción, a una escala apropiada, con los materiales que el profesorado de Tecnología crea conveniente (madera, metal o incluso con impresora 3D si el instituto dispusiera de ella y fuera posible su utilización).

Ortoedro

Estudiamos el ortoedro y los prismas rectos a partir de edificios con caras especialmente lisas y sin mucho adorno, para así centrarnos en el problema que nos ocupa.

Los edificios elegidos como ejemplo de estos cuerpos geométricos son: el edificio Duque de Lerma en Valladolid (figura 11) y la impresionante biblioteca de Stuttgart de forma cúbica (figura 12).

Figura 11

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
– Uso de herramientas tecnológicas para estudiar y construir formas, configuraciones y relaciones geométricas – Geometría del espacio. Poliedros. Planos de simetría en los poliedros. Fórmula de Euler para los poliedros simples. Poliedros regulares, poliedros duales. Cilindro, cono, tronco de cono y esfera. Intersecciones de planos y esferas – Cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos. Contextualización en la realidad	– Reconocer y describir los elementos y propiedades características de los cuerpos geométricos elementales y sus configuraciones geométricas – Reconocerlos en la realidad – Identificar centros, ejes y planos de simetría de poliedros – Calcular las dimensiones reales de figuras, reconociendo la escala	– Calcula el perímetro y el área de polígonos y de figuras circulares en problemas contextualizados aplicando fórmulas y técnicas adecuadas – Identifica los principales poliedros y cuerpos de revolución, utilizando el lenguaje con propiedad para referirse a los elementos principales – Calcula áreas y volúmenes de poliedros, cilindros, conos y esferas, y los aplica para resolver problemas contextualizados – Identifica centros, ejes y planos de simetría en figuras planas, poliedros y en la naturaleza, en el arte y construcciones humanas

Tabla 3. Elementos curriculares para Cuerpos geométricos

Figura 12. <https://en.wikipedia.org/wiki/Stadtbibliothek_Stuttgart#/media/File:StadtBibliothekStuttgart-pjt3-18.jpg>

Figura 13. <https://lopezdoriga.com/vida-y-estilo/ha-muerto-ieoh-ming-pei-arquitecto-que-diseno-la-piramide-del-louvre/>

Figura 14

Figura 15

Figura 16

Figura 17

Pirámides

En este apartado veremos diversas pirámides, compararemos sus dimensiones y sus proporciones para valorar si se pueden considerar pirámides semejantes o no (figura 13).

Esferas, cilindros y conos

Como muestra de estos cuerpos podemos elegir el Atomium de Bruselas, compuesto de esferas y cilindros (figura 14).

Poliedros oblicuos

Para introducir los poliedros oblicuos, tenemos un buen ejemplo en la plaza de Castilla de Madrid: las torres Kio (figura 15). Una de las primeras preguntas que nos vienen a la cabeza cuando las vemos es ¿por qué no se caen? Analizaremos el motivo de ello.

Composiciones compuestas

Para finalizar esta sección, traemos la estructura de prisma de base cuadrada con tejado piramidal y equivalente a éste, el cilindro con cono. En el primer caso (figura 16) la imagen es de un pináculo de la Fábrica de Moneda de Segovia, el segundo (figura 17) es un granero que podemos encontrar casi en cualquier punto de la geografía española.

Exposición pública del trabajo

El bloque de geometría se suele impartir al comienzo de la 3.ª evaluación, más o menos en el mes de abril; esta situación nos resulta muy apropiada pensando en el 12 de mayo, Día Escolar de las Matemáticas.

Intentaremos acabar el bloque unos días antes del 12 de mayo, para poder celebrar la conmemoración. La celebración consistiría en dos exposiciones y un concierto (tabla 4).

Las dos exposiciones se exhibirían en el vestíbulo y todos los alumnos podrían participar con sus obras, pues las habremos realizado al menos en las clases de Matemáticas (también en las clases de Tecnología y de Educación Plástica, quienes cursen estas asignaturas).

En el concierto solamente participarían de forma activa los alumnos que tienen la asignatura de Música, pues es en sus clases donde se prepararía. El público para el concierto será todo el alumnado de 3.º ESO y, si fuera posible por el aforo del salón de actos, sería conveniente que asistieran los alumnos de 2.º ESO, para que vayan viendo y conociendo lo que les puede esperar en el curso siguiente.

Figura 18

Actividades		
1.º	Exposición	Cuadros realizados sobre la geometría plana.
2.º	Exposición	Maquetas a escala realizadas sobre el volumen.
3.º	Concierto	Composiciones realizadas por los alumnos, preparando esta audición durante las clases de música.

Tabla 4. Actividades para el Día Escolar de las Matemáticas

Experiencia en el aula

Este proyecto se ha realizado en el curso 2020-2021 en tres clases de 3.º ESO, dos de Matemáticas Académicas y una de Aplicadas. El curso ha sido muy especial debido a la epidemia vírica que estamos sufriendo y las limitaciones sufridas por las medidas de precaución tomadas. Entre otras limitaciones, en el IES. no hemos tenido aulas específicas de Música, Plástica ni Tecnología porque estas se han tenido que utilizar como aulas de grupo. No insistiré sobre lo que quisimos y no pudimos hacer e intentaré limitarme a detallar lo que sí hicimos.

MOVIMIENTOS EN LAS PARTITURAS MUSICALES

Hemos realizado partituras, tanto manuscritas como con el programa *MuseScore*. Se observa una gran diferencia entre el alumnado que tiene conocimientos musicales externos —por el conservatorio o

Figura 19

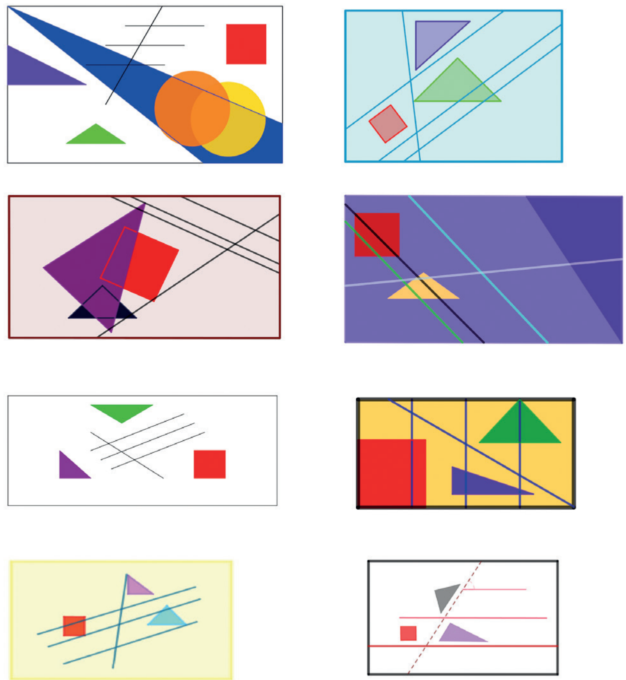


Figura 20

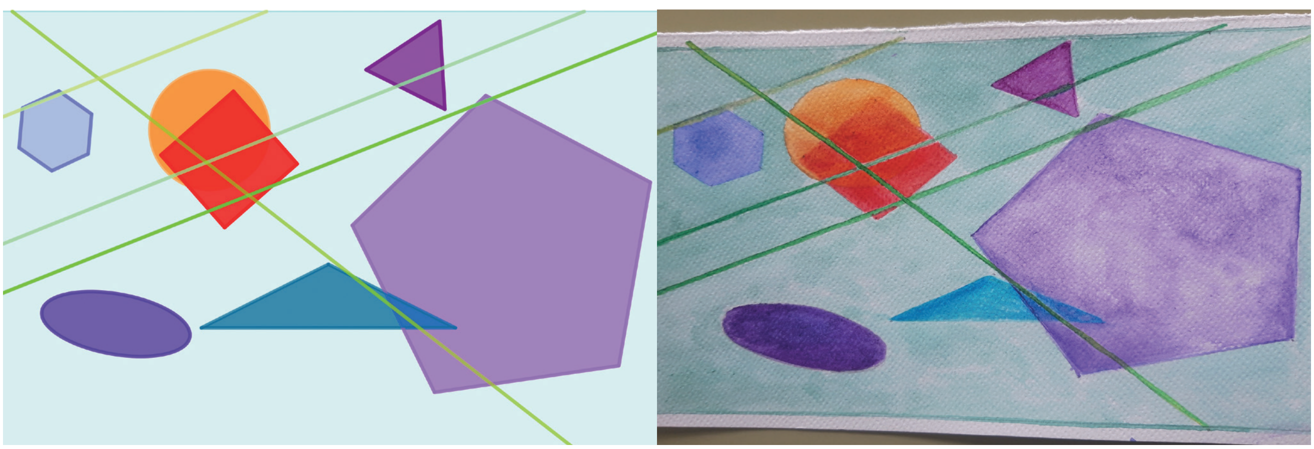


Figura 21

academias de música—, que intentaba crear composiciones agradables al oído. Quienes solamente tienen los conocimientos básicos aprendidos en el IES. se tenían que conformar con realizar ejercicios que cumplieran las normas matemáticas dadas relativas a giros, simetrías o traslaciones. En las figuras 18 y 19 vemos algunos ejemplos realizados por el alumnado a mano en el cuaderno, o en el ordenador con editor de partituras, de los tres movimientos estudiados.

Simultáneamente, en el aula de Música, aprendieron a utilizar el programa *Musescore* y realizaron también diversos ejercicios. Las circunstancias especiales debidas a la pandemia impidieron interpretar las partituras con algún instrumento.

GEOMETRÍA DEL PLANO EN LAS OBRAS PICTÓRICAS

Primero nos familiarizamos con el programa GeoGebra, que la mayoría del alumnado no conocía. Posteriormente hicimos un «cuadro» en GeoGebra, con unas ligeras normas sobre algún elemento que debía estar en el cuadro; y el resto, de libre interpretación.

Como ejemplo, uno de los ejercicios llevaba las siguientes indicaciones.

> Tres rectas paralelas y otra recta oblicua a ellas, con un ángulo de 60º. Un cuadrado rojo. Un triángulo isósceles en el que el lado desigual sea el de mayor longitud. Un triángulo rectángulo de color morado.

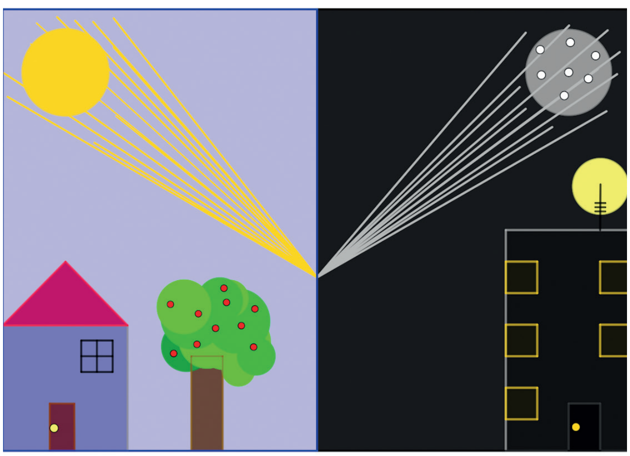


Figura 22

Algunos de los resultados se muestran en la figura 20.

En algunos casos, reprodujeron el mismo cuadro en la clase de Plástica, con resultados tan destacables como el de la figura 21.

También quiero exponer que hubo quien, trabajando por libre, presentó, sin respetar las indicaciones, pero mostrando gran creatividad, ejercicios tan curiosos como el que aparece en la figura 22.

GEOMETRÍA EN EL ESPACIO Y ARQUITECTURA

El trabajo final que se realizó fue la construcción de varios edificios, realizados a escala, distribuyendo el trabajo de forma que cada estudiante se encargaba de hacer uno o dos cuerpos geométricos que podían ser ortoedros, pirámides, conos o cilindros. Decidimos que en lugar de decorarlos de forma homogénea, podía resultar llamativo que cada estudiante decorara sus piezas a su gusto. Algunos de los resultados los podemos ver en las figuras 23, 24 y 25.

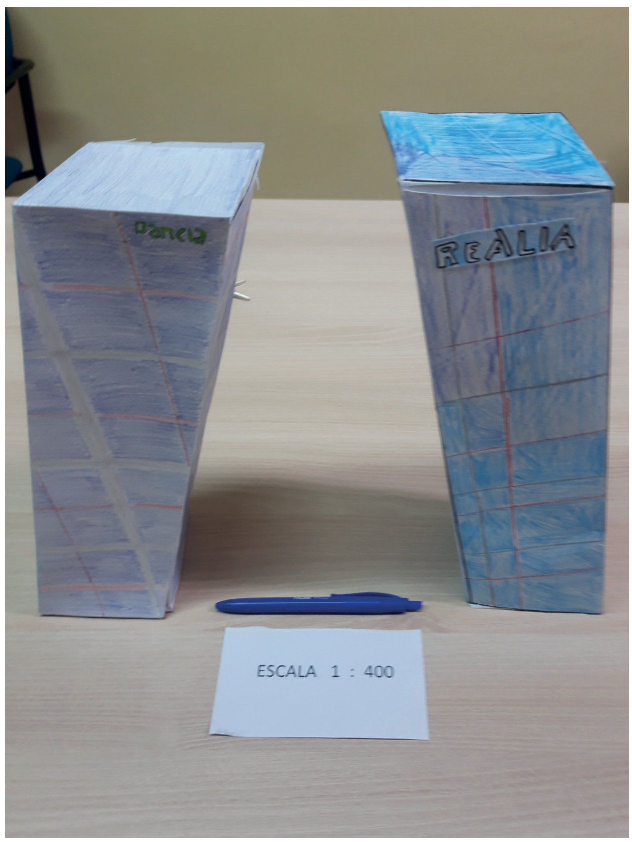


Figura 23. Torres Kio en Madrid

Figura 24. Casa de la Química en Segovia

Figura 25. Castillo de los Marqueses de Villafranca en Villafranca del Bierzo

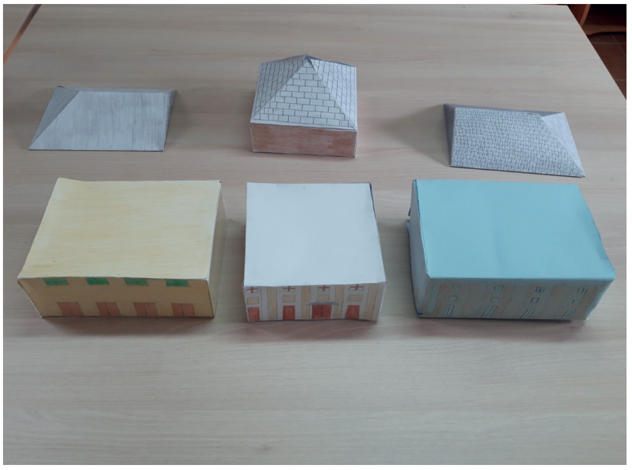


Figura 26. Descomposición de la Casa de la Química

En la siguiente figura 26 podemos observar la descomposición por piezas de la Casa de la Química, donde se pueden ver los distintos estilos para decorar cada pieza.

Conclusión

Por último, quiero señalar que, al no disponer de sala de ordenadores, el alumnado ha realizado los trabajos en casa, tanto los cuadros de GeoGebra como las partituras en MuseScore. También realizaron en casa las plantillas para hacer las maquetas, aunque en este caso el montaje fue en el aula.

Creo que es importante destacar que los ejemplos expuestos en cualquiera de las tres unidades, no son, ni mucho menos, los únicos; incluso no tienen porqué ser los mejores, aunque sí son válidos para llegar al objetivo que se pretende. Podemos considerarlos como una orientación inicial para realizar el presente trabajo, modificándolos cuando lo creamos conveniente.

Como conclusión final quiero expresar que, a pesar de las características especiales de este curso, la sensación ha sido positiva, hasta el punto de que tenemos intención de repetirla en el curso próximo, e incluso de extenderlo al resto del profesorado de 3.º de ESO. Intentaremos aprender de los errores observados sobre la marcha, con el deseo de que todo vuelva a la normalidad anterior a la pandemia, por razones humanas obvias, pero además para poder ampliar los recursos y disponer de un material que este curso ha sido imposible utilizar.

Referencias bibliográficas

Domínguez, P. (2015), *Vanguardias artísticas del siglo xx* <https://vanguardiaartisticasigloxx.wordpress.com/2015/08/07/abstraccion-geometrica/> [consultado en junio de 2021].

Mañes, P. (2015), «Max Bill: obras de arte multiplicadas como originales», <https://graffica.info/max-bill-obras-de-arte-multiplicadas-como-originales/>.

Orden EDU/362/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León.

Pastor, Á. (2021), *Materiales y recursos educativos en el aula de matemáticas,* <http://idm314.es/wp-content/uploads/2021/03/Materiales-y-Recursos-Angel-Pastor-Angel-Pastor-Martin.pdf>.

Ángel Pastor Martín
IES Andrés Laguna, Segovia
<angelpastor5@hotmail.com>

1 *El lamento de un matemático* de Paul Lockhart

2 La RAE define palíndromo como «palabra o frase cuyas letras están dispuestas de tal manera que resulta la misma leída de izquierda a derecha que de derecha a izquierda». Este concepto, inicialmente aplicado a las palabras, puede aplicarse a otros conceptos, como la estructura musical.

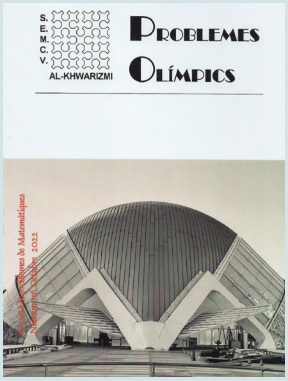
3 Esta introducción a la abstracción geométrica también puede ser realizada en la clase de Plástica.

4 Cita tomada de <https://huelvabuenasnoticias.com/2020/01/24/la-mejor-forma-de-aprender-es-ensenando-y-hoy-toda-la-humanidad-conmemora-este-hecho/> [consultado el 24 de noviembre de 2020].

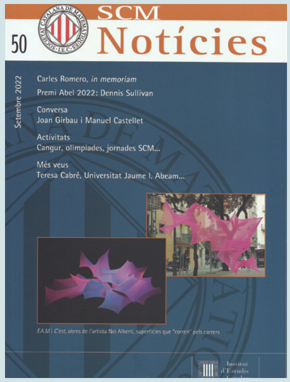
5 Las figuras 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12 y 13 se han tomado de internet el 23 de noviembre de 2020.

Las figuras 14 y 15 se han obtenido de Google Maps el 20 de agosto de 2020.

Publicaciones recibidas



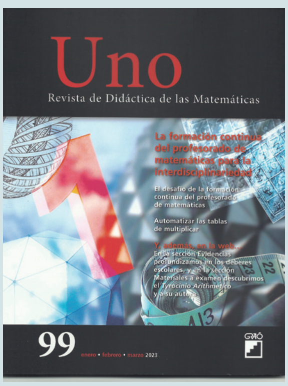
Problemes Olímpics
SEMCV
«Al-Khwarizmi»
N.º 114, octubre 2022
València
ISSN: 1578-1771



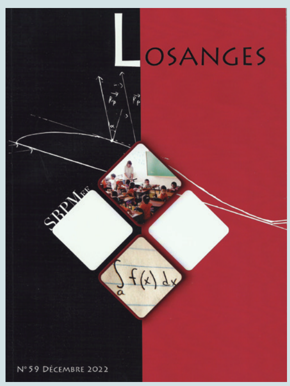
SCM. Notícies
N.º 50, setembre 2022
Barcelona
ISSN: 1696-8247

La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española
RSME
Vol. 25, n.º 3 , 2022
Madrid
ISSN: 1138-8927

Llull
Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas
Vol.45, n.º 90, 2022
Zaragoza
ISSN: 0210-8615



Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas
Graó Editorial
N.º 99, enero, febrero, marzo 2023
Barcelona
ISSN: 1133-9853



Losanges
Société Belge des Professeurs de Mathématique
N.º 59, Decémbre 2022
Namur
ISSN: 2032-0264

Uso didáctico de errores en medios de comunicación

Paulo González Ogando

SUMA+ núm. 103
pp. 43-52
Artículo recibido en *Suma* en julio de 2021 y aceptado en diciembre de 2021

Nuestro alumnado es bombardeado constantemente por información proveniente de redes sociales y de los medios de comunicación más tradicionales. En este artículo se propone el uso de errores de trasfondo matemático —que frecuentemente aparecen en los medios— para elaborar actividades de observación y análisis con el fin de ser llevadas al aula para promover el pensamiento crítico y favorecer el aprendizaje significativo de los estudiantes.

Palabras clave: Pensamiento crítico, Medios de comunicación, Uso del error, Gráficas, Secundaria.

Educational use of errors in mass media // Our students are constantly bombarded with information from social networks and the traditional mass media. This article suggests the use of mathematical errors —which appear frequently in the media— to develop observation and analysis activities in order to be taken to the classroom to promote critical thinking and stimulate meaningful learning of students.

Keywords: Critical thinking, Mass media, Use of error, Graphs, Middle and high school.

Desde hace ya cierto tiempo los medios de comunicación han sido la principal fuente de noticias e información para la mayoría de la gente. En la actualidad siguen poseyendo una enorme capacidad de influencia, contribuyendo en gran medida a modelar la realidad y a crear corrientes de opinión.

Entre los medios de mayor difusión se encuentran los más tradicionales, como la televisión, la radio y la prensa escrita, pero, por supuesto, también se debe tener en cuenta el advenimiento de Internet, con su imparable crecimiento en poco tiempo, y con las redes sociales y la prensa digital como principales difusores en línea. Está claro que los hábitos de consumo y de ocio están cambiando (Yuste, 2015), y la forma en la que los jóvenes acceden a los medios es diferente de la que solían tener generaciones anteriores.

Independientemente de cuál sea el medio elegido, es innegable que nos vemos bombardeados por anuncios y noticias, opiniones y hechos, textos y gráficas, a todas horas y en todos los contextos. En muchas de esas ocasiones se presentan situaciones que, de algún modo, están relacionadas con las matemáticas. No obstante, esas manifestaciones no siempre se producen con acierto, y en este artículo se aprovecha esa circunstancia para realizar un uso didáctico del error.

Una persona de las que Paulos (1990) llamaba «anuméricas» se puede ver más perjudicada, influenciada y hasta engañada en su consumo de los medios de comunicación que otra persona cuyo manejo de las herramientas matemáticas le proporcione una mayor capacidad de análisis y de crítica ante las distintas informaciones a las que se expone.

Los medios de comunicación son una realidad social que no debemos menospreciar en el aula. Es importante incorporar su presencia y utilizarlos con fines didácticos, con el objetivo final de que el alumnado aprenda a realizar una lectura crítica de toda la información que recibe. En palabras de Corbalán (2004), «la influencia de los medios es una de las razones por las que uno de los objetivos fundamentales del sistema educativo tiene que ser el aprendizaje de la lectura crítica de los medios».

Es frecuente el uso en el aula de los errores de aprendizaje, mediante estrategias que varían en cuanto a propósitos, acciones y resultados (González, Gómez y Restrepo, 2015). En este artículo se va a usar el error ajeno, no el propio: aquel que aparece en los medios de comunicación, ya sea de forma voluntaria o inconsciente. Y con ello no me refiero a las erratas tipográficas, también habituales pero más entendibles, sino a carencias más profundas y preocupantes, de tipo conceptual o incluso debidas a la tendenciosidad y la parcialidad, publicadas con intención de engañar. Seguramente estos últimos errores sean los más nocivos, y no cabe duda de que para todo docente es un objetivo loable el formar ciudadanos dotados de espíritu crítico.

El análisis de distintos extractos recogidos en medios de comunicación permite aplicar los conocimientos que el alumnado va adquiriendo a lo largo del curso, y presenta varios aspectos positivos añadidos (Carrascosa, 2006):

- Resulta atractivo para el alumnado por la profusión de imágenes, cuya fuerza visual juega un papel muy importante en nuestros estudiantes. Además su presencia es constante en los medios que reconocen como habituales en su día a día.
- Supone un cambio de rol en el que el alumnado pasa de ser evaluado a convertirse en evaluador, lo que suele hacer que se esfuerce más en el análisis y en sus argumentaciones, a la vez que fomenta su autoestima.
- Practica un aspecto esencial del trabajo científico, como es el análisis crítico poniendo en juego los conocimientos adquiridos, favoreciendo la construcción de una imagen de la ciencia y del trabajo científico más próxima a la realidad.
- Contribuye a desarrollar una actitud más positiva hacia el aprendizaje de las matemáticas.

Durante años he ido recopilando algún que otro ejemplo aparecido en diferentes medios (correspondientes a prensa escrita, prensa digital y televisión), y elaborando una pequeña colección de errores que he trabajado con mi alumnado en varias ocasiones. Cuando me encuentro alguno nuevo, lo guardo debidamente etiquetado para poder ser rescatado más adelante si conviene su uso en el aula.

Seguramente el origen de este interés personal se encuentre en el blog *Malaprensa*, que mantiene desde hace años Josu Mezo y del que soy puntual seguidor. Su mirada no es solo matemática, sino que abarca otras áreas y enfoques, pero una buena parte de las chapuzas que muestra a los internautas sí tiene base numérica, estadística, lógica o gráfica. Fueron sus entradas las que dieron inicio a mi inclinación a elaborar un compendio de errores en prensa, así que aprovecho estas páginas para reconocer su labor y mencionar expresamente mi gratitud hacia su trabajo.

Clasificando los errores

Obviamente estas páginas ofrecen un espacio limitado, así que me limitaré a mostrar algunos ejemplos paradigmáticos de las posibilidades que ofrece esta propuesta, indicando siempre el medio y la fecha en que fueron recabados. En lo que sigue, la idea es mostrar a modo de clasificación una semblanza del tipo de errores que suelen aparecer en los medios; la mayoría de ellos se repiten con cierta frecuencia, pero aquí solo traigo algún ejemplo de cada caso.

Los tipos de errores cometidos en los medios de comunicación son muchos y variados. Pero aquí no nos vamos a fijar en faltas de ortografía, redacción deficiente o erratas varias, sino que pondremos nuestra atención, obviamente, en aquellos que tengan un carácter matemático.

No creo que sea indispensable el realizar aquí una categorización formal de distintas clases de errores, pues no encontraría demasiada aplicación ni provecho en el modelo de actividades que se propone en este artículo. Simplemente he considerado el realizar una somera clasificación sin mucha trascendencia, en aras de una comodidad necesaria cuando el repertorio reunido alcanza un cierto tamaño. Y es que cuando uno se pone a preparar la actividad y acude a la recopilación que tiene guardada, agradece cierta organización y orden que agilice el acceso y selección de los ejemplos que más convengan en cada ocasión.

Es por ello que simplemente me he decidido por distinguir cuatro áreas, que coinciden de forma aproximada con los bloques que aparecen en el currículo de la ESO: numérica, geométrica, gráfica y estadística. De esta manera resulta más sencilla la adecuada elección de unos cuantos errores de entre la vasta colección reunida a lo largo de los años.

ERRORES DE TIPO NUMÉRICO

El manejo de la moneda en curso es esencial para toda la gente. Durante muchos años en España tuvimos la peseta, que hace casi dos décadas fue sustituida por el euro. Pasamos de un sistema con cantidades enteras a otro que incluye decimales; un euro tiene cien céntimos. Quien más quien menos precisó de un periodo de aceptación, pero en el *Diario Sur* este debió ser especialmente largo, ya que parecen tener problemas para distinguir euros de céntimos (figura 1).

También los números muy grandes provocan errores, ya que puede resultar complicado «visualizar» cómo de grandes son. No es fácil alcanzar esa comprensión si no se trabaja adecuadamente el orden de magnitud de distintas cantidades. En la página *web* de la *Cadena Ser* apareció una noticia (figura 2) que explicaba un concurso creado por el Ministerio de Finanzas de Portugal, en el que se sortea un Audi A4 cada semana y dos Audi A6, uno en junio y otro en septiembre. De esto último se deduce (aunque no se explica en la noticia) que el concurso durará un año, y por tanto serían necesarios 52 Audi A4. El mismo texto explica que cada Audi A4 cuesta en torno a 28 000 euros, y que el gobierno gastó unos 1 500 millones de euros para la adquisición de los vehículos. Pero resulta que esa cantidad permitiría comprar más de 53 000 coches, y todo parece indicar que el redactor tuvo un desliz a la hora de escribir la cantidad dedicada al gasto, un número cuya gran magnitud seguramente no alcanzó a comprender.

El transbordo entre el metro y los autobuses de la EMT costará 0,66 céntimos

Figura 1. *Diario Sur*, 10 de julio de 2014

El gobierno portugués sortea un Audi para combatir la evasión fiscal

El número de portugueses que solicita factura ha aumentado un 45% desde enero de este año

En enero de este año, **las facturas con número de identificación fiscal aumentaron en Portugal un 45%** comparadas con el mismo mes del año pasado. Es la **primera reacción al concurso** creado por el ministerio de Finanzas luso para combatir el fraude y la evasión fiscal. A partir de este martes, 1 de abril, esas facturas -en las que el cliente solicita que se introduzca su NIF- se transformarán en cupones para participar en el concurso que se ha bautizado como **"la factura de la suerte"**. El **premio será un Audi A4 cada semana y dos Audi A6**, en junio y diciembre, correspondiendo con las pagas extra.

VIRGINIA LÓPEZ | Corresponsal en Lisboa 01-04-2014

En total, el **ejecutivo conservador** liderado por Pedro Passos Coelho ha gastado **unos 1.500 millones de euros para adquirir los vehículos** y Audi fue la compañía que mejor propuesta hizo, por delante de BMW, que quedó en segundo lugar. Los Audi A4 costaron en torno a los 28.000 euros. Audi fue precisamente la marca de vehículos que más vendió en Portugal el año pasado, pues no es ninguna novedad que a los portugueses les gustan los buenos coches fabricados en Alemania.

Figura 2. *Cadena Ser*, 01 de abril de 2014

No se puede dividir por cero. Es una operación que aparece de forma recurrente en las aulas, y no siempre el alumnado acaba de convencerse de ello, por mucha explicación que se le ofrezca. Entre estas debe estar la periodista de *El Correo Gallego* que no solo pretende realizar dicha operación (figura 3), sino que además afirma que «todo número dividido entre cero siempre da cero», lo cual es a todas luces falso; bastaba haber echado mano de cualquier calculadora para su comprobación.

Una razón no es más que la relación existente entre dos magnitudes. Un concepto ampliamente usado en distintos contextos de las matemáticas, pero en el que se debe dejar claro si se alude a la razón a/b o a la razón b/a. Porque no, no es lo mismo una cosa que otra, aunque en *La Gaceta* no lo sepan y pretendan que en España hay mucha, mucha, muchísima policía, algo exagerado según ellos (figura 4).

El cálculo con porcentajes es esencial en los primeros cursos de la ESO, ya que los tantos por ciento son muy habituales en nuestras vidas, nos rodean por muchos flancos. Y viendo la cantidad de veces que son maltratados queda claro que mucha gente no consigue una correcta comprensión sobre ellos. Por ejemplo, Santiago Segurola no es capaz de convertir correctamente un porcentaje a una fracción equivalente (figura 5), en *El Mundo* publican encuestas cuyas opciones —excluyentes entre sí— suman más del 100 % (figura 6) y en *El Economista* no saben calcular el precio con descuento incluido (figura 7, casualmente el precio que indican correspondería a un descuento porcentual menor, pero es casualidad, claro está).

Siguiendo con porcentajes, uno de los procedimientos que más errores provoca es la comparación entre dos valores cuando se ofrece de forma porcentual. Y es que si una magnitud pasa de un valor como 100 a otro como 110, ese 110 supone un 10 % de aumento respecto al 100, pero al mismo tiempo el 100 es un 9,09 % menor que el 110. La confusión entre ambas interpretaciones aflora habitualmente, en la prensa (figura 8) y también fuera de ella. No todo el mundo tiene tan claro como debería el hecho de que si una cantidad dada se ve aumentada en un 20 %, y posteriormente el resultado obtenido se ve disminuido nuevamente en un 20 %, la cantidad final no coincide con la original.

ERRORES DE TIPO GEOMÉTRICO

Todo un clásico es el error que cometieron en *La Voz de Galicia* (figura 9) al confundir los grados que mide medio giro con los que supone un giro completo: esa mujer dio un giro tan notable a su vida profesional… que se quedó como estaba.

Una fórmula errónea para calcular qué cátedras se priorizan

No tiene en cuenta que todo número dividido entre cero siempre da cero

I. C.

A- A+

Santiago. Las fórmulas matemáticas, por sencillas que sean, pueden dar el resultado contrario al buscado. Por ejemplo, si al diseñarlas se olvida algo tan básico como que todo número dividido entre cero siempre da cero. Es lo que ha ocurrido en la normativa para convocar cátedras aprobada en 2010 por la USC, que comete este despiste en la fórmula para priorizar los ascensos en las áreas con menos catedráticos en relación con el número de profesores estables.

Figura 3. *El Correo Gallego*, 15 de febrero de 2015

A PESAR DE LA CRISIS, ESPAÑA SE BLINDA FRENTE AL CRIMEN

MUCHA, MUCHA POLICÍA

España es la nación europea con más agentes por habitante (505), a mucha distancia de Francia (390), Reino Unido (260) y Alemania (299)

La presión policial hace que nuestro país tenga una de las mayores tasas de población reclusa de la Eurozona

Figura 4. *La Gaceta*, 23 de junio de 2013

Un error que también se repite con cierta frecuencia es el uso de figuras en las que el dato a representar debería ser proporcional a la superficie, pero en vez de esta se usa equivocadamente una medida unidimensional. Esto supone una muestra de que la razón entre las áreas de dos figuras semejantes no coincide con su razón de semejanza, sino que es el cuadrado de esta última.

El 53% de los escoceses votará 'no' a la independencia de Reino Unido

- El 47% sería partidario del "sí" y el 10% todavía no sabría qué opción votar
- El número de mujeres partidarias de la unión es mayor que el de hombres

Figura 6. *El Mundo*, 10 de septiembre de 2014

Figura 7. *El Economista*, 21 de enero de 2014

EL APUNTE

Correos recibe un 26 % de votos menos que en las elecciones de abril

Correos ha recibido un total de 900.188 votos por correspondencia hasta este jueves, una cifra a la que hay que añadir los sufragios que se hayan depositado hasta las dos de la tarde de ayer, cuando finalizaba el plazo fijado para realizar este trámite. Para las elecciones del pasado 28 de abril, la víspera del cierre de plazo se habían recibido 1.222.937 votos, es decir, un 26,39 % más que ahora. De lo 2.698.648 gallegos llamados a vota mañana, 44.301 ya lo han hecho a través de Correos

Figura 8. *La Voz de Galicia*, 09 de noviembre de 2019

Aquel día en que su marido se fue a Asturias, la vida profesional de esta mujer de Barrantes, Cambados, dio un giro de 360 grados. Fue en el 2009 cuando ambos, ella y su esposo, se convirtieron en los encargados del montaje. Ahora, ocho años después, Carmencita es esa gran mujer que está detrás de una gran orquesta.

Figura 9. *La Voz de Galicia*, 10 de agosto de 2017

Nada es igual sin Messi

El Camp Nou asistió horrorizado al momento que más teme la hinchada del Barça: una lesión de **Messi**. Durante unos minutos, los aficionados vieron el futuro de frente, y no les gustó nada. Sintieron una especie de horror al vacío. Nada, ni la realidad de su magnífico equipo, podía evitar la sensación de orfandad que produjo la salida del jugador argentino en camilla.

La historia nos dice que los mejores equipos de la historia están coronados por jugadores irrepetibles. **Puskas** gobernó la gran selección húngara de los años 50. **Di Stéfano** acaudilló el Real Madrid de las cinco Copas de Europa. **Pelé** iluminó al Santos y a las inolvidables selecciones brasileñas desde 1958 hasta 1970. **Cruyff** inició la revolución del Ajax a finales de los años 60. Todos estos equipos, los más recordados por los aficionados, estaban integrados por maravillosos jugadores, pero el fulgor de cada uno se asocia a un genio, con una particularidad: fueron estrellas de larga duración, inmunes a las lesiones.

El Barcelona de Messi pertenece a esa categoría de equipo mítico. Ha ganado mucho y lo ha hecho con estilo y varios jugadorazos. A Messi le corresponde completar el círculo virtuoso, como a Di Stéfano, Pelé y compañía en épocas anteriores. Por eso se abrió aún más el abismo del terror cuando se retiró dolorido.

Con tan sólo 25 años, está todavía en la mitad de su trayecto futbolístico. Todavía está lejos de cerrar el círculo mágico. Posiblemente no ha alcanzado todavía su apogeo. Hablamos de un jugador que esta temporada ha anotado el 40,2% de los goles del Barcelona. Es decir, dos de cada tres goles. ¿Cómo se vive sin esa producción? No hay manera de remediarlo. Ni tan siquiera el exquisito Barça actual, base de la selección que ha ganado el Mundial y las dos últimas ediciones de la Eurocopa. Durante una hora de incertidumbre y miedo, la hinchada vivió un futuro sin solución. Nada es igual sin Leo Messi.

Figura 5. *Marca*, 08 de diciembre de 2012

Baste el ejemplo de la figura 10, en el cual las cifras relativas a las ejecuciones hipotecarias son proporcionales al radio de los círculos, cuando sería más acertado que lo fuesen a su área. La información visual que proporciona el gráfico resulta así engañosa, pues los círculos de mayor tamaño aparentan ser mucho más grandes de lo que son en realidad los números que se desea mostrar. El mismo error cometieron en el *Diario de Mallorca* (figura 11), en este caso con una superficie rectangular en la que en vez del área son las dimensiones las que colocan de forma proporcional.

ERRORES DE TIPO GRÁFICO

Posiblemente el tipo de gráfico que más veces eligen los medios de comunicación para transmitir información de forma visual sea el diagrama de barras —pero he de reconocer que no he hecho ningún tipo de estudio al respecto—. Tanto uso motiva que, inevitablemente, sea una fuente continua de errores. Algunas veces el error parece voluntario, o por lo menos uno es muy malpensado cuando dicho «error» puede favorecer las opiniones sobre quien lo publica. Son muy evidentes los ejemplos de la figura 12, en los que la no proporcionalidad de las barras muestra una tendencia que claramente deja en buen lugar al sujeto en cuestión.

Si bien los gráficos poseen la fuerza de lo visual, y será lo primero en lo que se fije la mayoría de la gente, es importante que la imagen contenga también los datos numéricos, y que estos sean observados y analizados. Hay que admitir que, afortunadamente, es lo más frecuente. Sin embargo, a veces da lugar a desbarajustes curiosos, en los que uno ni siquiera sabe de dónde procede exactamente el error, pero este es muy burdo y en todo caso números y gráfica no tienen mucho sentido ya que no se corresponden los unos con la otra. En dichos casos (figura 13) me

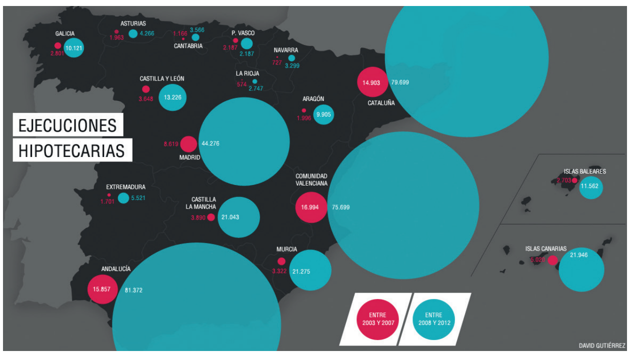


Figura 10. El Confidencial, 14 de marzo de 2013

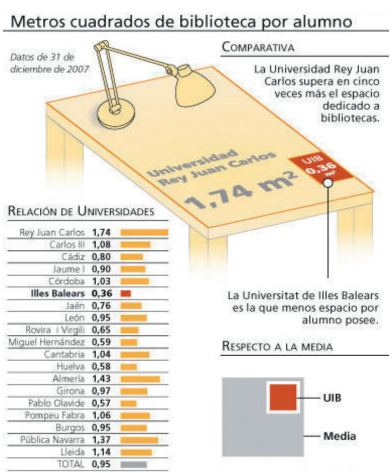


Figura 11. *Diario de Mallorca*, 16 de marzo de 2009

Figura 12. A la izquierda una imagen de *Twitter*, 20 de junio de 2016, y a la derecha otra de *Venezolana de Televisión*, 14 de abril de 2013

Figura 13. De izquierda a derecha y de arriba a abajo: *La Sexta*, 23 de enero de 2021, *La 1*, 22 de enero de 2015, *Telecinco*, 27 de diciembre de 2014 y *Ministerio de Hacienda*, 13de febrero de 2013

quedo perplejo y asumo algún tipo de error —o varios—, pero no lo achaco a la parcialidad de quien lo publica.

