En busca de la conexión perdida, y algo más

Lluís Mora Cañellas

SUMA+ núm. 104
pp. 11-26

Artículo encargado por *Suma* en julio de 2022 y recibido en noviembre de 2022

En este artículo, en línea con la ponencia que presentamos en las XX JAEM de València, ampliamos ideas sobre conexiones, proceso matemático fundamental que nos permite relacionar conceptos matemáticos, entre ellos y con los de otros ámbitos de conocimiento. Este concepto no es nuevo, pretendemos mostrar que ya se encuentra en las ideas de muchas personas referentes en la educación matemática, desde Pere Puig Adam hasta Mogens Niss, pasando por Emma Castelnuovo y M.ª Antònia Canals. Pero también debemos, como docentes, aplicarlo en clase para desarrollar las capacidades de los estudiantes. Para ello mostramos propuestas de actividades que ayudarán a conectar ideas dentro y fuera de las matemáticas y también entre los diferentes tramos de la etapa educativa obligatoria. Y si en las JAEM mostrábamos actividades relacionadas con la acción de contar, en este artículo la actividad matemática que nos guiará será la medida.

Palabras clave: Conexión, Procesos matemáticos, Diseño de actividades, STEM, Evaluar.

In search of the lost connection and more // In this article, in line with the paper that we presented at the XX JAEM of Valencia, we expand ideas about connections, a fundamental mathematical process that allows us to relate mathematical concepts, among themselves and with those of other fields of knowledge. This concept is not new, we intend to show that it is already found in the ideas of many leading people in mathematics education, from Pere Puig Adam to Mogens Niss, including Emma Castelnuovo and M.ª Antònia Canals. But we must also, as teachers, apply it in class to develop the abilities of students. For this, we show proposals for activities that will help connect ideas inside and outside of mathematics and also between the different sections of the compulsory educational stage. And if in the JAEM, we showed activities related to counting, in this article the mathematical activity that will guide us will be the measure.

Keywords: Connection, Mathematical processes, Activity design, STEM, Assess.

Al finalizar sus estudios obligatorios, los estudiantes tendrán acceso a información prácticamente ilimitada en cualquier tema que sea de su interés. También sucederá en el ámbito de las matemáticas. Podrán acceder a vídeos, podcast, imágenes, audiolibros, etc., donde se les presentarán, con mayor o menor acierto, ideas y conceptos sobre lo que representan las Matemáticas y que hacer y trabajar con ellas.

¿Qué deberán ser capaces de hacer con esta información? Conectarla es el primer paso para adquirir y generar conocimiento. En este artículo ampliamos la visión que mostramos en la ponencia «En busca de la conexión perdida» en las XX JAEM 2022 de València. Haremos un breve recorrido sobre referentes que ya hablaban de las conexiones y donde podemos encontrarlas. Y trataremos estas conexiones en un campo matemático diferente al de las JAEM, lo haremos a partir de la medida, otra de las actividades universales que recogió A. Bishop. Intentaremos también contestar las preguntas: ¿que queremos conectar?, y ¿para qué queremos hacerlo? Y mostrando las relaciones que se establecen con los otros procesos matemáticos: resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación y representación.

¿Qué son?

Las matemáticas, como ciencia, se construyen a partir del conocimiento establecido anteriormente. El proceso matemático llamado «conexión» se ha ido construyendo con el paso del tiempo. Encontramos referencias en diversos autores. Haremos un breve apunte de los siguientes:

- Pere Puig Adam.
- M.ª Antònia Canals.
- Emma Castelnuovo.
- Hans Freudenthal.
- Mogens Niss.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

Finalizaremos con una referencia al currículum actual de primaria y secundaria.

PERE PUIG ADAM

Pere Puig Adam (figura 1) escribió en el año 1955 *10 ideas para la enseñanza de las Matemáticas*. Estas ideas abrazan desde la didáctica de las matemáticas en el aula hasta la gestión emocional de los estudiantes.

Pero si nos centramos en el tema del artículo, las conexiones, vemos que la segunda y la tercera idea hacen referencia a las conexiones que tienen las matemáticas con los procesos históricos, los materiales en el aula, y la relación específica con la vida natural y social.

- Idea 2. No olvidar el origen concreto de la Matemática ni los procesos históricos de su evolución.
- Idea 3. Presentar la Matemática como una unidad en relación con la vida natural y social.

En el n.º 34 de la revista *Suma,* Claudi Alsina escribió un artículo comentando el decálogo, y no podemos dejarnos a Pilar Bayer, catedrática emérita de la UB que lo amplió con ejemplos y situaciones.

En estos dos puntos nos relaciona las matemáticas con los procesos históricos, y con la vida natural y social. Mencionando también la necesidad del origen concreto, sobre resolución de problemas y, entiendo, el trabajo con materiales como manera de concretarlo.

MARIA ANTÒNIA CANALS

Poco podemos decir de esta matemática y pedagoga que nació en 1930 y que dedico toda su vida a la enseñanza de esta ciencia (figura 2). Muy recomendable la lectura del libro *Documents de treball de la M.ª Antònia Canals* que publico la FESPM. Dentro de una extensa obra sobre didáctica de las matemáticas en general y, específicamente, sobre el uso de materiales en el aula. El GAMAR es un ejemplo en mostrar como pueden ser utilizados para conducir al aprendizaje matemático, también ha presentado un decálogo sobre la enseñanza de las matemáticas a partir de los materiales. Es un decálogo publicado en el libro mencionado antes, en la página 116.

Todos los puntos son interesantes y merecen una reflexión, pero para la idea del artículo nos conviene el punto 2:

> Conviene hacer las matemáticas relacionadas con la realidad sin perder nunca de vista cuáles son los conceptos y habilidades propias.

Conexión con la realidad a partir de las ideas matemáticas en conexión con lo que nos decía Puig Adam.

EMMA CASTELNUOVO

Emma Castelnuovo (figura 3) enseñó matemáticas en Roma durante muchos años, dedicándose fundamentalmente a los estudiantes entre 11 y 14 años.

Es autora de numerosos libros, entre ellos *Didáctica de la Matemática Moderna* y *La Geometría*.

Esta revista publicó una monografía dedicada a ella en el año 2004. <https://revistasuma.fespm.es/monografias/emma-castelnuovo.html>

Castelnuovo nos explica la importancia que tiene en el aprendizaje de los estudiantes el paso de lo concreto a lo abstracto. El trabajo con materiales en un entorno próximo los prepara, para cuando están entre los 11 y los 14 años, poder profundizar en la abstracción. En este sentido, hace especial énfasis en utilizar diversidad de materiales como conexión de las matemáticas con el mundo natural que nos rodea. Y es en el libro *Geometría* donde nos muestra un apartado final que nos permite conectar las matemáticas con la luz y el sonido, con el peso y la masa o la construcción de herramientas tecnológicas con cuerda, clavos, cartulina o madera. Lo que ahora llamamos, de manera casi natural, materias STEM, vemos que, en este libro, en sus ideas y en las actividades que propone, aparece claramente reflejado.

HANS FREUDENTHAL

En la década de los 70, en los Países Bajos, se trabaja en la *educación matemática realista* de la mano de Hans Freudenthal (figura 4). En esta línea de educación matemática se establecen seis principios fundamentales:

- —De actividad.
- —De realidad.
- —De reinvención.
- —De niveles.
- —De interacción.
- —De interconexión.

Dos de ellos nos permiten conectar con lo expuesto al hablar de los anteriores referentes. La realidad, donde nos hablan de la relación de las matemáticas con el mundo real, dando valor a la expresión «matematización» y relacionándola con el aprendizaje significativo de los estudiantes: no podemos aprender si no disponemos de la base adecuada en el momento necesario. El de interconexión es meridianamente claro, las conexiones son fundamentales para el aprendizaje. También vemos que nos hablan de un proceso progresivo desde la concreción hacia la abstracción, tal como mencionaron los anteriores autores.

Actualmente, el Instituto Freudenthal se ocupa de poner el foco en cuatro temas de investigación que combinan las matemáticas y las ciencias. Sobre la percepción social de la ciencia y su divulgación, la alfabetización matemática y científica de la sociedad, uso de tecnologías digitales para esta alfabetización y la formación inicial de docentes en la universidad.

Figura 1. Pere Puig Adam

Figura 2. M.ª A. Canals

Figura 3. E. Castelnuovo

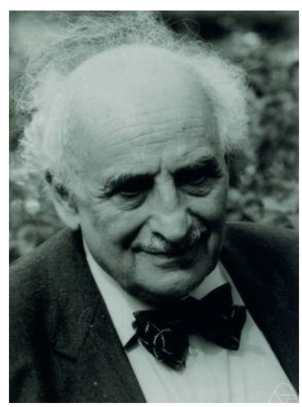


Figura 4. H. Freudenthal

MOGENS NISS

En este momento aparece el concepto de competencia matemática. Mogens Niss (figura 5) contribuye en gran medida a establecer qué significa esta competencia. Esta idea intenta dar respuesta a dos preguntas:

— ¿Qué representa hacer matemáticas?
— ¿Cómo se deberá integrar en un currículo de aprendizaje?

Según su propuesta, saber hacer matemáticas implica dos actuaciones:

— Formular preguntas y responderlas sobre las matemáticas y con matemáticas. Esto implica desde pensar matemáticamente, formular y resolver problemas, construir modelos y desarrollar razonamientos matemáticos.
— Habilidad para tratar con el lenguaje y las herramientas matemáticas. Este apartado incluye la representación de situaciones y objetos matemáticos, utilizar las operaciones y el lenguaje simbólico, comunicar adecuadamente las propias opiniones matemáticas y entender los mensajes matemáticos que recibimos y utilizar materiales y herramientas de apoyo.

Como mínimo dos opciones de las mostradas nos permiten trabajar la conexión y se relacionan con las mencionadas anteriormente por otros referentes. Son «construir modelos» relacionado con la matematización de la matemática realista y usar materiales y herramientas de apoyo. En este último punto, dado que M. Niss hace su propuesta alrededor del año 2000, ya se pueden añadir herramientas digitales. Es importante decir que la propuesta fue escogida como marco de referencia de las primeras pruebas de Matemáticas del estudio PISA.

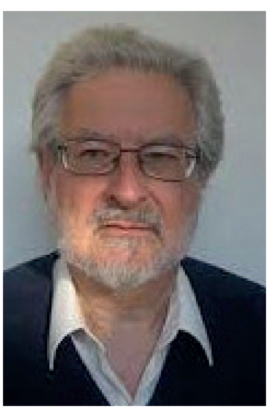


Figura 5. Mogens Niss

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM)

En el año 2000, NCTM publica el libro *Principios y estándares para la Educación Matemática*. En España lo traduce y publica la Sociedad Thales.

El libro intenta responder a la pregunta ¿Qué deben saber hacer los estudiantes para ser capaces matemáticamente? Y aquí se introducen los procesos matemáticos:

— Resolver problemas.
— Razonar y demostrar.
— Conectar ideas y conceptos.
— Comunicar.
— Representar.

Vemos que estos procesos conectan con muchas de las ideas que ya se han ido introduciendo. Resolver problemas deber ser el núcleo central del aprendizaje, de la misma manera que Polya, cuando establece un proceso de resolución de problemas. Como él dice:

> Mi punto de vista es que la parte más importante de la forma de pensar que se desarrolla en matemática es la correcta actitud de la manera de cometer y tratar los problemas, tenemos problemas en la vida diaria, en las ciencias, en la política, tenemos problemas por doquier. La actitud correcta en la forma de pensar puede ser ligeramente diferente de un dominio a otro, pero solo tenemos una cabeza y, por lo tanto, es natural que en definitiva haya solo un método de acometer toda clase de problemas. Mi opinión personal es que lo central en la enseñanza de la matemática es desarrollar tácticas en la Resolución de Problemas.

El cuadro de la figura 6 muestra las relaciones que se establecen entre todos los procesos. Resolución de problemas sería el central, todos están conectados y la comunicación, como elemento necesario para entender y hacerse entender.

Además, uno de los procesos fundamentales es el de conexiones, es el que permite poner en contacto los bloques de contenido matemático entre sí y relacionar las matemáticas con contextos no matemáticos. Lo que los estudiantes deben ser capaces de hacer, referido a las competencias, se formula de la siguiente manera:

— Reconocer y usar las relaciones entre ideas matemáticas.
— Comprender cómo las ideas matemáticas se interconectan y construyen unas sobre otras.
— Reconocer y aplicar las matemáticas en contextos no matemáticos.