Existen también situaciones en las que el error es más sibilino, por ejemplo, cuando está situado en la elección de la escala. Baste ver representaciones como las de la figura 14, en donde el eje horizontal no tiene el mismo valor para todas las marcas, lo cual distorsiona la gráfica y da una impresión errónea.

Siguiendo con representaciones gráficas, en la figura 15 se puede ver un diagrama de líneas en el cual la pendiente de los segmentos es incorrecta y transmite una idea equivocada: resulta que se observa una pendiente mayor en el segmento que une el 28,73 % con el 26,8 % que en el que une el 44,62 % con el 34 %, y eso es manifiestamente defectuoso.

ERRORES DE TIPO ESTADÍSTICO

Andalucía, Cataluña, Madrid y Valencia son las comunidades autónomas más pobladas de España. La Rioja, Cantabria y Navarra, las que menos habitantes tienen. Por ello, cuando se realiza un estudio por comunidades siempre se debe tener en cuenta la frecuencia relativa con la que ocurre el carácter observado. En caso contrario, lo que sucede es que inevitablemente serán siempre las mismas comunidades las que aparezcan a la cola y a la cabeza del asunto. Es imperativo saber reconocer cuándo se puede utilizar la frecuencia absoluta y cuándo es preferible la frecuencia relativa, pero los medios no siempre aciertan (figura 16).

Con mucha diferencia, el parámetro estadístico que más se encuentra en los medios de comunicación es la media o promedio. Es inusual que se ofrezca algún parámetro de dispersión como la desviación típica, e incluso otros parámetros de centralización son

Figura 14. Arriba, *Twitter*, 20 de diciembre de 2013, y abajo, *El País*, 14 de septiembre de 2012

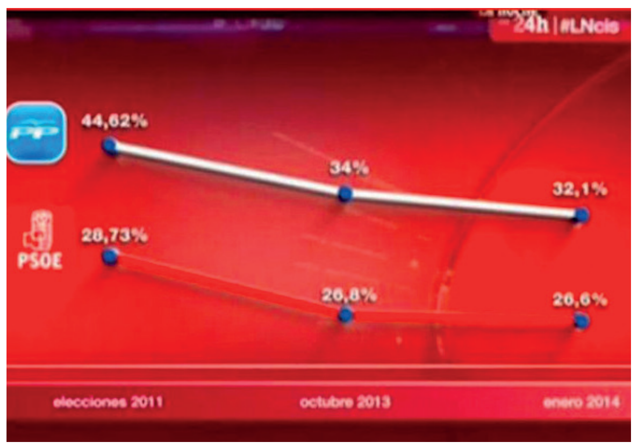


Figura15. *24 horas*, 06 de febrero de 2012

Estos espectadores se reparten por territorios clave: Andalucía es donde más se respeta el *prime time*, que cada noche de septiembre hasta la fecha ha atraído una media de 2.216.000 personas. Le sigue Cataluña (1.891.000), Madrid (1.543.000) y Valencia (1.393.000). Donde menos televisión generalista se consume en *prime time* es Murcia (374.000), Aragón (356.000) y Asturias (260.000). El perfil también se puede dibujar por género: el 45,2% de la cuota de pantalla lo ocupan hombres, el 54,8%, mujeres. Por edades, el rango que más consume va de 45 a 64 años (37% de cuota), seguido de los mayores de 65 (32,3%) y los de 25 a 44 (20,6%). Se consumen 234 minutos diarios de media: prácticamente cinco minutos más que en 2009.

Figura 16. *El País*, 26 de septiembre de 2019

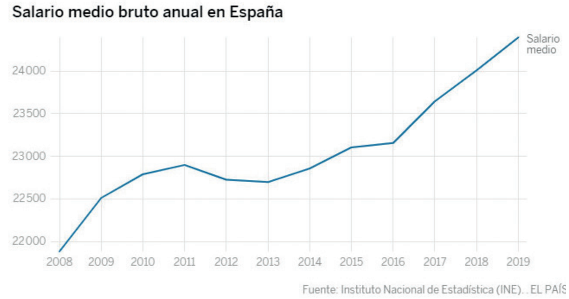


Figura 17. *El País*, 22 de junio de 2021

infrecuentes. Pero resulta que el promedio tiene una desventaja, el ser bastante sensible a valores extremos, que hacen bajar su utilidad en el estudio de caracteres como el salario (figura 17). En casos así, lo ideal es complementar la información y emplear también parámetros como la moda (que sí se mencionaba en el cuerpo del artículo en el que apareció la figura 17) y la mediana (que brilló por su ausencia y resulta un dato bastante revelador en ese contexto).

Propuestas para el aula

Entre los objetivos que establece el Real Decreto 1105/2014 para la Educación Secundaria Obligatoria se encuentra el «desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación».

Desde la materia de Matemáticas podemos contribuir a alcanzar dicho objetivo, y una forma en la que se puede trabajar es precisamente el uso didáctico de los medios de comunicación, tanto los más tradicionales como los que han ido surgiendo en los últimos años al amparo de las nuevas tecnologías. La propuesta que aquí se trae, de búsqueda de errores, busca potenciar ese sentido crítico con el apoyo de los conocimientos matemáticos que se trabajan en el aula.

Por sus características, se trata de una actividad que no está ligada a ningún curso ni a ningún tema en concreto, sino que se puede adaptar a una gran variedad de situaciones y niveles. La recopilación hecha por el autor está pensada para la ESO, pero según la manera en la que se configure su puesta en acción se puede adecuar a cualquiera de sus cursos. Personalmente la he llevado a cabo en varias ocasiones, y quedé especialmente satisfecho con el resultado obtenido en varios grupos de cursos académicos diferentes de la materia Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas.

Como decía, se trata de una actividad cuya estructura es bastante variable: en duración, en profundidad, en contenidos previos requeridos, en los temas tratados, en la organización del trabajo (su realización es efectiva tanto de forma individual como en parejas) o en la forma en la que se exprese la producción final por parte del alumnado. Es por ello que se puede acomodar sin problema a cualquier momento del año, a distinto número de sesiones —según disponibilidad— o a estudiantes con necesidades educativas diferentes.

Se trata también de una actividad idónea para integrar el uso de las TIC en el aula, ya que en la actualidad el acercamiento del alumnado a los medios de comunicación es eminentemente digital. Por ello, siempre la he llevado a cabo con el uso de ordenadores, tanto para presentar la colección de artículos/gráficos como para la elaboración de la producción final. En lo concerniente a esta, siempre solicito la elaboración de un documento en el que se recojan los ejemplos trabajados junto con la explicación de los errores encontrados; el documento puede ser un documento de texto, una presentación o algún tipo de infografía.

Algunas ideas pueden ser:

- La tarea más básica consiste en encontrar el error en una noticia o gráfica dada. En ocasiones hay más de uno, y si tal es la coyuntura se puede aplicar una rúbrica de evaluación que englobe a todo el alumnado, cada cual dentro de sus capacidades. Lo mínimo exigible sería localizar algún error, pero existe margen hasta descubrir todos ellos y tener además la seguridad de que no hay ninguno más.

- Ciertamente, para poner en marcha la actividad es necesario contar de partida con una colección suficientemente grande. Ello permite además elegir la muestra que se va a proponer: más o menos extensa, centrada en algún tema (solo gráficas, o solo porcentajes, por ejemplo) o cubriendo contenidos variados, incluso seleccionando distintas noticias para distintos estudiantes en función de sus necesidades educativas.
- Incluso es posible aumentar la dificultad de la actividad incluyendo alguna noticia/gráfica que no contenga ningún error, pero que igualmente obligaría al alumnado a realizar un análisis minucioso para poder concluir su validez. Reconozco que nunca lo he hecho, pero me parece perfectamente viable.

Una vez hallados los errores, la actividad se podría dar por terminada si no quiere emplearse más tiempo, o se puede enriquecer con alguno de los siguientes puntos:

- Realización de una puesta en común en la que se deba exponer y defender los errores encontrados frente al resto de la clase.
- Clasificación de los errores recabados. Aquí cabe utilizar idénticas categorías a las que yo he empleado (numérica, geométrica, gráfica, estadística), o también dejar que sea el propio alumnado quien decida de qué manera establece dicha clasificación. Obviamente, esta tarea también da pie a disponer subcategorías; por ejemplo, dentro de los errores de tipo numérico se puede diferenciar entre errores con números enteros, con decimales, con las unidades de medida, con el cálculo de porcentajes, etc.
- Corrección de los errores. Este punto también ofrece bastante variabilidad: las correcciones pueden presentarse manuscritas o en formato digital, y pueden consistir en una simple exposición razonada de en qué consiste la equivocación, en la reelaboración de la noticia subsanando el error, o incluso en ir un paso más allá y plantear al alumnado si realizaría cambios para conseguir una mejor comunicación (cambiando el tipo de gráfico, por ejemplo, o añadiendo/eliminando cálculos que puedan favorecer la comprensión de la información).
- En mi caso, siempre ha sido el profesor el que facilita los artículos y noticias. Sin embargo, en alguna de sus implementaciones la actividad se enriqueció solicitando al alumnado que estuviese atento en la consulta de sus medios habituales, juzgando con mirada matemática todo lo que llegaba a sus ojos. Como es evidente, esto requirió alguna sesión extra un tiempo después para tratar el material recogido.

Conclusiones

Aunque no resulta sencillo definir el pensamiento crítico, una de las concepciones más influyentes es la de Ennis (1987), que lo concibe como el pensamiento razonable y reflexivo centrado en decidir qué creer o hacer. El desarrollo de ese pensamiento crítico debe ser una meta de incuestionable validez, y por tanto debemos integrar en el aula estrategias que lo favorezcan y promover el espíritu crítico en nuestro alumnado (López, 2012).

Esta actividad se enmarca justamente en la potenciación del pensamiento crítico de nuestro alumnado. No me cabe duda de que se trata de una destreza básica, si lo que queremos es formar ciudadanos preparados para afrontar con éxito su paso por esta sociedad en la que estamos inmersos, una sociedad que desde los medios de comunicación y las redes sociales nos abruma con información de forma continua. En ocasiones, incluso nos satura.

Es por ello que traigo aquí esta propuesta que pretende contribuir a comunicar la importancia de examinar y analizar adecuadamente toda la información a la que los estudiantes tienen acceso en su día a día. Esto se puede trabajar desde distintos ámbitos, como el de la lectura, pero también las matemáticas y la formación científica pueden aportar su granito de arena, pues es incuestionable que tendrán que filtrar y juzgar numerosas comunicaciones en las que aparezcan de una u otra forma.

Además, el traer al aula medios y situaciones de la vida cotidiana es una herramienta más que favorece el aprendizaje significativo de los contenidos que se trabajan a lo largo del curso. Esta actividad permite poner en juego un buen ramillete de conceptos y procedimientos matemáticos ya trabajados con antelación. Tal y como se ha visto en el apartado dedicado a la clasificación de los errores, estos encuentran su explicación en contenidos diseminados a lo largo de todo el currículo, lo que obliga al alumnado a tener que manejar varias áreas de la materia y a rebuscar en todo aquello que ya ha aprendido.

La opinión del autor, tras haber realizado en varias ocasiones alguna variación de esta actividad, es que con su resolución el alumnado alimenta su espíritu crítico, y su aprendizaje sale reforzado con una serie de ideas a modo de guía preventiva de cara al futuro, como puede ser la conformada por el siguiente listado:

- —Por encima de todo, sé crítico ante la información que recibes de los medios de comunicación, pues hay ocasiones en las que te intentan engañar, y otras en las que simplemente se equivocan.
- —Presta atención al uso de los porcentajes, ya que son una fuente común de errores.
- —Revisa la idoneidad de las unidades de medida empleadas, pues es fácil confundirse cuando el orden de magnitud es muy grande o muy pequeño.
- —Ojo con los cálculos, no seas anumérico y vigila si alguna de las cantidades que aparecen no cuadra con el contexto.
- —Ten cuidado con el uso del término «billón», dado que en castellano significa «millón de millones» pero en inglés *billion* denota «mil millones». Esta diferencia se presta a confusión al traducir cuando se usan fuentes en inglés.
- —Si hay una gráfica, comprueba que los datos numéricos coinciden con el análisis extraído de la gráfica. Atiende especialmente a los ejes: si la escala está bien escogida y si están o no truncados.
- —No confundas el uso de la frecuencia relativa con el de la frecuencia absoluta, sus interpretaciones pueden ser muy diferentes.
- —Asegúrate de que los conceptos matemáticos utilizados están bien usados y realmente ofrecen de forma completa la información que se pretende.

Referencias bibliográficas

Carrascosa, J. (2006), «El problema de las concepciones alternativas en la actualidad (parte iii). Utilización didáctica de los errores conceptuales que aparecen en cómics, prensa, novelas y libros de texto», *Revista Eureka sobre enseñanza y divulgación de las ciencias,* vol. 3, n.º 1, 77-88.

Corbalán, F. (2004), «Más de lo mismo», *Suma*, n.º 47, 89-92.

Ennis, R. H. (1987), «A taxonomy of critical thinking dispositions and abilities», en J. B. Baron y R. J. Sternberg (eds.), *Teaching Thinking Skills: Theory and Practice*, W. H. Freeman, Nueva York, 9-26.

González, M. J, P. Goméz y A. M. Restrepo (2015), «Usos del error en la enseñanza de las matemáticas», *Revista de Educación,* n.º 370, 71-95.

López, G. (2012), «Pensamiento crítico en el aula», *Docencia e investigación: Revista de la Escuela Universitaria de Magisterio de Toledo,* año 37, n.º 22, 41-60.

Mezu, J. (2022), *Malaprensa,* <http://www.malaprensa.com/>.

Paulos, J. A. (1990), *El hombre anumérico,* Tusquets Editores, Barcelona.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, BOE, n.º 3 de 3 de enero de 2005, 169-546.

Yuste, B. (2015), «Las nuevas formas de consumir información de los jóvenes», *Revista de Estudios de Juventud*, n.º 108, 179-191.

Paulo González Ogando
IES Johan Carballeira, Bueu (Pontevedra)
<paulo.glez.ogando@gmail.com>

Superficies minimales, hablemos de pompas de jabón y de curvatura

Víctor M. Manero García

SUMA+ núm. 103
pp. 53-60
Artículo recibido en *Suma* en octubre de 2021 y aceptado en agosto de 2022

En este trabajo se presenta el concepto de superficie minimal. Para ello se introduce el concepto de curvatura de una superficie llegando a definir dos curvaturas muy usadas en matemáticas: la curvatura de Gauss y la curvatura media. Conocidas estas dos ideas se describen las superficies minimales como aquellas con curvatura media nula obteniendo un resultado sorprendente: todos los puntos de una superficie minimal son puntos silla. Finalmente se presentan algunos usos cotidianos de estas superficies así como lugares insólitos en los que nos las podemos encontrar.

Palabras clave: Superficie minimal, Pompas de jabón, Curvatura, Curvatura media y Curvatura de Gauss.

Minimal surfaces, let's talk about soup bubbles and curvature // In this article the concept of minimal surface is presented. In order to do that, the idea of curvature of a surface is introduced, presenting two different curvatures widely used in mathematics: the Gauss curvature and the mean curvature. With these two ideas in mind minimal surfaces are described as those with vanishing mean curvature obtaining a surpinsing result: every point of a minimal surface is a saddle point. Finally, some daily uses of these surfaces are presented as well as unusual places where we can find them.

Keywords: Minimal surface, Soup bubbles, Curvature, Mean curvature and Gauss curvature.

Comencemos con una cuestión: ¿qué pasaría si introducimos, en una solución jabonosa, un alambre con forma de curva cerrada? Al extraer el alambre del jabón, posiblemente tras varios intentos, se formará una superficie que tiene a dicho alambre por borde (figura 1).

Existen muchas posibles superficies que tienen a este alambre por borde, sin embargo, al repetir el proceso vemos que la superficie de jabón que se obtiene es siempre la misma. Y es que, de entre todas las posibles formas que puede adquirir la película de jabón, ésta adopta siempre una configuración concreta que depende, únicamente, de la forma del alambre que constituye su borde. Pero, ¿qué tiene esta superficie, escogida por el jabón, que la hace preferible a las demás? La característica que hace especial a la superficie adoptada por el jabón es que de todas las posibles superficies que tienen por borde al alambre ésta es la que posee menor área. Esto ocurre debido a que al ser la superficie con menor área, es la que requiere menos energía para formarse.

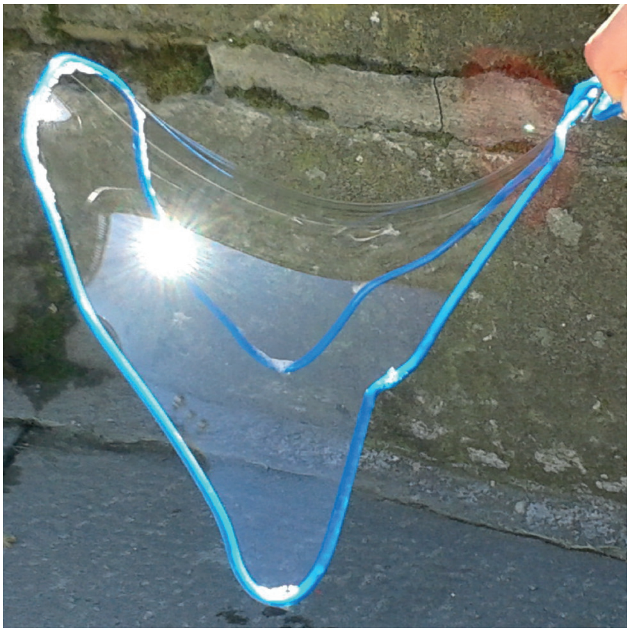


Figura 1. Película de jabón

Orígenes

El origen del estudio de este tipo de superficies es atribuido a Lagrange (1760) quien en la segunda mitad del siglo XVIII se planteó el siguiente problema:

Dada una curva cerrada en $\mathbb{R}^3$, ¿cuál es la superficie $z = z\,(x,y)$ que tiene a dicha curva cerrada por borde y cuya área es mínima?

Quienes se dedicaron al estudio de este problema pronto se percataron de que podían dar una caracterización de estas superficies en términos de ecuaciones en derivadas parciales obteniendo que dichas superficies son aquellas que satisfacen la ecuación de Euler-Lagrange:

$$(1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}+(1+(\frac{\partial z}{\partial y})^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$$

Unos años más tarde Meusnier (1785) observó que dichas superficies tenían propiedades geométricas muy interesantes, en particular probó que la ecuación de Euler–Lagrange implica que la *curvatura media* de la superficie sea nula en todos sus puntos. Estas superficies —las que tienen curvatura media nula— se conocen como *superficies minimales.*

Pero, ¿qué es la curvatura media? Para poder introducir este concepto, tenemos que hacer un pequeño viaje a través de una idea importantísima en geometría: la *curvatura*.

Curvatura en dimensión 1

La curvatura es un concepto que transmite la idea de cuánto se aleja una curva o una superficie de ser, respectivamente una recta o un plano. Podemos definir la curvatura (la llamaremos k) de una curva plana C como una función que a cada punto p de dicha curva le asocia un número real (figura 2):

$$\begin{aligned} k\colon C &\to \mathbb{R} \\ p &\to k(p) \end{aligned}$$

Dado un punto p de una curva C plana, podemos pensar en la circunferencia tangente a C en p que mejor se ajusta a la curva. La curvatura en p, es decir $k(p)$, se puede interpretar como el inverso del radio dicha circunferencia.

Notar que esta idea de curvatura es congruente con nuestra intuición original de que se trate de una función que mida como de distinta es nuestra curva respecto de una recta. Los puntos en los que la curva se parezca más a una recta la circunferencia tangente a la curva tendrá radio grande por lo que la curvatura

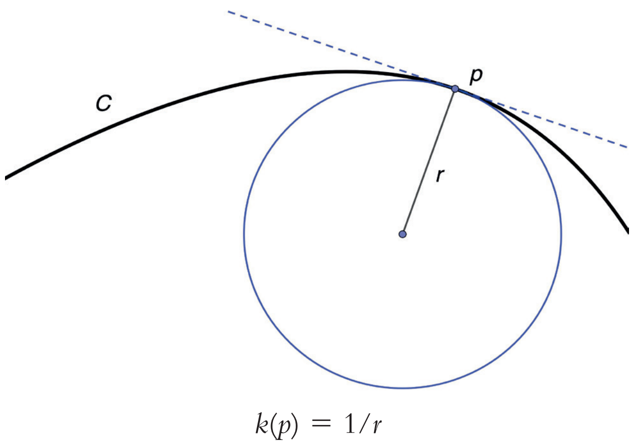
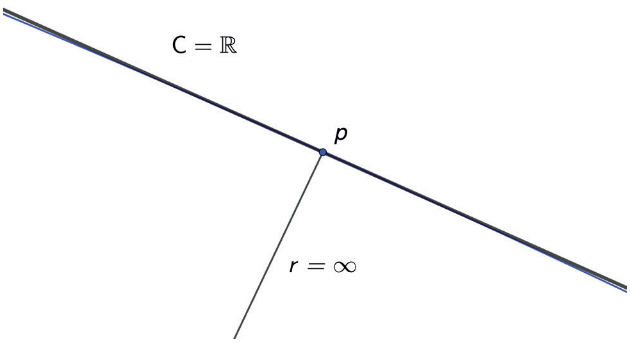


Figura 2. Curvatura de una curva plana en un punto de la misma

será pequeña. Por el contrario, los puntos de la curva en los que esta se aleje más de ser una recta la circunferencia tangente tendrá un radio menor por lo que su curvatura, al venir dada por el inverso del radio, será mayor.

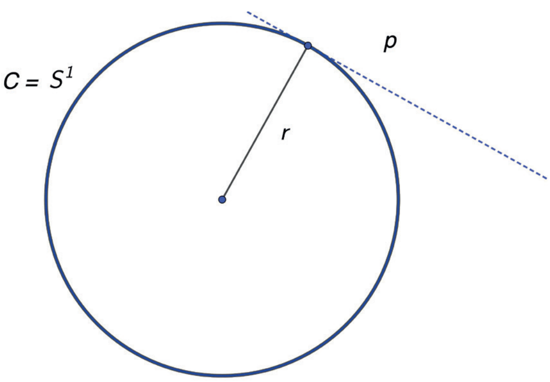
En el caso particular de que nuestra curva fuera una recta, se puede interpretar que la circunferencia tangente que mejor se ajusta dicha recta en cada punto es aquella que tiene radio infinito lo cual nos aporta, tal y como deseábamos, un valor nulo para la curvatura en todos los puntos de la recta (figura 3).

Por otra parte si nuestra curva fuera por ejemplo, una circunferencia S^1, la circunferencia tangente que mejor se ajusta a ella en cada punto es ella misma, por lo que la curvatura sería, en todo punto, el inverso de su radio (figura 4).



$$k(p) = 0, \forall p \in \mathbb{R}$$

Figura 3. Curvatura de una recta



$$k(p) = 1/r, \forall p \in S^1$$

Figura 4. Curvatura de una circunferencia

En estos dos casos particulares la curvatura permanece constante para todo punto de la curva, pero en general este valor variará para los distintos puntos de la misma.

Conocido como se define la curvatura en cada punto de una curva plana, ¿cómo podemos definir la curvatura de una superficie?

Curvatura en dimensión 2

Pensemos ahora en una superficie M cualquiera y tomemos un punto p de la misma. Podemos escoger un vector normal $\vec{n}$, es decir, que sea perpendicular a la superficie en ese punto. Digo escoger, porque nuestro vector normal puede apuntar hacia un lado de la superficie o hacia el otro, este hecho hará que podamos tener curvaturas positivas y negativas.

Tomamos todos los planos que contienen al vector normal, los podemos parametrizar por medio de una dirección α, y hacemos su intersección con la superficie M, obteniendo así para cada dirección α una curva plana sobre M que llamaremos C_α (figura 5).

Por tanto, para todo punto p de una superficie M y dada una dirección α podemos definir la curvatura en esa dirección como

$$\begin{aligned} k(\alpha) : C_\alpha &\to \mathbb{R} \\ p &\to k(\alpha, p) \end{aligned}$$

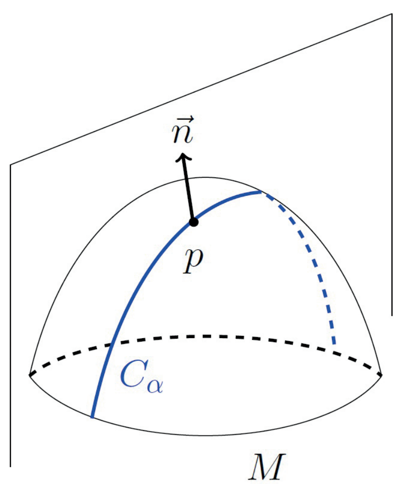


Figura 5. Curva plana en una superficie

Cabe destacar que para una superficie y un determinado punto obtendremos distintos valores de la curvatura según la dirección que tomemos. Los valores máximo y mínimo de estas curvaturas son lo que se conocen como *curvaturas principales* y usualmente se denotan como k_1 y k_2, respectivamente.

Definida la curvatura de una superficie en un punto, en una cierta dirección, sería deseable definir una función curvatura que no dependiera de direcciones. Existen varias maneras; en el presente artículo presentamos dos: la curvatura de Gauss y la curvatura media.

Curvatura de Gauss

Una de las curvaturas más conocidas es la curvatura de Gauss, y se define como el producto de las curvaturas principales

$$K = k_1 k_2.$$

Por tanto, si M es una superficie, su curvatura de Gauss viene dada por

$$\begin{aligned} K: M &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\rightarrow K(p) = k_1 k_2. \end{aligned}$$

La curvatura de Gauss permite distinguir tres tipos de puntos en una superficie:

- —Elípticos si $K > 0$. Las dos curvaturas principales tienen el mismo signo (figura 6).
- —Parabólicos si $K = 0$. Al menos una de las curvaturas principales se anula (figura 7).
- —Hiperbólicos si $K < 0$. Las dos curvaturas principales tienen distinto signo (figura 8).

Estos últimos se suelen llamar puntos silla por su semejanza con las sillas de montar de caballos.

Cabe destacar que en una misma superficie podemos encontrar puntos de las tres clases, uno de los ejemplos más sencillos con puntos de las tres clases es el toro $S^1 \times S^2$ (figura 9), donde la línea punteada está formada por puntos parabólicos, mientras que en la

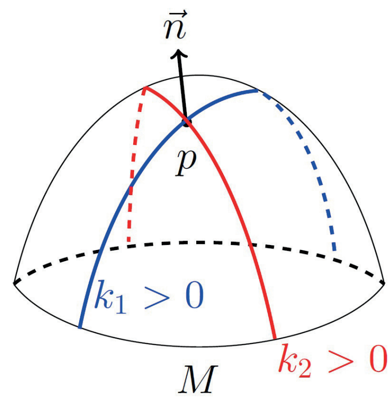


Figura 6. Curvatura de Gauss positiva

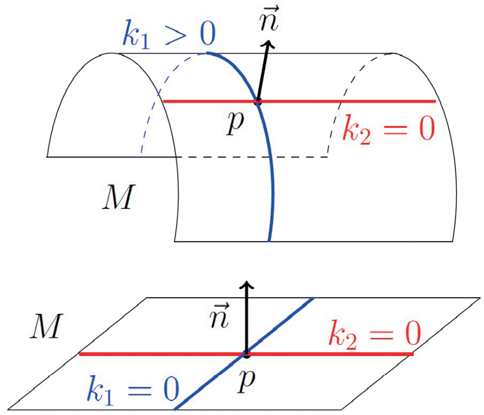


Figura 7. Curvatura de Gauss nula

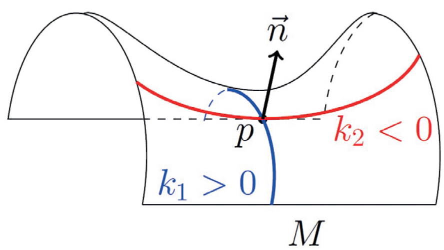


Figura 8. Curvatura de Gauss negativa

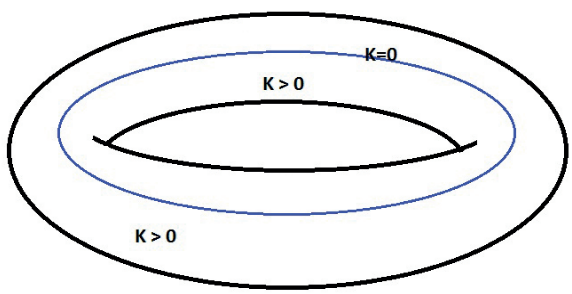


Figura 9. Curvatura de Gauss de los puntos del Toro

parte central y en la más exterior tenemos, respectivamente, puntos hiperbólicos y elípticos.

Curvatura media

La curvatura media de una superficie, en un punto de la misma, es el valor medio de la curvatura en todas sus direcciones. Es decir se toman todas las curvaturas de las curvas planas C_α que nos aparecen en las distintas direcciones y hacemos la media. Por lo tanto, la curvatura media se define como

$$H=\tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k(\alpha)\ d\alpha.$$

Gracias al conocido como teorema de Euler se puede dar una definición equivalente de curvatura media en la que no aparecen integrales utilizando las curvaturas principales.

Dicho teorema (Euler, 1760) establece que dada una superficie y un punto p de la misma las curvaturas principales existen y sus respectivas direcciones son perpendiculares. Además, determina que se puede calcular la curvatura en cualquier dirección sin más que conocer las curvaturas principales y el ángulo α formado por la dirección de la curva y la dirección de la curvatura principal k_1.

Así la curvatura de C_α viene dada por

$$k(\alpha)=k_1\ \cos^2\alpha+k_2\ \mathrm{sen}^2\,\alpha,$$

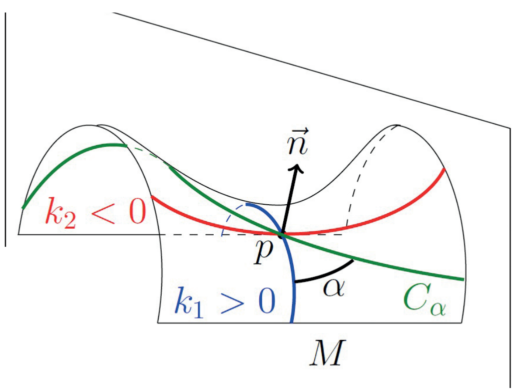


Figura 10. Curva plana sobre una superficie

por lo que sustituyendo en la definición de curvatura media e integrando, tenemos que

$$H=\tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_1\cos^2\alpha+\mathrm{k}_2\mathrm{sen}^2\alpha\ d\alpha=$$
$$=\tfrac{1}{2\pi}k_1\int_0^{2\pi}\cos^2\alpha+\tfrac{1}{2\pi}\mathrm{k}_2\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}^2\alpha,$$

donde el valor de estas dos últimas integrales es conocido

$$\int\cos^2\alpha\ d\alpha=\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}\mathrm{sen}(2x)+cte_1\ y$$
$$\int\mathrm{sen}^2\alpha\ d\alpha=\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}\mathrm{sen}(2x)+cte_2$$

siendo cte_1 y cte_2 constantes de integración. Por tanto, sin más que sustituir se obtiene que la *curvatura media* puede ser definida equivalentemente como la media de las dos curvaturas principales

$$H=\tfrac{1}{2}(k_1+k_2).$$

En conclusión, dada una superficie M, su curvatura media viene dada por

$$\begin{aligned} H:M &\to \mathbb{R} \\ p &\to H(p)=\tfrac{1}{2}(k_1+k_2) \end{aligned}$$

Superficies con curvatura media nula

Habíamos comentado, al comienzo del artículo, que las superficies minimales se pueden describir como aquellas que tienen curvatura media nula en todos sus puntos, es decir $H = 0$. Cabe destacar que una primera consecuencia de este hecho es que en las superficies minimales se satisface que

$$k_2 = -k_1,$$

por lo que la curvatura de Gauss en todos sus puntos será

$$K = -k_1^2.$$

Esto último implica que *en una superficie minimal todos sus puntos son hiperbólicos,* es decir, puntos silla (si $k_1$es no nulo) o es una superficie plana (si k_1 es nulo). Maravilloso resultado de estructura el que acabamos de obtener sin más que aplicar las definiciones de curvatura media y de Gauss.

EJEMPLOS

Dos de las superficies minimales más conocidas —además del plano— son el parabolide hiperbólico y el hiperboloide de una hoja, los cuales podemos ver en la figura 11.

Si nos fijamos en un punto cualquiera de alguna de estas dos superficies podemos apreciar como las curvaturas principales tienen signos distintos.

Un poco de física

El hecho de que las películas de jabón adopten siempre, entre todas las posibles formas, aquellas que tienen curvatura media nula, no es un hecho ni mucho menos casual.

> La justificación física de este fenómeno está en la ecuación de Laplace-Young, en honor del matemático francés Pierre Simon Laplace (1749-1827) y del físico inglés Thomas Young (1773-1829), la cual establece que la diferencia de presión entre ambos lados de una película o pompa de jabón viene dada por el producto de la tensión superficial y la curvatura media de la superficie que se forma.
>
> (Alias, 2002: 38)

Concretamente la ecuación de Laplace-Young se puede expresar como

$$\Delta p = -\gamma H,$$

donde Δp es la diferencia de presión a ambos lados de la película de jabón, γ es la tensión superficial y H es la curvatura media.

Por lo tanto, si pensamos en películas de jabón lo suficientemente finas y que no separen el espacio Euclídeo, se tiene que la presión a ambos lados de las mismas es exactamente igual por lo que la diferencia de presión Δp es nula. Teniendo en cuenta que existe tensión superficial en la película de jabón, la ecuación de Laplace-Young fuerza a que la curvatura media de la superficie adoptada esta sea exactamente nula en todos sus puntos.

Superficies minimales en la vida cotidiana

Desde un punto de vista práctico, las superficies minimales han sido muy utilizadas en múltiples y diversos campos como por ejemplo en industria, arquitectura y música.

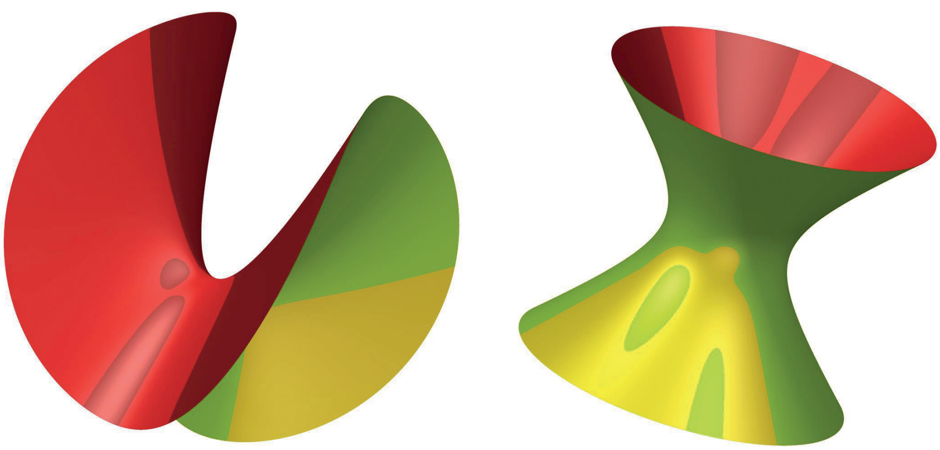


Figura 11. Parabolide hiperbólico (izda.) e hiperbolide de una hoja (dcha.)

SUPERFICIES MINIMALES EN INDUSTRIA

Puesto que estas superficies minimizan el área, su uso puede producir importantes reducciones de gastos y por ello no es nada extraño encontrar ejemplos incluso en las patatas fritas (figura 12).

SUPERFICIES MINIMALES EN ARQUITECTURA

La arquitectura también es un campo habitual de aparición de superficies minimales. Su uso puede permitir abaratar costes en materiales al minimizar el área, pero además, al tratarse de las superficies que se forman de manera natural tienen buenas propiedades físicas como la reducción de tensiones superficiales (figura 13).

Por otra parte, tal y como indica Alsina (2005: 122-123), este tipo de superficies tienen buenas propiedades difusoras por lo que no es extraño que las centrales nucleares las hayan adoptado para las chimeneas que expulsan el vapor (figura 14).

SUPERFICIES MINIMALES EN MÚSICA

Las buenas propiedades difusoras de estas superficies, ya apuntadas por Alsina (2005: 122-123) han fomentado su aparición en herramientas de difusión del sonido como pueden ser gramófonos, campanas, instrumentos musicales… (figura 15).

> La forma de una campana tiene la función de difundir […] los sonidos lejos del campanario y resulta ser más idóneo en forma de medio hiperboloide…
>
> (Alsina, 2005: 122)

Experimentación

Para obtener nuestros propios ejemplos de superficies mínimas basta coger un alambre cerrado (o varios), al que daremos distintas formas y una solución jabonosa en la que sumergirlo. Experimentando se puede comprobar que, en efecto, las superficies obtenidas cumplen que todos sus puntos son puntos silla, a no ser que se trate de una superficie plana.

Además podremos identificar la aparición de superficies que nos resultan familiares debido al gran uso que aparece de superficies minimales en la vida cotidiana.

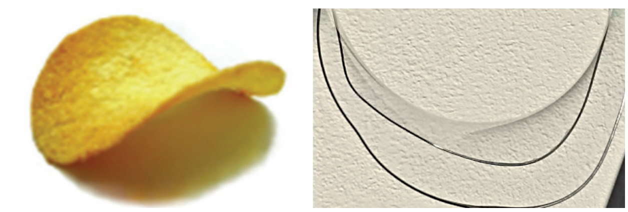


Figura 12. Patata frita con forma de paraboloide hiperbólico

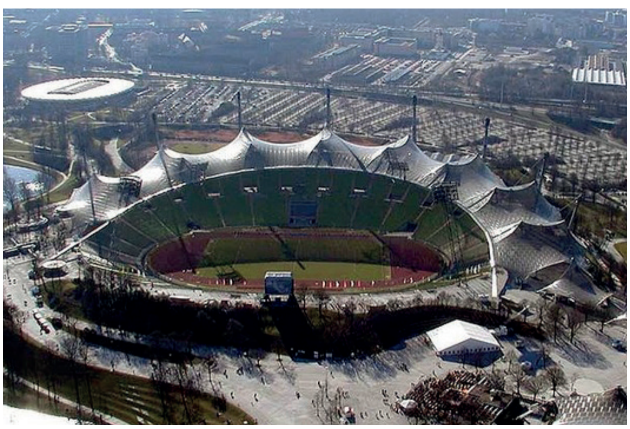


Figura 13. Estadio Olímpico de Munich

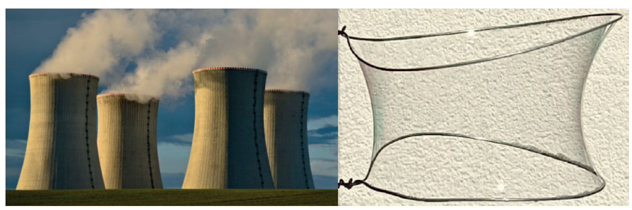


Figura 14. Chimeneas de una central nuclear con forma de hiperboloide de una hoja

Figura 15. Gramófomo con forma de medio hiperboloide de una hoja

Referencias bibliográficas

Alías, L. J. (2002), *El significado geométrico de la curvatura: superficies de curvatura media constante* [Conferencia pronunciada con motivo de la concesión del Premio Jóvenes Investigadores de la Región de Murcia.].