A partir de estos referentes nos atrevemos a sintetizar todo lo que hemos visto relacionado con el proceso matemático de las conexiones cuando nos enfrentamos a un reto o a un problema:

¿En qué se parece este problema (reto) con los que has estudiado hasta ahora? ¿En qué contextos (situaciones), matemáticos o no, han aparecido?

CURRÍCULO LOMLOE (2022)

Y llegamos al momento actual. Aparece una nueva ley educativa, y en la materia de Matemáticas aparecen como elementos fundamentales las llamadas competencias específicas, concreciones de las competencias clave. En secundaria aparecen dos competencias específicas de Matemáticas, la número 5 y la 6, con la siguiente formulación:

— 5. Reconocer y utilizar conexiones entre los diferentes elementos matemáticos, interconectando conceptos y procedimientos, para desarrollar una visión de las matemáticas como un todo integrado.
— 6. Identificar las matemáticas implicadas en otras materias y en situaciones reales susceptibles de ser abordadas en términos matemáticos, interrelacionando conceptos y procedimientos, para aplicarlos en situaciones diversas.

Donde podemos observar que las ideas expuestas por los diferentes referentes en educación matemática de que hemos hablado aparecen claramente expuestas. Reconocer, utilizar, interconectar, interrelacionar, aplicar son acciones que deben realizar los estudiantes, y ¿sobre qué objetivo deben hacerlo? Entre diferentes elementos matemáticos interconectándolos, buscar que matemáticas utilizan en otras materias y aplicar matemáticas en situaciones diversas. En primaria solo hay una competencia dedicada a las conexiones, la 5, pero recoge exactamente las mismas ideas que las de secundaria:

— 5. Reconocer y utilizar conexiones entre las diferentes ideas matemáticas, así como identificar las matemáticas implicadas en otras áreas o en la vida cotidiana, interrelacionando conceptos y procedimientos, para interpretar situaciones y contextos diversos.

Vemos que, en la expresión actual, tanto en primaria como en secundaria, el currículo recoge muchas de las ideas aportadas desde hace más de setenta años.

Figura 6. Relaciones entre los diferentes procesos

¿Dónde podemos encontrarlas?

Una vez visto como los referentes nos han hablado de las ideas implicadas en el proceso de conexiones desde hace muchos años y concretadas como son, nos debemos plantear dónde podemos encontrarlas.

En este artículo nos centraremos en tres aspectos donde hacerlas visibles y poder trabajarlas, para ello mostraremos algunos ejemplos de ellos. Estos son:

- —Entre ideas y conceptos matemáticos: actividades con el tangram.
- —Entre materias diferentes: la medida del tiempo.
- —Entre niveles educativos: el metro cúbico.

Así como en la ponencia de las JAEM nos centrábamos en la actividad «contar», una de las seis actividades relacionadas con las matemáticas que A. Bishop mostraba que son universales en todas las civilizaciones, en este caso nos centraremos en la medida. Recordemos que estas actividades universales son: jugar, medir, localizar, dibujar, explicar y diseñar. Empecemos.

Entre ideas y conceptos matemáticos

EL TANGRAM: GEOMETRÍA, NÚMEROS Y PATRONES

> Para que los materiales puedan aportar cosas positivas a los estudiantes deben ser utilizados a partir de la mirada experta de los docentes, generando buenos recursos.
>
> A. Aubanell, 2006

Los juegos en general, y los rompecabezas geométricos como el tangram en particular, cumplen a la perfección con estos requisitos. Además, tienen la gran ventaja de que son conocidos por mucha gente, ya que han entrado a formar parte de la cultura popular. Y en este apartado mostraremos como podemos utilizarlo para relacionar conceptos de numeración y cálculo, geometría y medida a partir de una secuencia determinada de trabajo que podemos consultar en el siguiente enlace <https://docs.google.com/document/d/1RaHMHtKVSlxZ2M_2mNxfT7n4zeApKvUAQCIcsS5QEU4/edit?usp=sharing>.

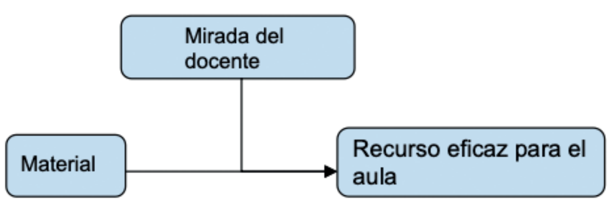


Figura 7. Relaciones entre el material, el docente y la eficacia en el aula

En esta secuencia, que se puede aplicar a partir de 5.º de educación primaria, nos planteamos conocer las relaciones que existen entre las siete piezas del juego (figura 8) y como las podemos utilizar para, por ejemplo, estudiar y/o diseñar otro rompecabezas matemático.

Recordemos que el tangram es un rompecabezas formado por siete piezas; cinco triángulos rectángulos de tres tamaños diferentes, un cuadrado y un romboide. Y el objetivo del juego consiste en construir, con estas siete piezas, figuras que se puedan asociar a objetos de la realidad. En la imagen tangram adaptado para jugadores no iniciados. Tal como apuntaba en la ponencia desarrollada en las XX JAEM, y que se puede ver en su canal de youtube <https://youtu.be/zYDD_H8JAs4>, es recomendable que una secuencia didáctica tenga la estructura que muestra la figura 9.

Empezamos con una situación inicial, problema previo o calentamiento. En este caso consiste en reproducir algunas figuras ya creadas. Es recomendable dar

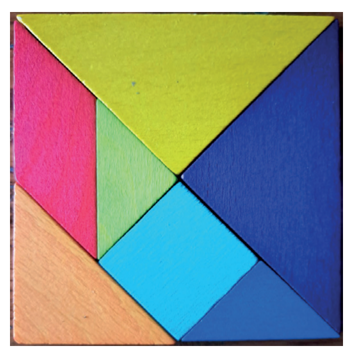


Figura 8. Las siete piezas del tangram

Figura 9. Estructura de una secuencia didáctica

inicialmente alguna ayuda y seleccionar las figuras de manera que tengan grados de dificultad diversos. Esto nos ayudará, como docentes, a detectar el nivel de razonamiento espacial y las creencias que tienen los estudiantes de sus capacidades en 3D (figura 10).

Las piezas en color representan las ayudas. En el caso de que los estudiantes no tuviesen experiencia con el juego, deberíamos empezar con el tangram que tiene las piezas de colores diferentes. Como se muestra en la figura 11.

No debemos quedarnos solo con la construcción de las imágenes, hay que ir más allá. Debemos plantear preguntas; las preguntas son las que provocarán las acciones de los estudiantes sobre la actividad. ¿Ha sido fácil conseguirlo? ¿Qué figura te ha generado más dificultades?, pueden ser ejemplos de preguntas.

En clase esta actividad va acompañada por otra que consiste en mostrar cinco figuras. Pero de estas cinco solo una no se puede construir con las piezas del tangram (figura 12).

La pregunta es clara: ¿cuál es la que no se puede? Acompañada de ¿cómo lo has sabido? Deben explicar la estrategia que han seguido.

Una vez situados en el problema mediante una primera etapa de exploración, entramos en la parte principal del trabajo. Encontrar las relaciones matemáticas que existen entre las piezas del juego. Esta actividad nos es útil para conocer las capacidades iniciales de los estudiantes y su manera de trabajar una actividad de contenido más matemático.

El problema principal comporta establecer las relaciones entre las variables que intervienen. En este caso nos centramos en (supondremos que las figuras son planas) su área y su perímetro.

Experimentar con las piezas del juego y las piezas para completar la tabla de la figura 13.

Podemos utilizar herramientas de medida físicas o virtuales, en función de su disponibilidad, pero siempre es recomendable empezar por las físicas porque estas ayudarán a los estudiantes a crear modelos geométricos mentales de las figuras que estamos trabajando. Queremos que, una vez anotados los datos, nos digan si observan alguna relación entre las medidas que han obtenido. Puede ser interesante explicitar qué entendemos por relación: medidas iguales o parecidas, si un resultado numérico es el doble de otro o son muy parecidos. Deben comunicar sus

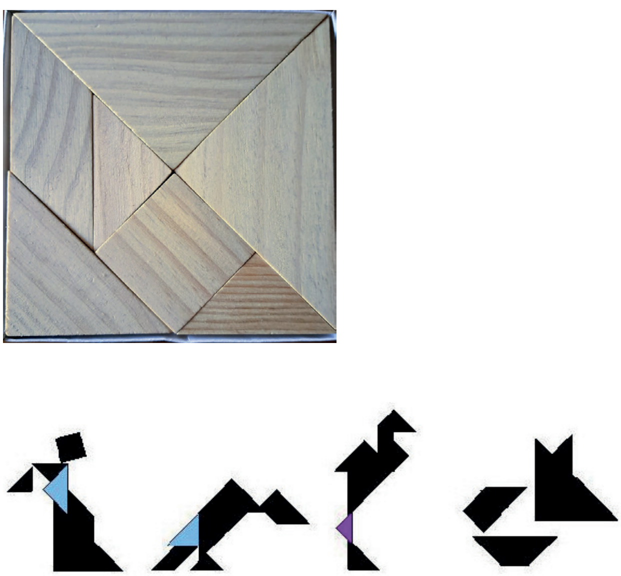


Figura 10. El tangram de madera y las ayudas

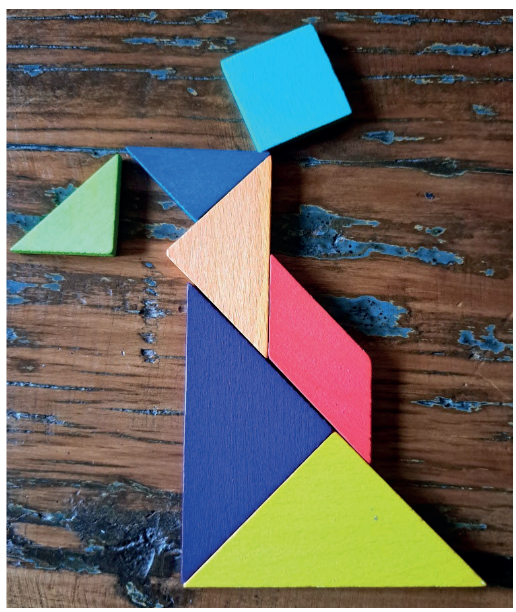


Figura 11. Lady Belinda

resultados por escrito y argumentar las relaciones que han encontrado.

Comparamos las piezas entre ellas, pero también relacionamos cada una de las piezas con el tamaño del cuadrado que formamos con las siete piezas, el que viene de origen con el tangram original. ¿Con cuántas piezas de cada podemos recubrir el cuadrado inicial? Con los triángulos no hay problema, pero ¿Qué pasa con el cuadrado y el romboide?

Fijémonos, y consideramos que esto es importante, que las preguntas que lanzamos en clase siempre son la base para el trabajo. Las buenas preguntas garantizan establecer conexiones y reflexionar sobre el trabajo que se está realizando.

Asociado a los resultados de las medidas que hemos realizado, podemos empezar a hablar de los números racionales y algunas maneras de representarlos: fracciones, decimales y porcentajes. Sin olvidar que podemos mostrar otras representaciones relacionadas con una interpretación más gráfica (figura 14).

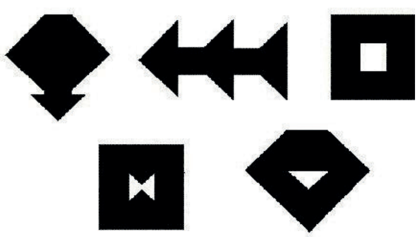
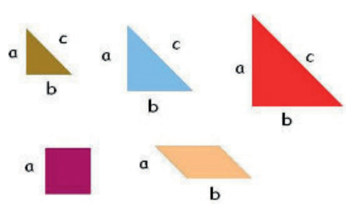


Figura 12. ¿Cuál es la que no se puede?



	a	b	c	Área	Perímetro
Triángulo grande					
Triángulo mediano					
Triángulo pequeño					
Cuadrado					
Romboide					

Figura 13. Áreas y perímetros

Así podemos conectar dos tipos de representaciones, las numéricas y las gráficas. Y nos permite profundizar en un aspecto fundamental, a mi entender, en el aprendizaje de las matemáticas, la diversidad de posibilidades de representación de las ideas que forman esta ciencia.

Una actividad interesante, de las muchas que se pueden realizar a partir de este momento, consiste en plantear la suma de fracciones como una suma de figuras geométricas. Mostramos un ejemplo. A partir de la figura 15 se plantea la pregunta siguiente:

¿Qué fracción, parte decimal o porcentaje representan estas 3 piezas del tangram completo? Esta actividad, que es una suma de áreas, se transforma en una suma de fracciones, decimales y porcentajes.