Alsina, C. (2005), *Geometría Cotidiana,* Rubes Editorial, Barcelona.

Euler, L. (1760), «Recherches sur la courbure des surfaces», *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin,* vol. 16, 119–143.

Lagrange, J. L. (1760), «Essai d'une nouvelle methode pour determiner les maxima et les minima des formules integrales indefinies», *Miscellanea Taurinensia 2,* vol. 325(1),173-199.

Meusnier, J. B (1785), «Mémoire sur la courbure des surfaces», *Mém. Mathém. Phys. Acad. Sci. Paris,* vol. 10, 477–510.

Víctor M. Manero García
Universidad de Zaragoza
<vmanero@unizar.es>

Programación lineal y hojas de cálculo

Carlos González Martín

SUMA+ núm. 103
pp. 61-74
Artículo recibido en *Suma* en octubre de 2021 y aceptado en agosto de 2022

En este trabajo se hacen aplicaciones de hojas de cálculo (spreadsheets) para resolver distintos casos relevantes de problemas de Programación Lineal. El enfoque pretendido es, esencialmente, divulgativo de la «popularidad» del término, resaltando la facilidad de uso de hojas de cálculo para resolver algunos problemas de programación lineal en un contexto docente.

Palabras clave: Programación Lineal, Método del Simplex, Hojas de Cálculo, Resolución de problemas relevantes.

Linear Programming and spreadsheets // In this paper spreadsheets applications to solve different relevant cases of Linear Programming problems are used. The intended approach is essentially informative on the «popularity» of the term, focussing in the use of spreadsheets to solve some Linear Programming problems in teaching areas.

Keywords: Linear Programming, Simplex Method, Spreadsheets, Resolution of relevant problems.

Para comprobar la «popularidad» de la programación lineal (en inglés, *linear programming*), basta con usar cualquier buscador de Internet y ver la ingente cantidad de resultados que aporta. Este hecho viene propiciado por la importancia que tiene en diferentes ámbitos que involucran la participación de las ciencias, diferentes ingenierías, la economía, la gestión y el gobierno de instituciones, las comunicaciones… El iniciador y máximo exponente de la programación lineal es G. B. Dantzig (Cottle, Johnson y Wets, 2007), el cual desarrolló, a partir de 1947, el método del simplex.

La programación lineal es uno de los hitos científicos más importantes del siglo XX. Así fue reconocido cuando la Academia Sueca otorgó el Premio Nobel de Economía de 1975 a T. C. Koopmans y L. K. Kantorovich por sus *contribuciones a la teoría de la asignación óptima de recursos*; es decir, programación lineal o, en términos económicos, a su extensión como *linear* *activity analysis*. El método del simplex es el segundo algoritmo más usado durante el siglo xx.

Para ratificar las argumentaciones anteriores, el lector puede acudir, entre otros, a Vanderbei (2014) o Ahuja, Magnanti y Orlin (1993) como dos magníficas referencias en las que queda patente la enorme dimensión de la programación lineal.

En el contexto docente, la programación lineal es, indudablemente, una parte destacada de los contenidos cuantitativos impartidos en distintos grados universitarios. También se estudia, a nivel introductorio, en los programas de algunos itinerarios de enseñanza secundaria. Hay suficientes razones para considerar que este tópico es básico y que debería ser parte de los conocimientos y competencias de los titulados en cualquier grado de ciencias, de cualquier ingeniería, de economía, de gestión…

El uso práctico de la programación lineal es, esencialmente, computacional. Existen programas que, bajo distintas denominaciones y marcas comerciales, dan soporte a la resolución de diferentes problemas de programación lineal. Las dimensiones de dichos problemas exige el uso del software con la potencia y eficiencia adecuadas. También, el manejo intuitivo y facilidad de acceso son características a considerar.

Las hojas de cálculo son herramientas de uso generalizado para realizar distintas actividades. Además de hacer más potentes las tareas de las calculadoras electrónicas, incorporan, entre otras, herramientas gráficas y de análisis de datos que las convierten en útiles estadísticos básicos. De la misma forma, disponen de complementos que permiten resolver algunos problemas de optimización. En particular, problemas de programación lineal.

Por tanto, la existencia de dichos complementos en estas herramientas de uso universal, también se puede tomar como indicador de la popularidad atribuida al principio a la programación lineal. En este trabajo haremos un repaso del uso de distintas hojas de cálculo en la resolución de problemas de programación lineal.

Generalidades sobre hojas de cálculo

Son, esencialmente, tablas de doble entrada cuyas celdas pueden contener datos alfanuméricos o fórmulas (que involucran distintas operaciones matemáticas y/o funciones elegidas de un menú de opciones). Permiten usar volúmenes importantes de información y son muy útiles para ejecutar con efectividad distintas tareas científicas, técnicas, comerciales…

Entre las hojas de cálculo actuales, una de las más populares es Excel integrada en el paquete Microsoft Office. También son de uso generalizado Spreadsheet (Docs de Google) y Calc (Libre Office Calc) del paquete Open Office (Libre Office). Las dos últimas son de acceso gratuito.

Generalmente, en una hoja de cálculo se distinguen filas y columnas en la forma:

	A	B	C	D	E	F	G	…
1								
2								
3								
4								
…								

Figura 1

Entre las múltiples operaciones que se pueden realizar fácilmente con una hoja de cálculo, interesa señalar, exclusivamente, la suma de los productos, término a término, de dos matrices de igual dimensión. En el caso de matrices fila o columna, esta operación se reduce al cálculo del producto escalar de dos vectores.

Si en el ejemplo de hoja anterior introducimos datos:

	A	B	C	D	E	F	G	…
1	2	4	−3					
2	4	4	6		2	1	5	
3					−5	3	6	
4								
…								

Figura 2

La suma de los productos, término a término de las matrices $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, se puede realizar ejecutando, en una celda libre, la fórmula:

$$= \mathrm{A1} \cdot \mathrm{E2} + \mathrm{B1} \cdot \mathrm{F2} + \mathrm{C1} \cdot \mathrm{G2} + \\ + \mathrm{A2} \cdot \mathrm{E3} + \mathrm{B2} \cdot \mathrm{F3} + \mathrm{C2} \cdot \mathrm{G3}$$

Alternativamente, la misma operación puede ejecutarse a través del uso de la función SUMAPRODUCTO (o su traducción equivalente al inglés), ejecutando (barra de fórmulas):

= SUMAPRODUCTO(A1: C2; E2: G3)

En ambos casos, el resultado es 21.

Hay que indicar que las fórmulas pueden usar constantes, el contenido de otras celdas, operaciones (suma, resta, producto, división, exponenciación…), funciones disponibles… Antes de escribirlas (en el formato estándar correspondiente) hay que poner, en la celda libre elegida, el símbolo =.

REPRESENTACIÓN DE UN PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL EN UNA HOJA DE CÁLCULO

Un problema de programación lineal tiene la forma:

$$\begin{gathered} \text{mín } c_1\, x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \\ s.\,a\text{: } a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{in} x_n + (\geq, \leq) b_i,\ i = 1, \ldots, m \\ x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n \end{gathered}$$

Se minimiza (maximiza) una función lineal (*función objetivo*) en un contexto definido por ecuaciones o inecuaciones lineales (*restricciones*) que definen la *región factible*.

Su resolución admite la previa representación como un sistema de ecuaciones (inecuaciones): el formado por las restricciones más la ecuación dada por la función objetivo igualada al valor objetivo (la condición de no negatividad de las variables de decisión, $x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n$, se maneja de forma implícita). La traducción sobre una hoja de cálculo sería:

	A	B	…	*N*	…	…	…
1							
2	a_{11}	a_{11}	…	a_{1n}		b_1	
3	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}		b_2	
…							
$m+1$	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}		b_m	
$m+2$	c_1	c_1		c_1			

Figura 3

Las celdas coloreadas en gris claro (segunda fila) se reservan para los valores de las variables de decisión. Las celdas en gris algo más oscuro (antepenúltima columna), contienen las fórmulas que establecen los lados izquierdos de las restricciones:

= SUMAPRODUCTO(A1: N1; A2: N2)

= SUMAPRODUCTO(A1: N1; A3: N3)

…

= SUMAPRODUCTO(A1: N1; A(m+1): N(m+1))

La celda gris más oscura contiene la fórmula de la función objetivo:

= SUMAPRODUCTO(A1: N1; A(m+2): N(m+2))

En estos casos, las fórmulas correspondientes involucran los productos escalares de los coeficientes del respectivo vector fila por el vector fila de variables de decisión.

APLICACIÓN DE COMPLEMENTOS DE OPTIMIZACIÓN EN HOJAS DE CÁLCULO

En Excel existe un complemento instalable que se denomina SOLVER. Una vez instalado, se ejecuta desde la pestaña Datos. En la versión en español de la hoja de cálculo de Google, el complemento Resolver aparece en la pestaña Herramientas. En Calc de LibreOffice, Solucionador aparece también en la pestaña Herramientas.

La ejecución de uno de estos complementos abre una ventana de diálogo en la que se pueden señalar los elementos esenciales del problema:

- Las celdas donde aparecerán los valores de las variables de decisión. Los valores de las variables de decisión pueden elegirse como reales no negativos, enteros o binarios (0,1).
- La celda donde aparece la fórmula de la función objetivo.
- La especificación del tipo de problema (mínimo o máximo)
- Para cada restricción:
  - celda donde está la fórmula de la expresión del lado izquierdo
  - tipo (ecuación o inecuación)
  - celda donde aparece la correspondiente constante del lado derecho.
- En el caso de Excel, elección del optimizador (admite seleccionar distintos métodos). En el caso de Google, no hay opciones. En Calc sí hay opciones.

Cuando se ejecuta, devuelve información que indica la no factibilidad, la no acotación o el encuentro de una solución óptima que escribe en los lugares reservados para las variables de decisión. También, en las celdas correspondientes, aparecen los valores que alcanzan los lados izquierdos de las restricciones (por tanto, se tendrá información del consumo de cada recurso por la solución óptima) y el valor óptimo de la función objetivo.

Ejemplo 1

Un proceso productivo incluye tres actividades (I, II y III) que utilizan dos recursos (A y B). Los datos relativos a consumos de recursos por unidad de nivel de actividad, las cantidades de recursos disponibles y los beneficios por nivel de actividad aparecen en la siguiente figura:

	I	II	III	Disponibilidad
Consumo de recursos/ unidad	4	2	−2	20 (A)
	−2	1	2	16 (B)
Beneficio/unidad	5	4	5	

Figura 4

El problema que se plantea es el de determinar los niveles que deben alcanzar las distintas actividades de forma que, consumiendo todos los recursos disponibles, se obtenga el máximo beneficio global. Por tanto, si $x_j, j = 1, 2, 3$, es la variable de decisión asociada al nivel de cada actividad, el modelo correspondiente es:

$$\begin{aligned} &\text{máx } 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ &s.\ a{:}\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 20 \\ &-2x_1 + x_2 - 2x_3 = 16 \\ &x_j \geq 0, j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

La hoja de cálculo en la que se resuelve este problema, contiene la información:

4	2	−2	0	20
−2	1	2	0	16
5	4	5	0	

Figura 5

(al ser, inicialmente, los valores de las variables de decisión iguales a cero, la penúltima columna solo contiene ceros).

La solución que aporta la aplicación del complemento es:

18	0	26		
4	2	−2	20	20
−2	1	2	16	16
5	4	5	220	

Figura 6

Es decir, una solución óptima (que consume todos los recursos disponibles) es $x_1 = 18, x_2 = 0, x_3 = 26$ y el valor óptimo es igual a 220.

Ejemplo 2

El problema de transporte es uno de los importantes de la programación lineal. Está ligado a autores relevantes como Koopmans y Kantorovich (citados previamente).

Se trata de un problema en el que se ha de diseñar una política de transporte de un producto entre almacenes (puntos de oferta) y mercados (puntos de demanda). En los almacenes hay cantidades disponibles de producto (a_i). En los mercados se conocen las demandas del mismo (b_j). Además, el transporte por unidad de producto, entre cada almacén y cada mercado, tiene un costo (c_{ij}). El modelo con m almacenes y n mercados, sin capacidades en las conexiones, tiene la forma:

$$\text{mín} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.a\colon \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

$$x_{ij} \geq 0,\ \forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

x_{ij} es la variable de decisión que expresa la cantidad de producto que se ha de transportar entre el almacén i y el mercado j. Este modelo corresponde con el caso balanceado en el que se transportan todas las unidades de producto ofertadas en los almacenes y llegan a los mercados, exactamente, las cantidades demandadas.

Los datos necesarios para identificar un problema de transporte se pueden escribir en una tabla con m filas y n columnas. En cada una de las casillas o celdas de la tabla aparecerá el costo unitario de transporte. Una columna adicional contendría las cantidades ofertadas en los almacenes y en una fila adicional aparecerían las demandas de los mercados.

Ejemplo
Supongamos que tenemos un problema de transporte de mínimo entre 5 almacenes y 12 mercados. Los datos correspondientes aparecen en la figura:

4	5	6	7	6	5	4	5	6	7	2	9	**25**
3	5	3	6	7	5	4	3	6	7	8	9	**38**
5	6	7	4	8	9	2	3	4	5	6	7	**43**
4	5	6	7	6	7	4	5	6	31	4	5	**23**
7	8	9	5	2	4	3	7	4	6	6	4	**37**
17	**13**	**11**	**19**	**12**	**9**	**8**	**15**	**16**	**14**	**10**	**22**	

Figura 7

Se observa que la suma de las ofertas de los almacenes coincide con la suma de las demandas de los mercados. Esto se denomina *condición de consistencia* o *de equilibrio*. Un problema de transporte para el que se verifica la condición de consistencia *siempre* tiene solución óptima. Si dicha condición no es cierta, en el caso de exceso de oferta, la adición de un mercado ficticio, con costos iguales a cero desde todos los almacenes y con demanda igual al citado exceso, permite recuperar el equilibrio. Cuando exista exceso de demanda, añadiendo un almacén ficticio, con costos iguales a cero hasta todos los mercados y con oferta igual al exceso de demanda, también se recupera el equilibrio.

Solución con una hoja de cálculo
Escribimos la tabla anterior en una hoja de cálculo y reservamos un espacio similar para:

- —Salvo la última columna y la última fila, escribir los valores de las variables en la solución óptima.
- —En la última columna (celdas resaltadas en gris fuerte) escribimos fórmulas de las restricciones que afectan a los almacenes (=SUMA(fila de variables)).
- —En la última fila (celdas resaltadas en gris fuerte) escribimos las restricciones que afectan a los mercados (=SUMA(fila de variables)).

Además, reservamos una celda (en gris más fuerte) para escribir la fórmula de la función objetivo (=SUMAPRODUCTO(matriz de costos; matriz de variables)).

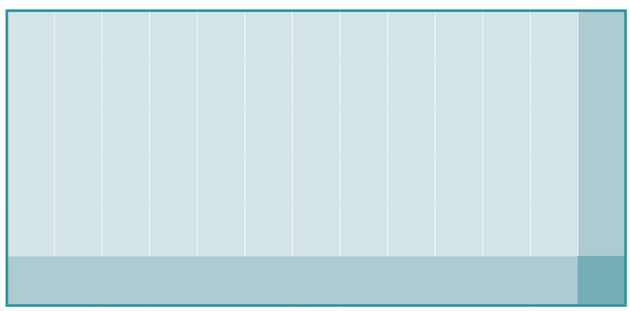


Figura 8

Una vez escrito adecuadamente y ejecutado, la respuesta sería similar a la siguiente:

17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	0	**25**
0	3	11	0	0	9	0	15	0	0	0	0	**38**
0	0	0	19	0	0	8	0	2	14	0	0	**43**
0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	2	11	**23**
0	0	0	0	12	0	0	0	14	0	0	11	**37**
17	**13**	**11**	**19**	**12**	**9**	**8**	**15**	**16**	**14**	**10**	**22**	**561**

Figura 9

Las cantidades a transportar entre cada almacén y cada mercado aparecen en las celdas correspondientes.

Ejemplo 3

Otro de los problemas relevantes de la programación matemática es el de asignación. Un contexto habitual para este problema nos remite al caso de n operarios y n máquinas. Conocido el costo originado por el operario i cuando es asignado a la máquina j, c_{ij}, se trata de asignar cada uno de los operarios a cada una de las máquinas (un operario por máquina y una máquina por operario) de forma que se minimicen los costos globales. El correspondiente modelo sería:

$$\text{mín} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.a{:} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

$$x_{ij} \geq 0, 1, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

$x_{ij} = 1$, si el operario i es asignado a la máquina j.
$x_{ij} = 0$, en caso contrario.

Estas variables de decisión, de tipo binario, hacen que el problema de asignación sea de programación entera. Sin embargo, se pueden sustituir por $x_{ij} \geq 0$, si tenemos en cuenta las propiedades matriciales del problema, que garantizan que las soluciones que aporta la programación lineal sean enteras. Esto hace, además, que tengamos un caso particular de un problema de transporte, con el mismo número de almacenes y de mercados, cuyas ofertas y demandas son iguales a uno.

Ejemplo
Dado el problema de asignación de mínimo con $n = 12$:

5	6	4	9	7	3	10	10	6	8	3	4
9	3	5	3	3	5	4	6	10	9	9	7
4	6	3	5	2	3	6	8	9	9	10	3
8	7	7	2	2	10	7	5	2	2	9	4
4	2	9	2	10	9	3	10	8	8	4	9
8	2	9	9	8	7	9	9	2	6	9	6
4	4	9	5	4	6	2	9	5	7	4	4
8	7	10	6	8	9	9	9	4	3	9	7
6	10	6	9	2	5	6	10	3	6	8	7
10	5	4	10	3	5	6	6	4	3	7	6
6	4	9	5	5	10	9	7	3	4	10	9
6	4	4	6	6	7	5	7	3	8	10	3

Figura 10

Una solución óptima, con valor óptimo igual a 37, es:

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	1
0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	1
0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	37

Figura 11

Ejemplo 4

Un caso importante de problema de programación lineal es el de flujo de coste mínimo. Se plantea sobre una red dirigida definida por un conjunto de n vértices, V, y un conjunto de m arcos (pares ordenados de vértices), A.

En los vértices hay disponibilidades de lo que genéricamente se denomina flujo (producto que puede circular por la red). Una disponibilidad positiva significa que el vértice correspondiente es de oferta (similar a la idea de almacén). Una disponibilidad negativa está asociada con una demanda y esto hace que el correspondiente punto sea un mercado de consumo de flujo. Una disponibilidad igual a cero corresponde con un vértice de transbordo.

En los arcos existen magnitudes referidas a las capacidades (mínimo y máximo de flujo que puede circular) y a los costos por unidad transportada.

El problema que se plantea es el de determinar las cantidades de flujo que deben circular por los arcos de forma que se minimicen los costos globales respetando las capacidades de los arcos, las disponibilidades de los vértices y haciendo que en estos se conserve el flujo (la cantidad de flujo que sale de cada vértice igual a lo que llega más la disponibilidad). Esto último se conoce como las *ecuaciones de conservación del flujo*, de *equilibrio* o de *Kirchoff*.

El modelo general del problema de flujo de costo mínimo es:

$$\text{mín} \sum_{i \in V} \sum_{j \in \text{Suc}(i)} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.a{:} \sum_{j \in \text{Suc}(i)} x_{ij} - \sum_{j \in \text{Pred}(i)} x_{ji} = b_i, \forall i \in V$$

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \forall (i,j) \in A$$

Suc(i) es el conjunto de vértices conectados directamente desde i y Pred(i) es el conjunto de vértices desde los que existe conexión directa hacia i.

b_i es la disponibilidad del vértice i, $\forall i \in A$. Las ecuaciones de conservación del flujo implican que $\sum_{i \in V} b_i = 0$ (condición de consistencia).

c_{ij}, l_{ij}, u_{ij} son, respectivamente, el costo por unidad transportada, la capacidad inferior y la capacidad superior de cada arco $(i,j) \in A$.

Ejemplo

Supongamos el siguiente caso particular en el que tenemos para los vértices los valores de la figura 12:

Vértices	Disponibilidad
1	20
2	−10
3	−5
4	20
5	−5
6	−5
7	−5
8	−5
9	−5

Figura 12

y para los arcos:

desde	hasta	cap_min	cap_max	costo
1	2	4	13	5
1	3	2	10	4
2	3	1	11	5
2	4	4	18	3
3	5	3	8	6
3	6	2	10	5
4	5	4	20	7
4	7	4	22	4
5	2	3	13	6
5	6	2	10	2
5	7	1	11	3
5	8	2	15	4
6	8	3	19	5
7	8	2	13	2
8	9	1	16	6
9	6	1	12	5
9	7	0	10	7

Figura 13

Gráficamente, la correspondiente red tiene la representación que se observa en la figura 15.

Situando al lado de cada vértice, en negrita, el valor de su disponibilidad y al lado de cada arco los valores de sus capacidades mínima y máxima y el costo por unidad transportada ((cap_min, cap_max, costo)).

Actuando sobre una hoja de cálculo, se obtiene una solución óptima como la siguiente:

desde	hasta	*x*
1	2	11
1	3	9
2	3	1
2	4	4
3	5	3
3	6	2
4	5	14
4	7	10
5	2	4
5	6	5
5	7	1
5	8	2
6	8	3
7	8	6
8	9	6
9	6	1
9	7	0
		387

Figura 14

Señalamos las cantidades de flujo que circulan por los arcos (en trazo grueso aparecen los arcos, denominados básicos, asociados a un árbol óptimo) (figura 16).

Ejemplo 5

Los problemas de rutas son de importancia capital en el transporte, en las comunicaciones, en la distribución, en las finanzas, etc. En investigación operativa se estudian este tipo de problemas bajo diversas denominaciones y tipologías. Una de ellas es la de problemas de caminos.

Entre los problemas de caminos, nos interesa el caso en el que, en una red dirigida y conexa con n vértices, se quieren determinar los caminos mínimos que conectan un vértice particular (por ejemplo, el vértice 1) con el resto de vértices. Este problema, denominado problema del árbol de caminos mínimos (con raíz en 1), es un caso particular del ejemplo 4 en el que la disponibilidad del vértice 1 es igual a $n-1$, la correspondiente a cada uno del resto de vértices es igual $a -1$, las capacidades inferiores y las capacidades superiores de los arcos son, respectivamente, iguales a cero e infinito (sin capacidades). c_{ij} es la longitud del arco (i, j). De esta forma, el modelo queda como:

$$\text{mín} \sum_{i\in V}\sum_{j\in \text{Suc}(i)} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.a\!: \sum_{j\in \text{Suc}(i)} x_{ij} - \sum_{j\in \text{Pred}(i)} x_{ji} = \begin{cases} n-1, si\ i=1 \\ -1, \forall i \in V-\{1\} \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, \forall (i,j) \in A$$

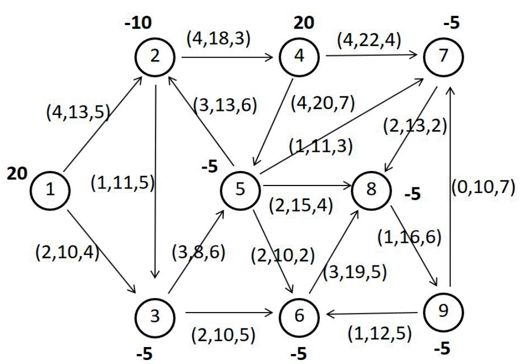


Figura 15

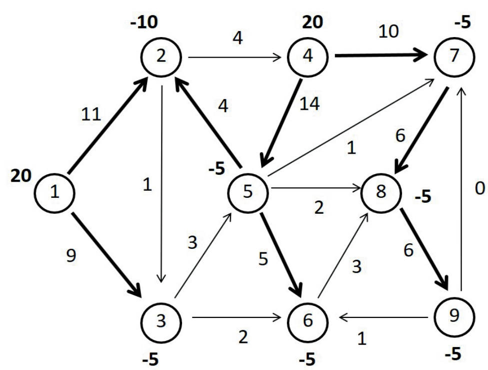


Figura 16

Ejemplo
Veamos el caso particular de la figura 17.

La resolución sobre una hoja de cálculo nos da la solución (los arcos del árbol aparecen en trazo más grueso de la figura 18).

La longitud de cada camino desde 1 es igual a la suma de las longitudes de los arcos correspondientes (en trazo grueso).

Ejemplo 6

Un problema relacionado con los anteriores es el de flujo máximo. Sobre una red dirigida conexa y con capacidades por la que circula un tipo de flujo, se distinguen dos vértices: fuente u origen (de donde solo salen arcos) y destino (a donde solo llegan arcos). El problema de flujo máximo consiste en determinar las cantidades de flujo que deben circular por los arcos (respetando las capacidades y verificando las ecuaciones de conservación) de forma que sea máximo el que circula desde el origen hasta el destino.

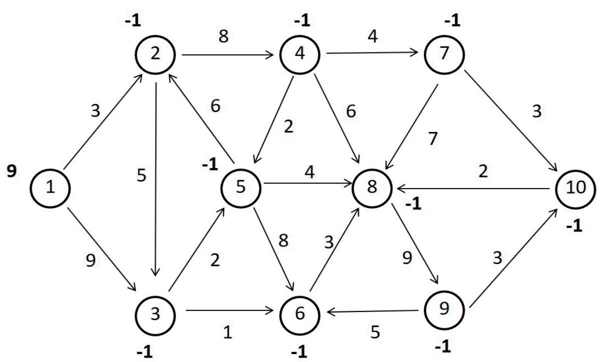


Figura 17

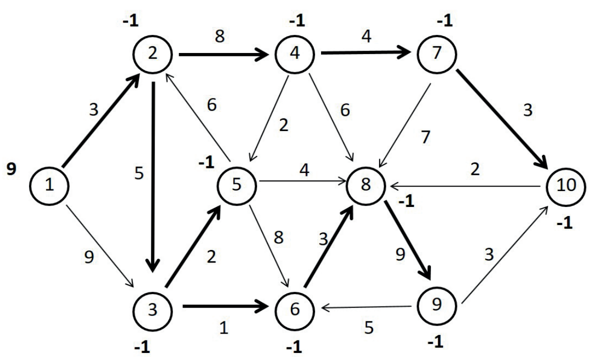


Figura 18

Si , $V = \{1, ..., n\}$, 1 es el vértice origen y n es el vértice destino, el correspondiente modelo sería:

$$\text{máx } f$$

$$s.a{:}\sum_{j\in Suc(i)} x_{ij} - \sum_{j\in Pred(i)} x_{ji} = \begin{cases} f, si\ i = 1 \\ -f, si\ i = n \\ 0, \forall i \in V-\{1,2\} \end{cases}$$

$$l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij}, \forall (i,j) \in A$$

Ejemplo
Veamos un caso particular con $V = \{1, ..., 10\}$ y con arcos según la siguiente tabla:

desde	hasta	cap min	cap max
1	2	4	22
1	3	1	19
1	4	3	14
2	3	1	10
2	5	4	18
2	6	3	15
3	4	2	13
3	6	3	11
4	6	3	16
4	7	2	10
5	6	4	20
5	8	1	11
5	9	4	22
6	8	2	15
6	7	2	10
7	8	3	19
7	10	1	12
8	10	1	16
8	11	3	17
9	8	2	13
9	11	2	24
10	11	5	18

Figura 19

La gráfica correspondiente es la que aparece en la figura 21.

Al aplicar una hoja de cálculo obtenemos la solución con $f = 46$:

desde	hasta	cap min	cap max	flujos
1	2	4	22	22
1	3	1	19	12
1	4	3	14	12
2	3	1	10	1
2	5	4	18	18
2	6	3	15	3
3	4	2	13	2
3	6	3	11	11
4	6	3	16	4
4	7	2	10	10
5	6	4	20	4
5	8	1	11	1
5	9	4	22	13
6	8	2	15	12
6	7	2	10	10
7	8	3	19	8
7	10	1	12	12
8	10	1	16	6
8	11	3	17	17
9	8	2	13	2
9	11	2	24	11
10	11	5	18	18

Figura 20

Su representación gráfica se puede ver en la figura 22.

Ejemplo 7

Dentro de la investigación operativa, los problemas de planificación (*scheduling*) ocupan un lugar de privilegio. Uno de los casos particulares de estos problemas es el de redes de proyectos. Una versión sencilla de este sería la siguiente:

Dada una red acíclica, dirigida y conexa, supongamos que los n vértices son instantes de tiempo en los que comienzan o terminan los trabajos de que consta un proyecto. Cada trabajo tiene una duración asociada. Entre los trabajos hay un orden de precedencia que queda plasmado en el conjunto de arcos. Se trata de ejecutar el proyecto (completar todos los trabajos) en el mínimo tiempo posible.

Si $R = (V, A)$, sean t_i el instante de tiempo asociado al vértice i, $\forall i \in V$, y d_{ij} la duración del trabajo (i, j), $\forall (i,j) \in A$.

El problema de programación lineal que corresponde es:

$$\text{mín } t_n - t_1$$

$$s.a: t_j - t_i \geq d_{ij}, \forall (i, j) \in A$$

$$t_i \geq 0, \forall i \in V$$

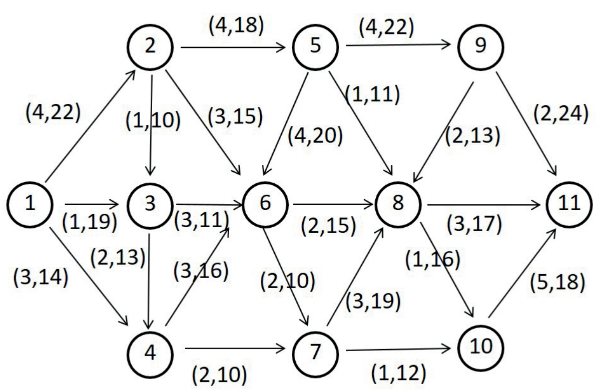


Figura 21

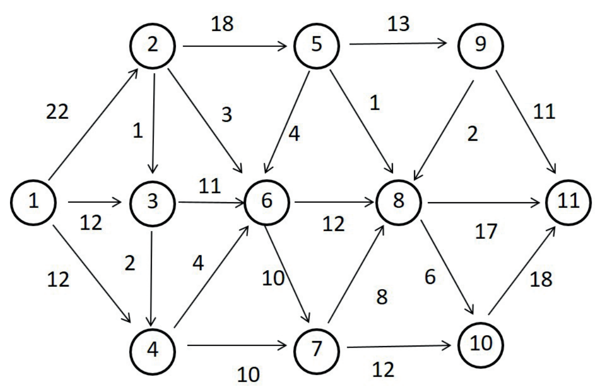


Figura 22

Ejemplo
Para el caso siguiente:

Trabajo	Precedencia	Duración
A	-	3
B	-	8
C	-	9
D	A	5
E	B,D	8
F	A	8
G	C,E	2
H	C,E	1
I	F	2
J	F	4
K	F	6
L	A	6
M	G,I,L	8
N	G,I,L	4
Ñ	H,M	3
O	H,M	5
P	J	7
Q	J	3
R	K,N,Ñ,P	6
S	K,N,Ñ,P	2
T	O,R	3

Figura 23

La correspondiente red se muestra en la imagen 24.

Se observa que se usan 11 instantes de tiempo en los que comienzan o concluyen distintos trabajos.

Aplicando convenientemente una hoja de cálculo obtenemos la solución óptima:

t_1=	t_2=	t_3=	t_4=	t_5=	t_6=	t_7=	t_8=	t_9=	t_{10}=	t_{11}=
0	3	8	16	11	18	26	15	29	35	38

Figura 25

A partir de dicha solución, se resaltan los arcos que se corresponden con las restricciones del problema de programación lineal que se dan con igualdad (figura 26).

Cualquier camino, de arcos en trazo más grueso, que conecte 1 con 11 se denomina camino crítico. Recibe este nombre porque el hipotético aumento de la duración de cualquiera de los trabajos de que consta, implica un retraso en la ejecución del proyecto. La longitud de dicho camino es máxima. En este caso vale 38.

El conocimiento del camino crítico posibilita la creación de la tabla del proyecto en la que se calculan los tiempos mínimos y máximos de comienzo y terminación de cada trabajo:

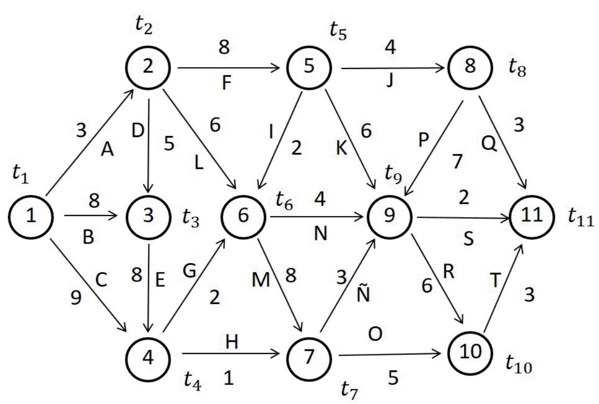


Figura 24

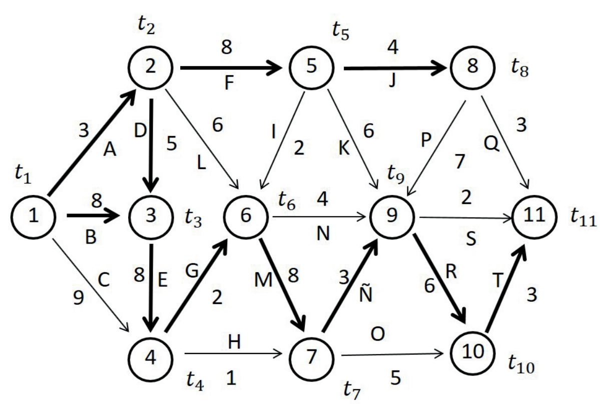


Figura 26

Trabajo	Precedencia	Duración	T° mín. com.	T° máx.com.	T° mín.term.	T° máx.term.	Holgura
A	-	3	0	0	3	3	0
B	-	8	0	0	8	8	0
C	-	9	0	7	9	16	7
D	A	5	3	3	8	8	0
E	B,D	8	8	8	16	16	0
F	A	8	3	6	11	14	3
G	C,E	2	16	16	18	18	0
H	C,E	1	16	25	17	26	9
I	F	2	11	16	13	18	2
J	F	4	11	18	15	22	7
K	F	6	11	23	17	29	12
L	A	6	3	12	9	18	9
M	G,I,L	8	18	26	18	26	8
N	G,I,L	4	18	25	22	29	7
Ñ	H,M	3	26	26	29	29	3
O	H,M	5	26	30	31	35	4
P	J	7	15	22	22	29	7
Q	J	3	15	35	18	38	20
R	K,N, Ñ,P	6	29	29	35	35	0
S	K,N, Ñ,P	2	29	36	31	38	7
T	O,R	3	35	35	38	38	0

Figura 27

La holgura indica el retraso posible del inicio de cada trabajo a partir del instante óptimo asociado al vértice del que parte según la relación de precedencia. Por ejemplo, el trabajo C tiene siete unidades de tiempo para ser iniciado a partir del instante inicial. Los trabajos (arcos) con holgura igual a cero son críticos.

Ejemplo 8

Los problemas de producción-inventarios constituyen una parte relevante de la investigación operativa. Algunos de ellos se pueden formalizar como problemas de programación lineal.

Supongamos que son conocidas las demandas de un producto en n períodos: D_i, $i = 1, \dots, n$. Para atenderlas se puede usar producto almacenado o producido en el correspondiente período. Sea I_i la cantidad de producto almacenado al finalizar el período i y x_i la cantidad producida en dicho período. Los correspondientes costos de almacenamiento y producción serán ca_i y cp_i.

El problema de producción-inventario que permite atender las demandas minimizando costos globales, se puede formular como:

$$\text{mín} \sum_{i=1}^{n} ca_i I_i + \sum_{i=1}^{n} cp_i x_i$$

$$s.a\colon x_i + I_{i-1} - I_i = D_i, \text{i} = 1, \dots, n$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \dots, n \qquad I_i \geq 0, i = 0, \dots, n$$

Si no hay producto almacenado al inicio ni al final del último período, $I_0 = I_n = 0$.

Ejemplo
Podemos referirnos al caso particular siguiente:

Período	Costo Prod.	Costo Inv.	Demanda
1	5	5	20
2	6	4	30
3	7	1	40
4	8	3	50
5	5	2	25
6	9	5	35
7	4	2	20
8	3	4	30

Figura 28

Al aplicar una hoja de cálculo, obtenemos:

Período	x_i	I_i
1	20	0
2	30	0
3	90	50
4	0	0
5	60	35
6	0	0
7	20	0
8	30	0

Figura 29

En este caso $I_0 = I_8 = 0$ y el valor objetivo óptimo es igual a 1 500.

Puede suceder que la puesta en funcionamiento del sistema de producción (*setup*) tenga distinto costo en función de período. Sea $csu_i, i = 1, \dots, m$ dicho costo. Habrá que decidir en qué períodos hay que producir a través de la consideración de la variable binaria:

$$y_i = \begin{cases} 1, \text{ si se produce en el periodo } i \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

El modelo anterior debe, entonces, cambiar a:

$$\text{mín} \sum_{i=1}^{n} ca_i I_i + \sum_{i=1}^{n} cp_i x_i + \sum_{i=1}^{n} csu_i y_i$$

$$s.a{:}\ x_i + I_{i-1} - l_i = D_i, i = 1, \dots , n$$

$$x_i \geq y_i \sum_{i=1}^{n} D_j, i = 1, \dots , n$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \dots , n, y_i = 0{,}1, i = 1, \dots , n\ I_i \geq 0, i = 0, \dots , n$$

Se observa que en la restricción $x_i \leqslant y_i \sum^n_{j=1} D_j$, $\sum^n_{j=1} D_j$ puede ser sustituido por cualquier cota superior de este valor.

Ejemplo
Si al ejemplo anterior le añadimos costos de *setup*:

Período	Costo Prod.	Costo Inv.	Costo setup	Demanda
1	5	5	3	20
2	6	4	2	30
3	7	1	4	40
4	8	3	5	50
5	5	2	4	25
6	9	5	3	35
7	4	2	6	20
8	3	4	3	30

Figura 30

La solución obtenida al aplicar una hoja de cálculo, en la que se han declarado las variables como binarias, es:

Período	x_i	y_i	I_i
1	20	1	0
2	30	1	0
3	90	1	50
4	0	0	0
5	60	1	35
6	0	0	0
7	20	1	0
8	30	1	0

Figura 31
con valor óptimo igual a 1522.

Conclusiones

La programación lineal es una de las partes más importantes de la investigación operativa. Es un tópico básico en estudios de Matemáticas, Ciencias, Ingeniería, Economía, Gestión… Contiene problemas relevantes de gran importancia en lo que se entiende por formas civilizadas modernas de vivir: comunicación, transporte, distribución, organización…

Las populares hojas de cálculo son herramientas válidas para la docencia y, en particular, para algunas importantes aplicaciones de la programación lineal. Su uso es aconsejable en la impartición de los correspondientes contenidos de materias de grados universitarios que incluyan la optimización. Dicho uso se podría extender a los cursos finales de la enseñanza secundaria.

Referencias bibliográficas

Ahuja, R. K., T. L. Magnanti, y J. B. Orlin (1993), *Network Flows. Theory, Algorithms and Applications,* Prentice Hall, Hoboken.

Cottle, R., E. Johnson y R. Wets (2007), *George B. Dantzig (1914–2005)*, <https://stanford.edu/group/SOL/GBD/cottle-johnson-wets-2007.pdf>.

Vanderbei, R. J. (2014), *Linear Programming. Foundations and Extensions,* Springer Verlag, Nueva York.

Carlos González Martín
Universidad de La Laguna
<cgonmar@ull.edu.es>

secciones

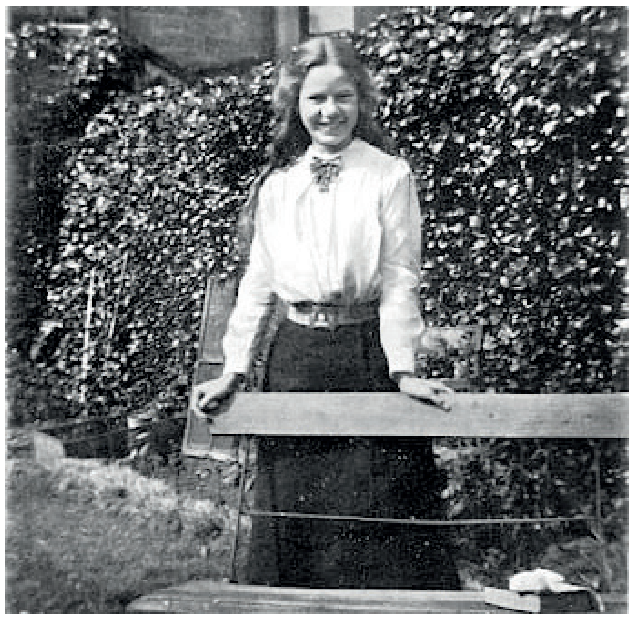
Eleanor Pairman, enseñando geometría a personas ciegas con su máquina de coser

Marta Macho Stadler

SUMA+ núm. 103
pp. 77-80
Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2022 y aceptado en enero de 2023

Eleanor Pairman nació el 8 de junio de 1896 en el pueblo de Lasswade (Escocia). Conocida en su familia como *Nora,* era la menor de los cuatro hijos de Helen Dunlop y John Pairman. Su padre, abogado de la Corte Suprema de Escocia, falleció cuando ella aún no había cumplido los cinco años; la familia pasó a partir de ese momento serias dificultades económicas.

Asistió a la escuela local hasta 1908, cuando ingresó en el *George Watson's Ladies' College* en Edimburgo. Tras graduarse con excelentes calificaciones, en 1914, comenzó a estudiar matemáticas en la Universidad de Edimburgo gracias a una beca. En su primer año estudió matemáticas, filosofía natural[1], química y lógica. Brillante en el resto de las asignaturas, la química (tanto teórica como la enseñanza en el laboratorio) no se le daba igual de bien que el resto de materias. Aun así, en 1917, se graduó con una maestría «con honores de primera clase» en matemáticas y filosofía natural. Gracias a sus excelentes calificaciones obtuvo



Eleanor Pairman (1914)
Fuente: George Watson's College, <https://www.gwc.org.uk/watsonians/gwlc/woman-of-watsons-article/~board/watsonians/post/eleanor-pairman>

una beca de tres años que le permitió continuar sus estudios de posgrado en la Universidad de Edimburgo antes de incorporarse en 1918 al equipo del matemático Karl Pearson[2] en el Departamento de Estadística Aplicada del University College de Londres. Allí trabajó como «computadora humana» para el matemático, con el que en 1919 publicó un artículo en la revista *Biometrika*[3]. En esa época Pairman también escribió *Tracts for Computers* (vol. I. *Tables of the digamma and trigamma functions*) que fue publicado por Cambridge University Press en 1920.

En 1919 viajó a Estados Unidos y comenzó su formación en el Radcliffe College de Cambridge, una universidad para mujeres muy vinculada al Harvard College, en el que solo podían estudiar hombres. Allí investigó bajo la supervisión del prestigioso matemático George David Birkhoff[4]. Eleanor defendió su tesis doctoral[5] en 1922, convirtiéndose en la tercera mujer en obtener un doctorado en matemáticas de Radcliffe College.

Ese mismo año se casó con un compañero de estudios de posgrado, Bancroft Huntington Brown (1894-1974), que también había defendido su tesis doctoral[6] en el Harvard College. El matrimonio se trasladó a Hanover donde Bancroft Brown se incorporó como profesor al Dartmouth College, que en ese momento era una universidad exclusivamente masculina. Los Brown tuvieron cuatro hijos —John (1923), Barbara (1925), Joanna (1935, que falleció antes de cumplir un año) y Margaret (1937)—.

Como ya hemos comentado, Eleanor publicó algunos artículos en solitario y en colaboración con Pearson y con Rudolph E. Langer[7], otro de los alumnos de Birkhoff[8].

Entre 1955 y 1959, ya con sus hijos mayores, Eleanor Brown fue contratada como profesora de matemáticas a tiempo parcial en Dartmouth. La enseñanza, esa que no pudo ejercer cuando era joven, fue una de sus grandes pasiones.

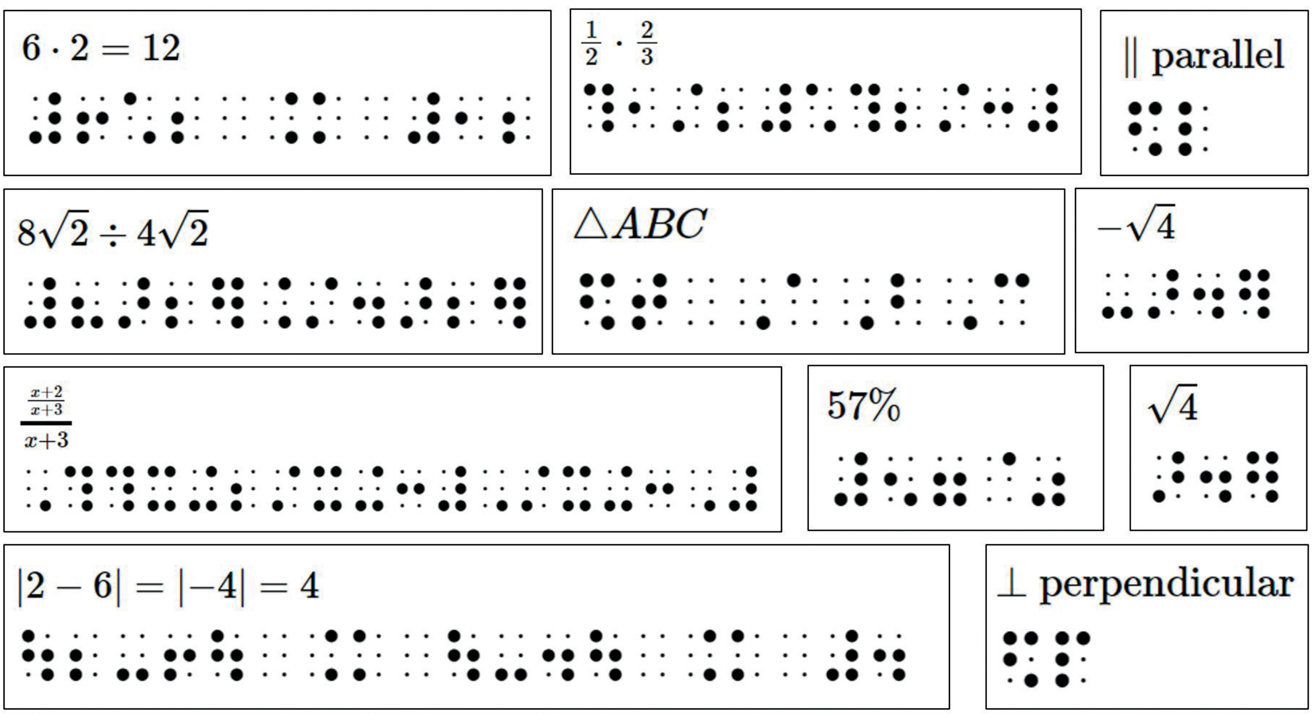


Figura 1. Algunos símbolos matemáticos en Código Nemeth
Fuente: Nemeth Tutorial, <https://nemeth.aphtech.org>

Enseñando matemáticas… en Braille

En la década de 1950, Eleanor Brown comenzó a interesarse por la enseñanza de las matemáticas a alumnado ciego. Para ello, estudió braille y más tarde el código Nemeth[9] para matemáticas. Deseaba fundamentalmente explicar geometría, así aprendió a realizar diagramas y símbolos matemáticos usando su máquina de coser y otros utensilios domésticos —como tijeras dentadas o ruedas de pastelería—. Con estas herramientas caseras conseguía realizar diseños sobre delgadas hojas de cartulina, que el alumnado ciego podía «leer» con las yemas de sus dedos. Con su máquina de coser, Eleanor «perforaba» el papel, reproduciendo cada símbolo que deseaba representar al pasar la cartulina bajo la aguja de su máquina.

En 1959 el periódico *Hanover Gazette* publicó un artículo sobre el trabajo de Eleanor Brown. En este reportaje, el medio comentaba que la matemática estaba transcribiendo dos manuales matemáticos, uno para un estudiante de primer curso en el Boston College y otro, un libro de referencia sobre teoría de grupos, destinado a un posgrado en la Universidad de Columbia en Nueva York.

Nora falleció el 14 de septiembre de 1973. Su hija pequeña, Margaret, comentaba sobre ella:

> A pesar de la satisfacción que obtuvo con estos proyectos [de Braille], la única vez que la vi verdaderamente feliz fue cuando estaba enseñando. Y tuvo muy pocas oportunidades de hacer eso, ya que obviamente estaba adelantada a su tiempo y también atrapada en una comunidad universitaria solo para hombres y en un mundo donde era casi imposible para las mujeres casadas desempeñarse profesionalmente.

Eleanor Brown, como tantas otras mujeres, tuvo que dedicarse a cuidar a su numerosa familia, sin posibilidades de ejercer una profesión para la que se había preparado con esfuerzo. Su brillantez como estudiante e investigadora es indiscutible. ¿Dónde habría llegado si la hubieran dejado continuar con su carrera? Nunca lo sabremos pero, al menos, su hermoso legado en la enseñanza de las matemáticas no ha sido olvidado.

Referencias bibliográficas

Darmouth College (2016), *Eleanor Pairman Brown, 2016*, <https://web.archive.org/web/20160519171852/http:/www.dartmouth.edu/~chance/Pairman.pdf>.

George Watson's College. *Eleanor Pairman*. <https://www.gwc.org.uk/watsonians/gwlc/woman-of-watsons-article/~board/watsonians/post/eleanor-pairman>.

Macho, M. «Eleanor Pairman, la matemática que usó su máquina de coser para enseñar geometría a personas ciegas», *Mujeres con ciencia, 20 julio 2022,* <https://mujeresconciencia.com/2022/07/20/eleanor-pairman-la-matematica-que-uso-su-maquina-de-coser-para-ensenar-geometria-a-personas-ciegas/>.

Nemeth tutorial, <https://nemeth.aphtech.org/>.

O'connor, J. J., y E. F. Robertson, «Eleanor Pairman», *MacTutor History of Mathematics archive*, University of St Andrews, <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pairman/> [consultado el 30 de diciembre de 2022].

Wikipedia, *Eleanor Pairman*, <https://en.wikipedia.org/wiki/Eleanor_Pairman> [consultado el 30 de diciembre de 2022].

Marta Macho Stadler
Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea
<marta.macho@ehu.eus>

1 La filosofía natural o cosmología fue el estudio filosófico de la naturaleza y el universo físico anterior al desarrollo de la ciencia moderna. Es la precursora de lo que hoy conocemos como ciencias naturales y física. <https://es.wikipedia.org/wiki/Filosofía_de_la_naturaleza>.

2 Karl Pearson (1857-1936) fue un destacado matemático y pensador socialista británico, que estableció la disciplina de la estadística matemática. Desarrolló una intensa investigación sobre la aplicación de los métodos estadísticos a la biología, siendo el fundador de la bioestadística. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pearson/>.

3 Eleanor Pairman, Karl Pearson, F.R.S., «On corrections for the moment-coefficients of limited range frequency distributions when there are finite or infinite ordinates and any slopes at the terminal of the range», Biometrika, Volume 12, Issue 3-4, November 1919, Pages 231–258, <https://doi.org/10.1093/biomet/12.3-4.231>.

4 George David Birkhoff (1884-1944) fue un matemático estadounidense, conocido fundamentalmente por el denominado teorema ergódico (con repercusiones en mecánica estadística, dinámica, teoría de la probabilidad, teoría de grupos y análisis funcional), aunque trabajó en muchas ramas de las matemáticas. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Birkhoff/>.

5 Expansion Theorems for Solution of a Fredholm's Linear Homogeneous Integral Equation of the Second Kind with Kernel of Special Non-Symmetric Type, <https://www.genealogy.math.ndsu.nodak.edu/id.php?id=4932>.

6 The Equilong Transformations of Euclidean Space, <https://www.mathgenealogy.org/id.php?id=38963>.

7 Rudolf Ernest Langer (1894-1968) fue un matemático estadounidense, conocido por la denominada correction de Langer, <https://en.wikipedia.org/wiki/Langer_correction> y por ser presidente de la Mathematical Association of America. También fue alumno de George David Birkhoff <https://mathgenealogy.org/id.php?id=4930>.

8 Rudolph E. Langer and Eleanor P. Brown, «On a class of integral equations with discontinuous kernels». Transactions of the American Mathematical Society Vol. 29, No. 4, Oct., 1927. <https://www.jstor.org/stable/1989199#metadata_info_tab_contents>.

9 El Código Nemeth para matemáticas es un código braille para compilar la notación matemática y científica utilizando celdas braille estándar de seis puntos para la lectura táctil para personas con discapacidad visual. Fue desarrollado por el matemático estadounidense Abraham Nemeth (1918-2013) <https://en.wikipedia.org/wiki/Abraham_Nemeth>, que era ciego, y escrito por primera vez en 1952. Después de varias revisiones (1956, 1965 y 1972) se integró en el sistema braille y sigue siendo ampliamente utilizado hoy en día en Estados Unidos. <https://en.wikipedia.org/wiki/Nemeth_Braille>.

DEL MMACA AL AULA

Dados MMACOS

MMACA

SUMA+ núm. 103
pp. 81-86
Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2022 y aceptado en enero de 2023

Dentro de la matemática recreativa y divulgativa, la magia matemática (o *matemagia*) juega un papel muy interesante y atractivo. Como bien es conocido, en el MMACA nos encanta jugar, manipular, investigar e inventar, y, por supuesto, sorprender. Así es como surgieron los dados que os traemos en este artículo.

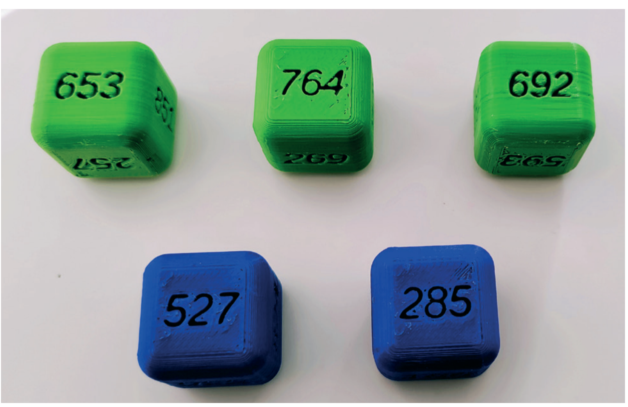


Figura 1. Dados MMACOS

Unos dados muy especiales que os convertirán en magos y magas, y harán las delicias de todo el mundo cuando los presentéis. No es magia negra, sino matemáticas… Pero este es un secreto que deberá descubrir por su cuenta nuestro público.

Dados MMACOS

El juego es un efecto de mentalismo donde hay cinco dados cúbicos con seis números diferentes de tres cifras en cada dado. Los dados se lanzan y seréis capaces de:

1. Calcular la suma de los números que resultan de lanzar los dados de una manera mágicamente rápida.
2. Adivinar la suma de los cinco números de las caras que *no* se ven.

3. Apilar los dados formando una torre y adivinar la suma de las caras que no se ven (solamente para los más atrevidos).

Y todo esto con tres niveles de dificultad: con los 2 dados azules, con 3 dados verdes o con todos los dados a la vez.

Sorprendente, ¿no os parece? Añadid una buena presentación y tendréis un efecto de magia matemática muy interesante.

Sin más dilación, os enseñamos los dados y la realización de los efectos anteriormente citados, para después hacer un análisis de las matemáticas que hay involucradas.

Los cinco dados están constituidos y dispuestos de la siguiente manera:

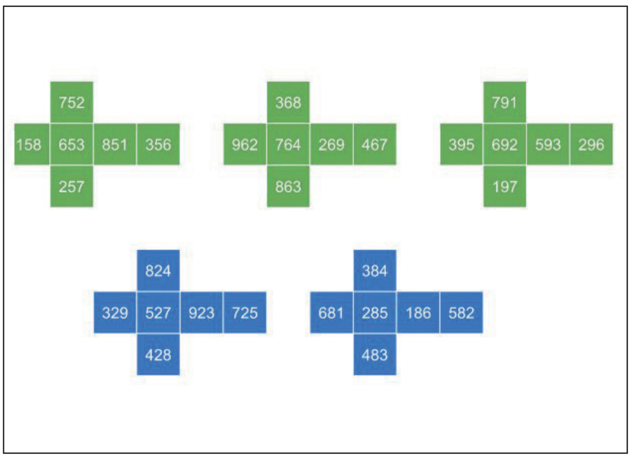


Figura 2. Desarrollo plano de los dados MMACOS

Efectos mágicos

EFECTO 1: CÁLCULO DE LA SUMA

Anuncia que tienes unos poderes especiales que hacen que puedas calcular sumas de números de forma ultrarápida. Para hacer una demostración utilizarás los Dados MMACOS.

Un espectador tira los 5 dados y se le pide que con ayuda de una calculadora sume los 5 números que han quedado en los dados. ¡Tú dices el resultado de la suma casi inmediatamente y mucho antes de que el espectador lo haga con la calculadora!

¿Cómo?

1. Haz la suma de las *unidades* de los 5 números que han salido = CD
2. Haz la diferencia a 50. Es decir, calcula (50 − CD) = AB
3. El resultado de la suma será el número formado por los pasos anteriores en orden inverso = ABCD

Observación:

En el caso que al calcular CD en el paso 1 salga un solo dígito, hay que añadir un «0» delante. Es decir, si CD = 7 se tomará CD = 07.

Ejemplo:

Figura 3. Ejemplo del efecto 1

75**2**, 19**7**, 96**2**, 48**3**, 92**3**

1) CD = 2 + 7 + 2 + 3 + 3 = 17
2) AB = 50 − 17 = 33
3) La suma es ABCD = 3317

Las matemáticas que se esconden tras este efecto

Supongamos que numeramos los dados del 1 al 5, de manera que llamaremos $x_i y_i z_i$ a un número cualquiera del Dado «*i*» (con $i = 1, 2, 3, 4, 5$).

Tiramos los cinco dados y queremos que el resultado de la suma (ABCD) cumpla que AB = 50 − CD (es decir, AB + CD = 50), donde CD = suma de las unidades (A, B, C, D son dígitos).

Para ello, supongamos que tenemos 5 números cualquiera de tres cifras y los sumamos con el algoritmo tradicional de la suma. Dos condiciones son necesarias:

- *a)* Para que la suma de sus unidades coincida con los dos últimos dígitos de la suma total (CD), se debe forzar que la suma de los dígitos de las decenas $y_1+y_2+y_3+y_4+y_5$ sea un número acabado en «0» (nosotros elegimos que sumaran 30).
- *b)* A partir de aquí, si la suma de las decenas $y_1+y_2+y_3+y_4+y_5 = 30$, entonces tengo que pensar que «me llevo 3» a la suma de las centenas (recordad el algoritmo de la suma).

Escribiendo estas dos condiciones matemáticamente, los números que se eligen para los dados deben cumplir que:

1. $y_1+y_2+y_3+y_4+y_5 = 30$
2. Para que AB + CD = 50 (recordad que «me llevo 3» del paso anterior):

$$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+3) + (z_1+z_2+z_3+z_4+z_5) = 50, \text{ es decir,}$$

$$(x_1+z_1) + (x_2+z_2) + (x_3+z_3) + (x_4+z_4) + (x_5+z_5) = 47$$

Y ahora se trata de elegir para cada dado, las ternas $x_i y_i z_i$ para que cumplan con las condiciones anteriores.

Para los Dados MMACOS se eligió:

Dado 1: $y_1 = 5; x_1+z_1 = 9$
Dado 2: $y_2 = 9; x_2+z_2 = 8$
Dado 3: $y_3 = 6; x_3+z_3 = 11$
Dado 4: $y_4 = 8; x_4+z_4 = 7$
Dado 5: $y_5 = 2; x_5+z_5 = 12$

Para clarificar esto, fijaos en los números que componen el dado 1: las decenas siempre es 5, y la suma de unidades + centenas de los seis números que lo forman siempre es 9. Además, para poder adivinar la suma de las caras opuestas (las que no se ven), hemos colocado el mismo número con las cifras en orden invertido.

Ya os he mencionado que nos inclinamos por esta distribución de números porque así, utilizando solo dos o tres dados también se puede calcular la suma rápidamente utilizando el mismo método. De esta manera se puede tener un efecto con tres niveles de dificultad.

EFECTO 2: ADIVINACIÓN DE LA SUMA OCULTA

Anuncia que tienes unos poderes especiales que hacen que puedas adivinar algunas sumas de números sin verlos previamente y de forma casi inmediata. Para hacer una demostración usarás los Dados MMACOS.

Una espectadora tira los 5 dados. Tú dices rápidamente el resultado de la suma de los números que están tocando en la mesa, es decir, ¡que no se ven! La espectadora gira los dados y con ayuda de una calculadora verifica que efectivamente has acertado: ¡magia pura!

¿Cómo?

1. Haz la suma de las CENTENAS de los 5 números que están a la vista = C’D’
2. Haz la diferencia a 50. Es decir, calcula 50 − C’D’ = A’B’
3. El resultado de la suma será el número formado por los pasos anteriores en orden inverso = A’B’C’D’

Ejemplo:

Figura 4. Ejemplo del efecto 2

752, **1**97, **9**62, **4**83, **9**23

1. C'D' = 7 + 1 + 9 + 4 + 9 = 30
2. A'B' = 50 − 30 = 20
3. La suma de caras ocultas será A'B'C'D' = = 2030

Las matemáticas que se esconden tras este efecto

Como los números de caras opuestas están invertidos respecto a sus cifras, todas las propiedades se mantienen igual y así, para saber la suma de las caras no vistas, basta con hacer lo mismo, pero sumando las centenas de los números que se ven, ya que:

Suma de centenas de caras vistas =
= Suma de unidades de caras no vistas.

EFECTO 3: APILAMIENTO DE DADOS

Anuncia que tienes unos poderes especiales que hacen que puedas «ver» a través de algunos materiales en algunas condiciones especiales, pero es un ejercicio que necesita mucha concentración porque no es fácil. Para hacer una demostración utilizarás los Dados MMACOS.

Haz que una espectadora coja los 5 dados y los apile, es decir, haga una columna de dados. Anuncia que podrás calcular la suma de los números de todas las caras que han quedado ocultas (las 9 caras que no se ven). Te concentras y dices el resultado de la suma. ¡La espectadora comprueba con ayuda de una calculadora que efectivamente lo has acertado!

Se puede repetir todas las veces que se desee porque los resultados son diferentes.

¿Cómo?

Una vez que los dados están apilados, mira el número que ha quedado en lo más alto. La suma del resto de caras que no se ven (en total 9) será:

Suma = 5347 − (cara vista)

Ejemplo:

Figura 5. Ejemplo del efecto 3

Si la cara vista es 483, la suma del resto de caras que no se ven será:

$$5347 - 483 = 4864$$

Las matemáticas que se esconden tras este efecto

Apilamos los cinco dados formando una torre. Vamos a calcular la suma de todas las caras vistas y no vistas, es decir, ABCD + A'B'C'D' (sean cuales sean los números ABCD y A'B'C'D').

Sabemos que AB=50−CD y A'B'=50−C'D', puesto que así se construyeron. De esta manera:

$$\begin{gathered} ABCD + A'B'C'D' = (100 \cdot AB + CD) + \\ + (100 \cdot A'B' + C'D') = [100 \cdot (50 - CD) + \\ + CD] + [100 \cdot (50 - C'D') + C'D'] = \\ = 100 \cdot (50 - CD + 50 - C'D') + (CD + C'D') = \\ = 10000 - 99 \cdot (CD + C'D') = \\ = 10000 - 99 \cdot 47 = 5347 \end{gathered}$$ [1]

Así, al mirar la cara superior del primer dado, se adivina la suma de las caras que no se ven restando de 5347.

Versiones

Versión para dos dados utilizando solamente los dados azules, cuya cifra central es un 2 y un 8 (ver figura 2):

- —Efecto 1: Se hace exactamente lo mismo sustituyendo el número 50 por el 20.
- —Efecto 2: Se hace exactamente lo mismo sustituyendo el número 50 por el 20.
- —Efecto 3: Se hace exactamente lo mismo sustituyendo el número 5347 por el 2119.

Versión para tres dados utilizando solamente los dados verdes, cuya cifra central es un 5, un 9 y un 6 (ver figura 2):

- —Efecto 1: Se hace exactamente lo mismo sustituyendo el número 50 por el 30.
- —Efecto 2: Se hace exactamente lo mismo sustituyendo el número 50 por el 30.
- —Efecto 3: Se hace exactamente lo mismo sustituyendo el número 5347 por el 3228.

Es un interesante ejercicio, hacer las comprobaciones para las versiones de 2 y 3 dados adaptando las demostraciones hechas para los 5 dados.

Generalización

En general, si tenemos «*k*» dados (con el número de caras que se quiera), para crear los números de tres cifras $x_i y_i z_i$, se deben cumplir las siguientes dos condiciones:

1) $\sum_{(i=1,\,k)} y_i = 10a$
2) $\sum_{(i=1,\,k)} (x_i + z_i) = N - a$

De esta forma, para calcular la suma de los números en la manera que se explicó en el efecto, se emplea la diferencia a «N».

En el caso de los Dados MMACOS, se utilizó:

$a = 3$, $N = 50$ para los cinco dados
$a = 1$, $N = 20$, para dos dados
$a = 2$, $N = 30$, para tres dados

Como se puede ver, es una idea absolutamente versátil: no hace falta que se usen 5 dados (podrían ser más o menos) y ni siquiera hace falta usar dados (podrían ser papelitos en una bolsa o tarjetas). Tampoco hace falta que cada condición la compongan 6 números (podrían ser más o menos). Todo esto ofrece un gran margen de elección para crear diferentes efectos basados en el mismo principio, que además se puede repetir cuantas veces se quiera, puesto que el resultado es diferente en cada tirada (con 5 dados habría, potencialmente, $6^5 = 7776$ resultados diferentes!… Aunque en realidad hay algunos menos, ¿podrías calcular cuántos?).

En definitiva, ¿A qué esperáis para crear vuestro propio juego de matemagia?

Referencias bibliográficas

Islands of maths, <https://islandsofmath.wordpress.com/2015/01/20/di-ciphering-dice> [Versión original y explicación.]

<https://www.magicmgmt.com/gary/oi/index.php?iframe=https://www.magicmgmt.com/gary/dice/heath_dice.html> [Versión interactiva de la versión original.].

https://www.magicmgmt.com/gary/oi/index.php?i-frame=https://www.magicmgmt.com/gary/dice/heath_dice_expanded.html [Extensión a 8 dados.]

MMACA
Museu de Matemàtiques de Catalunya,
Cornellá de Llobregat (Barcelona)
<contacte@mmaca.cat>

1 Ya que CD + C'D' = Suma unidades + Suma centenas = Suma ($xi+zi$) = 47, para cualquier i.

EL RINCÓN DE ESTALMAT

Desarrollo de sólidos platónicos, geometría plana y visión espacial

Raúl Rivilla Bastante

SUMA+ núm. 103
pp. 87-92
Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2022 y aceptado en enero de 2023

Desde que el programa ESTALMAT se implantó en Castilla-La Mancha, he venido impartiendo a los alumnos de primer año (primer ciclo de ESO) dos sesiones correspondientes a sólidos platónicos y arquimedianos. Tras las primeras experiencias intenté mejorar el material que había preparado y, en lo posible, introducir mejoras o incluso algún contenido nuevo o diferente al que suele verse en este contexto, y en lo posible trasladarlo a mi docencia en un IES.

Uno de los objetivos que me fijé fue construir los poliedros, intentando huir de su construcción con cartulina y pegamento que recordaba de niño por la falta de tiempo. Las primeras veces, supliendo la falta de material con algo de imaginación (usando palillos y chuches, pajitas y celofán, ¡hasta cartón!). En la actualidad hay material de calidad y relativamente asequible para trabajar con comodidad.

Teniendo piezas con formas de triángulos equiláteros, y juntando consecutivamente cada vez más triángulos equiláteros en el vértice, tanto a mi como a los alumnos, nos resulta sorprendentemente sencillo razonar la existencia y las características del tetraedro, del octaedro y del icosaedro. Análogamente, del cubo (cuadrados), del dodecaedro (pentágonos); así como la imposibilidad de que existan más poliedros regulares (con caras hexagonales, heptagonales,…) y el teorema de Euler.

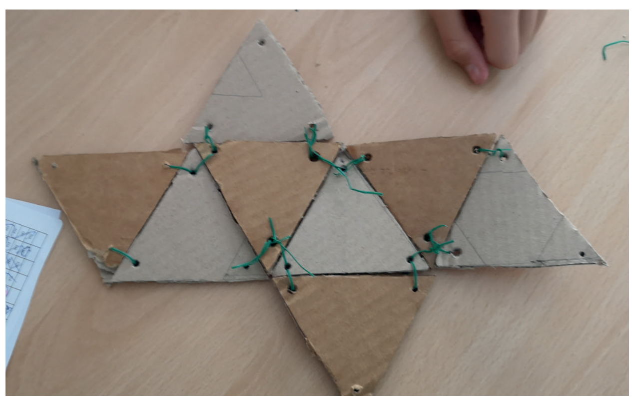


Figura 1

Figura 2

No obstante, el problema surgía, normalmente, al intentar montar los cuerpos. Me di cuenta de que existía un salto entre el desarrollo plano en dos dimensiones y el cuerpo geométrico en tres dimensiones. Por otra parte, buscando material, observé que los desarrollos planos que solemos encontrar en webs, libros…, son sorprendentemente parecidos, y de ahí surgieron inquietudes naturales a los alumnos, ¿cuántos desarrollos hay?, ¿cuáles son?, ¿qué características tienen?

Hexominós y cubos

En 1954, el matemático Solomon W. Golomb acuñó el término «poliminó» para las figuras formadas por cuadrados que comparten una arista. Así, un dominó es un rectángulo formado por dos cuadrados unidos. Generalizando, tendríamos triminós, tetraminós, pentaminós, hexominós… Relacionándolo con nuestros poliedros, en concreto con el cubo, su desarrollo plano debe ser por fuerza un hexominó. Si buscamos diferentes desarrollos planos, tendremos una magnífica oportunidad para dar a conocer a los alumnos los poliminós; su definición, su historia, cuáles de ellos conocen a través de juegos como el tetris, minecraft, …

Dependiendo del tiempo disponible o de las características del alumnado con que trabajemos, podemos realizar un «descubrimiento conjunto» de los 35 hexominós existentes, o darles el listado de estos.

La búsqueda en si misma, ya es una oportunidad de aprendizaje, pues podemos enseñarles a ser sistemáticos y ordenados: solo habrá una forma de colocar 6 cuadrados alineados, después con 5 cuadrados alineados, de cuántas formas podemos colocar el sexto de manera que sean figuras distintas (salvo giros), y así sucesivamente. Si todo va bien, debemos obtener algo parecido a esta colección:

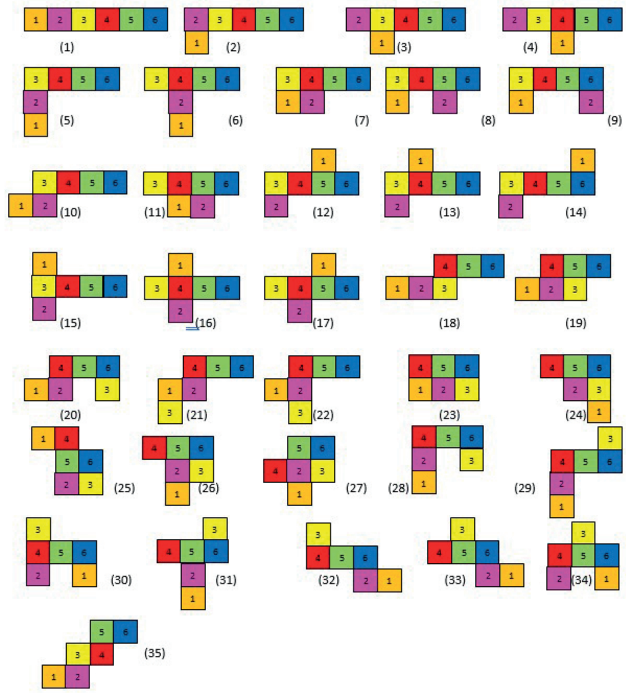


Figura 3

Once de estos hexominós son el desarrollo plano de un hexaedro. Una estrategia interesante para trabajar con este recurso sería:

- —Pedir a los alumnos que intenten imaginar con cuales de ellos se podría formar un cubo. Los que encontramos habitualmente en libros, webs… son los correspondientes a las figuras de 12 a 17. Son los más fáciles de visualizar pues corresponden a un anillo central y las tapas superior e inferior. A los alumnos con más dificultad este símil en estos desarrollos le ayudará a poder tratar con otros más complicados.
- —Hacerles ver que directamente pueden descartar aquellos con vértices de orden 4 pues no podrán plegarse.
- —Pedirles que distingan cuáles seguro que no pueden formar el cubo y cuáles seguro que sí pueden.

— Tras ese primer análisis, usar material manipulativo de algún tipo para aquellos que no lo tienen claro.
— Identificar qué caras quedarán enfrentadas al construir el cubo. Obtendremos los valores de la tabla 1:

Forman Cubo los nº	Caras Enfrentadas		
12	1	3	4
	2	5	6
13	1	3	4
	2	5	6
14	1	3	4
	2	5	6
15	1	3	4
	2	5	6
16	1	3	4
	2	5	6
17	1	3	4
	2	5	6
18	1	2	4
	3	5	6
31	1	2	4
	5	3	6
32	1	2	4
	5	3	6
33	1	2	4
	4	3	6
35	1	2	3
	4	5	6

Tabla 1

Una vez tengamos este terreno de juego, es una lástima abandonarlo sin sacarle todo el jugo, así podemos pedirles que busquen aquellos hexominós que:

— Solo tienen un eje de simetría paralelo a los lados: 4, 9, 11, 15, 16, 34.
— Solo tienen un eje de simetría a 45º: 1, 14, 17, 18, 19, 23 y 35.
— Que tienen simetría rotacional: 24 y 27.
— Que tienen dos ejes de simetría: 1 y 23.

Esta actividad nos permite trabajar los conceptos de eje de simetría, giro…, y usar material manipulativo como espejos para comprobar si su suposición de simetría es cierta o no.

Hay otros conceptos menos habituales como la concavidad y la convexidad que también podemos trabajar. Por ejemplo, la figura 1 es convexa pues si pensamos en cualquier pareja de puntos del interior de la misma, el segmento que los une estaría totalmente contenido en la figura; sin embargo, en la figura 34, un segmento que uniera el interior de un punto de la cara 1 y otro punto de la cara 2 no estaría totalmente incluido.

Por otra parte, podemos también trabajar conceptos geométricos como el perímetro y el área. Suponiendo que el lado de cada cuadrado es 1, buscar el hexominó:

— Con mayor perímetro. Hay varios: 1, 3, 35,… que tienen perímetro 14. Podemos hacerles ver que el perímetro de la figura coincidirá con el rectángulo que sea el cerramiento convexo de la figura; por ejemplo, la figura 32 puede inscribirse en un rectángulo 3×4, luego su perímetro será 14.
— Con menor perímetro: 10. La figura 23, la más compacta.
— Con vértices a la mayor distancia posible (figura 1), o a la menor distancia posible (figura 23).
— Con mayor/menor área. Sorprendentemente, les causa un gran *shock* pues la gran mayoría de los alumnos la calculan diligentemente y se sorprenden al ver que coinciden todos. Es un pretexto magnífico para que interioricen el concepto de metro/centímetro cuadrado.

Otras actividades para las que se pueden utilizar estos hexominós podrían ser similares a las que planteaba el Grupo Alquerque (2001) para pentominós:

— Creatividad, usándolos al estilo del *Tangram*. Una primera actividad sería construir figuras (con todas las piezas, o varias) que tuvieran un parecido razonable a algo y darle nombre. La segunda fase sería la inversa, es decir, dar solo el nombre, el contorno de la figura y decir

cuantas o cuales se utilizan, de entre todas o un determinado subconjunto (según se quiera dar el nivel de dificultad) e intentar construirla.
— Cada uno de los hexominós por separado teselan el plano, pero, ¿podríamos hacer encajar a todos juntos sin dejar ningún espacio vacío? En otras palabras, tenemos 35 hexominós, lo que significa 210 cuadrados. ¿Pueden colocarse todos en un rectángulo 30×7? ¿Y en uno 7×30, ¿6×35? ¿10×21? ¿14×15? En caso negativo, ¿cuál sería el menor rectángulo que podrían «casi» teselar? ¿Cuántos «huecos» se quedarían?

Tras esta primera experiencia, los propios alumnos reclamaban el estudio de los otros poliedros regulares. Por sencillez, los siguientes fueron el tetraedro y el octaedro.

Tetraedro y tetramantes

En 1961, Thomas H. O'Beirne, bautizó como *polidiamante* a las figuras formadas por triángulos equiláteros que comparten una arista. El nombre venía por la analogía hecha por Golomb en 1954 pero en esta ocasión por los *diamantes* de la baraja francesa que están formados por dos triángulos equiláteros. No obstante, es frecuente encontrar (al menos en castellano) referencias a estas figuras como *poli-amantes* frente a los *di-amantes* de la baraja.

El tetraedro proporciona escaso juego, de los 3 tetramantes posibles, el primero y el tercero serían desarrollos planos del tetraedro. No obstante, ya se puede apreciar que el nivel de dificultad para imaginar cómo formar cuerpos a partir de triángulos se complica bastante en relación al cubo.

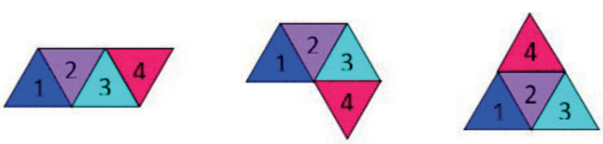


Figura 4

Así, el orden de los vértices se convierte en una herramienta poderosa, al menos, para descartar figuras. Para el octaedro, hay 66 posibles octamantes[1] (figura 5).