— Fracción = 13/16
— Decimal = 0,8125
— Porcentaje = 81,25 %

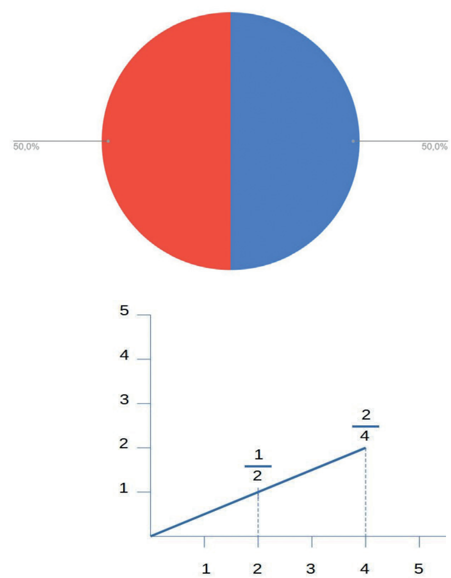


Figura 14. Representaciones de fracciones

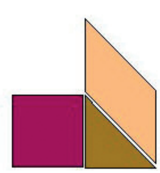


Figura 15. Suma de figuras geométricas

Para finalizar este apartado del artículo, creemos que podemos ir más allá con una actividad que complemente las que hemos mostrado hasta ahora. Trabajar con las fracciones egipcias de numerador 1 o con las unidades de medida que se usaban en esta civilización nos ampliaría el trabajo realizado hasta ahora y nos permitirá conectar dos materias: Matemáticas e Historia. ¡Las matemáticas en el antiguo Egipto!

Entre materias diferentes

LA MEDIDA DEL TIEMPO

Existen materias, dado su grado de interrelación, con las que es fácil su conexión con las matemáticas. Pensemos, por ejemplo, en las materias que forman parte del ámbito STEM. Ahora vamos a plantearnos una situación de aprendizaje que tenga como idea central la medida: escogemos la medida del tiempo.

Somos conscientes de la importancia del tiempo en nuestras vidas, ¿podemos imaginarnos una cultura que nunca haya estado preocupada por el paso del tiempo? ¿Una cultura sin relojes? (figura 16). El tiempo nos marca muchas veces la forma de vivir. El horario de los trenes para ir al trabajo o a la escuela, los momentos que tenemos disponibles en nuestro tiempo libre, el horario de una proyección de cine o el inicio de una obra de teatro, o simplemente ese momento para seguir leyendo ese libro que tenemos empezado.

Esto nos puede llevar a preguntar cómo ha evolucionado la medida del tiempo a lo largo de los años y los motivos que provocaron estos cambios. Pero también podríamos añadirle la percepción que tenemos de este paso, más lento o rápido, en función de nuestro estado de ánimo.

Por tanto, nos planteamos iniciar un proyecto en torno a esta temática. Para hacerlo seguiremos el esquema que muestra la figura 17.

Ya hemos elegido el tema, la medida del tiempo. Hemos de interpretar la tarea y seleccionar una línea de ataque, como siempre, esto lo hacemos basándonos en preguntas.

Podemos presentar una pregunta para trabajar, pero lo más recomendable sería proponer diversas, los docentes y los estudiantes, para entre todos escoger aquellas que nos pueden ser más interesantes.

Algunas preguntas iniciales que podemos formularnos:

- —¿Cómo ha evolucionado?
- —¿Cuáles fueron los motivos que provocaron estos cambios?
- —¿Qué diferencia existe entre el tiempo físico y el filosófico?

Estas preguntas actúan como catalizadoras de la actividad, podemos dejar a los estudiantes que muestren lo que les preocupa o interesa sobre este tema.

Figura 16. Reloj para medir el tiempo

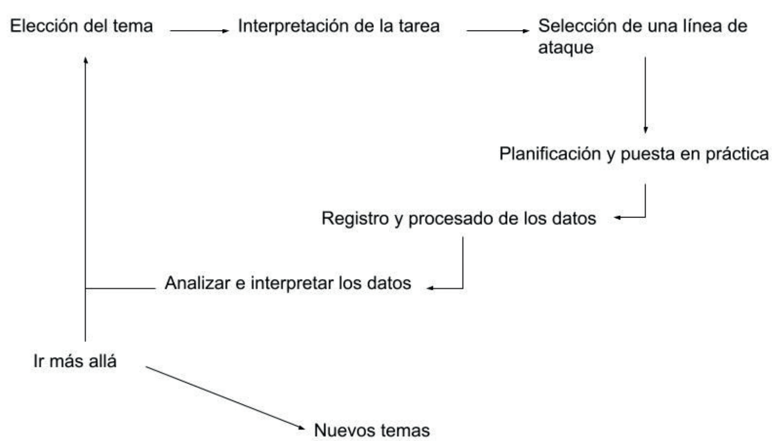


Figura 17. Esquema de un proyecto

Seguramente aparecerán preguntas que no podremos utilizar, dado que pueden no tener contenido matemático o sean claramente de otros ámbitos de conocimiento y en ese momento no interesa esa selección, pero pueden abrir puertas para, en otro momento, desarrollar otro tipo de trabajo integrado más extenso.

Y ahora lo que podemos hacer es concretar un poco más. Definir las líneas de ataque en las que podemos centrarnos. El punto de partida serán las dos primeras preguntas, dado que son los que podemos buscar respuestas de los campos de la ciencia y las matemáticas.

- —Instrumentos de medida.
- —Maneras de mostrar el paso del tiempo.
- —¿Cuál es nuestra percepción del tiempo?
- —Otras relaciones que se pueden establecer con el tiempo, por extrañas que parezcan.

Por cada uno de los apartados anteriores, cuando desarrollamos la tarea, podemos tener en cuenta algunas de las siguientes tareas, las que mostramos en la tabla 1, que se pueden desarrollar.

Siguiendo la estructura que hemos mostrado en el gráfico de la figura 17, ahora vendrá el trabajo de planificación y puesta en práctica. Después, el de recogida y análisis de los datos, que culminará en las conclusiones o en la creación de artefactos, si esto es lo que se ha decidido en el grupo de trabajo.