Del total de 66, 11 permiten montar el octaedro, los números: 15, 16, 17, 18, 19, 20, 32, 33, 34, 58 y 62. Hablando de visión espacial, trabajar con octamantes es un desafío considerablemente mayor en comparación con los hexominós. Probablemente usted tendrá el «ojo» entrenado y aún así, probablemente, le cueste encontrar más de la mitad. Por ello, para esta segunda parte el alumno puede, directamente a partir de 8 triángulos equiláteros probar aquellos que considere más prometedores y colectivamente ir encontrando los 11.

Otra forma de trabajar para encontrar los desarrollos planos sería a la inversa, a partir del cuerpo geométrico, ir «rompiendo» aristas, separando caras hasta conseguir la figura plana. El desafío en este caso será hacerlo de manera sistemática para encontrar todas las posibilidades.

Una vez desentrañado ese primer misterio, podemos ir trabajando de forma análoga a lo ya expuesto con los hexominós:

— Distintos tipos de simetría.
— Perímetros máximos y mínimos.
— Áreas, en este caso, si han interiorizado la idea con los hexominós, no hará falta hacer operación alguna para que se den cuenta que todos tienen la misma área.
— Teselaciones, todos los octamantes (u octadiamantes) teselan individualmente el plano, pero ¿podrían teselarlo conjuntamente? ¿Podrían hacerlo los 11 desarrollos del octaedro?

En los 70 estas preguntas se contestaban, al igual que hoy en muchas de nuestras clases, por ensayo y error y autoaprendizaje. Hoy en día, hay multitud de figuras producidas a partir de estas piezas mediante ordenador.

Al igual que los hexágonos que pueden apreciarse en la imagen, pueden formarse multitud de figuras geométricas planas, por ejemplo, un único paralelogramo de 4×66, 8×33, 11×24 o 12×22; trapecios 64×4, 29×8 y 16×12; o bien varios paralelogramos más pequeños a la vez, o también varios trapecios de menor tamaño de forma simultánea.

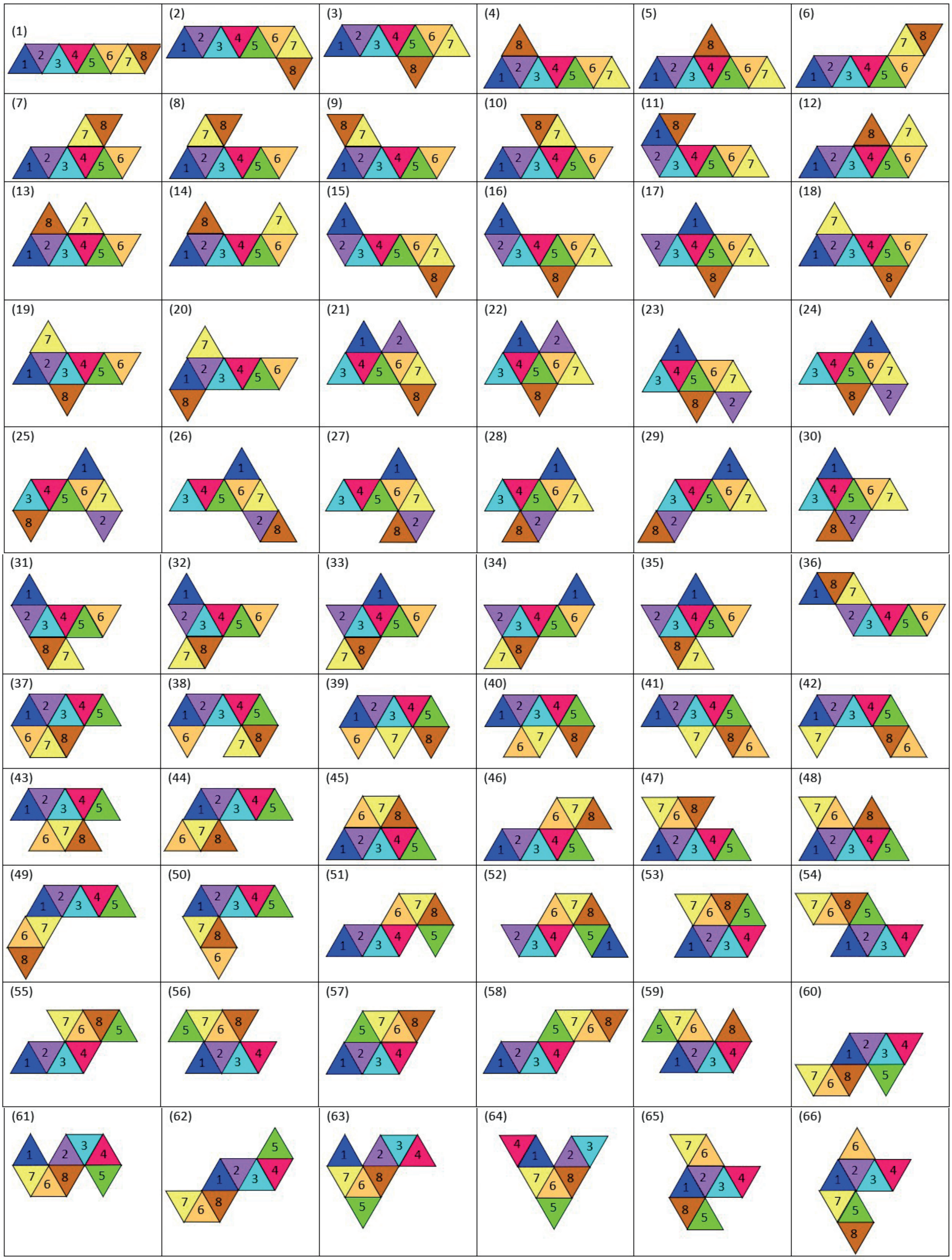


Figura 5

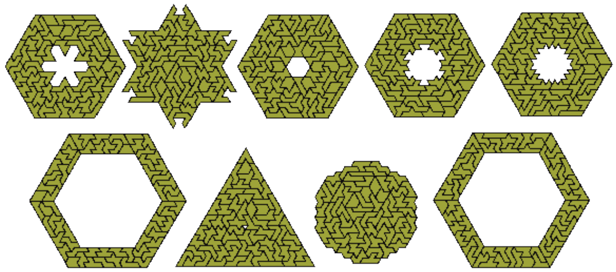


Figura 6. Contrucciones con octamantes
<www.recmath.org/Polypages>

Conclusiones

En resumen, tanto los hexominós como los octominós son herramientas muy versátiles para trabajar en geometría plana y visión espacial. Ambos proporcionan a nuestros estudiantes una oportunidad de trabajar, entender y entrenar conceptos como la simetría o la teselación, y habilidades más avanzadas como la visión espacial.

Así mismo, nos permiten organizar una situación de aprendizaje en la que el alumnado construya su propio material conjuntamente y podamos trabajar contenidos relativos a los poliedros con conceptos tales como caras, vértices, aristas, órdenes, áreas y volúmenes, teorema de Euler, poliedros duales…, o conceptos de geometría plana como simetría, giro, perímetro, área, distancia, teselación…, dejando espacio a la creatividad y pasando con naturalidad y según demande el propio grupo de unos a otros.

Referencias bibliográficas

Grupo Alquerque (2001), «Hexamantes», *Suma,* nº38, 103-105.

Grupo Alquerque (2010), «Poliábolos», *Suma,* nº 64, 55-59.

<https://es.wikipedia.org/wiki/Polidiamante>

<http://www.recmath.org/PolyPages/index.htm>

Raúl Rivilla Bastante
IES Fray Andrés, Puertollano (Ciudad Real)
<raul_rivilla@yahoo.es>

1 El número de n-polidiamantes distintos para n = 1, 2, 3,… es 1, 1, 1, 3, 4, 12, 24, 66, 160,… (sucesión A000577 en OEIS).

Experiencia de intervención en el aula con alumnos NEAE

Ángel A. García Marrero
Fernando Pérez García
Tuti Comalat Navarra

SUMA+ núm. 103
pp. 93-102
Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2022 y aceptado en enero de 2023

En el grupo de trabajo del seminario «La calculadora como recurso didáctico en educación primaria» de la FESPM, en colaboración con la División Educativa de Casio España, nos hemos dedicado entre otras cosas a estudiar el uso de la calculadora en nuestro sistema educativo.

En esta ocasión centramos nuestra intervención en el aporte que hace la calculadora al alumnado con necesidades educativas especiales y con grandes dificultades en el área de las matemáticas, animados por el desarrollo de los nuevos marcos legislativos, donde aparece la calculadora como herramienta de aprendizaje.

Hemos realizado dicha intervención en tres colegios: Escuelas Pías de Tenerife, CEIP Attilio Bruschetti de Xàtiva y Escola Guinardó SCCL de Barcelona.

Como siempre decimos cuando hablamos de la introducción de la calculadora en el aula, no hemos inventado nada, hemos adaptado el trabajo que habitualmente ya hacíamos con nuestro alumnado, en un contexto en el que la calculadora se hace casi imprescindible. Esperamos que nuestras experiencias os sean de utilidad para poder adaptarlas en vuestras aulas.

Justificación de las intervenciones

Creemos que no son necesarias muchas justificaciones sobre la utilización de la calculadora en la escuela, pero aún menos en el caso de alumnos con dificultades. A pesar de todo, hemos encontrado algunos estudios en los que se ha comprobado como mejora el alumnado cuando incorpora la calculadora en su práctica diaria.

En el estudio recogido en Bouck y Bouck (2008), que se realiza con alumnos de 6.º grado entre los que se encontraban alumnos con discapacidad, se concluye que el uso de la calculadora puede ser beneficioso para mejorar el desempeño académico de los alumnos con más dificultades. También, en otro trabajo publicado por Yakubova y Bouck (2014), con cinco estudiantes de 5.º curso de Educación Primaria con discapacidad intelectual leve, observaron que permitirles utilizar la calculadora hacía que tuvieran mejores resultados durante la resolución de problemas. Y en Bone y Bouck (2018), el alumnado con discapacidad cognitiva resuelve más problemas cuando se le permitió utilizar la calculadora.

Arias, Granda y Málaga (2010) afirman que en etapas posteriores de la vida o en niños diagnosticados de forma tardía y en adultos, la discalculia se ha de tratar con técnicas o estrategias compensatorias. Hoy en día esto se basa en el uso de calculadoras, tanto para la realización de tareas académicas como laborales (por ejemplo, un estudiante universitario de Medicina, afecto de dislexia, que ha de superar una asignatura —bioestadística— para la que se precisan habilidades matemáticas) como para facilitar o asegurar tareas cotidianas (gestión y control de gastos domésticos o bancarios, etc.).

Butterworth, Varma y Laurillad (2011) sugieren, para favorecer un mejor enfoque del aprendizaje numérico, el uso de materiales específicos, como bloques que representan valores en base 10, monedas, pistas numéricas, metros rígidos, añadiendo el uso de la calculadora, herramienta que reduce la carga de la memoria de trabajo, aunque no debe considerarse un sustituto de un programa adecuado de estimulación de habilidades.

Bellver (2013) recoge, del mismo modo que está presente en las recomendaciones proporcionadas por especialistas en la materia y que se reconocen como derechos en los centros educativos de muchos países de la Comunidad Económica Europea, según la Asociación Dislexia y Familia, permitir el uso de la calculadora como estrategia para alumnado con dislexia, como apoyo para resolver operaciones básicas si, por ejemplo, todavía no se ha aprendido la tabla de multiplicar, para que no se retrase el aprendizaje de otras operaciones más complejas.

Basándonos en el Real Decreto 157/2022 sobre las directrices del uso de la calculadora para el segundo ciclo de Educación Primaria sobre el sentido de las operaciones:

- — Construcción y memorización de las tablas de multiplicar a partir de la propiedad conmutativa, de establecer relaciones entre ellas (dobles y mitades) y de buscar regularidades y patrones numéricos (secuencia de las tablas: 1−10, 2−4, 10−5, 3−6, 4−8, 9−10, 7) apoyándose en número de veces, disposición en cuadrículas o suma repetida, y con ayuda de la calculadora mediante el uso del factor constante.
- — Utilización de la calculadora en la investigación, el cálculo del resultado exacto cuando las cantidades lo precisen y la comprobación de resultados.

Sobre el sentido estocástico:

- — Organización y análisis de datos. Conocimiento y uso de estrategias sencillas para la recogida, clasificación y organización de datos cualitativos o cuantitativos discretos en muestras pequeñas, mediante calculadora y aplicaciones informáticas sencillas. Frecuencia absoluta: interpretación.
- — Uso de la calculadora para obtener la probabilidad de un suceso.

Y las disposiciones para el tercer ciclo de Educación Primaria son:

Sobre el sentido numérico y de las operaciones:

- — Uso de la multiplicación y división con decimales en contextos de dinero o medida, realizando la estimación previa y utilizando la calculadora, para buscar regularidades, realizar hipótesis y comprobar u obtener el resultado exacto.
- — Utilización de la calculadora en la investigación, el cálculo del resultado exacto, cuando las cantidades lo precisen, y la comprobación de resultados.

— Cálculo de porcentajes multiplicando por el decimal equivalente con la calculadora.
— Comparación de fracciones en relación a la unidad, utilizando la equivalencia con la expresión decimal, de forma mental o con la calculadora.

En referencia al sentido estocástico:

— Organización y análisis de datos. Empleo de la calculadora y otros recursos digitales, como la hoja de cálculo, para organizar la información estadística y realizar diferentes visualizaciones de los datos.
— Uso de la calculadora y otros recursos digitales para conocer la tendencia de que ocurra un suceso.

Presentación de las experiencias

A continuación se presenta las experiencias realizadas con alumnado con necesidades educativas especiales agrupadas por las características del grupo aula.

GRUPO FLEXIBLE DE NIVEL DE APRENDIZAJE BAJO DE 5.º CURSO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

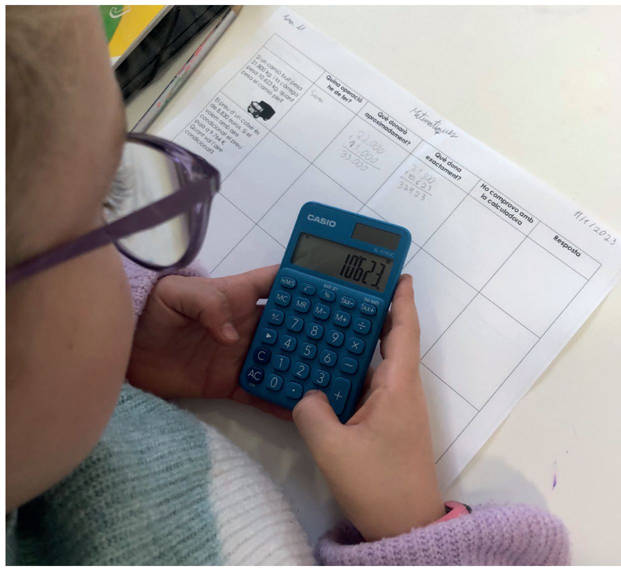
En este grupo se encuentran once estudiantes de 5.º curso de Educación Primaria que trabajan juntos con la docente de refuerzo una hora a la semana. En este espacio se pretende que adquieran estrategias para calcular y para la resolución de problemas además de que mejoren su autoestima matemática.

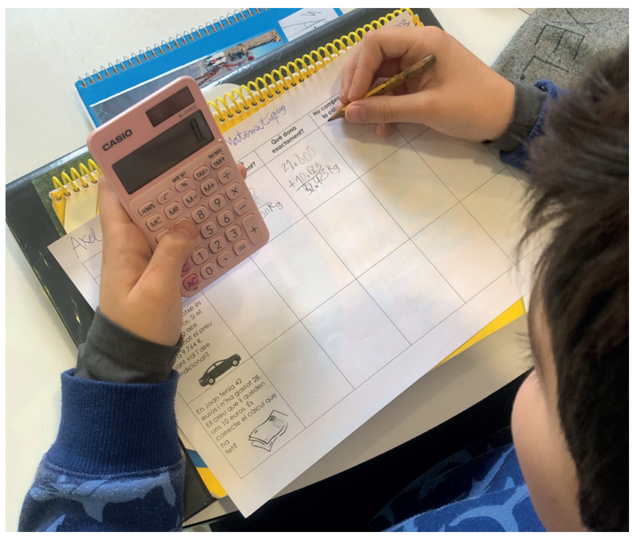
Algunas de las actividades que se les suele presentar para resolver, son problemas donde tienen que decidir qué operaciones hay que hacer, qué resultado dará aproximadamente (redondeando los números), efectuar las operaciones exactamente y comprobarlas con la calculadora (figura 1).

Primero, resuelven uno entre todos, parando en cada uno de los apartados para solucionar las dudas que puedan surgir. Los siguientes problemas los solucionan de uno en uno corrigiéndolos seguidamente con

	Quina operació he de fer?	Què donarà aproximadament?	Què dona exactament?	Ho comprovo amb la calculadora	Resposta
Si un camió buit pesa 21.800 kg, i la càrrega pesa 10.623 kg, quant pesa el camió ple?					
El preu d'un cotxe és de 8.830 euros. Si el volem amb aire condicionat el preu puja a 9.764 €. Quant val l'aire condicionat?					
En Joan tenia 42 euros i n'ha gastat 28. Ell creu que li queden uns 10 euros. És correcte el càlcul que ha fet?					

Figura 1. Ejemplo de las actividades que se les presenta





Figuras 2 y 3. Diferentes momentos durante la realización de la actividad la docente de refuerzo. Todo el alumnado participa activamente en la resolución de los ejercicios, hasta los que muchas veces les cuesta intervenir por miedo a equivocarse.

Otro momento en el cual el trabajo en pequeño grupo es perfecto, es aquel donde se les presenta actividades cuyo objetivo es el de descubrimiento de propiedades de las operaciones como por ejemplo la multiplicación por la unidad seguida de ceros (figura 4).

Después de realizar las operaciones con la calculadora, observamos los resultados e intentamos llegar a una conclusión. Una parte del alumnado enseguida se da cuenta que solo hace falta añadir los ceros que la unidad lleva detrás y otros necesitan hacerlas todas para darse cuenta de que hay que escribir uno de los factores y añadir los ceros del otro.

ESTUDIANTE DE 6.º CURSO DE EDUCACIÓN PRIMARIA QUE SIGUE UN PLAN INDIVIDUALIZADO DE MATEMÁTICAS Y LENGUA

La persona discente se incorporó tardíamente a la escuela proveniente de otro país y con serias dificultades en el lenguaje (tanto en el suyo propio, castellano, como en catalán) y en matemáticas, ya que tiene un nivel de aprendizaje de dos cursos por debajo del nivel en el que está. Tiene muchas dificultades para recordar las tablas de multiplicar y muy pocas estrategias para el cálculo. Para poder resolver problemas, al igual que con el grupo de refuerzo de 5.º curso presentado anteriormente, primero se le presentan actividades que induzcan a pensar en qué operaciones cree que tiene que hacer y después se intenta que compruebe los resultados de las operaciones con la calculadora. Muchas veces se equivoca de operación y cuando se da cuenta que el resultado no es lógico, vuelve a probar con otro tipo de operación.

Un ejemplo lo encontramos en la situación que se describe a continuación.

En el cuaderno de la persona estudiante, para trabajar la suma a través de la descomposición, se le presenta el siguiente problema:

La torre Eiffel se inauguró el año 1889 y fue el edificio más alto del mundo durante 41 años. ¿Qué año dejó de ser el edificio más alto del mundo?

Ante este problema, la persona estudiante parece que no ha entendido o comprendido el enunciado, ya que de forma inmediata decide que hay que restar y también decide hacerlo sin calculadora porque lo ve muy fácil realizando dicha operación: $1889 - 41 = 1848$.

Cuando la alumna muestra su resolución, la persona docente le comenta si no le parece muy extraño que deje de ser el edificio más alto antes de inaugurarse. Entonces se da cuenta que se ha equivocado de operación y que lo que tenía que hacer es sumar y se va decidida a su mesa. También decide hacer de nuevo la operación sin calculadora, realizando: $1889 + 41 = 1820$.

La estudiante demanda a la docente a quien le comenta que le ha vuelto a dar un año anterior a la inauguración y que no puede ser. Entonces la persona docente le comenta que porqué no hace la operación con la calculadora y que analice a ver qué pasa.


La Calculadora en la escuela

Multiplicación por la unidad seguida de ceros

Efectua las siguientes operaciones con la calculadora

23 x 10 =	50 x 1000 =
650 x 10 =	100 x 6 =
12 x 1000 =	1000 x 432 =
20 x 100 =	8 x 10000 =
980 x 10 =	76 x 1000 =
43 x 1000 =	10000 x 32 =
3 x 10 =	40 x 100 =
100 x 23 =	10 x 2450 =
450 x 10 =	98 x 100 =

Si miras los resultados, ¿qué observas?

¿A que conclusión podemos llegar sobre la multiplicación por la unidad seguida de ceros?

Figura 4. Ejemplo de actividad para indagar propiedades de las operaciones aritméticas

Cuando la resuelve con calculadora, $1889 + 41 = 1930$, al ver el resultado que le muestra, ahora sí que le satisface. Entonces conjuntamente, la docente y la alumna analizan qué es lo que ha pasado y pronto la propia estudiante se da cuenta de que, al hacer la suma a mano, no había tenido en cuenta «las que se llevaba».

ALUMNO CON BAJA TOLERANCIA A LA FRUSTRACIÓN Y TENDENCIAS DEPRESIVAS DE 5.º CURSO DE EDUCACIÓN PRIMARIA CON UN NIVEL DE 3.º CURSO

Al igual que en el caso del alumnado del grupo flexible, utilizamos la calculadora para comprobar si el resultado es correcto. Para ello, se muestra un ejemplo de actividad donde se utiliza la realización del algoritmo comprensivo de la multiplicación para confirmar que el resultado mostrado con la calculadora es correcto.

La actividad consiste en que el alumno tiene que multiplicar por 8, números consecutivos de tres cifras para después sumar las cifras y poder sacar conclusiones de lo observado.

Desde el primer momento se le indica al alumno que se va a trabajar la actividad usando la calculadora y, por primera vez, ante una actividad matemática, no pronunció las temidas palabras «no lo voy a saber hacer».

Como primera tarea, la docente le facilita un número, y a continuación se le solicita que debe escribir los once números consecutivos de dicho número. Y una vez que complete estas indicaciones debe realizar la multiplicación por 8 de dichos números. Teniendo en cuenta la inseguridad a la hora de utilizar la calculadora, la docente le comenta que haga las operaciones dos veces para asegurarse de que el resultado es correcto. Una vez hechas todas las multiplicaciones, realizamos la segunda tarea, sumar las cifras. Aquí también utilizamos la calculadora, excepto en aquellas en las que el propio alumno se da cuenta de que no hace falta porque las puede hacer mentalmente. En dicha actividad, como se muestra en la figura 4, se puede observar que en la página de la derecha está dedicada a hacer las multiplicaciones con el método rectangular y nosotros la adaptamos a comprobar que

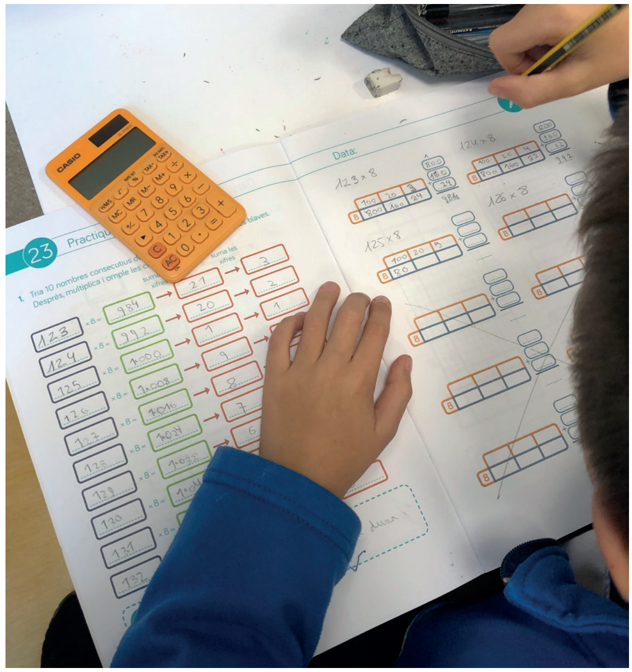


Figura 5. Realización de la tarea

las operaciones que ha hecho anteriormente se han realizado correctamente.

Resumiendo, hemos convertido un ejercicio complicado y largo para este tipo de alumnado en una actividad amena y sencilla en la que gracias a la calculadora puede llegar a los mismos objetivos que el resto del alumnado.

ALUMNA DE 6.º CURSO DE EDUCACIÓN PRIMARIA CON MUY BAJA AUTOESTIMA MATEMÁTICA

Se presenta un ejercicio de cálculo con operaciones combinadas: $20 - 4 \times 3 + 2 =$

La alumna en cuestión tiene muy claro que primero hay que resolver 4×3 y escribe:

$$20 - 12 + 2 = 12 + 2 = 14$$

Cuando corregimos dicho cálculo, la alumna se da cuenta que su resultado no es correcto. ¿Qué ha pasado?

La docente se acerca a su mesa y le comenta que tiene que hacer la resta $20 - 12$. La escribe en formato vertical, en un espacio a parte y la resuelve de forma incorrecta porque no se da cuenta que a 0 no le podemos restar 2 y que no es lo mismo que a 2 restarle 0.

En este punto se puede hacer un trabajo comprensivo de la resta, que no se descarta, pero lo que se intenta resolver en ese momento es superar la frustración que le había producido confundirse en una resta aparentemente tan sencilla.

Le facilito la calculadora y le comento que lo vuelva hacer con la ayuda de esta herramienta, y en un momento ha resuelto esta y todas las otras operaciones combinadas de manera satisfactoria.

ALUMNA DE 3.º CURSO DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN GRUPO HETEROGÉNEO

Se trata de una alumna con mucha voluntad y buena predisposición al aprendizaje, pero con asistencia irregular a la escuela. Encuentra dificultades en relación con el razonamiento matemático (reconocimiento numérico, cálculo mental, resolución de problemas, operaciones básicas), con un bajo nivel lectoescritor. Su carácter introvertido y una baja autoestima por cuestiones académicas y de relación no ayudan en su proceso de aprendizaje. Su entorno familiar, económico y sociocultural es poco favorecedor, motivador y estimulante.

En el presente curso escolar 2022/2023, la organización de la escuela (ambientes de aprendizaje) y las metodologías activas utilizadas, hacen que pueda participar de manera más inclusiva al compartir los espacios con alumnado de otro grupo de 3.er curso y de un grupo de 4.º curso, generando grupos de unos 16 o 17 niños y niñas. Las propuestas de trabajo están diseñadas de manera multinivel dando respuesta a los diferentes niveles y ritmos del alumnado según los principios del Diseño Universal de Aprendizaje (DUA).

En el ambiente de Cosmos (matemáticas y conocimiento del medio), esta alumna participa en el desarrollo de propuestas individuales, en parejas o en pequeño grupo (3 o 4 niños/as). En estas propuestas participa en el desarrollo de estas en la medida de sus capacidades y posibilidades, aprendiendo de ellos y ellas. Algunas de estas propuestas incluyen el uso de la calculadora y son propuestas específicas para el manejo de esta herramienta.

Es en los momentos de propuestas individuales cuando se presentan a esta alumna, actividades más personalizadas y adaptadas a sus necesidades relacionadas con el cálculo mental, las operaciones básicas, la lógica matemática y la resolución de problemas, pudiendo utilizar materiales manipulativos junto con la calculadora, como un recurso más por diferentes motivos que detallamos en este artículo, todos positivos, en relación con los entornos de aprendizaje basados en el DUA. No compartimos la idea de que si el alumnado usa la calculadora «se acostumbrará» a ella y después no sabrán hacer las operaciones y los cálculos por ellos mismos. Es más bien al revés. La calculadora se convierte en una aliada ya que genera interés, motivación y ayuda; y facilita el camino de alumnos y alumnas con NEAE.

El uso de materiales manipulativos (regletas, monedas, base 10…) unido al uso de la calculadora están ofreciendo a esta alumna la oportunidad de mejorar de manera significativa su comprensión y competencia matemática (autoestima, mejora del cálculo, comprobación, seguridad…). También se da cuenta de que es capaz de conseguir muchos más avances, pudiendo centrar sus esfuerzos en los procesos de resolución, ya que la calculadora hace por ella los cálculos y estimaciones necesarias, pudiendo llegar al final del camino en igualdad o parecidas condiciones que el resto del grupo. El hecho de tener que obtener algunos resultados de operaciones para poder continuar, ya fuera a través del cálculo mental o de algoritmos tradicionales, ralentizaban en exceso su evolución y avance y le hacían perder el hilo del proceso de resolución.

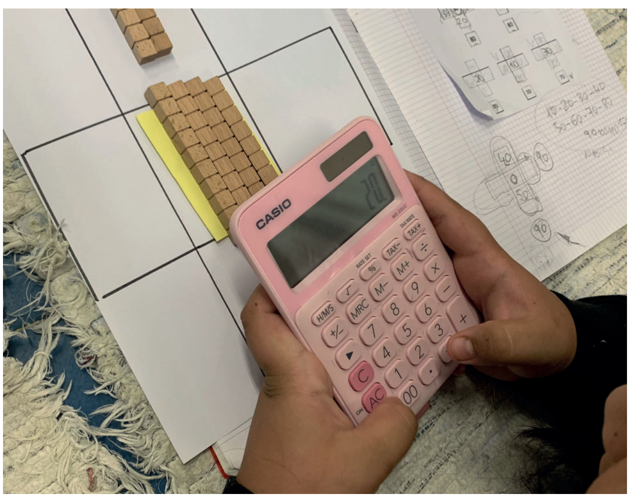
En las observaciones realizadas en el trabajo con la calculadora encontramos evidencias relacionadas con los aspectos positivos que le aporta la calculadora, ya que esta «no se equivoca» (a excepción de errores de tecleo) y le permite ser consciente de errores en el conteo y darse cuenta de manera clara e inmediata de cuál ha sido la causa de ese error: «…me salté 1» comenta ella en su error de conteo. Así, el uso de la calculadora le aporta autonomía y autoevaluación para darse cuenta de los errores.

Además, en la interiorización y aprendizaje del mecanismo de la multiplicación y de las tablas de multiplicar, la calculadora le sirve en estos primeros momentos como guía y facilitadora de ese aprendizaje puramente memorístico.

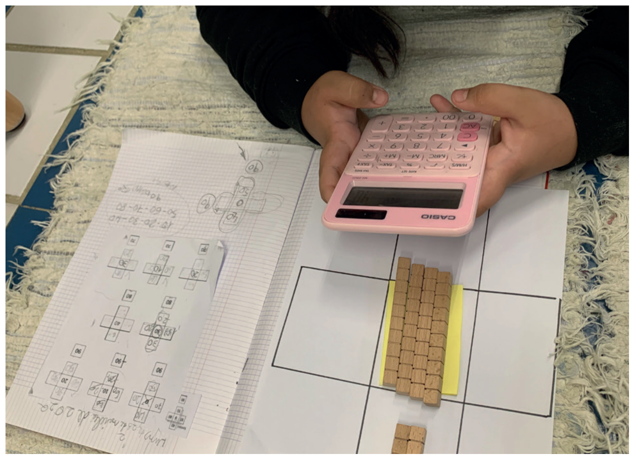
La retroalimentación que se produce entre el uso de materiales manipulativos y la calculadora es realmente destacable y beneficiosa para los niños y niñas con este tipo de dificultades, sobresaliendo el aspecto motivador y generador de interés. La calculadora evita en la mayoría de las ocasiones sentimientos de frustración y desánimo al enfrentar estos niños y niñas con necesidades educativas especiales a situaciones donde no son capaces de calcular determinadas operaciones que les permitirían poder explorar y descubrir nuevos caminos y posibilidades.

ALUMNO CON TRASTORNO DE ESPECTRO AUTISTA (TEA) EN 5.º CURSO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

El estudiante presenta serias dificultades para conocer las tablas de multiplicar, incluso para realizar sumas y restas sencillas se tiene que ayudar de una recta numérica vertical que es capaz de crearse con números hasta el 20.



Figuras 6 y 7. Realizando operaciones con calculadora y bloques multibase



Figuras 8 y 9. Representación de operadores y cálculo con bloques multibase y calculadora

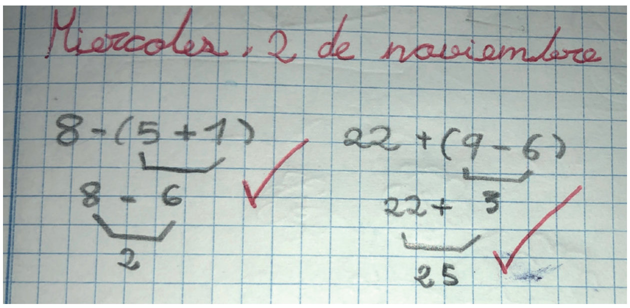
Se trabaja con el alumno desde la incorporación de materiales manipulativos y se aporta como novedad el uso de la calculadora. A partir de ese momento la actitud y el progreso en el área ha sido evidente. Por un lado, la mejora en la autoestima y en el convencimiento personal de que entiende la materia. Ha pasado de no intervenir nunca en clase a participar de manera activa.

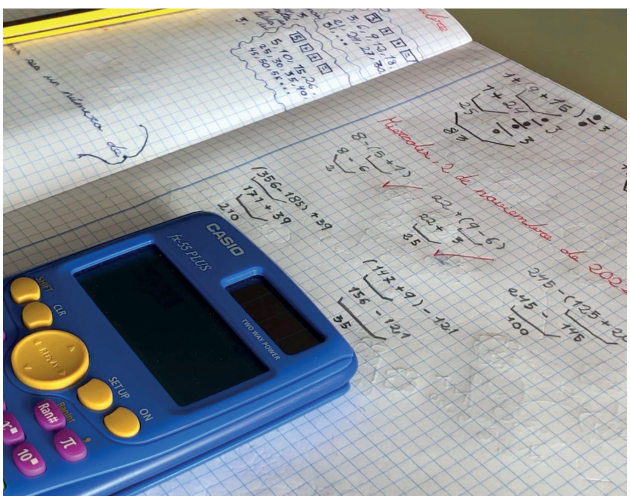
Al no tener en su expediente desfase curricular, está trabajando con los contenidos y saberes básicos que indica la ley educativa vigente.

Al trabajar las operaciones combinadas, aunque tenía claro la prioridad de estas, al no dominar el cálculo, se le hacía muy difícil resolver «8 − (6 +1)=» o «22 + (9−6)=», teniendo que recurrir a las regletas o la recta numérica. La incorporación de la calculadora ha supuesto un antes y un después en su actitud hacia las matemáticas, ya que ha pasado de no querer las clases de matemáticas a verse capaz de lograr éxitos y poder progresar con el resto de los compañeros y compañeras (muestra de la resolución de sus actividades que se puede consultar en las figuras 10 y 11).

Si bien es cierto que necesita más tiempo para realizar cualquier actividad, es propio del alumnado TEA, el pautar cada actividad y seguir una secuencia lógica es algo que hacen muy bien. En este caso, nos ha venido muy bien esta característica de su memoria eidética ya que retiene detalles que para la mayoría pasan desapercibidos. A la hora de usar la calculadora no es necesario repetir los pasos a seguir, sino que con una pequeña demostración es suficiente para entender la secuencia, aunque esta sea larga, y nos permite llegar a resoluciones como la de la figura 12 donde se pone de manifiesto que entiende la prioridad de las operaciones.

En otro tipo de actividad, como es la descomposición factorial ocurre exactamente lo mismo. El no dominar las tablas de multiplicar con fluidez, supone un freno importante a la hora de resolver la actividad de manera óptima. El uso de la calculadora en este caso le permite buscar los múltiplos o divisores (como se muestra en las figuras 13 y 14) puesto que sí domina la teoría de la divisibilidad por 2, 3, 5 y 10, pero le falla el conocimiento fluido de las tablas de multiplicar.





Figuras 10 y 11. Muestra de la resolución de operaciones combinadas con la calculadora

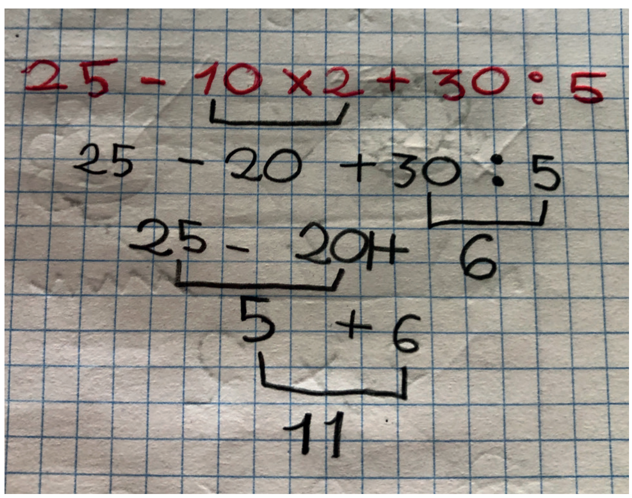
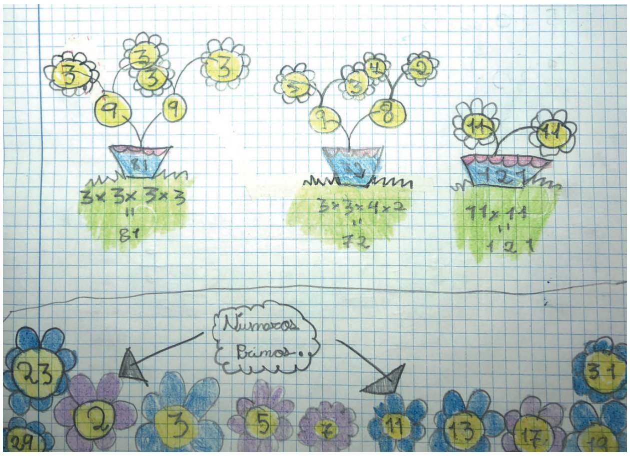
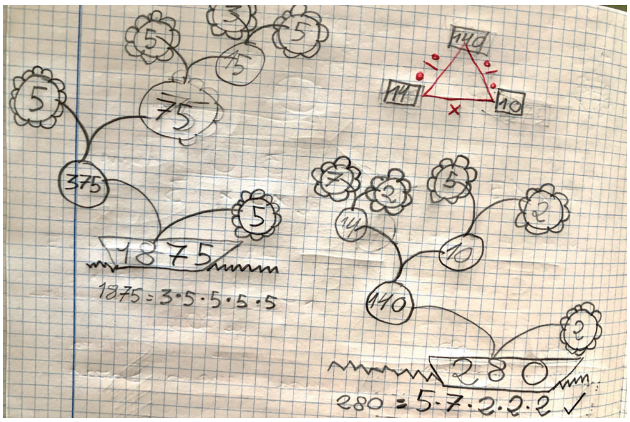


Figura 12. Resolución pautada de operaciones combinadas





Figuras 13 y 14. Muestras de resolución en la descomposición factorial de un número

Reflexiones y conclusiones

En la mayoría de las experiencias expuestas el uso de la calculadora se justifica por la necesidad de agilizar los cálculos en cursos mayores, ya que de otra forma será difícil abordar la totalidad del currículo del curso y de la etapa correspondiente. Además, en los últimos cursos de Educación Primaria presuponemos que todo el alumnado sabe usar una calculadora, *nada más lejos de la realidad*. ¿Cómo podemos presumir tal afirmación si antes no les hemos explicado su funcionamiento?

Hoy en día, es muy usual encontrarnos con alumnado que, a finales de un curso de la Educación Secundaria Obligatoria o incluso en Bachillerato, realiza operaciones que muestran en las pantallas de sus calculadoras algo similar a lo siguiente:

```
780-15
                    765
```

```
25-6
                     19
```

Y en cambio, ver esto otro es mucho menos común:

720

$$2^4 \times 3^2 \times 5$$

Este tipo de usos de la calculadora son consecuencia de no haber dotado al alumnado de las destrezas básicas sobre el uso de esta. Y no lo lograremos si no dejamos que la calculadora entre a formar parte de las herramientas pedagógicas al alcance del alumnado en el aula. Si no queremos que la calculadora responda a las preguntas directamente, posiblemente debamos cambiar las preguntas. Entendemos el uso de la calculadora en la escuela porque ahorra tiempo en cálculos cuyo interés pedagógico es nulo o escaso.

Pero el caso que nos ocupa y que se presenta en este trabajo se centra en la ayuda que proporciona al alumnado con NEAE. No nos queda otra que valorar muy positivamente la introducción y uso de la calculadora como recurso que permite al alumnado poder derribar barreras y obstáculos como son la mayoría de las operaciones y cálculos intervinientes en la resolución de problemas, retos o situaciones matemáticas que planteamos en el aula.

El uso de la calculadora como herramienta, acompañada de las correspondientes explicaciones, dan como resultado que se adquiera el conocimiento.

Por ello, a raíz de las intervenciones expuestas, podemos afirmar que:

- La calculadora ayuda a los estudiantes con NEAE a desarrollar habilidades matemáticas básicas, como el cálculo mental, razonamiento lógico y la resolución de problemas.
- La calculadora proporciona a estos estudiantes una forma eficiente y precisa de realizar cálculos, lo que permite ahorrar tiempo,

frustración y un esfuerzo muy por encima de sus posibilidades.

- La calculadora es una herramienta valiosa para ayudar a los estudiantes con NEAE a controlar y reducir el estrés y la ansiedad asociados con el aprendizaje de las matemáticas.
- El uso de la calculadora ayuda a los estudiantes con TEA a mejorar su confianza y autoestima.
- Su manejo facilita la comunicación, la colaboración e integración con sus compañeros y compañeras de clase.
- Puede ser utilizada como una herramienta de apoyo para el aprendizaje individualizado y la adaptación del currículo para los estudiantes con TEA.
- El uso de la calculadora ayuda a la concentración y atención de los estudiantes con NEAE, lo que permite mantenerlos enfocados y aumentar su rendimiento académico en general.

Referencias bibliográficas

Arias J., V. Granda y I. Málaga (2010), «La intervención psicopedagógica. Serie Monográfica: Trastornos del aprendizaje», *Boletín de la Sociedad de Pediatría de Asturias, Cantabria y Castilla León*, n.º 50 (2014), 314-323.

Bellver, I. (2013), *Dificultades de aprendizaje relacionadas con el cálculo. Pautas para padres y madres,* Confederación Española de Asociaciones de Padres y Madres de Alumnos, Madrid.

Bone, E. C., y E. C. Bouck (2018), «Evaluating calculators as accommodations for secondary students with disabilities», *Learning disabilities: a multidisciplinary*, n.º 23 (1), 35–49, <http://dx.doi.org/10.18666/LDMJ-2018-V23-I1-8437>.

Bouck, E. C., y M. K. Bouck (2008), «Does it Add Up? Calculators as Accommodations for Sixth Grade Students with Disabilities», *Journal of Special Education Technology*, n.º 23 (2), 17–32, <https://doi.org/10.1177/016264340802300202>.

Butterworth, B., S. Varma y D. Laurillard, (2011), «Dyscalculia: from brain to education», *Science*, n.º 332, 1049-1053, <https://doi.org/10.1126/science.1201536>.

Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria.

Yakubova, G. y E. C. Bouck, (2014), «Not All Created Equally: Exploring Calculator Use by Students with Mild Intellectual Disability», *Education and Training in Autism and Developmental Disabilities*, n.º 49 (1), 111–126, <http://www.jstor.org/stable/23880659>.

Ángel A. García Marrero
Colegio Escuelas Pías, Tenerife
<aagm38@me.com>

Fernando Pérez García
CEIP Attilio Bruschetti, Xàtiva
<46004735@edu.gva.es>

Tuti Comalat Navarra
Escola Guinardó SCCL, Barcelona
<tuti@escolaguinardo.cat>

DIARIO DE EXPERIENCIAS MATEMÁTICAS

Pon un gráfico en tu vida

Aina Maria González Juan
Catalina Maria Pizà Mut

SUMA+ núm. 103
pp. 103-116
Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2022 y aceptado en enero de 2023

¿Es lo mismo leer un cuento que escribirlo? ¿O mirar una escultura que esculpirla? ¿Ver una película es igual de complicado que dirigirla? Obviamente no. Parece que el proceso de interpretación, sea del tipo que sea, si bien requiere un determinado esfuerzo, no conlleva la complejidad de la elaboración de un producto. Tal vez esta sea una afirmación un tanto arriesgada, pues, ¿sucede lo mismo en todos los casos? ¿Y si analizamos el caso de los gráficos?

¿Pueden los alumnos de primaria interpretar gráficos con la misma facilidad que elaborarlos? ¿Cuál es nuestra experiencia como maestros? ¿Y como adultos, inmersos en esta sociedad de la comunicación audiovisual y de los datos estadísticos? ¿Pensamos que es más fácil interpretar o, bien, realizar un gráfico?

Hoy en día vivimos en una sociedad permanentemente conectada, donde los medios de comunicación nos inundan minuto a minuto con multitud de datos estadísticos. Esto se intensificó especialmente con la pandemia y hoy en día es imposible ver un informativo o cualquier noticia en las redes sin que aparezcan gráficos sobre el precio del gas, la luz, el precio de la cesta de la compra, la vivienda, salarios de la población, entre otros. Por ello es cada vez más necesario que nuestros alumnos se conviertan en ciudadanos críticos capaces, por un lado, de distinguir los datos reales y fiables de los que no lo son y poder hacer representaciones de dichos datos y, por otro, de interpretar, analizar y representar correctamente dicha información.

En este artículo intentaremos dar unas pinceladas a las dificultades con las que se encuentran los alumnos en uno u otro caso.

Si entramos en un aula de infantil o primaria podemos ver que es habitual realizar actividades de recogida de datos de la vida cotidiana del tipo: qué fruta nos gusta más, cuánto medimos, qué número de pie calzamos o cuál es nuestro deporte favorito, para después clasificar, ordenar y cuantificar dichos datos, construir con ellos tablas y gráficos y, con un simple vistazo, obtener información relevante de la muestra.

En nuestro caso no fue así, cuando nosotras estudiamos no hacíamos recogidas de datos de situaciones reales para después representarlos en un gráfico y poder interpretarlos; aunque sí recuerdo y se me quedaron grabadas las estaturas de todos los alumnos de mi clase, por la sencilla razón de que día a día, al finalizar el recreo, al grito de «filaaaaa» nos colocábamos uno detrás de otro de menor a mayor estatura. Yo era siempre la segunda de la fila y, durante muchos años, tuve que aguantar los comentarios de mi madre, angustiada por mi estatura y falta de peso (según ella y los cánones de la época, claro), diciendo, es que no crece, es que es muy pequeña, como no come (aquí otra vez según su criterio de lo que necesitaba una persona de mi edad para subsistir). En aquellos años no existía internet ni acceso a la información donde hubiera podido consultar tablas de peso, estatura y alimentación suficiente para mi edad con la que poder rebatir sus argumentos.

No creo que el objetivo de formar en fila siguiendo el criterio de la estatura fuera el de ver a simple vista cuál era la mediana, aunque se hubiera podido aprovechar el contexto para explicarnos de manera visual dicho concepto, creo que todos lo hubiéramos entendido perfectamente.

A la hora de trabajar con gráficos es importante contextualizar y aprovechar las situaciones que se presentan o bien, provocarlas.

Pero… ¿Qué es un gráfico en realidad? ¿Todos los gráficos son iguales? ¿Cuáles son los elementos que caracterizan un gráfico? ¿Cómo podemos ayudar a nuestros alumnos a descubrir estos elementos?

Una de las posibilidades es ofrecer gráficos de la realidad para que los observen e interpreten y extraer conjuntamente las características comunes a todos ellos.

Otra posibilidad es poner a los alumnos en situación de elaborar gráficos, en parejas o pequeños grupos, una vez realizada previamente una investigación estadística, y analizar los productos resultantes.

En las dos posibilidades se plantea la misma tarea: observar y analizar gráficos para extraer los elementos imprescindibles que los definen.

Elaboración de gráficos

En este apartado partiremos de representaciones propias, intentaremos analizar las dificultades que encontraron nuestros alumnos y de qué manera podemos ayudarlos. Dichas representaciones están enmarcadas en contextos concretos, que se comentan brevemente en cada caso, y se han llevado a cabo en el segundo y el tercer ciclo de primaria.

DIFICULTADES MÁS FRECUENTES

Recogida de datos incorrecta

En una clase de sexto estudiamos la contaminación que producen los vehículos y nos preguntamos si realmente teníamos que ir en coche al centro o podíamos hacerlo de un modo más sostenible. Necesitábamos conocer la realidad de nuestra escuela. Empezamos a recopilar datos para poder realizar un gráfico donde visualizar dicha información.

Los alumnos, en pequeños grupos pasaron por todas las aulas recogiendo los datos, después los escribían en un excel proyectado en la pizarra, aquí pudimos observar que cuando sumaban las respuestas estas no se correspondían con el total de alumnos que esperaban que hubiera en cada clase; en algunos casos los alumnos preguntados levantaban la mano tres o cuatro veces para responder a una cuestión de respuesta única, había más respuestas que alumnos; o en otros casos había menos respuestas que alumnos.

Tras observar la disparidad de datos según la clase y el grupo de trabajo que había recogido las respuestas se inició un diálogo sobre qué había pasado y cómo podíamos resolverlo.

— ¿Cómo intervenimos en este caso? ¿Qué podemos aportar como maestros? ¿Qué aportan sus compañeros?
— Necesitamos saber cuántos alumnos tiene cada clase.
— ¿Estáis seguros de haber anotado todas las respuestas?
— ¿Habéis comprobado el número total de respuestas de cada clase?

Así llegaron a la conclusión de que es necesario ser rigurosos y precisos con los datos recogidos. Una vez actualizada la muestra de alumnos completamos toda la tabla y revisamos que los datos fueran correctos (figura 1).

Al completar la tabla con todos los datos realizamos diferentes gráficos de los que se pueden extraer diversas informaciones. En el gráfico de barras de la figura 2 se ve enseguida cual es la opción mayoritaria, es decir, la moda.

	A peu	En cotxe	En autobús	En Bicicleta	Patinet elèctric	Moto	patins	Total
1A	12	12	2					26
1B	6	14	6					26
1C	8	12		1	1			22
2A	14	8	2					24
2B	10	9	3					22
2C	8	10	2					20
3A	16	10	1					27
3B	12	10	2					24
3C	10	7	2					19
4A	8	11	1					20
4B	13	7	2					22
4C	13	5	2					20
5A	8	8	2			2		20
5B	10	10	1					21
5C	10	8	1				1	20
5D	15	5	3					23
6A	11	7	4				1	23
6B	12	5	3	2				22
6C	11	9	4			3		27
6D	14	6	1	1	1		2	25
Total	221	173	44	4	2	5	4	453

Figura 1. Recogida de datos de la pregunta ¿Cómo vamos a la escuela?

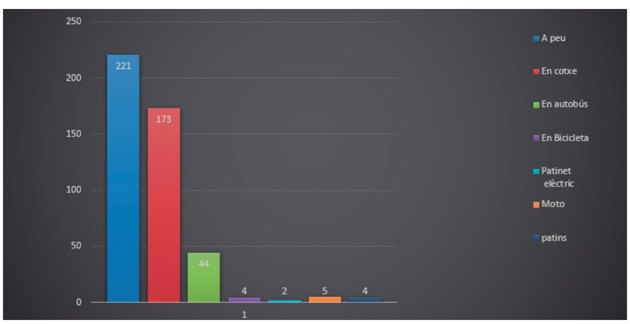


Figura 2. Gráfico de barras ¿Cómo vamos a la escuela?

En el gráfico de sectores de la figura 3, pueden obtener mucha más información:

— La mitad de todos los alumnos del colegio viene a pie.
— Como es la mitad, es casi un 50%.
— Casi no cuentan los que van en bici, patín o moto.
— El gráfico está bien porque si sumamos los que van a pie y en coche son más de tres cuartos.
— Aquí se ve muy bien.

En el gráfico de la figura 4 se pueden observar los resultados diferenciados por clases y decidir en qué clases tienen que transmitir información sobre los beneficios de ir a pie o en transporte público al colegio y dónde hay más alumnos que van en coche.

Este próximo curso se podría investigar si el incremento del precio del combustible ha modificado los hábitos de las familias sobre como acceder al centro.

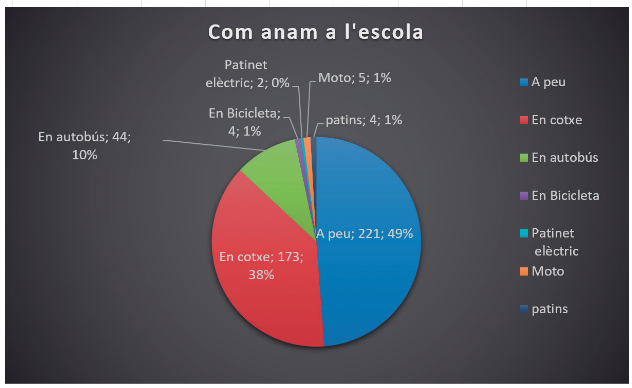


Figura 3. Gráfico de sectores ¿Cómo vamos a la escuela?

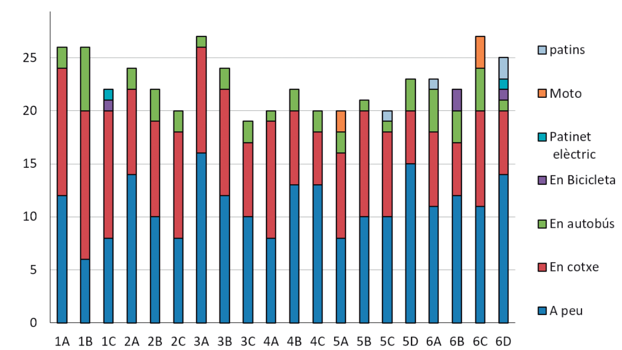


Figura 4. Gráfico de barras de todas las aulas ¿Cómo vamos a la escuela?

Representaciones pseudo-proporcionales o no proporcionales

La proporción es un concepto difícil de trabajar. Un paso previo sería el de correlacionar tamaños aunque no fuese estrictamente proporcional la relación.

Es el caso que vemos en la figura 5, donde está representado el resultado de la pregunta: *¿Qué deporte practicas o te gustaría practicar?*

Observamos que el tamaño relativo de los sectores no se corresponde con los valores, ya que el valor del básquet, 3, en naranja en la imagen, es mayor que el sector del voleibol, 6, en amarillo y que el del fútbol, en verde, que también es 6. Es decir, no adjudica sectores más grandes a los valores más grandes, ni más pequeños a los menores; ni tampoco tamaños iguales a valores iguales.

En este gráfico observamos también que el alumno desconoce el concepto de porcentaje y, muy probablemente, los conceptos de frecuencia absoluta y frecuencia relativa, pero no se trabajan en este momento.

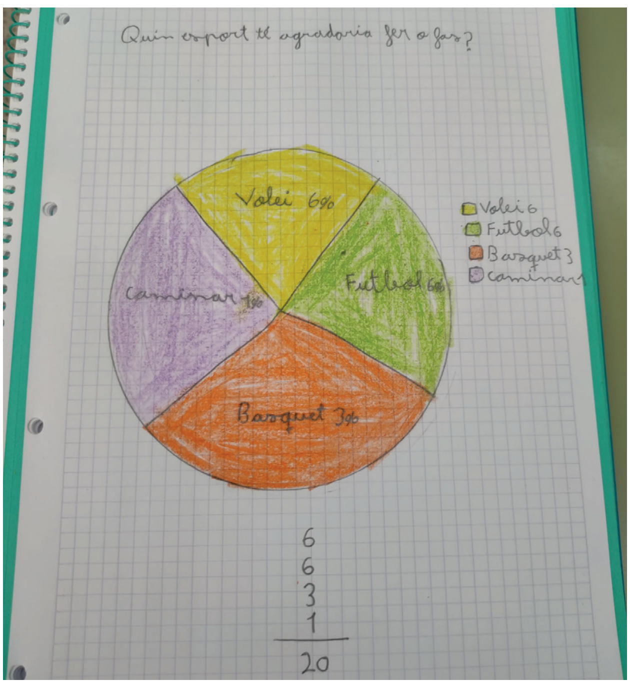


Figura 5. Gráfico de sectores no proporcionales ¿Qué deporte practicas?

—¿Cómo intervenimos en este caso? ¿Qué podemos aportar como maestros? ¿Qué aportan sus compañeros?
—Si no hubieras escrito los números y miraras solo las porciones coloreadas, ¿Qué deporte pensarías que es el más practicado? ¿Y el menos practicado?

En los ejes no están expresados el rango de frecuencias o las variables

Es muy frecuente, cuando aún no se han interpretado y comentado gráficos, que los alumnos elaboren uno propio obviando expresar las variables porque ellos ya las tienen en mente, ya saben qué han preguntado y qué respuestas han obtenido.

También encontramos gráficos sin la expresión de los valores obtenidos en el eje de ordenadas, aunque menos frecuentemente.

En la figura 6 vemos un gráfico de barras sencillo en el que se representan las ganancias obtenidas por parte de unos alumnos de 6.º de primaria a lo largo de todo el curso. Han realizado muchas actividades con el fin de abaratar los costes de su viaje de final de curso. Como las ganancias son elevadas algunos alumnos argumentan que es más visual anotar sobre cada columna los valores sin más y… no se puede rebatir, aunque sí matizar, pues… sin los valores del

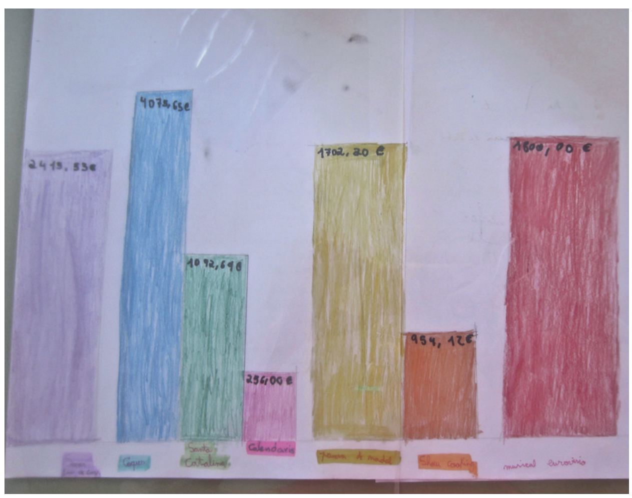


Figura 6. Gráfico de barras incompleto ¿Cuánto dinero ha reportado cada actividad?

eje vertical, ¿cómo se podrían dibujar proporcionalmente las barras?

Es decir, aún cuando se anoten los valores absolutos en las barras, es necesario que en el eje de ordenadas se escriba la escala graduada con el intervalo entre frecuencias elegido, independientemente de los valores absolutos y tener a estos en cuenta tan solo para determinar el intervalo y el valor máximo que se indicará en el eje vertical.

- —¿Cómo intervenimos en estos dos casos? ¿Qué podemos aportar como maestros? ¿Qué aportan sus compañeros?
- —Para el caso del eje de ordenadas:¿Cómo sabéis la altura de las columnas?
- —Para el caso del eje de abscisas: ¿Qué es cada columna?
- —¿Cuántas personas han respondido a tal variable?

¡La respuesta de los alumnos es inmediata!

Eje de ordenadas cuyo valor máximo es el total de la muestra

Continuando con la serie de preguntas para conocer mejor las aficiones y gustos de sus compañeros, un alumno preguntó ¿*Qué mascota te gustaría tener*?

En el diagrama de barras de la figura 7 tenemos representado el resultado. Vemos que en el eje vertical el alumno ha asignado un número consecutivo a cada cuadradito, empezando en el 1 y acabando en el 22, que es el total de alumnos a los que preguntó, el número de alumnos de su clase.

- —¿Cómo intervenimos en este caso? ¿Qué podemos aportar como maestros? ¿Qué aportan sus compañeros?
- —¿Hacen falta tantos números en este eje?
- —¿Hasta qué número has marcado?

En realidad sería suficiente que el eje de ordenadas pudiese recoger hasta el 10, por poner un número redondo, pues el rango de frecuencias es 1-7 y se conseguiría con ello una distribución del espacio más adecuada.

Valores numéricos ausentes y ancho de barras diferentes

Hemos encontrado estas dificultades al realizar un climograma:

- —Incluir las dos variables (temperatura y precipitaciones) en el mismo gráfico.
- —Utilización inadecuada de las escalas, tanto para las temperaturas, como para las precipitaciones.
- —Algunos alumnos marcan un valor idéntico de temperaturas a diferente altura en los extremos del gráfico, por ejemplo 15° se ve representado a diferentes alturas.
- —En otros casos no representan los mismos intervalos entre las temperaturas en el eje de ordenadas.

A partir de todo ello:

- —¿Cómo intervenimos en este caso? ¿Qué podemos aportar como maestros? ¿Qué aportan sus compañeros?
- —¿Qué rango de valores tenemos para las temperaturas?
- —¿Qué números tendrás que poner para poder representar todas las temperaturas?
- —Los 15 grados de abril, ¿están a la misma altura que los 15 grados de noviembre?

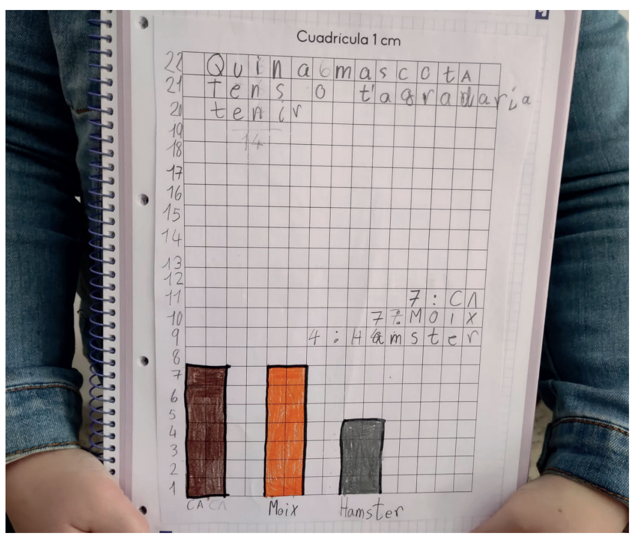


Figura 7. Eje de ordenadas sobredimensionado ¿Qué mascota tienes o te gustaría tener?

Valores que representan a un solo individuo

En una clase de quinto de primaria, los alumnos decidieron realizar, entre otros, un gráfico sobre sus estaturas, para enviar la información a otro centro con el que mantenían un e-mat, un correo matemático. Se encargó de ello un grupo de cuatro alumnos y una vez elaborado expuso su trabajo al resto del grupo. A partir de los comentarios, el pequeño grupo realizó mejoras hasta obtener un resultado satisfactorio para toda la clase. ¡A la tercera va la *vencida!*

—¿Cómo intervenimos en este caso? ¿Qué podemos aportar como maestros? ¿Qué aportan sus compañeros?

Respecto al primer gráfico que presentaron, el de la figura 8, los compañeros fueron muy directos con sus comentarios:

— Yo no lo entiendo

— ¿Por qué hay líneas que no bajan? ¿no se mezclan con otras que bajan?

— Los números de las estaturas casi no se ven, queda sucio.

— ¿Por qué habéis puesto los centímetros de 3 en 3? Yo pondría números redondos, o de 5 en 5, es más fácil, se entiende mejor.

Una vez realizadas algunas modificaciones, presentaron el gráfico de la figura 9.

Comentaron que habían modificado el intervalo entre los centímetros de estatura, que habían transformado las líneas, que antes eran confusas, en barras y habían intercambiado los ejes. Llegado a este punto preguntaron qué debían poner en el eje de abscisas, pues se dieron cuenta que cada barra representaba a un alumno y algo no les acababa de convencer.

El resto de la clase no veía ningún problema: para ellos, ya estaba limpio, habían sustituido las líneas entremezcladas por barras diferenciadas…, algunos sugirieron separar unos milímetros las barras, pero otros no vieron la necesidad o argumentaron que las barras que representaban estaturas iguales quedarían separadas y no les parecía buena idea… En definitiva, concluyeron que debían poner números del 1 al 14, porque ellos eran 14 alumnos, y dejarlo tal cual.

Aquí el maestro intervino preguntando: ¿Y si en vez de tener las estaturas de una sola clase tuviéramos las de todos los cursos, podríamos representarlo de la misma manera?

Naturalmente descartaron dibujar más de 250 barras para informar sobre las estaturas de los alumnos de toda la escuela. En ese momento intuyeron el problema y propusieron agrupar alumnos con estaturas iguales o parecidas en una sola barra y el resultado fue el gráfico de la figura 10.

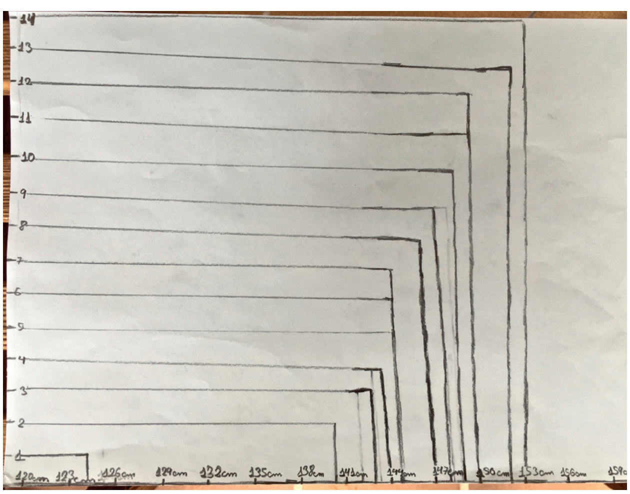


Figura 8. Gráfico inicial ¿Cuál es nuestra estatura?

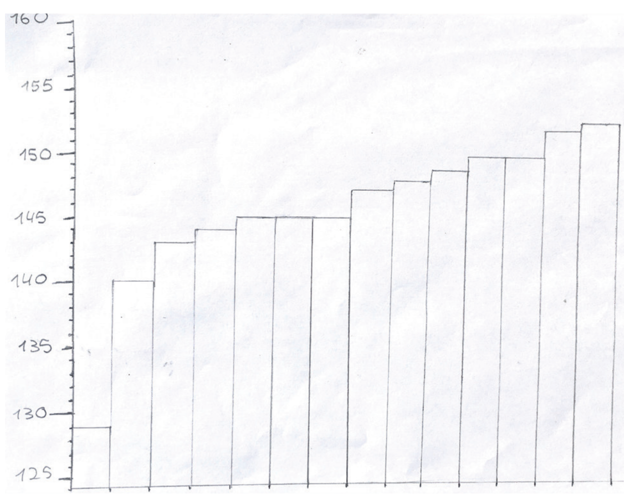


Figura 9. Gráfico mejorado ¿Cuál es nuestra estatura?

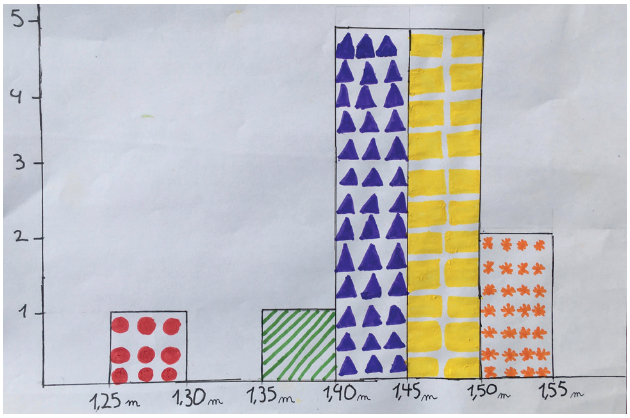


Figura 10. Gráfico definitivo ¿Cuál es nuestra estatura?

Es un concepto más difícil de lo que parece a primera vista pues los datos son continuos y la barra representa un intervalo de valores, no un solo valor.

¡La suma de las frecuencias relativas expresadas no supone el 100%!

Unos alumnos de 4.º de primaria deciden averiguar qué juegos son los más populares, pues algunos se quejan de las decisiones que se han tomado en el patio hasta ese momento. En la figura 11 observamos que se han establecido cinco categorías, que se ha calculado el porcentaje de cada una de ellas en base a los valores obtenidos en la recogida de datos y que, al comprobar si el total de las frecuencias relativas supone el 100%, ¡resulta que *no*!

—¿Cómo intervenimos en este caso? ¿Qué podemos aportar como maestros? ¿Qué aportan sus compañeros?

En primer lugar se puede felicitar a los alumnos por haber comprobado si el total era el 100%.

—¿Cómo habéis calculado el porcentaje?
—¿Es un valor exacto o una aproximación?

En este caso los alumnos habían realizado una tabla de proporcionalidad para calcular los porcentajes y habían redondeado el valor de un voto a 7%, cuando en realidad es mayor (1 alumno de 14 supone algo más de 7,14%). Ese margen es el causante de no obtener el 100%.

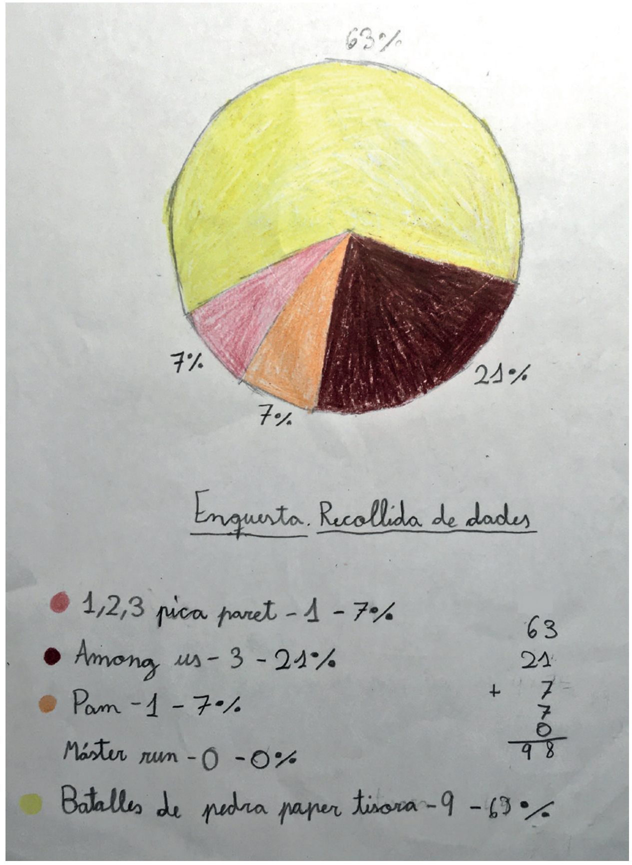


Figura 11. No es el 100 %
¿A qué quieres jugar en el patio?

Sectores que no son sectores circulares

En una clase de tercero de primaria se pidió a los alumnos que plantearan preguntas para conocer mejor las aficiones y gustos de sus compañeros, que recabaran la información y que representaran sus resultados con un gráfico.

Todos realizaron un gráfico de barras vertical. Al preguntarles si conocían otros tipos de gráfico respondieron que también conocían el de *quesitos*. Así, se les propuso que representaran sus datos utilizando un diagrama de sectores.

En la figura 12 vemos dos representaciones distintas para la pregunta *¿Cuál es tu color favorito?*

—¿Cómo intervenimos en este caso? ¿Qué podemos aportar como maestros? ¿Qué aportan sus compañeros?

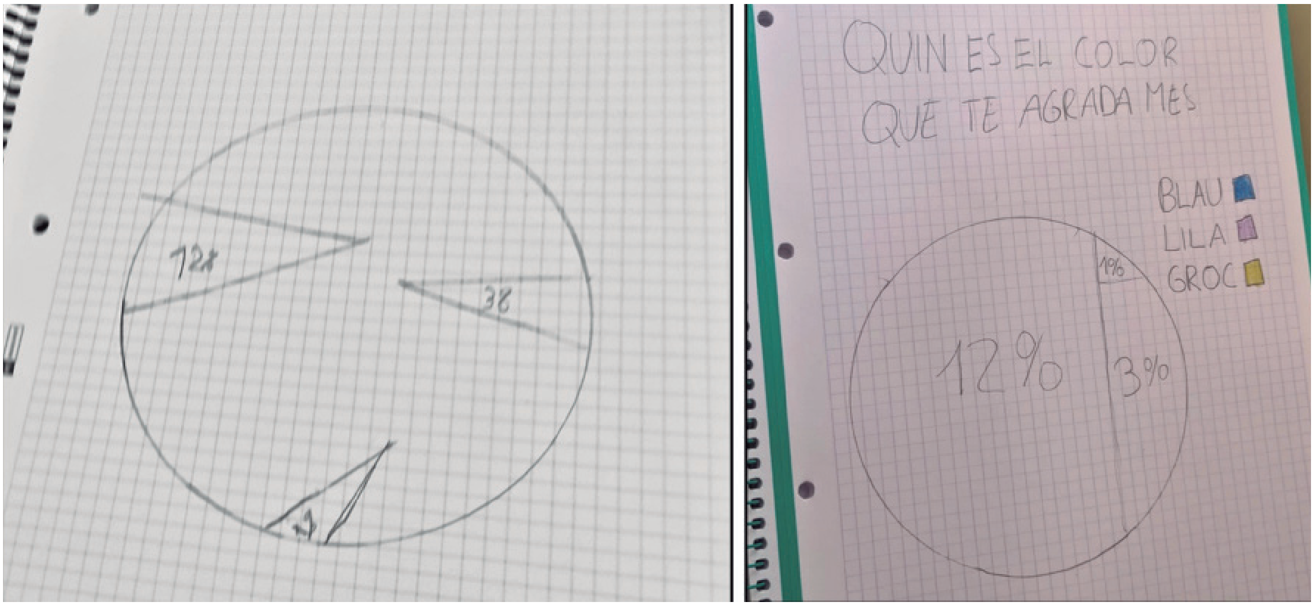


Figura 12. Pseudo-gráficos de sectores. ¿Cuál es tu color favorito?

Aunque hay varias ideas importantes para comentar (confusión de frecuencia absoluta con frecuencia relativa, por ejemplo), nos centramos en mejorar un solo aspecto, pues de lo contrario nos alejaríamos mucho de la zona de aprendizaje de estos alumnos. En este caso, elegimos la forma de los sectores porque es el aspecto de mayor impacto visual y es el que permitirá, en un momento posterior, comparar de forma más precisa la proporción de las frecuencias.

- —¿Por qué algunos decís que se llama gráfico de quesitos?
- —¿Qué representa este espacio en blanco?

El gráfico de sectores es un tipo de gráfico con características un tanto especiales:

- —Es difícil de elaborar para alumnos de corta edad, pero no de «interpretar».
- —Se percibe el total de forma muy visual.
- —El valor «0» no queda representado.
- —Los datos se suelen representar en frecuencias relativas, ya sean porcentajes, fracciones, grados…
- —Es muy visual la relación entre cada categoría y el total.
- —Precisan anotar las frecuencias sobre los sectores o bien en una leyenda adjunta, ya que carece de ejes sobre los que anotar la información.
- —Es muy adecuado en el caso de que una categoría o dos predominen claramente sobre una tercera.

Para elaborar un gráfico de sectores normalmente proponemos utilizar material o bien partir de un gráfico de barras y transformarlo.

Con ayuda de material:

- —Proporcionamos material contable, atractivo y de colores diferentes como golosinas, chinchetas… Una condición importante es que sean idénticos en tamaño para que cada elemento represente una unidad y por tanto los resultados gráficos sean proporcionales, cosa que no ocurriría si usamos materiales diferentes para cada categoría de la variable.
- —Una vez elegido el material, se adjudica un color a cada categoría, se coloca el número de objetos de cada color según la frecuencia obtenida a partir de la recogida de datos.
- —Se ubica el centro (podemos ayudarnos de una plantilla transparente).

- —Se marcan los sectores con varillas tal como se muestra en la secuencia de la figura 13.
- —Si se pretende realizar la representación posterior en papel es interesante colocar un papel debajo del objeto elegido y marcar la circunferencia antes de colocar las chinchetas, cápsulas, botones, teselas…
- —Finalmente se pueden añadir las frecuencias relativas, expresadas en porcentajes, grados o fracciones, con ayuda de plantillas.

A partir de un gráfico de barras o de una tira de papel:

- —Se realiza un gráfico de barras, se cortan las barras coloreadas y se pegan una a continuación de otra.
- —Se cierran los extremos y obtenemos una circunferencia con las distintas frecuencias marcadas proporcionalmente.
- —A continuación se procede como en el caso anterior; es decir, una vez marcada la circunferencia, se marca el centro y se colocan varillas de separación en cada cambio de color para separar los sectores. También se podrían marcar las frecuencias directamente sobre una tira en lugar de realizar el gráfico de barras y recortar. En la figura 14 queda reflejado el procedimiento.

Una vez comentadas algunas de las dificultades con las que se encuentran frecuentemente los alumnos, podemos comentar que las aportaciones de los compañeros son francamente valiosas a la hora de completar sus gráficos.

Un paso más en el camino, es la generalización de las características de los gráficos; es decir, se pretende que una vez analizados los gráficos se pueda obtener un guión, esquema, mapa conceptual…, que deberán tener en cuenta a la hora de elaborar cualquier gráfico.

Figura 13. Buscando el centro y marcando los sectores con material

Así, se les pide: ¿Cómo debe ser una buena representación gráfica? ¿Qué características debe tener? El consenso alcanzado por un grupo en concreto se puede ver en la figura 15.

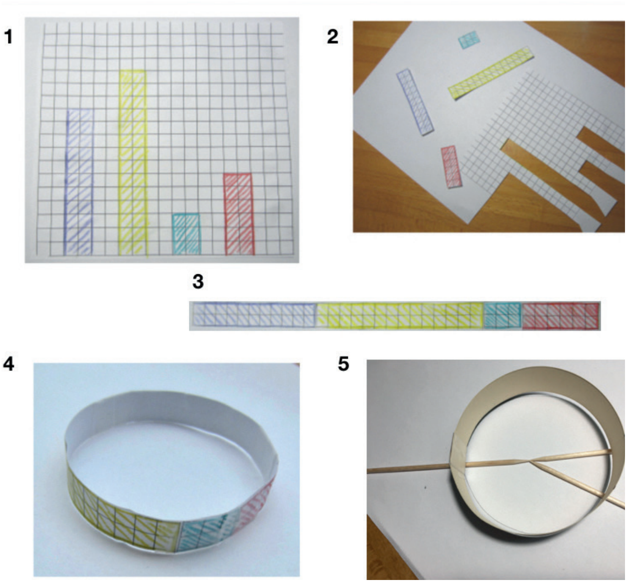


Figura 14. ¿Cómo transformar un gráfico de barras en uno de sectores?

Interpretación de gráficos

Si como decíamos al principio del artículo, nuestra hipótesis de que la lectura o interpretación de gráficos es más fácil que la elaboración de los mismos, ¿podemos ofrecer gráficos para interpretar que sean más complejos que los gráficos que los alumnos son capaces de elaborar?

Según diversos autores (Curcio, 1987) podemos hablar de tres niveles de lectura de gráficos estadísticos que podrían realizar los alumnos:

- —Leer los datos: se les pediría que localizaran la variable, una frecuencia en concreto…
- —Leer dentro de los datos: se les propondría comparar datos, detectar la moda, calcular la mediana…
- —Leer más allá de los datos: deberían ser capaces de predecir un suceso posterior o incluso de formular conclusiones.