Siempre se debe terminar el trabajo evaluando aquello que han realizado, revisar las fortalezas y debilidades, las mejoras que se pueden realizar y las propuestas para ampliar el trabajo realizado.

Una de las dificultades de estas actividades para los docentes es el proceso de evaluación. No profundizaremos mucho en este tema, pero parece importante revisar cómo mínimo tres aspectos del trabajo realizado:

—Presentación del trabajo:
- Informa.
- Expone claramente los resultados. ¿Son coherentes?
- Gráficos, tablas, diagramas, modelos, ¿son claros?
- ¿Se ha compuesto adecuadamente?
- Bibliografía.

—Contenido:
- ¿Aparecen cuestiones importantes?
- ¿Se ha utilizado información relevante?
- ¿Se han utilizado los conceptos matemáticos adecuados?
- ¿Son correctos los aspectos matemáticos?
- ¿Existen conclusiones?
- ¿Se han examinado posibles generalizaciones?

—Proceso de trabajo de los estudiantes:
- ¿Han elaborado un plan?
- ¿La iniciativa ha sido del equipo?

Instrumentos	Mostrar el paso del tiempo	Percepción	Otras relaciones
– ¿Cuál es la base de un reloj de sol? – ¿Qué es una clepsidra? – ¿Cómo funciona un reloj de arena? – ¿Cuál es el fundamento de un reloj de péndulo? – ¿Existen otros tipos de relojes? – ¿Podemos diseñar un reloj digital con un programa de ordenador?	– ¿Cómo ha evolucionado el calendario? – ¿Cuántos calendarios distintos existen en el mundo? – ¿Cuál es su fundamento? – ¿Por qué no es la misma hora en todo el mundo? – ¿Qué relación tienen los relojes y la música?	– ¿Qué es un reloj biológico? – Nuestro sentido del tiempo.	– ¿Pueden existir los viajes en el tiempo? – ¿Qué relación existe entre el tiempo y la música? – ¿Por qué fue importante la medida del tiempo en la navegación? – Recursos diversos para empezar a trabajar.

Tabla 1. Preguntas relacionadas con la medida del tiempo

- ¿El trabajo fue autónomo?
- ¿Han desarrollado estrategias propias?
- ¿Existen evidencias de iniciativas personales?

Y para finalizar este apartado, tampoco debemos descartar, en esta parte final, generalmente de las más difíciles, la posibilidad de que los estudiantes hagan una autoevaluación del trabajo realizado.

Entre niveles educativos

EL METRO CÚBICO

¿Cómo evolucionan las actividades relacionadas con la medida en relación con los diferentes niveles educativos? De la misma manera que en la ponencia de las XX JAEM en València, vamos a realizar un viaje didáctico desde educación infantil hasta bachillerato (figura 18), con la medida como vehículo y la idea del metro cúbico (figura 19) como unidad de volumen para desplazarnos.

Educación infantil

En estas edades es muy importante trabajar con modelos que podamos manipular.

Partimos de una pregunta inicial; entendemos que es muy importante señalar la importancia de las preguntas para crear situaciones de aprendizaje con los estudiantes. En estas edades siempre partimos de un objeto material, es el que nos ayudará a crear el modelo que queremos que los estudiantes asimilen correctamente. En este caso el objeto puede ser una caja y la pregunta que nos formulamos es:

¿Qué podemos hacer con una caja?

Primero solicitaremos a los niños y niñas que nos traigan cajas, lo más grandes que puedan (figura 20).

El primer trabajo que deberemos realizar con ellas es experimentar, igual que en cualquier actividad y nivel donde aparezcan materiales. Después será necesario e

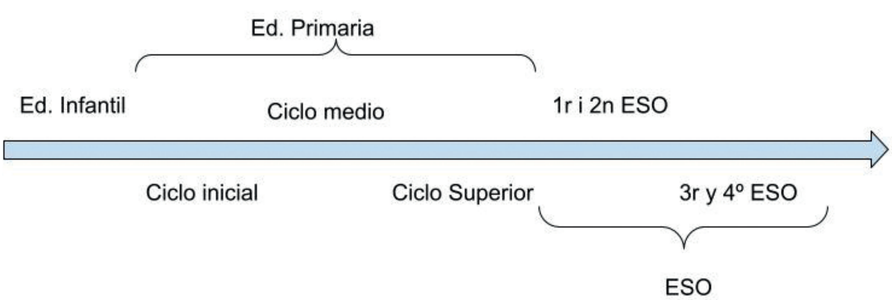


Figura 18. Un viaje por las diferentes etapas

Figura 19. Un metro cúbico

Figura 20. Cajas

interesante introducir actividades que permitan trabajar las siguientes nociones:

- —Espacio.
- —Inclusión y ordenación.
- —Descripción de los cuerpos.
- —La medida de su capacidad. En este caso empezaremos de manera libre y descriptiva: mucho más grande, más grande, más pequeño y mucho más pequeño.
- —Empaquetamientos de cubos (cajas). ¿Cuántos cubos hay?
- —Representación de estos objetos. Dibujando objetos sencillos construidos a partir de cubos. Materiales como el multilink pueden ser también muy útiles en estas actividades (figura 21).

La comunicación debe ser un eje fundamental en todas las actividades. Y debe estar incorporada en su realización. Aparecerán también el uso de medidas informales. La comparación, establecer relaciones, con el cuerpo humano, ¿cuántos cabemos en una caja?, o con otras cajas u objetos que tengamos en la clase, ¿cuántas cajas pequeñas caben en una caja grande?

Podemos finalizar la actividad con una propuesta que nos haga ir más allá: la transformación de las cajas. ¿Podemos plegarlas? ¿Qué nos aparece cuando lo hacemos? Y siempre explicitando el objetivo de la transformación: «Hemos transformado la caja, para poder poner dentro …», y aquí el argumento que consideren oportuno.

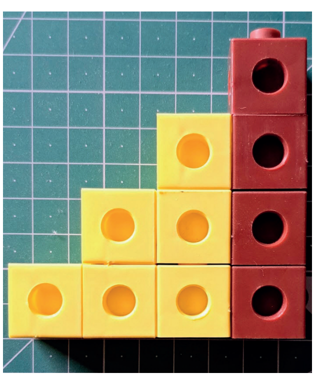


Figura 21. Empaquetar cubos

Ciclo inicial de primaria

Pregunta inicial: ¿Cómo son los recipientes que permiten guardar cosas en su interior?