Por ello, intentamos en las actividades que se exponen a continuación incluir preguntas que abarquen distintos niveles de lectura.

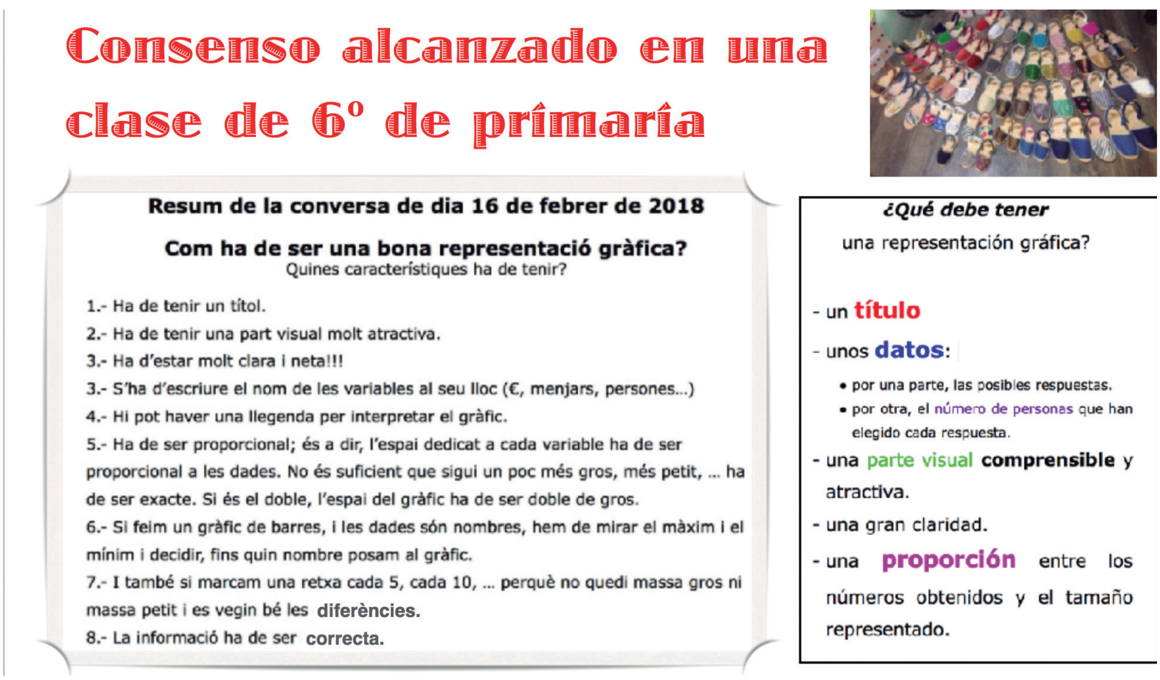


Figura 15. Conclusiones: ¿Cómo debe ser una buena representación gráfica?

Durante el confinamiento del año 2020 los alumnos de 4.º, 5.º y 6.º de primaria respondieron a unas preguntas respecto a la alimentación, la actividad física y la gestión del tiempo que estaban llevando a cabo en esos días.

A continuación compartimos con todas las clases los resultados en forma de gráficos de sectores y les planteamos preguntas sobre ellos.

Partiendo del gráfico de la figura 16 y de otros similares con cuestiones distintas, les preguntamos:

- —¿Coinciden los resultados con los que habías predicho la semana anterior o te han sorprendido?
- —¿Cuáles te han llamado más la atención?
- —¿Qué porcentaje esperabas y se ha cumplido?
- —¿En qué aspecto formas parte de la mayoría? ¿Qué porcentaje representa? ¿Y de la minoría?
- —¿Cuál es la moda?
- —¿Cuántas personas como mínimo han realizado la misma actividad física que antes del confinamiento?
- —¿Qué opinas del hecho de que haya un 28% de alumnos más sedentarios que antes del confinamiento?

La mayoría de los alumnos pudieron responder sin problemas.

Incluso fueron críticos con el gráfico de la figura 17, ya que argumentaron que no se veían bien todos los resultados, que tan solo podían deducir cuáles eran las cuatro actividades más practicadas, ya que el resto no se veía bien.

Así podemos afirmar que, de alguna manera, intuyeron que el gráfico de sectores…, ¡no es adecuado para representar datos de muchas variables! Lo recomendable para este tipo de gráfico es manejar dos o incluso tres variables, preferentemente con valores dispares.

Vistos los resultados, pensamos que en adelante se podrían presentar gráficos más difíciles de interpretar.

En una nueva ocasión, les invitamos a consultar la página del IBestat-*Institut d' estadística de les Illes Balears*-con gráficos relacionados con el territorio, población, turismo y economía.

¿Qué otros gráficos podríamos haber elegido nosotros con más complejidad? Depende del tipo de variables representadas. Tal vez un cuadro como el de la figura 18 pueda ayudarnos a reflexionar antes de elegir.

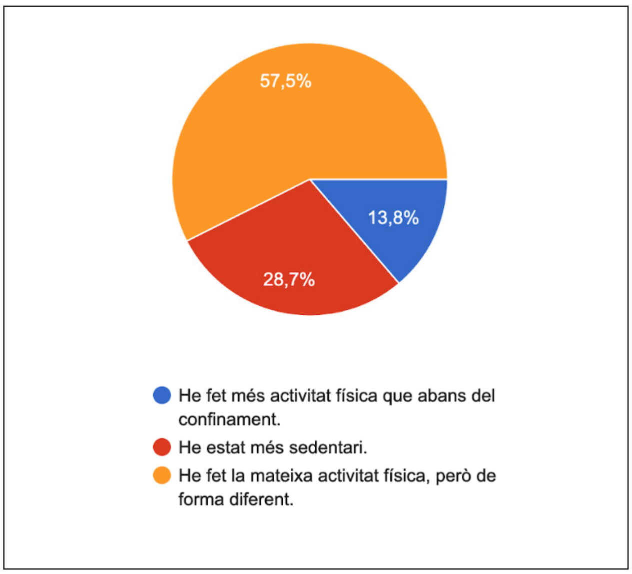


Figura 16. Actividad física llevada a cabo durante el confinamiento

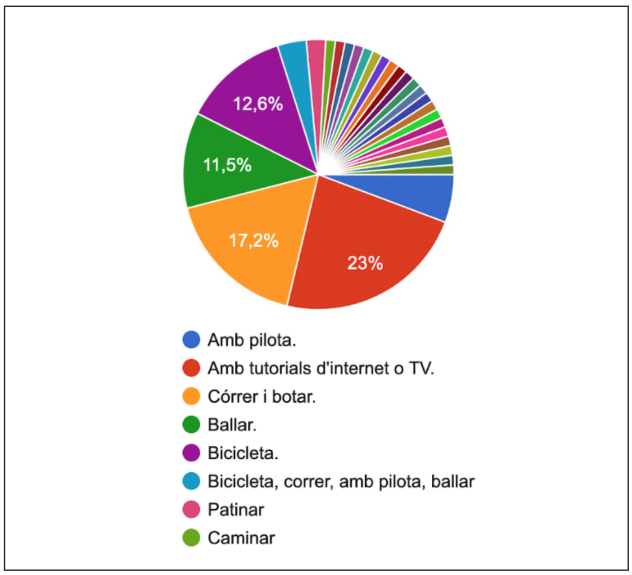


Figura 17. Representación no adecuada ¿Qué tipo de actividad física has realizado durante el confinamiento?

Por otra parte, creemos que es importante ofrecer ejemplos reales de gráficos que aparecen en diferentes medios con información presentada de tal manera que puedan inducir a error o que no ofrezcan toda la información que realmente necesitamos porque un gráfico… ¡No siempre es lo que parece! Podemos generar un debate en el aula para reflexionar sobre ello.

EN EL SIGUIENTE EJEMPLO PODEMOS ANALIZAR EL HECHO DE NO SITUAR EL ORIGEN DE LA ESCALA VERTICAL EN EL CERO

En la figura 19 replicamos un gráfico de Tele Madrid donde comparan las inversiones previstas para tres comunidades. El eje horizontal no comienza en el cero sino en los 1 600 millones, con ello se consigue dar la sensación de que la cantidad recibida en Madrid parezca menor de lo que es en realidad.

En la figura 20 vemos cómo sería el gráfico si situásemos el eje horizontal en el cero. Preguntamos a los alumnos qué conclusiones pueden extraer.

	Variables cualitativas		Variables cuantitativas		Más de una variable
	Nominales o categóricas	Ordinales	Discretas	Continuas	
Barras sencillo					
Barras agrupado o apilado					
Histograma/ o de frecuencias					
De puntos					
Poligonales					
De sectores					
Pictogramas					
De tallo y hojas					

Figura 18. Cuadro para facilitar la elección de gráficos en base al tipo de variables

Figura 19. Gráfico cuyo eje de ordenadas no especifica en qué valor comienza

LOS GRÁFICOS NO DAN INFORMACIÓN COMPLETA DE LA REALIDAD

Presentamos el siguiente gráfico en la figura 21 sobre el salario medio de los españoles.

Previamente les pedimos que busquen información en la red sobre el sueldo anual de diferentes trabajos y lo anoten. Les preguntamos qué creen que quiere decir el salario medio, si creen que es lo que cobra la

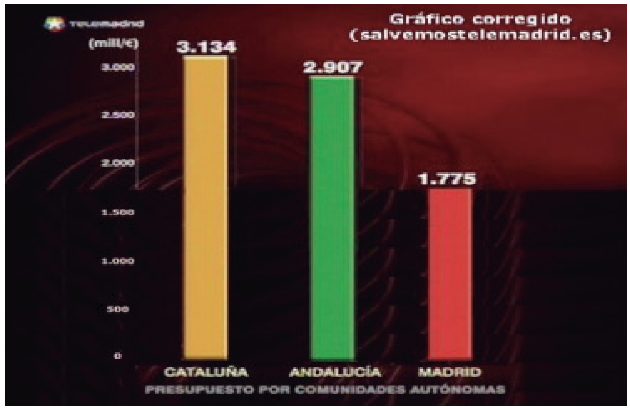


Figura 20. El mismo gráfico con el eje de ordenadas comenzando en el 0

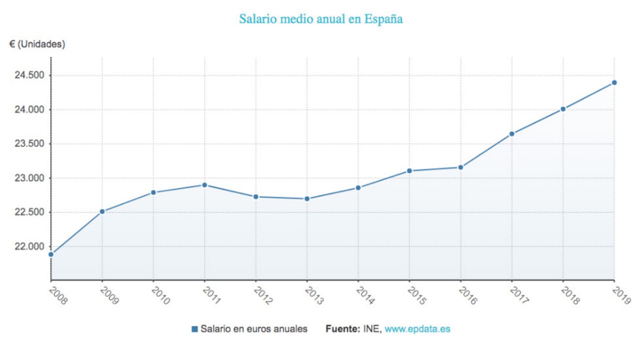


Figura 21. Salario medio anual

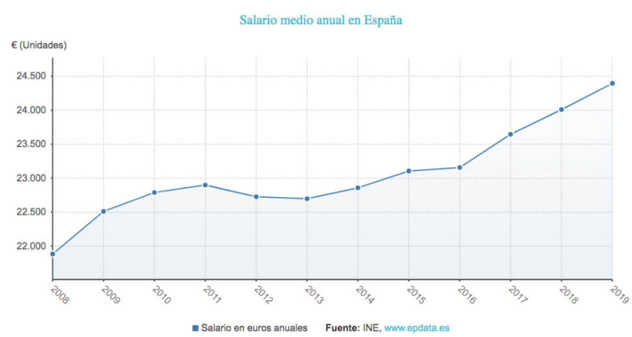


Figura 22. Salario medio, mediano y modal

mayoría de ciudadanos, si el salario que han apuntado está muy cerca o no del salario medio, ¿por qué podemos encontrar tantas diferencias?

Seguidamente presentaremos la anécdota del texto «El engañoso término medio» del libro *¡Ajá ! Paradojas que te hacen pensar,* de Martin Gardner.

Una vez leído el texto podemos preguntar a los alumnos qué datos creen que necesitaríamos para tener una visión más cercana a la realidad.

> Productos Artefacto (PRODILUGIO SA) tiene una fábrica de super artefactos.
>
> La dirección de la empresa está a cargo del sr. Artefacto, su hermano y seis parientes. La fuerza laboral consiste en cinco encargados y diez operarios. Los negocios van bien, y la fábrica necesita un operario más.
>
> El señor Artefacto está entrevistando a Félix, candidato al puesto.
>
> —Señor Artefacto: Aquí pagamos muy bien. El salario medio es de 600€ semanales. Durante el período de formación sólo cobrará 150€, pero pronto le subiremos el sueldo.
>
> Pasados unos días, Félix quiso ver al jefe.
>
> —Félix: ¡Usted me ha engañado! He hablado con los demás operarios y ninguno gana más de 200€ a la semana. ¿Cómo puede ser de 600€ el salario medio?
>
> —Señor Artefacto: Caray , Félix, no se excite. El salario medio es de 600€. Se lo demostraré.
>
> He aquí la nómina semanal. Yo gano 4800€ mi hermano 2000€ mis seis parientes sacan 500 cada uno, los cinco encargados, 400€ cada uno, y los diez operarios, 200€ cada uno. El total semanal es de 13800€ para 23 personas. ¿Me equivoco?
>
> —Félix: Bien, bueno! Tiene usted razón. La media es de 600€ semanales. Pero aún así me ha engañado.
>
> —Señor Artefacto: No estoy de acuerdo. Lo que ocurre es que usted no ha comprendido nada. Pude haber ido diciendo los salarios por orden, el salario medio sería entonces de 400€. Pero esto no es la media sino la mediana.
>
> —Félix: ¿Y qué hacen aquí los 200€?
>
> —Señor Artefacto: Esto se llama moda. Es el salario ganado por el mayor número de personas. Chico, su problema es que no distingue entre media, mediana y moda.
>
> —Félix: Bien, ahora ya sé la diferencia. Y ... ¡me despido!

Al finalizar el debate podríamos presentar los siguientes gráficos de donde podemos extraer la siguiente información: En 2019, los datos más recientes, el sueldo medio anual por trabajador fue de 24395 euros, el salario mediano fue de 20351 euros y el sueldo más común o modal fue de 18490 euros (un 32% más bajo que el medio).

Después de realizar la observación de los tres gráficos de las figuras 21, 22 y 23, podremos analizar si los que se ofrecen habitualmente en los medios son los que nos dan una información más completa y más cercana a la realidad.

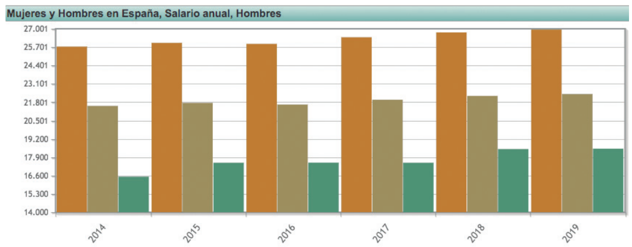


Figura 23. Comparativa del salario anual en hombres y mujeres

REPRESENTACIONES NO PROPORCIONALES

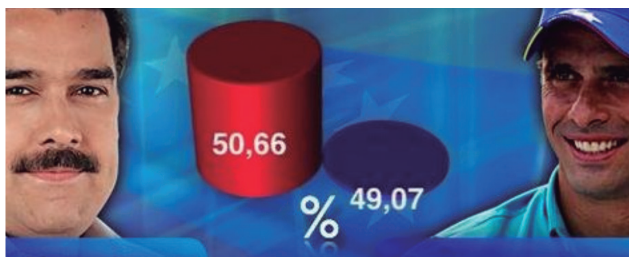


Figura 24. Representación no proporcional de unos resultados electorales

¿Qué observamos?

¿Qué intención tiene representar los datos de esta manera?

¿Cómo debería de ser el gráfico?

Conclusiones

Hemos podido observar en clase que los alumnos, en general, tienen más dificultades en elaborar gráficos que en interpretarlos

Por ello, es interesante presentar gráficos de mayor complejidad para interpretar, que los que se proponen para que ellos elaboren.

También hemos observado que hay tipos de gráficos más adecuados que otros para un determinado tipo de información y nuestros alumnos han podido constatar que son una herramienta muy útil y que según el formato de gráfico utilizado se puede transmitir una mayor o menor cantidad de información. Consecuentemente deberíamos proponer una buena diversidad de gráficos a lo largo de los años.

En la vida cotidiana nos encontramos más a menudo en situación de analizar e interpretar gráficos que de representarlos. Ante tal avalancha de gráficos es importante saber que no siempre están bien elaborados y que muchas veces pueden ser malinterpretados al presentarse de modo engañoso o sesgado.

Creemos que es importante trabajar los dos aspectos, tanto la elaboración como la interpretación de gráficos y dejar que sean ellos los que pregunten, analicen y comenten, y puedan así convertirse en ciudadanos críticos capaces de interpretar correctamente toda la información que se les presente.

Es fenomenal ver la expresión de un alumno que comprende o encuentra de pronto un error, una omisión… y descubre cómo subsanarlo, a partir de la crítica constructiva de un compañero o de un maestro.

Referencias bibliográficas

CESIRE. Àmbit Matemàtic (2013), *Algunes idees sobre estadística*, <https://sites.google.com/xtec.cat/cesire-matematiques-campanyes/estad%C3%ADstica/algunes-idees-sobre-estad%C3%ADstica?authuser=0&pli=1> [Consultado el 28 de enero de 2023.].

— (2020), *Errors als mitjans*, <https://sites.google.com/xtec.cat/cesire-matematiques-campanyes/estad%C3%ADstica/errors-als-mitjans?authuser=0> [Consultado el 28 de enero de 2023.].

Díaz-Levicoy, D., P. Arteaga y C. Batanero (2015), *Gráficos estadísticos y niveles de lectura propuestos en textos chilenos de Educación Primaria, Universidad de Granada*, <http://www.ugr.es/~batanero/documentos/SEIEM-Danilo.pdf> [Consultado el 28 de enero de 2023.].

Epdata (2020), *Salario medio anual el España*, <https://www.epdata.es/salario-medio-espana/fe92dab9-5ad3-4d64-84eb-2353464a15dc/espana/106> [Consultado el 28 de enero de 2023.].

Institut d'Estadística de les Illes Balears (IBESTAT), (2021), *Estadísticas de Menorca*, <https://ibestat.caib.es/ibestat/estadistiques/per-territori/2/Menorca> [Consultado el 28 de enero de 2023.].

Instituto Nacional de Estadística (2020), *Salarios, ingresos y cohesión social*, <https://www.ine.es/jaxiT3/Datos.htm?t=10882#!tabs-grafico> [Consultado el 28 de enero de 2023.].

Newtral (2022), *El sueldo medio en España es un 30% más alto que el salario más común según el INE*, <https://www.newtral.es/sueldo-medio-espana-evolucion/20220427/> [Consultado el 28 de enero de 2023.].

Aina Maria González Juan
CEIP Marian Aguiló, Palma
<ainamgonzalez@gmail.com>

Catalina Maria Pizà Mut
Jubilada CEIP Mestre Colom, Bunyola (Baleares)
<ppizam@gmail.com>

MATEMÁTICAS A UN CLIC

Buscando números …

José Luis Muñoz Casado

Suma+ núm. 103
pp. 117-122
Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2022 y aceptado en enero de 2023

La nueva ley de educación, la LOMLOE, puede representar una buena oportunidad para repensar nuestras actividades, ya que la estructura curricular que se ha desarrollado (competencias clave, perfil de salida, competencias específicas, criterios de evaluación, saberes básicos y situaciones de aprendizaje) va encaminada hacia el desarrollo de competencias, particularmente en Matemáticas, encaminada a la resolución de problemas, al razonamiento y la demostración, a establecer conexiones, a la comunicación y a la representación (NCTM, 2020).

Echando la vista atrás es probable que todos, en algún momento de nuestra vida profesional, hayamos realizado actividades que fomentan el desarrollo de los procesos mencionados antes, estoy convencido de ello, simplemente tenemos que revisitar nuestra labor docente desde el prisma de los procesos matemáticos.

Hace bastante tiempo coincidí Antonio Roldán, profesor de Matemáticas en el IES Salvador Dalí de Madrid, de hecho, yo aterricé en el Dalí porque él se jubiló. Ya se sabe lo que pasa cuando uno se jubila, durante un tiempo aún sigues asistiendo a las comidas y cenas del departamento; justo ahí lo conocí.

La labor que realizó Antonio Roldan en el Dalí junto con Antonio Pérez y demás compañeros del departamento fue grandiosa, dejaron una gran cantidad de trabajo, de ideas, de proyectos, de software, etc. Un trabajo que fue recompensado por la Comunidad de Madrid como Proyecto de innovación allá por el año 2000 (D. M. I. S. Dalí).

Más tarde tuve la suerte de estar en el acto del premio Gonzalo Sánchez Vázquez que otorga la FESPM. En las XII JAEM, Antonio Roldán, recibió el premio GSV a toda una vida dedicada a la enseñanza de las Matemáticas.

El trabajo de Antonio Roldán es inmenso y una parte se puede ver en su web <hojamat.es> (Roldán, 2000) y merece la pena echar un vistazo.

Hojamat.es

Hojamat es una web dedicada al uso de la hoja de cálculo, concretamente a como enseñar matemáticas con ella. Y aunque parezca increíble da para mucho. Antonio Roldán es un especialista en añadir funcionalidades matemáticas a la hoja de cálculo (figura 1).

En las múltiples herramientas que tiene para trabajar con la hoja de cálculo, siempre me ha fascinado el Buscador de números. Una hoja de cálculo fruto de todo el conocimiento de programación de Antonio y cuyo objetivo es encontrar números naturales con ciertas propiedades.

Figura 1. *Hojamat.es*

Figura 2. Buscador de números naturales

Buscador de números

El buscador de números es una hoja de cálculo con «vitaminas» matemáticas. Es una herramienta muy adecuada para verificar conjeturas, obtener recuentos, investigar propiedades, descubrir sucesiones, … La figura 2 muestra un ejemplo.

Pequeño manual

La idea del buscador de números es simple, introducimos los límites entre los que queremos buscar números (figura 3).

A continuación introducimos alguna propiedad que caracterice a los números que queramos buscar. Podemos usar el botón Borrar condiciones para limpiar todas las condiciones que hayamos puesto (figura 4).

Por último, pulsamos el botón Buscar naturales. La hoja cálculo recorrerá todos los números entre los límites establecidos buscando aquellos que cumplan con la propiedad o propiedades pedidas (figura 5).

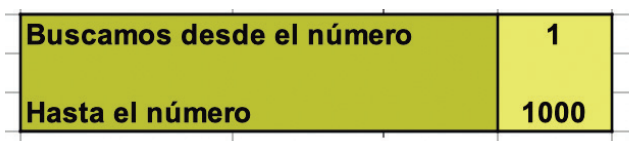


Figura 3. Búsqueda entre 1 y 1000

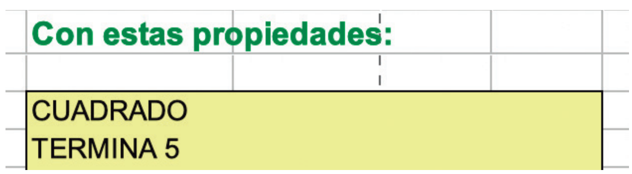


Figura 4. Números cuadrados que terminen en 5

Figura 5. Resultado de la búsqueda

Cada vez que cambiemos un valor en una celda es necesario pulsar la tecla intro para que admita el valor.

Como información complementaria, la hoja de cálculo proporciona el número de números encontrados y su suma (figura 6).

De esta forma, hemos buscado en el ejemplo los números cuadrados que terminan en 5. La hoja cálculo nos dice cuántos son, los enumera y nos proporciona su suma. La potencia de esta hoja de cálculo está en la cantidad de funciones que se han programado.

Los comandos que se pueden usar son los que muestra la tabla 1.
Veamos algún ejemplo:

- —¿Cuántos semiprimos hay entre los 100 primeros números naturales? R.: 34 ¿Cuáles?
- —¿Cuántos números existen entre 1 y 1000 en cuya descomposición no haya factores al cuadrado? R.: 608 ¿Y que no sean primos? R.: 440.
- —Otra función interesante que posee son las condiciones booleanas, podemos usar la palabra NO para pedir que se no cumpla una condición, siempre y cuando la propiedad que usemos sea excluyente, por ejemplo, NO PRIMO, NO PAR.
- —¿Existen más números semiprimos pares o impares entre 1 y 100?
- —¿Existen más números deficientes o abundantes entre 1 y 100?

Encontrados	Su suma es
3	875

Figura 6. Resumen de la búsqueda

Comando	Descripción
PAR	Busca números pares
PRIMO	Busca números primos.
CUADRADO	Busca números cuadrados
TRIANGULAR	Busca números triangulares
CAPICUA	Busca números capicúa
PERFECTO	Busca números perfectos
ABUNDANTE	Busca números abundantes
DEFICIENTE	Busca números deficientes.
SEMIPRIMO	Busca números semiprimos.
POTENCIA	Busca números que son potencia de otro.
LIBRE DE CUADRADOS	Busca números en cuya descomposición factorial no haya cuadrados.

Tabla 1

En la última cuestión entre en juego la ventana detalles pues nos proporciona la suma de los divisores propios del número deficiente (figura 7).

También tiene comandos que admiten parámetros (tabla 2).

Resultado de la búsqueda — Fin

Núm.	Números	Detalles
1	3	3> 1
2	4	4> 3
3	5	5> 1
4	7	7> 1
5	8	8> 7
6	9	9> 4
7	10	10> 8
8	11	11> 1

Buscamos desde el número	1
Hasta el número	100
Con estas propiedades:	
DEFICIENTE	

Figura 7 Detalle de números deficientes

Comando	Descripción	Sintaxis
MULTIPLO	Busca múltiplos de varios números.	MULTIPLO 12 34 5
DIVISOR	Busca divisores de varios números.	DIVISOR 12 36
TERMINA	Busca números que terminan en el valor escrito.	TERMINA 12
COPRIMO	Busca números coprimos con los que se escriban	COPRIMO 12
LINEAL	Busca números con el patrón lineal $y=ax+b$	LINEAL A B
CUADRATICO	Busca números con el patrón cuadrática $y=ax^2+bx+c$	CUADRATICO A B C
SUMA	Busca números suma de números especiales: cuadrados, triangulares, primos	SUMA C C T
CONGRUENTE	Busca números congruentes con un resto R y un módulo M	CONGRUENTE R M
POLIGONAL	Busca números poligonales según el número de lados del polígono.	POLIGONAL L

Tabla 2

Nuestro rango de actividades y conjeturas que podemos realizar se amplía.

- —¿Cuál es la terminación más frecuente de los números primos de 3 cifras?
- —¿Cómo calcularías el máximo común divisor con el comando DIVISOR?
- —¿Qué números de tres cifras dan de resto 3 al dividirlo entre 17?

También tenemos la opción de EVALUAR una función o cálculo con el número encontrado. Podemos encontrar los números triangulares y evaluar su expresión algebraica (figura 8).

La información que proporciona el comanda EVALUAR aparecerá en la columna detalles y además podremos ver su suma en la casilla Suma.

Por último, podemos usar una lista de funciones especiales que se han añadido a la hoja de cálculo, tablas 3 y 4.

En todas las funciones se puede cambiar N por una función de N y es necesario usar la palabra ES delante.

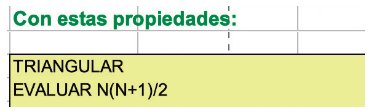
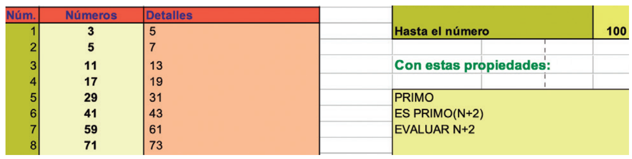


Figura 8. Los números triangulares son de la n(n+1)/2



Núm.	Números	Detalles
1	3	5
2	5	7
3	11	13
4	17	19
5	29	31
6	41	43
7	59	61
8	71	73

Hasta el número	100
Con estas propiedades:	
PRIMO ES PRIMO(N+2) EVALUAR N+2	

Figura 9. Primos gemelos

Función	Descripción	Sintaxis
CIF	Devuelve la cifra del número actúal: CIF(1) las unidades, CIF(2) las decenas, etc.	CIF(k)
SUMACIF	Suma de las cifras de la exp N	SUMCIF(N)
PRIMO	Devuelve 1 si la expresión en N es primo	PRIMO(N)
PAR	Devuelve 1 si la expresión en N es par	PAR (N)
ENTERO	Devuelve 1 si la expresión en N es entero	ENTERO(N)
CAPICUA	Similar a las anteriores	CAPICUA(N)
CUADRADO	Similar a las anteriores	CUADRADO(N)
TRIANGULAR	Similar a las anteriores	TRIANGULAR(N)
EULER	Calcula el número de coprimos con N	EULER(N)
OBLONGO	Devuelve 1 si N es del tipo n * (n+1)	OBLONGO(N)
CUBO	Devuelve 1 si N es del tipo n^3	CUBO(N)
MOEBIUS	Devuelve la función de Moebius de N	MOEBIUS(N)
PRIMPROX	Encuentra el primer primo mayor que N	PRIMPROX(N)

Tabla 3

Función	Descripción	Sintaxis
PRIMHASTA	Cuenta los primos menores o iguales que N.	PRIMHASTA(N)
NUMDIV	Cuenta los divisores propios de N	NUMDIV(N)
SUMDIV	Suma los divisores propios de N	SUMDIV(N)
MAYORDIV	Encuentra el mayor divisor propio del número	MAYORDIV(N)
OMEGA	Cuenta los divisores primos sin sus multiplicidades	OMEGA(N)
BIGOMEGA	Cuenta los divisores primos con sus multiplicidades	BIOMEGA(N)
SOPF	Suma todos los divisores primos sin repetición.	SOPF(N)
SOPFR	Suma todos los divisores primos con repetición.	SOPFR(N)
SUMDIVPRIM	Suma los divisores primos sin tener en cuenta la multiplicidad	SUMDIVPRIM(N)
PARTECUAD	Mayor divisor cuadrado de N	PARTECUAD(N)

Tabla 4

Todas las funciones las puedes encontrar en el manual que acompaña la hoja de cálculo < http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/buscador2>.

Algunas actividades

INVESTIGA LA SIGUIENTE CONJETURA

> Todo número par mayor que 2 puede escribirse como suma de dos números primos.
>
> Christian Goldbach (1742)

Con nuestro buscador podemos realizar la comprobación numérica con dos comandos:

— PAR
— SUMA P P

TESTEANDO UN TEOREMA

> Sea a,d∈ℕ tal que el máximo común divisor mcd(a,d)=1 entonces la progresión aritmética $a_n = a + n \cdot d$ contiene infinitos números primos.
>
> Dirichlet

Plantea algún ejemplo con el buscador de números.

— LINEAL 10 7
— EVALUAR PRIMO(N)

Y observar en la casilla encontrados si aparecen resultados.

MIRA QUE PROPIEDAD TAN CURIOSA

> **Cualquier número primo de la forma $4k+1$ se descompone en suma de cuadrados.**

Comprueba con el buscador de números.

— PRIMO
— LINEAL 4 1
— SUMA C C

COSAS DE NÚMEROS CAPICÚA

¿Qué números capicúas son potencias de otros?

— CAPICUA
— POTENCIA
— EVALUAR FACTORES

CUESTIONES RÁPIDAS

— ¿Entre los 100 primeros números existen más números con factores cuadrados que sin factores cuadrados?
— ¿Cuánto suman los múltiplos de 17 de 4 cifras?
— ¿Cuál es la terminación más abundante de los números primos de 4 cifras?
— ¿Hay algún número capicúa de cuatro cifras que sea primo?

BALAS DE CAÑÓN

También se puede usar la hoja de cálculo para encontrar números dentro del contexto de un problema, por ejemplo, las balas de cañón (Conejo y Muñoz, 2017).

> Un capitán pirata muy ordenado y con vocación matemática tenía apiladas las balas de los cañones de su barco formando una pirámide, como las naranjas en los mercados. No siempre formaba pirámides de base cuadrada.
>
> Tras una gran tormenta las balas se mojaron y mandó que las extendiesen para secarlas. Tras colocar la última observó que formaban un cuadrado perfecto.
>
> Había más de cuatro balas, por supuesto, como en todo barco pirata de categoría.

¿Podrías investigar cuántas balas había? ¿Cómo era la base de la pirámide?, ¿cuántos pisos tenía?

Revisitando esta actividad podríamos trabajar diversas competencias como las relacionadas con la resolución de problemas, con el razonamiento e incluso con el pensamiento computacional.

Figura 10. Balas de cañón apiladas

Una vez comprendido el enunciado, el alumno se lanza a la búsqueda de las propiedades que definen los números que forman pirámides y los números que forman cuadrados perfectos.

Aquí nuestro buscador de números entra en acción. Si la base es cuadrada, los números que forman una pirámide son:

$$1, 5, 14, 30, 55, \ldots$$

Usando la enciclopedia de secuencias de números enteros (Sloane) descubrimos que esos números siguen el termino general:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

Podemos escribir en el buscador de números: EVALUAR N*(N+1)*(2*N+1)/6

De esta forma obtenemos el número de bolas de cañón con las que podemos formar pirámides de base cuadrada.

Por otro lado, tenemos el comando CUADRADO, que nos proporciona los números que son cuadrados.

Entre esas dos listas, esta nuestra solución. Las respuestas de los alumnos fueron diversas:

- —Enfrentaron las dos listas en una hoja auxiliar.
  - Primero la lista de los cuadrados.
    CUADRADO
  - Segundo la lista de los números piramidales.
    EVALUAR N*(N+1)*(2*N+1)/6
- —Buscaron los números pirámides cuadrado y extrajeron su raíz.
  EVALUAR RAIZ(N*(N+1)*(2*N+1)/6)
- —Otros usaron la función entero.
  EVALUAR ENTERO(RAIZ
  (N*(N+1)*(2*N+1)/6))

Algunos alumnos plantearon la posibilidad de pirámides triangulares y otros intentaron la generalización a pirámides de una base cualquiera.

Conclusiones

El correcto uso de herramientas tecnológicas en la enseñanza de las matemáticas contribuye a mejorar su aprendizaje, no solamente a nivel de contenidos sino también a nivel de procedimientos y actitudes.

Herramientas como el buscador de números promueven la interacción y la participación en la construcción de su propio aprendizaje.

Poder probar conjeturas, conocer teoremas, encontrar números con propiedades determinadas, etc., empodera al alumno para realizar sus propias preguntas y plantear estrategias de demostraciones en busca de la respuesta.

Referencias bibliográficas

National Council of Teachers of Mathematics (2020), *Principios y estándares para la educación matemática,* SAEM Thales, Sevilla.

Departamento de Matemáticas del I. S. Dalí, Proyecto de innovación de la CAM, <http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/webdali2004/proyectoinnovacion.htm>.

<http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/buscador2.pdf, «Hojamat.es» 2000. [En línea]. [Último acceso: enero de 2023.].

Roldán, A. (2000), *Hojamat,* <http://hojamat.es/www.hojamat.es>.

Sloane, N. J. A., *The on-line encyclopedia of integer sequences,* <https://oeis.org/> [Consultado el 3 de febrero de 2023.].

José Luis Muñoz Casado
IES Salvador Dalí, Madrid
<jose.munoz.casado@gmail.com>

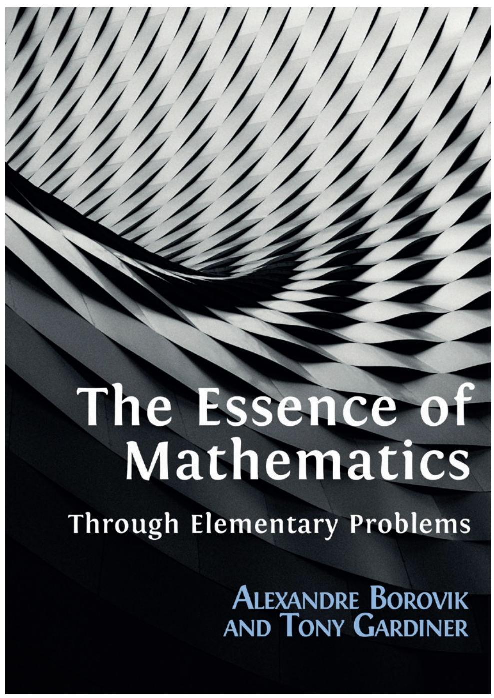
VERSIÓN INGLESA

La esencia de las matemáticas

Maite Aranés Maza

SUMA+ núm. 103
pp. 123-127
Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2022 y aceptado en enero de 2023

El libro que comento en esta ocasión continúa con la temática de problemas/actividades para el aula de las últimas reseñas, pero desde una perspectiva distinta. La premisa de *The Essence of Mathematics* es precisamente lo que dice su título: la esencia de las matemáticas se aprecia resolviendo problemas. Los autores por tanto nos proponen una colección de 270 problemas de matemáticas elementales, que consideran que serán de particular interés tanto para alumnado interesado en continuar con estudios matemáticos a nivel avanzado como para profesorado de secundaria.



Alexandre Borovik y Tony Gardiner, 374 páginas (2019)

The Essence of Mathematics está publicado bajo una licencia creativecommons, y puede descargarse o leerse online en la correspondiente página web de la editorial Open Books Publishers. Con respecto a los autores, Tony Gardiner es un matemático británico conocido principalmente por fundar el United Kingdom Mathematics Trust, organización sin ánimo de lucro que gestiona y organiza competiciones matemáticas a nivel nacional en el Reino Unido, incluyendo olimpiadas matemáticas, Canguro matemático y diversos «desafíos matemáticos» (UKMT Challenges). Además Gardiner es autor de libros de problemas y desafíos matemáticos, así como de artículos y textos sobre educación matemática en Reino Unido. Alexandre Borovik es un matemático de origen ruso residente en Gran Bretaña y actualmente profesor emérito de la Universidad de Manchester.

Gardiner y Borovik comienzan el libro comentando las dificultades con las que se encuentra un principiante que intenta averiguar qué son las matemáticas. Según ellos, puede encontrarse una respuesta en el campo de la popularización de las matemáticas. Otra posibilidad, en la que se puede incluir su texto, es pedir al lector que tome un papel activo. Su idea es que a través de la resolución de problemas o conjuntos de problemas de carácter elemental se puede experimentar de forma personal lo que es hacer matemáticas. Con este objetivo han escogido problemas que en su opinión ejemplifican algún aspecto universal de las matemáticas.

> Our goal in this book is universal (namely to illustrate the idea that a suitably selected elementary microcosm can capture something of the essence of mathematics): hence the problems have all been chosen because we believe they convey something universal in a relatively elementary setting. But the particular set of problems chosen to illustrate the central goal is personal.

Con respecto a la estructura del libro, empieza con tres capítulos más básicos o funcionales, «Habilidades Mentales», «Aritmética» y «Problemas», que según Gardiner y Borovik persiguen dos objetivos simultáneamente. Primero servir como introducción a formas de pensar matemáticas y herramientas básicas necesarias en el resto del libro, y el segundo, demostrar que la «esencia de las matemáticas» se puede apreciar a niveles elementales. Los otros tres capítulos, «Álgebra», «Geometría» e «Infinito: recursividad, inducción y descenso infinito», son más sofisticados. En cualquier caso los conocimientos previos necesarios para abordar los problemas propuestos en el texto son las matemáticas de la educación secundaria, añadiendo algunos elementos de trigonometría y números complejos.