La propuesta en este caso es: crear una colección de objetos con el objetivo de responder a la pregunta inicial.

En la tabla 2 hay actividades y preguntas que podemos formular a partir de esta situación.

Ciclo medio y superior de primaria

En la tabla 3 mostramos, para comparar, las ideas que podemos desarrollar en estos dos ciclos de primaria alrededor del metro cúbico.

Veremos que están muy relacionadas con las ideas trabajadas anteriormente, con el objetivo de proporcionar un andamio suficiente a los estudiantes para avanzar a partir de sus conocimientos previos. La estructura de trabajo continúa siendo la misma, una propuesta inicial y a partir de aquí se va desarrollando el trabajo a partir de preguntas que se formulan a los estudiantes. Son situaciones de aprendizaje que se van desarrollando conectándolas con las anteriores, aprendizaje significativo, en definitiva.

Y en todos los casos se planifica una estructura de trabajo similar a partir de tres aspectos: una propuesta de trabajo inicial relacionada con la creación, la clasificación y la representación, empaquetamiento de cubos y otro tipo de actividades para ampliar la propuesta (tabla 3).

ESO

Y en la ESO la propuesta se estructura exactamente de la misma manera, separando los dos primeros cursos de los de 3.º y 4.º (tabla 4).

Llegamos al final del recorrido temporal. En la evolución de estas actividades podremos observar como vamos avanzando desde lo más simple a lo más complejo, de lo más concreto a lo más abstracto. Y esta es una manera de construir actividades que tiene un impacto de 1,28 en el aprendizaje de los estudiantes, según el índice elaborado por Hattie

Actividad y concepto trabajado	Objetivo
Concepto dentro y fuera.	Crear un significado compartido.
Clasificar los recipientes.	Según el mayor número de características posible.
Realizar hipótesis a partir de preguntas. Hay que tener algunas cajas grandes. Abrir la posibilidad de que los niños y niñas formulen sus preguntas.	Responder: ¿Cuántas personas se pueden poner dentro de una caja? ¿Cuántos pies podemos poner en el fondo de la caja? ¿Cuántas personas hacen falta para rodear la caja?
Representación en el plano. Dibujar las cajas.	Utilizar diversas metodologías para realizar representaciones de las cajas. Generalmente, dibujos, pero puede haber otras opciones con materiales diversos.
Construcción en 3D. Empaquetar cubos.	Dada una construcción con cubos primero, y después una imagen de otras construcciones. ¿Cuántos cubos hay? A partir de cubos construir objetos sencillos y dibujarlos Buscar patrones. Relacionar figuras geométricas con números en casos muy sencillos. Números triangulares y cuadrados. Y así ir realizando conexiones. Realizar conexiones.
Otras actividades.	Jugar con construcciones de madera que utilizan objetos de madera.

Tabla 2. Actividades en el ciclo inicial

Ciclo Medio	Ciclo superior

Construcción de un cubo grande a partir de la orden de reproducir un cubo pequeño.
 	
Propuesta: Construir 1 m^3 con tubos de plástico.
– Describir los elementos necesarios para su construcción, contarlos y darles nombre.
– Buscar construcciones iguales y similares (entrar en el campo no solo del cubo, sino de todos los prismas).
– Representar a los cuerpos.
 	
Empaquetamientos de cubos
– Construir con multilink cuerpos a partir de un dibujo o fotografía y buscar el volumen mínimo desde un ángulo de visión concreto.
– Contar todos los cubos de un cuerpo dibujado.
– Construcción y generalización de los números triangulares.
 	
Otras actividades
– Representación de cuerpos en redes.
	¿Cómo son los recipientes que permiten guardar cosas en su interior?
	
	Propuesta: Hacer una colección.
	– Hacer una colección:
	  – ¿Cuántas personas se pueden poner dentro de la caja?
	  – Cuántos pies pueden ponerse en el suelo de la caja?
	  – Cuántas personas son necesarias para rodear la caja?
	– Representar a las cajas.
	
	Empaquetamientos de cubos
	– ¿Cuántos cubos hay?
	– Dibujar objetos sencillos construidos con cubos.
	– Relacionar figuras geométricas con los números. Triangulares, cuadrados. En casos muy sencillos.
	
	Otras actividades
	– Juegos con cuerpos geométricos tipo construcciones de madera.
	– Actividades con Multilink y Creator, buscando todas las figuras posibles con 1, 2, 3, 4 piezas.

Tabla 3. Tareas para el ciclo medio y el ciclo superior

(2018). Este 1,28 se corresponde con el uso de métodos basados en la teoría cognitiva desarrollada por Jean Piaget y sus etapas cognitivas:

— De 2 a 7 años: Los estudiantes pueden comprender conceptos y símbolos básicos sin manipular información mentalmente.

— De 7 a 12 años: Empiezan a resolver problemas de manera más lógica, pero aún no han desarrollado el pensamiento abstracto e hipotético.
— De 12 años en adelante: Se desarrolla el pensamiento abstracto y pueden realizar razonamientos hipotéticos y deductivos.

El hecho de estructurar las actividades a partir de preguntas nos permite conectar las actividades con otra actividad que, según el índice Hattie, tiene un alto impacto en el aprendizaje de los estudiantes, la realimentación, el «feedback» (0,7).

En este índice, el impacto positivo en una se consigue a partir de un valor de 0,4. Mostramos algunos ejemplos de impactos diversos: aprendizaje cooperativo (0,4), gestión del aula (0,35), expectativas del docente (0,43) o debates en clase (0,82). Este índice se consigue a partir del estudio y síntesis de cerca de 800 metaanálisis.

Pero hemos de tener presente que no solo conectamos las actividades a lo largo de la enseñanza obligatoria de los estudiantes, también estamos desarrollando una manera de trabajar, una manera de hacer matemáticas, que será aplicada mucho más allá de los cursos obligatorios.