Otra característica del libro es la falta de comentario en el texto principal. Después de dos o tres páginas de introducción, prácticamente todos los capítulos consisten básicamente en una lista de problemas, con algún párrafo explicativo o alguna definición ocasional. En opinión de los autores es más beneficioso haber intentado resolver o haber resuelto el problema antes de encontrarnos con aclaraciones o explicaciones. Por lo tanto es en la sección de soluciones de cada capítulo donde vamos a encontrar indicaciones sobre conexiones entre distintos problemas, y la mayoría de comentarios acerca de su importancia, su desarrollo histórico, etc. Intentaré ahora dar una idea del tipo de problemas que se ofrecen en cada capítulo, aunque por razones obvias esto no va a ilustrar demasiado bien la filosofía del libro.

El objetivo del primer capítulo, «Mental Skills», es destacar ciertos contenidos, técnicas e ideas en las matemáticas de secundaria. Para que no pensemos que las habilidades mentales se refieren solo a contenidos elementales, los autores incluyen algunos problemas que requieren matemáticas más avanzadas como trigonometría o números complejos. Gardiner y Borovik nos advierten además que, aunque necesitaremos lápiz y papel, el enfoque del capítulo es hacia aspectos que deberíamos tener memorizados (o interiorizados), o ser capaces de calcular mentalmente, o percibir de forma prácticamente inmediata. Los primeros problemas conllevan el ejercicio de cálculo mental con cuadrados, cubos, potencias de 2, números primos, radicales, múltiplos y divisores, algunos ejercicios clásicos de proporcionalidad (la proporción DIN A), etc (figura 1). Hacia la mitad del capítulo el tono de los problemas cambia un poco. A partir de aquí, según los autores, la idea de «habilidades mentales» se refiere a formas de trabajar más que a realizar cálculo mental (figura 2). Otra característica importante de este capítulo son las conexiones que encontramos entre los diversos problemas propuestos. Claro que este aspecto solo puede apreciarse realizando el trabajo con lápiz y papel que nos piden Gardiner y Borovik.

Problem 17 The 4 by 4 "multiplication table" below is completely familiar.

1	2	3	4
2	4	6	8
3	6	9	12
4	8	12	16

What is the total of all the numbers in the 4 by 4 square? How should one write this answer in a way that makes the total obvious? △

Figura 1. Problema del apartado «Estructura en aritmética» del capítulo 1

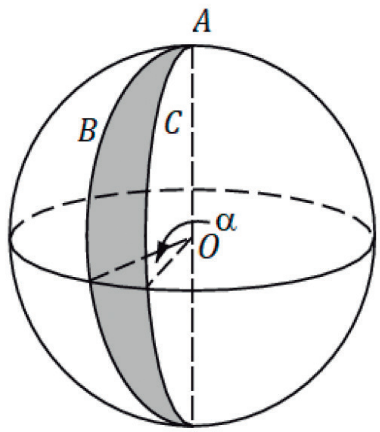


Figura 2. Como aplicación de la medida de ángulos en radianes, en el Problema 34 del Capítulo 1 se deduce la fórmula para calcular el área de un triángulo esférico en términos de sus ángulos

> The chapter is largely devoted to underlining the need for mastery of a repertoire of instantly available techniques, that can be used mentally, quickly, and flexibly to analyse less familiar problems at sight. But it also seeks to emphasise *connections*. Hence readers should be prepared to challenge their previous experience, in case it may have led to methods and results being perceived too narrowly.

En el capítulo 2, «Arithmetic», se tratan sobre todo aspectos estructurales de la aritmética, con alguna pequeña excursión algebraica. Encontramos cuestiones típicas sobre reglas de divisibilidad, estructura de operaciones aritméticas (figura 3), el sistema de numeración decimal o el sistema de numeración binario, y otros problemas menos habituales sobre números de Fibonacci y números triangulares. El capítulo termina con una introducción a la distribución de los números primos, siendo el último problema una aproximación al teorema de los números primos.

> The place of arithmetic in elementary mathematics can only be understood if one realises that, from upper primary school onwards, mathematics should no longer focus on more and more complicated calculations. Rather it moves beyond a set of procedures for grinding out answers, and should become a *structural laboratory*, where we gain insight into simple phenomena, and where we begin to appreciate how calculation can be managed, or tamed. The focus on structure leads in the main to matters which can be best expressed *algebraically.*

El capítulo 3, «Word Problems», es el más breve del libro, con una lista de tan solo 13 problemas. Como sugiere el mismo título, se trata de una pequeña colección de problemas clásicos (figura 4). Los autores sugieren que la resolución de este tipo de ejercicios juega un papel importante, aunque limitado, en el desarrollo de la habilidad de identificar estructuras matemáticas. El primer problema del capítulo sirve como perfecta introducción a estas ideas, pues se trata de una colección de veinte situaciones que representan el cálculo $3 - 1 = 2$.

Con esto se terminan los problemas «introductorios». En el capítulo 4, «Algebra», Gardiner y Borovik abordan una pequeña selección de ideas y conceptos del álgebra, que suponen que en sí mismos resultarán familiares para la mayoría de lectores. Lo que creen que quizás no nos resulte tan familiar es la perspectiva desde la que se enfocan estas ideas. Por ejemplo, el primer apartado del capítulo explora sistemas de ecuaciones en los que se puede utilizar algún razonamiento de tipo simétrico para simplificar su resolución. También en la sección sobre polinomios, raíces y factores, encontramos aspectos poco trabajados

Problem 75 Work out how to calculate the square root of any square given in *base* 2. △

Figura 3. Gardiner y Borovik analizan el algoritmo para calcular raíces cuadradas a mano en base 10, y comentan que en base 2 el algoritmo queda muy simplificado

Problem 89 A paddle-steamer takes five days to travel from St Louis to New Orleans, and takes seven days for the return journey. Assuming that the rate of flow of the current is constant, calculate how long it takes for a raft to drift from St Louis to New Orleans. △

Figura 4. Este problema se menciona también en el prefacio del libro en el aula, como la relación entre la factorización de ciertos polinomios y la búsqueda de números primos, o la relación entre diversas expresiones simétricas de las raíces de un polinomio cuadrático y sus coeficientes. En los apartados sobre números complejos y resolución de la ecuación cúbica los autores se desvían un poco del estilo «colección de problemas» del resto del libro. En este caso nos ofrecen un pequeño resumen histórico y algunas reflexiones sobre la relación entre ambas cuestiones, que se ilustran en los problemas propuestos (figura 5).

El capítulo 5, «Geometry», es el más extenso del libro y contiene además el doble de problemas que el resto de capítulos (90 problemas frente a unos 40 en cada uno de los otros). Según Gardiner y Borovik la geometría es la rama de las matemáticas elementales a través de la que resulta más fácil transmitir «la esencia» de la disciplina. Pero para conseguir este efecto el lector debe estar familiarizado con la idea de «demostración» y los elementos básicos del proceso deductivo. Afirman además que en la mayoría de ocasiones, la «esencia» contenida en un problema geométrico sólo va a poder experimentarse si se aprecia el problema dentro de una jerarquía lógica previamente definida, es decir, si contamos con una secuencia de propiedades, resultados y métodos que nos permiten ir deduciendo los distintos pasos que llevan a la solución. Por esta razón en el apartado «Euclidean Geometry: a brief summary» los autores ofrecen una posible formalización de la geometría escolar, de carácter semi-formal, que van desarrollando a través de los primeros 37 problemas del capítulo.

En el resto de apartados del capítulo 5 encontramos ocasionalmente algún resultado típico de la geometría que se estudia en nuestra educación secundaria (por ejemplo, deducir la fórmula para el área lateral de un cono o demostrar el teorema del coseno), pero la mayoría de aspectos tratados en los problemas no se trabajan habitualmente en las aulas (figura 6). En este sentido, los autores también hacen algunos comentarios sobre la enseñanza de la geometría en la educación secundaria. Opinan que las alternativas que se plantearon a partir de los años 60 (utilizar ideas de movimiento y transformación; concentrarse en vectores y álgebra lineal, etc.) no han resultado exitosas:

> And although each approach has its attractions, ***none*** *of the alternatives has succeeded in helping more students to visualise, to reason, and to calculate effectively in geometrical settings.*

Gardiner y Borovik creen que la respuesta es una combinación de geometría estática (tipo la geometría euclidiana tradicional) y de geometría analítica:

> Despite the lack of an accepted consensus, the experience of the last 50 years would seem to suggest that the most relevant framework for beginners at secondary level involves some combination of:
>
> • *static*, relatively traditional Euclidean geometry, and
>
> • Cartesian, or coordinate (analytic) geometry.

Con esto llegamos al último capítulo, «Infinity: recursion, induction and infinite descent», que definitivamente es el más técnico del libro. Aquí Gardiner y Borovik ofrecen introducciones y explicaciones más extensas de lo habitual dentro del texto principal, ya que se trata de un contenido que no suponen bien conocido para los lectores a los que se dirigen. La mayoría de problemas consisten en demostraciones (por inducción) de igualdades y desigualdades,

Problem 129 Divide 10 into two parts, whose product is 40.

Figura 5. Este problema, propuesto por Gardiner y Borovik en el apartado sobre números complejos del capítulo 4, aparece en el capítulo XXXVIII del *Ars Magna* (1545) de Girolamo Cardano

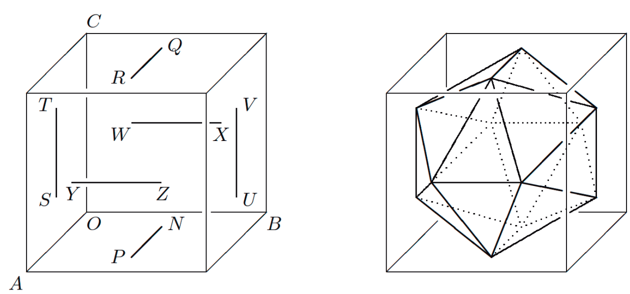


Figura 6. En el problema 189 se estudia una construcción del icosaedro regular utilizando coordenadas cartesianas

y en algunos casos nos guían hasta obtener resultados clásicos como la definición del número *e* o la divergencia de la serie armónica. También encontramos problemas menos típicos, por ejemplo sobre poliedros esféricos o árboles binarios. Concluyen el capítulo con una breve introducción al método de descenso infinito.

Dada la naturaleza del libro y los objetivos de los autores, éstos no ofrecen ningún tipo de conclusión o reflexión al final del texto. Lo único que encontramos es, al final de la sección de soluciones del capítulo 6, una cita al efecto de que es asunto del lector continuar su viaje matemático («Now do without me»). Personalmente me parece interesante la propuesta de Gardiner y Borovik, aunque me resulta imposible confirmar si consiguen o no su objetivo (entre otras cosas, aún no he terminado de resolver todos los ejercicios...). Los mismos autores nos advierten en el prefacio que, en condiciones ideales, una colección de problemas como esta debería de refinarse y mejorarse con tiempo y trabajo durante años.

> A problem sequence such as ours should ideally be distilled and refined over decades. However, the best is sometimes the enemy of the good [...] Hence, as a mild contribution to this process of rediscovering the essence of elementary mathematics, we risk this collection in its present form. And we encourage interested readers to take up pencil and paper, and to join us on this voyage of discovery through elementary mathematics.

En cualquier caso, como mínimo vamos a encontrar ideas que pueden ayudarnos a enfocar de forma distinta algunos de los contenidos que trabajamos habitualmente en el aula. Y por otro lado tenemos horas de diversión aseguradas resolviendo problemas interesantes. Así que por mi parte, lectura recomendada.

Maite Aranés Maza
IES de Villanueva de Gállego,
Villanueva de Gállego (Zaragoza)
<maite.aranes@gmail.com>

Servicio de Publicaciones de la FESPM

<publicaciones@fespm.es>

RESEÑA

Patrimoni i cultura matemàtica a les Illes Baleras

Miquel Albertí Palmer

SUMA+ núm. 103
pp. 129-131
Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2022 y aceptado en enero de 2023

Patrimoni i cultura matemàtica a les Illes Baleras es un libro de gran formato (22,7 cm × 28,6 cm), con tapa dura y cuidada y elegante edición en el que Josep Lluís Pol i Llompart desgrana elementos y fenómenos matemáticos vinculados al patrimonio y la cultura de las Islas Baleares. La obra se presenta en 50 capítulos, cada uno de ellos protagonizado por un mirada matemática a un aspecto de los entornos natural, geográfico, arquitectónico, laboral, textil, social… El desarrollo recuerda a E*l libro de la matemáticas*, de Clifford Pickover, pues cada tema se desarrolla a doble página. Una fotografía o composición ilustrativa ocupa la página par, mientras que el texto colma su vecina impar y se acompaña de un escueto recuadro de contenido asociado al tema. Los autores de esos recuadros son diversos y no se repiten a lo largo de los capítulos.

La redacción es en el catalán propio de la región y estilísticamente tiene un carácter periodístico. Apenas contiene gráficos o expresiones matemáticas simbólicas, lo que facilita la lectura por parte de personas ajenas al ámbito científico. Pese al texto llano el autor logra dirigir la atención del lector a una perspectiva matemática que paseantes o viajeros difícilmente adoptarían por sí mismos y mucho menos en el archipiélago balear. Quienes deseen profundizar matemáticamente sobre las cuestiones desarrolladas pueden hacerlo a través de la selecta, específica y extensa bibliografía asociada a cada uno de los capítulos con la que se cierra el volumen.

Josep Lluís Pol i Llompart es licenciado en Ciencias Químicas por la UIB y profesor de matemáticas de secundaria desde 1989. Fue miembro fundador de la *Societat Balear de Matemàtiques-Xeix* y su presidente durante siete años. También fue creador del *Centre d'Aprenentatge Científicomatemàtic CentMat* en 2008, y que ahora es su lugar de trabajo. Diseñó y construyó en el IES Marratxí de Mallorca el mayor reloj de sol de las comunidades de habla catalana y el segundo mayor de España. Para escribir este libro ha tenido que realizar un camino inverso al recorrido en su educación matemática, pues como la mayoría de nosotros, no aprendió matemáticas a partir del rico patrimonio y cultura de su entorno. Un camino inverso aunque, paradójicamente, más natural. En este sentido es fácil imaginar la magnitud de la investigación llevada a cabo para que esta obra se haya hecho realidad.

Otro mérito del autor es destacar y analizar elementos matemáticos sin apenas utilizar expresiones simbólicas propias del lenguaje matemático. Una tarea difícil de la que el autor sale airoso. Solo en muy contadas ocasiones como al referirse a relaciones numéricas o espaciales concretas se echa de menos algún

Patrimoni i cultura matemàtica a les Illes Balears
Josep Lluís Pol i Llompart
Col·lecció Ramón Llull, 30
El Gall Editor
Pollença, 2022
124 páginas
ISBN: 978-84-16416-98-1

esquema o fórmula que podría beneficiar la claridad expositiva. Pero debemos tomarnos tal limitación en el uso del lenguaje técnico como un imperativo editorial. Se dice que cada fórmula escrita en un libro reduce sus lectores en un porcentaje significativo. Los editores alientan con ello a los autores de divulgación científica a evitar expresiones simbólicas. Sin embargo, ante una obra que destaca los aspectos matemáticos del patrimonio balear, ¿tiene sentido evitar el lenguaje matemático para describir dichos elementos patrimoniales? Hoy en día nadie debería consternarse ante una expresión simbólica mediante la que se pretenda ganar claridad, menos todavía teniendo en cuenta que dichas expresiones ganarán significado al convertirse en medio de expresión de la propia cultura. En otras palabras, no debería evitarse el lenguaje matemático para describir lo que de matemático hay en una cultura. ¿Podemos imaginar un libro sobre patrimonio musical sin partituras? Pese a ello, y salvo muy contadas excepciones, Josep Lluís sale airoso del reto de evitar fórmulas. Esperemos que ello contribuya a un aumento de lectores reales en beneficio del patrimonio balear y de las matemáticas y que algunos de ellos sientan ganas de profundizar en tales omisiones a través de la excelente bibliografía seleccionada.

Entre los temas destaca la cartografía, a la que se dedican varios capítulos. Lo merece sin duda, pues el trazo del meridiano constituyó un hito geográfico del siglo XIX. En otros casos, la historia social de algunos personajes, aunque esencial para comprenderlo, nos deja con hambre de conocer algunos detalles matemáticos.

A lo largo de esos cincuenta temas el autor destaca la diversa riqueza matemática del patrimonio balear: las espirales y la proporción áurea, tanto en organismos biológicos como en elementos arquitectónicos, el uso de números en la prehistoria, un ojo de Horus ibicenco, el teorema de Tales en el diseño de la escalera típica de la región para recolectar higos directamente de la higuera, poliedros pétreos y estrellados para trillar, la sucesión de Fibonacci, diferentes medidas de longitud y de volumen, la sabiduría de Ramón Llull y de Maria Pasquala Caro i Sureda, el inmenso y maravilloso caleidoscopio de la Seu de Mallorca, el polígono virtual que conforman las torres de vigilancia en la isla de Mallorca, el proceso de trazado del meridiano de París, mosaicos periódicos y aperiódicos como el embaldosado de Roger Penrose en la iglesia de Santa María de Maó en Menorca, mapas, relojes, cuadrados mágicos…

El libro puede interpretarse como un itinerario matemático, pero no lo es. La sucesión de los 50 temas puede dar esa impresión debido a que en un libro la presentación es sucesiva. Pero este es un libro poliédrico que puede leerse a intervalos y sin respetar el orden de exposición. Josep Lluís presenta cincuenta facetas del poliedro balear que el lector puede recorrer en el orden y tiempo que desee o seleccionar varios de ellos para realizar diversos itinerarios matemáticos o, si es profesor, situar en ellos actividades de enseñanza y aprendizaje matemático.

Sin duda, el libro incita las ganas de visitar los lugares que se mencionan para vivir in situ las ideas matemáticas comentadas por el autor. He aquí otra gran virtud de la obra: una incitación a la experiencia matemática.

Viviendo las cincuenta experiencias a las que nos invita el libro llegamos a una conclusión definitiva: vinculando el patrimonio y la cultura baleares con las matemáticas dichas matemáticas pasan a formar parte del patrimonio balear. Por eso, aunque estemos ante una obra de ámbito local, su alcance es universal. Josep Lluís abre una puerta, pues en cada lugar hay un patrimonio y una cultura que la historia ha tratado sin prestar apenas atención a las matemáticas. Estamos ante una obra primordial para los nativos y amantes de las Islas Baleares que trasciende su contexto y su entorno y que recomiendo fervientemente a personas de otros lugares, pues encontrarán en ella la inspiración necesaria para indagar en las matemáticas de su propio legado cultural. Las matemáticas tienen historia. Abriendo este libro entramos en las matemáticas de nuestra historia.

Miquel Albertí Palmer
<alberti.miquel@gmail.com>

21 JAEM

MATEMÁTICAS ENTRE EL MAR Y LA MONTAÑA

SANTANDER, DEL 30 DE JUNIO AL 4 DE JULIO DE 2024

FESPM & Cía

VII Jornadas de la enseñanza de las Matemáticas en Navarra

Jesús Javier Jiménez Ibáñez
Javier Bergasa Liberal

Los días 2, 4 y 5 de noviembre de 2022 se realizaron las VII Jornadas de la enseñanza de las Matemáticas en Navarra (MATEMATIKAREN IRAKASKUNTZARAKO VII JARDUNALDIAK NAFARROAN)

Superado el obligado parón que la pandemia de COVID impuso a tantas y tantas actividades, este pasado mes de noviembre se pudo poner en marcha una nueva edición de nuestras jornadas. Que esta iniciativa constituye ya una propuesta de reunión y formación esperada por el profesorado de matemáticas de Navarra, se sigue de la respuesta tan animosa y calurosa suscitada por su convocatoria y se constata por la altísima asistencia, más de 180 personas, lo que supone un nuevo récord. Las personas responsables de su organización y desarrollo han recibido con enorme alegría esta participación, que por un lado muestra un más que notable respaldo a la iniciativa y por otro, garantiza que el bache causado por la pandemia, y el retraso en la convocatoria de estas jornadas en un año, no han dañado su vitalidad ni la acogida del profesorado.

Una vez más, estas séptimas jornadas, han contado con el apoyo y la colaboración inestimables de la Universidad Pública de Navarra (UPNA), que acogió en sus aulas las ponencias, las comunicaciones y los talleres; del Departamento de Educación del Gobierno de Navarra, especialmente a través del Centro de Profesorado de Pamplona, y del Ayuntamiento de Pamplona que cedió sus instalaciones del centro cultural Civivox Condestable. Cooperación que la Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas Tornamira, promotora de esta actividad, reconoce y agradece, pues sin ella no hubiera sido posible llevarla a buen término con la calidad, empuje y estilo que caracterizan a la jornadas.

El acto de apertura se realizó el miércoles 2 de noviembre en el citado Palacio del Condestable, en el centro histórico de Pamplona, y contó con la presencia de Ramón Gonzalo García (rector de la UPNA), Gil Sevillano García (director general de Educación del Gobierno de Navarra), Fernando Sesma Urzáiz (concejal delegado de Educación, Participación Ciudadana y Juventud del Ayuntamiento de Pamplona), Aitzol Lasa (profesor del Departamento de Matemáticas de la UPNA), J. J. Jiménez (presidente de Tornamira) y Joseba Liceaga (asesor del Centro de Apoyo al Profesorado de Pamplona), quienes intervinieron para presentar las VII Jornadas de la enseñanza de las Matemáticas en Navarra (Matematikaren Irakaskuntzarako VII Jardunaldiak nafarroan), mostrar su reconocimiento a la organización y participantes y desear a todos la consecución de sus objetivos y expectativas.

Figura 1. Cartel de las jornadas Mates Navarra 2022

Este acto inaugural se completó con una conferencia del dr. Humberto Bustince, catedrático de Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial de la Universidad Pública de Navarra, titulada *Fusión de información en el cerebro computacional y en el tratamiento de imagen médica: el caso de la COVID-19 en Navarra*. En esta charla abierta al público —de ahí la coordinación con el ayuntamiento— el profesor Bustince hizo un minucioso, erudito y ameno recorrido por la inteligencia artificial, desde los algoritmos y las redes neuronales hasta la inteligencia computacional. Presentó, con ejemplos que permitían seguir su discurso, conceptos bastante complejos como funciones de agregación, integral de Choquet, integral de Sugeno, resaltando las aportaciones que todos estos recursos han dado al desarrollo teórico y a los resultados concretos que ayudan en la toma de deci-

Figura 2. Acto inaugural

siones. Finalmente, comentó cómo se habían utilizado para el estudio del COVID en diferentes universidades y también en el caso de Navarra, donde por un problema de coordinación con el departamento de Sanidad no pudieron cooperar en la medida que lo deseaban con los médicos que trabajaban en tan difícil situación, pero sí consiguieron avances muy importantes en los modelos teóricos que han pasado a utilizarse de forma generalizada por diferentes equipos de investigación de un buen número de países.

El profesor Bustince encontró también la oportunidad de valorar el trabajo del profesorado de matemáticas en todos los niveles educativos, y especialmente en la secundaria, y de los médicos, que además de prestar atención a sus pacientes, se comprometen al extremo de buscar tiempo para el estudio de casos complejos e incluso para implicarse en investigaciones.

La charla —abierta al público de forma presencial y profusamente seguida *online*— fue despedida calurosamente con aplausos y felicitaciones para el ponente.

Simultáneamente a la disertación se abría una exposición, cedida por CASIO, sobre mujeres matemáticas en el patio del palacio del Condestable, de titularidad municipal, en una de cuyas salas se desarrolló la citada conferencia.

Tras el acto de apertura y presentación de las VII Jornadas, estas retomaron su formato habitual: actividades en la tarde del viernes, 4 de noviembre, y mañana del sábado, día 5, y articuladas en sesiones de trabajo en las que se suceden conferencias plenarias, comunicaciones y talleres.

La tarde del viernes comienza con una charla plenaria a cargo de Ángel Alsina, catedrático de la Universidad de Girona, titulada *Planificación y gestión de situaciones de aprendizaje competencial de las matemáticas*. En ella se presentó un marco teórico para la toma de decisiones sobre la planificación de actividades relevantes para el desarrollo de la competencia matemática, centrada en los sentidos numérico, espacial y relacional, que fue ilustrado con ejemplos concretos para los diferentes niveles de la educación obligatoria. Resaltaremos en la parte conceptual el buen criterio del ponente al enlazar las propuestas de las más recientes normativas educativas que asientan el aprendizaje en propuestas competenciales con los marcos referenciales que les precedieron y en especial los estándares del NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) cuya aparición es español en 1991 en *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática* tanto influyeron en el desarrollo de la LOGSE y en los activos grupos de renovación pedagógica implicados en el cambio de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.

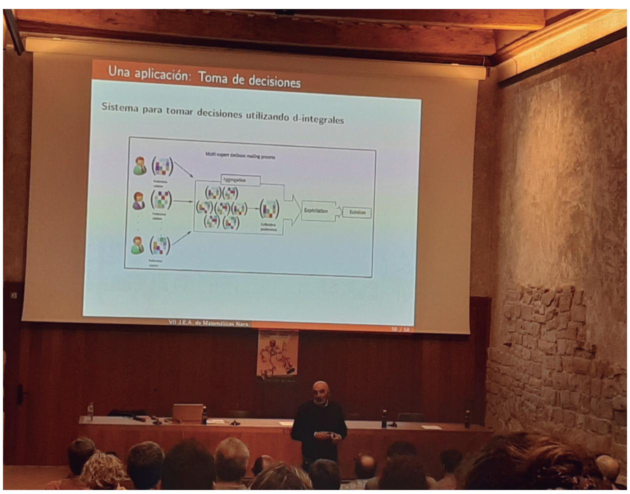


Figura 3. Conferencia Humberto Bustince

Figura 4. Conferencia Ángel Alsina

A modo de resumen presentamos las actividades realizadas en las Jornadas.

Conferencias

- Fusión de información en el cerebro computacional y en el tratamiento de imagen médica: el caso de la COVID-19 en Navarra (Humberto Bustince Sola).
- Planificación y gestión de situaciones de aprendizaje competencial de las matemáticas (Ángel Alsina).
- Presentaciones de suelo bajo y techo alto (Cecilia Calvo).

Comunicaciones

- Problemas aritméticos, aprendiendo a pensar (Fco. Javier López Apesteguía).
- ¿Tanto como el Bambú? (Arantxa Echarte Osacain).
- Los juegos de mesa como herramienta para la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria (Izaskun Gutiérrez).
- Tecnología y matemáticas en un proyecto APS (Miguel Ángel Moscoso Elía y Receba Goya Iriarte).
- Desbloqueando las mates (Ana Lilia Hernández y Cibrán Santos Touza).
- Proyecto STEAM: Scape Room portátil (Javier Fernández Armendáriz, Oscar Sola Garralda e Ignacio Benito Corchón).
- Experiencias de juego y aplicación de recursos digitales en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Jorge Elorza Barbajero y David Recio Moreno).
- Fusionando matemáticas y pensamiento computacional (Gorka García León).
- El círculo matemático. Una experiencia personal (José Antonio Pascual Cornago).

Talleres

- Recursos para el fomento del cálculo mental en el aula (Jesús Javier Jiménez).
- Resolución de problemas siguiendo el método ABP (María Martín Pérez).
- Algoritmos aritméticos (A. Sánchez León, María Cano de la Luz e Inma Molina Sánchez).
- Casio Classwiz: una pequeña maravilla (Goyo Lekuona Muxika).
- Situaciones de aprendizaje con Google Sites (Álvaro Sáenz de Cabezón).
- Introducción a GeoGebra y GeoGebra Classroom (Claudio Martínez y J. Carlos Ballabriga).

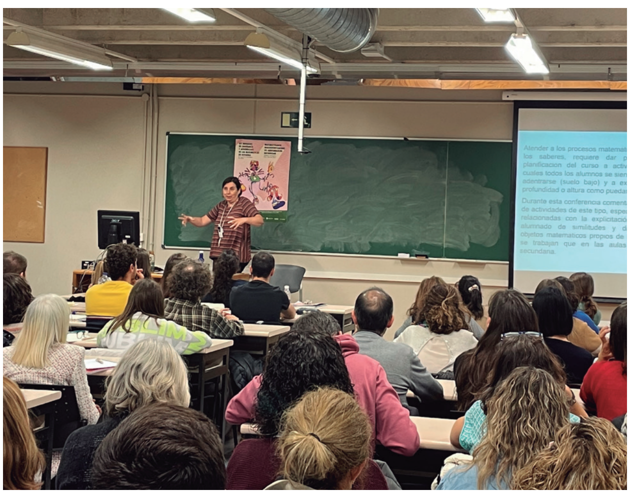


Figura 5. Conferencia Cecilia Calvo

Figura 6. Presentación GeogebraGG

Presentaciones

- —Itinerarios matemáticos por Pamplona: Saquemos las matemáticas a la calle (Fernando Sesma Urzáiz y Aitzol Lasa).
- —Ejemplos de itinerarios por Pamplona y Aplicación MathCityMap (Jaione Abaurrea y Adriana Armendáriz).
- —Fomento de la estadística en el ámbito educativo: Cómo adecuar una página web para propósitos educativos (Pablo Cebrián Jiménez y Miguel R. Wilhelmi).
- —Propuestas de proyectos para Educación Primaria y Educación Secundaria (Rafa Rivera Martín y Javier Ortiz).
- —Matemáticas y publicidad engañosa: Concurso público de recursos didácticos en materia de Educación para el Consumo (Carlos Felices Cajal y Jesús Javier Jiménez).
- —Matemáticas y publicidad engañosa. Primer Premio (2019) en la categoría ESO (Rita Jiménez Igea).
- —Presentación de Mates-GG (Claudio Martínez Gil y Juan Carlos Ballabriga Escuer).

Como puede apreciarse, las actividades se refieren a todos los niveles educativos desde infantil y primaria hasta universitario, acogen un amplio abanico de temas y atienden tanto a investigaciones en didáctica, propuestas de trabajo en el aula y fuera de ella, técnicas de resolución de problemas, proyectos o manejo de recursos informáticos. Cabe destacar, la presentación de los primeros itinerarios matemáticos por Pamplona, fruto de la colaboración entre la UPNA y el Ayuntamiento de Pamplona.

Estas séptimas jornadas llegaron a su fin de la mano de Cecilia Calvo, investigadora de la Universidad Autónoma de Barcelona, a cuyo cargo estuvo la conferencia de clausura titulada *Provocaciones de suelo bajo y techo alto*. Con este título quería referirse a un tipo concreto de actividades diseñadas de forma que se requieran pocos requisitos previos acerca de saberes y contenidos específicos de manera que todo el alumnado pueda implicarse en la tarea a un cierto nivel (suelo bajo) y que además no tengan un final o límite fijado de antemano (techo alto). Estas actividades vienen respaldadas por su utilización en el proyecto Nrich de la Universidad de Cambridge y cuya base teórica se encuentra en los trabajos de Boris Koichu, Orit Zaslavsky y Lea Dolev sobre el aprendizaje de las matemáticas.

La parte fundamental de la charla se centra en la presentación de ejemplos variados y de gran potencial de ese tipo de actividades que cubren diversos ámbitos de las matemáticas: geométrico, aritmético, estadístico y de estudio y representación de funciones, entre otros, y que se centran en propuestas de comparación de elementos, buscando similitudes y diferencias,

Figura 7. En una de las comunicaciones

Figura 8. En un taller

o proponiendo su clasificación con diferentes criterios o persiguiendo su descripción unívoca.

Puedes encontrar el programa completo y los enlaces a las conferencias en la web de Tornamira:

> <https://sites.google.com/site/tornamiranavarra/eventos-news/vii-jornadas-de-ense%C3%B1anza-de-las-matem%C3%A1ticas-en-navarra-2?authuser=0>

Las ponencias, las comunicaciones, los talleres y cuantas actividades se realizaron en el marco de estas VII Jornadas han mostrado el enorme interés del profesorado de matemáticas de Navarra por conocer novedades didácticas, ver de primera mano diferentes métodos para acercar contenidos, conexiones, razonamientos, formas de representación, recursos tecnológicos, investigaciones, proyectos o técnicas de resolución de problemas y, en definitiva, cuantas formas se precisan para que el aprendizaje de las matemáticas y su evaluación supongan al alumnado retos más asumibles e interesantes. Y, ni que decir tiene, que si las jornadas han sido un interesante espacio de encuentro, reflexión e intercambio de experiencias es en gran medida a los profesores que han mostrado el arrojo de dar un paso adelante y salir a la palestra para compartir con compañeras y compañeros esos métodos y novedades citados y que han sido el complemento idóneo a las charlas generales antes reseñadas.

Vemos con sorpresa como las leyes educativas se suceden, cinco en los 23 años de este siglo, y supone un grato contrapunto a ese revuelo la serenidad y profesionalidad de un profesorado que sigue fiel a su compromiso con su alumnado y que sabe que su

Figura 9. Material de un taller

educación, formación, desarrollo competencial y promoción laboral se gestionan fundamentalmente en las aulas y no tanto en la legislación. Es por ello que organizadores, colaboradores, participantes y cuantos nos sentimos ligados a la enseñanza de las matemáticas seguiremos en el empeño e intentaremos que pronto se anuncien unas octavas jornadas.

Javier Bergasa Liberal
Profesor Jubilado
<jbergasalib@gmail.com>

Jesús Javier Jiménez Ibáñez
IES Alhama, Corella (Navarra)
<jjimenei@educacion.navarra.es>

SUMA+

Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje
de las matemáticas · **abril 2023**

– núm. 103 –

Revista Suma
Tirada: 5 500 ejemplares
Depósito legal: Gr 752-1988
ISSN: 1130-488X
Twitter: @suma_fespm

Suma es una revista de didáctica de las matemáticas de periodicidad cuatrimestral cuyo objetivo es tratar sobre los aspectos relacionados con su enseñanza y aprendizaje y destinada, sobre todo, al profesorado que trabaja en educación infantil, primaria, secundaria y universitaria.

La revista *Suma* se edita en
Badalona (Barcelona) — España

Normas de publicación

1. Para el envío de artículos o cualquier consulta sobre su contenido se utilizará el correo electrónico de la redacción de *Suma* <articulos@revistasuma.es> o la dirección postal de la co-directora:

   Iolanda Guevara Casanova
   c/ Temple n.º 26, 2º, 2ª
   08911 Badalona
2. Si los trabajos, imágenes incluidas, ocupan más de 5 Mb sólo se enviaran por correo postal en soporte magnético (CD-ROM, DVD-ROM o *pen drive*).
3. Los trabajos deben ser enviados como archivo en formato .TXT, .ODT, .RTF, .DOC, .DOCX, adjunto a un mensaje de correo electrónico en el que deben figurar:
   a) El título del trabajo, los nombres y apellidos de todos los autores, su lugar de trabajo y su dirección completa así como la sociedad federada a la que pertenecen (si se desea).

   Y a efectos de comunicación:

   b) El correo electrónico, teléfono y dirección postal del autor de contacto.
4. Se debe enviar una segunda versión del original en la que no aparezcan los nombres de los autores, ni información relativa a ellos o que pueda servir para identificarlos (por ejemplo, institución a la que pertenecen, citas y referencias bibliográficas propias, agradecimientos, datos del proyecto en el que se enmarca el trabajo). En esta versión se reemplazarán las citas y referencias bibliográficas por «Autor, 2012» o «Autor y otros, 2012». En las referencias bibliográficas propias se debe eliminar el título y el nombre de la revista o el título del libro donde se publica.
5. Se admiten diversos tipos de trabajos: teóricos, informes de investigaciones, divulgación, innovación didáctica…
6. Junto con el artículo se remitirá un resumen (máximo de 600 caracteres incluyendo espacios), una traducción del mismo y del título en inglés, y cinco palabras clave jerarquizadas (en castellano e inglés).

   Ejemplo: Investigación didáctica, Álgebra, Modelización y dificultades, Enseñanza y aprendizaje, Secundaria y bachillerato.
7. El texto irá una sola columna y tendrá una longitud máxima de 25 000 caracteres sin contar espacios pero incluyendo las tablas, las figuras y los anexos.
8. Los esquemas, dibujos, gráficas e imágenes serán enviados preferentemente en formato TIF o EPS, aunque será admisible el formato JPEG, de modo que, a una resolución mínima de 300 ppp, la imagen tenga un tamaño mínimo de 8 × 8 cm, y en color original. Se adjuntarán en una carpeta aparte del documento del texto, ya que las imágenes incrustadas en el texto no son válidas para su posterior edición. Cada archivo estará claramente identificado y se indicará en el texto el lugar donde se ubica. De igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.
9. Si alguna expresion no se puede escribir con los carácteres disponibles en la fuente Times New Roman, se incluirá, con un editor de ecuaciones, fuera del texto. Si esto no fuera posible, se incorporará como imagen. En tales casos se indicará el lugar que ocupan las fórmulas en el texto, haciendo referencia al nombre del archivo que las contiene.
10. Las referencias bibliográficas se dispondrán al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición.

    Ejemplos:

    Gómez, E. (1990), *Título,* Editorial, Lugar de edición.
    Gómez, E. (1990*a*), *Título,* Editorial, Lugar de edición.
    Gómez, E., y J. Pérez (1990), *Título,* Editorial, Lugar de edición.
    Gómez, E., J. Pérez y D. Hernández (1990), *Título,* Editorial, Lugar de edición.

    En los artículos de revistas y capítulos de libro se seguirá la pauta que se muestra a continuación:

    Gómez, E. (1990), «Título», *Revista,* n.º 31, 35-56.
    Gómez, E. (1990), «Título», en J. Pérez (ed.), *Título,* Editorial, Lugar de edición, 13-23.
11. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: «[…] supone un gran avance (Hernández, 1992)». Si el autor aparece explícitamente en el texto, tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: «[…] según Rico (1993)».
12. Si se cita una referencia de más de tres autores se puede citar el primero seguido de la expresión *y otros.* Por ejemplo: «Bartolomé y otros (1982)», «Gelpi y otros (1987)». Pero en la bibliografía deben aparecer todos los autores.
13. Todas las referencias bibliográficas deben corresponder a menciones hechas en el texto.
14. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente con superíndices a lo largo del artículo y se incluirán al final del texto.
15. A la recepción del trabajo se enviará un correo electrónico como acuse de recibo.
16. Cada trabajo será remitido a dos asesores para ser evaluado. Estos no serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo, aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo o recomendarán posibles modificaciones acordes con las normas y criterios de *Suma*.
17. Si los dos informes son positivos, el artículo será publicado. Si los dos informes son negativos, se desestimará su publicación. Si existe discrepancia entre los informes, se solicitará un tercer informe que decidirá su publicación o no.
18. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como —en caso afirmativo— la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido.
19. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

Boletín de suscripción

Tarifas	Suscripción anual	Número suelto	Monografía
Particulares	25 €	10 €	15 €
Centros	40 €	15 €	15 €
Europa	50 €	20 €	15 €
Resto del mundo	60 €	22 €	15 €

Fotocopiar esta hoja y enviar:
por correo a: Encarni Amaro Parrado (Tesorería de la FESPM)
C/ La Palma nº1, 1ºB,
23740, Andújar-Jaén.
por correo-e a: admin@fespm.es

Deseo suscribirme a la revista *Suma*:

Nombre y apellidos: NIF/CIF:

Dirección: Teléfono:

Población: CP:

Provincia: País:

Correo electrónico:

Importe (€)

Suscripción a partir del año (3 números) ____________
N.^{os} sueltos ____________________________________
Total

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto)
☐ Transferencia bancaria (IBAN ES79 2100 2153 3802 0010 9089)
☐ Talón nominativo a nombre de FESPM

Fecha y firma:

Nombre y apellidos:

IBAN: Entidad: Oficina: DC Cuenta

Banco/Caja:

Agencia n.º: Dirección:

Población: Provincia:

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que, periódicamente, les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista *Suma*.

Atentamente (fecha y firma):