1.º y 2.º ESO	3.º y 4.º ESO
¿Cuáles son todos los posibles despliegues de un cubo? *Propuesta:* Trabajar con Creator y recoger en papel todos los despliegues posibles en red cuadriculada, comprobarlo. – ¿Qué objetos podemos poner en un cubo (tienen un volumen similar)? – Hacer una lista en clase antes de hacerlo en casa – Estrategias a utilizar, los objetos deben ser de su casa; comentarlo después en clase. *Empaquetamientos de cubos* – ¿Cuántos cubos hay? – Descomposición del cubo en poliedros más pequeños (introducción al binomio en el cuadrado o en el cubo). – Construir con multilink cuerpos a partir de un dibujo. – Contar todos los cubos de un cuerpo dibujado. *Otras actividades* – Construcción de los sólidos platónicos con Creator. – Representarlos en una red isométrica. – Duplicación de un cubo (a partir de doblar la arista). – Calcular volúmenes por exceso y por defecto de diferentes cuerpos geométricos: botellas, latas por comparación. – Construcción y generalización de números triangulares y cuadrados. – Poliominós y polidiamantes: figuras geométricas planas formadas por cuadrados o por triángulos.	¿Qué cuerpos distintos se pueden obtener cortando un cubo? *Propuesta:* Cortar cubos de porexpan y dibujarlos en una red isométrica o con plástico simularlo en el metro cúbico que tenemos construido. – Dibujar los cuerpos que han salido y su despliegue. – Simetrías, planos de rotación y ejes. – Construir distintos poliedros con un número fijo de cubos. – Soma y otros rompecabezas. – Cálculo de sus áreas superficiales. *Empaquetamientos de cubos* – ¿Cuántos cubos hay? – Generalizar sucesiones de cuerpos construidos a partir de cubos. – Construcción y generalización de los números triangulares, cuadrados y cúbicos. – Descomposición del cubo en poliedros más pequeños. (Introducción al binomio en el cuadrado o en el cubo). – Estudiar los distintos policubos y las transformaciones en el espacio. – Construir los policubos y discutir cuáles son iguales (se puede pasar de uno a otro con un giro) y cuáles son distintos. – Doblar el cubo de $1m^3$ (a partir de un metro elástico). ¿Qué significa doblar 1 m^3? ¿Cuánto deben medir sus aristas? ¿Cuál es el volumen total? *Otras actividades* – Diagrames de Shlegel. – Teoria de Grafos: Recorridos en una red.

Tabla 4. Tareas para ESO

Colofón

En el trabajo matemático las conexiones son fundamentales, dado que proporcionan un conocimiento más profundo y duradero de los conceptos que estudiamos. Permiten establecer que las matemáticas no son una colección de hechos aislados, ni entre ellos, ni entre las demás ciencias que nos permiten conocer el mundo que nos rodea. Todas nos proporcionan información para comprender la realidad.

Para poner de manifiesto las conexiones hemos visto que hay que buscar relaciones, parecidos: ¿en qué se parece este nuevo concepto a conceptos que ya hemos estudiado? Y esta búsqueda de relaciones la podemos trasladar a cualquier tipo de trabajo que desarrollemos, por ejemplo, a los problemas, ¿en qué se parece este problema que estamos intentando resolver a otros problemas que ya hemos resuelto? Y serán estas conexiones las que nos permitirán avanzar en el proceso de desarrollo y consolidación de las capacidades matemáticas de nuestros estudiantes. Sin olvidar al resto de procesos matemáticos estrechamente relacionados con las conexiones: resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación y representación.

No finalizaremos el artículo sin mencionar un aspecto importante, el de la evaluación de la adquisición de esta capacidad por parte de los estudiantes. Las actividades deben ser el elemento fundamental que nos proporcione información sobre el desarrollo de la capacidad de los estudiantes. Deben ser capacidades que recogen las ideas de las competencias asociadas a este proceso matemático, la 5 y 6 de secundaria y la 5 de primaria, que en síntesis podemos expresar tal como muestra la tabla 5.

Y para poder buscar estas ideas en las actividades de los estudiantes nos hacen falta dos cosas. La primera es diseñar las actividades de manera que estas relaciones aparezcan y la segunda tener una serie de indicadores que nos muestren que es lo que debemos mirar en los trabajos realizados por los estudiantes.

Algunos ejemplos de estos indicadores propuestos por Aymerich y Sol son:

Relacionar	Ideas matemáticas
Relacionar	Ideas de diversas áreas de conocimiento
Resolver	Problemas

Tabla 5. Resumen de las capacidades que se pueden evaluar

- —Conecta números y sus representaciones geométricas y describe la relación que se ha establecido.
- —Modifica relaciones establecidas para crear nuevas y justifica el proceso aplicado.
- —Da ejemplos de objetos con formas geométricas concretas.
- —Interpreta o calcula porcentajes sencillos en situaciones de descuentos.

Y recordar, de la misma manera que hacíamos en la ponencia de las XX JAEM, que la conexión más importante es trabajar conjunta y coordinadamente con los docentes del mismo centro y, también, con los docentes de centros relacionados. Y volvemos al índice Hattie para justificarlo, La «Colletive teacher efficacy» ocupa el puesto número 1, con una puntuación de 1,57 en el impacto sobre el aprendizaje de los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Alsina, C. (2020), «Carta a don Pedro Puig Adam (1900-1960)», *Suma,* n.º 34, 5-7.

Aubanell, A. (2006), «Recursos materials i activitats experimentals en l'educació matemàtica a Secundària», <http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200506/memories/1005m.pdf> [consultado el 15 de noviembre de 2022].

Aymerich, C., y M. Sol (2020), *Indicadors de connexions,* <https://ja.cat/indicadores_conexiones> [consultado el 15 de noviembre de 2022].

Couso, D., L. Mora y C. Simarro (2020), «De las mates como instrumento a las mates como práctica», *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas,* n.º 93, 8-14.

Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya, *AraMat,* <https://serveiseducatius.

xtec.cat/cesire/recurs-eco2/aramat/> [consultado el 16 de junio de 2022].

Grup Cubic (2017), «Reflexions entorn el decàleg de Pere Puig Adam», <http://www.ub.edu/cubic/wp-content/uploads/2017/11/Decaleg-Pere-Puig-Adam-Cubic.pdf> [consultado el 15 de junio de 2022].

Hattie, J (2018), «Visible learning», <https://visible-learning.org/hattie-ranking-influences-effect-sizes-learning-achievement/> [consultado el 15 de noviembre de 2022].

Niss, M. (2003), «Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project», en A. Gagatsis, y S. Papastavridis (ed.), *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education, Athens, Hellas, 116-124*, <https://forskning.ruc.dk/en/publications/mathematical-competencies-and-the-learning-of-mathematics-the-dan> [consultado el 15 de noviembre de 2022].

Lluís Mora Cañellas
<lmora1@xtec.cat>