

El grafo como herramienta en bachillerato

Pablo Flores Martínez
Luz Romera Cara

Suma núm. 104
pp. 27-38

Artículo recibido en *Suma* en noviembre de 2021 y aceptado en junio de 2022

El presente trabajo recoge una breve investigación de una experiencia realizada en el aula, sobre la introducción de la teoría de grafos. Se realiza la justificación mediante un breve resumen histórico de esta teoría y otros antecedentes base del objeto de estudio de este trabajo, y se indica también las oportunidades curriculares existentes, la descripción de la experiencia y sus conclusiones.

Palabras clave: Investigación, Grafo, Matemización, Secundaria, Bachillerato.

The graph as a tool in High School // This paper includes a brief investigation of an experience carried out in the classroom, on the introduction of graph theory. The justification is made by means of a brief historical summary of this theory and other basic antecedents of the object of study of this work, and the existing curricular opportunities, the description of the experience and its conclusions are also indicated.

Keywords: Research, Graph, Mathematics, High School, Baccalaureate.

En 1736 Euler propuso el problema de los puentes de Königsberg mostrando el grafo como una buena herramienta de matematización. Alsina (2010) destaca el avance en los circuitos eléctricos con las leyes de Kirchhoff en 1847, y, aunque desde el Renacimiento, en la cartografía, coloreaban mapas con cuatro colores, no fue hasta 1850 cuando se consideró un problema matemático al estudiar cuántos colores se necesitan o qué características tiene un mapa para rellenarse con cuatro colores. En ese siglo se plantean

problemas resueltos por la teoría de grafos como el problema del icosaedro de Hamilton y el de enumeración de isómeros por Cayley.

En 1936 se publica el primer libro de esta teoría llamado *Teoría de Grafos Finitos e Infinitos* de König donde describe algoritmos para la búsqueda de caminos cortos. En 1969, gracias al libro de *Teoría de Grafos* de Harary, se aprecia la gran variedad de aplicaciones (Alsina, 2010).

Actualmente está integrada en las matemáticas, pero no se encuentra ninguna mención en el currículo de la ESO ni Bachillerato. Su interés matemático constituyó una motivación para intentar promover el uso de nuevas herramientas respetando el currículo, lo que nos llevó a preguntarnos: ¿Es posible incorporar una herramienta nueva como el grafo para que el alumnado resuelva problemas? ¿Qué nivel de matematización se consigue? ¿Qué procedimientos cognitivos se movilizan?

Este artículo describe una experiencia basada en la implementación de un taller de grafos realizado en 1.º de Bachillerato, con actividades que permiten introducir al alumnado a la teoría de grafos eludiendo la introducción de conceptos y resultados con lenguaje formal. Para responder a las cuestiones que lo originaron, se revisaron las respuestas de los estudiantes.

Las intenciones formativas son:

- Introducir el concepto de grafo desde un lenguaje no formal.
- Mostrar la utilidad del grafo como herramienta para la resolución de ejercicios y como forma de representación.
- Impulsar su uso como una nueva estrategia.
- Incentivar que formulen y comuniquen las resoluciones con un lenguaje matemático preciso, como el de los grafos.

Con estas finalidades formativas, esperábamos lograr que el alumnado:

- Traduzca problemas al lenguaje y contexto matemático.
- Utilice conocimientos y procedimientos matemáticos que ya posee.
- Comprenda el teorema de los cuatro colores.

No son necesarios conocimientos profundos para utilizar este concepto. El alumnado lo puede adoptar, lo que le proporcionará mayor enriquecimiento y contará con una herramienta más para afrontar sus dificultades de aprendizaje.

Para el docente, realizar un taller sobre un contenido no curricular, como es el grafo (figura 1), supone disponer de flexibilidad para elegir la complejidad adecuada, poder seleccionar aplicaciones en diferentes contextos y una gran cantidad de recursos recreativos.

Después de esta introducción donde se han indicado los objetivos y preguntas que se realizan, se aborda la justificación curricular de la experiencia. A continuación, se describe la experiencia realizada con la planificación previa de las tareas, el desarrollo del taller y los resultados. Finalmente, se extraen algunas conclusiones.

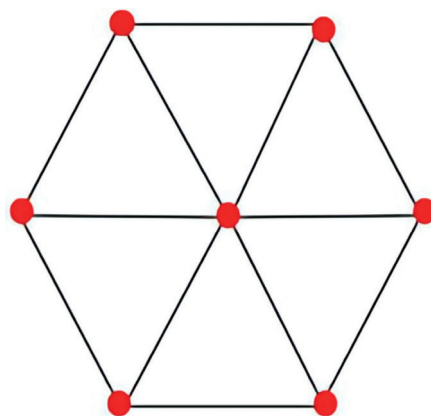


Figura 1. Grafo

Justificación curricular

El taller posibilita afrontar objetivos curriculares y generales de etapa descritos en MECD (2015), favoreciendo la creatividad, el sentido crítico, la comprensión de nuevos elementos y el manejo de las habilidades propias de la asignatura. También se puede relacionar con objetivos de área (JA, 2021), ya que los grafos son conceptos matemáticos que se aplican a diversas situaciones para resolver problemas de la vida cotidiana y otros ámbitos.

Euler usó el grafo como una herramienta de matematización, por ello es una oportunidad para desarrollar esta, que tan relacionada está con la competencia matemática.

COMPETENCIA MATEMÁTICA

El Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la ESO y Bachillerato (MECD, 2015), entiende la competencia matemática como la habilidad para aplicar el razonamiento matemático que comprende las facetas de pensar, modelar y plantear y resolver problemas.

El currículo de Andalucía (JA, 2021), por la orden de 15 de enero de 2021, define la ciencia matemática como una ciencia en evolución constante basada en el descubrimiento y teorización de nuevos contenidos que surgen. Estas bases son el estado primigenio en la construcción de la ciencia matemática. En este sentido, se considera adecuado estudiar cómo el alumnado se enfrenta al descubrimiento personal de una nueva herramienta matemática.

PISA (OECD, 2012) considera siete facetas específicas de la competencia matemática: «razonar y argumentar, comunicar, matematizar, elaborar estrategias para resolver problemas, representar, utilizar lenguaje simbólico, formal y técnico y utilizar herramientas matemáticas». La matematización y representación serán las facetas más trabajadas en la experiencia.

MATEMATIZACIÓN

Matematizar consiste en traducir problemas dados en lenguaje no matemático a uno que sí lo es, con el objetivo de encontrar relaciones matemáticas para

resolverlos. Esta competencia se divide a su vez en dos, matematización horizontal y vertical, en este orden. La primera consiste en transformar el problema a un lenguaje y apreciar qué estructuras matemáticas subyacen, mientras que la matematización vertical consiste en el trato matemático del problema una vez realizada la matematización horizontal. Cada una está caracterizada por ciertos procesos cognitivos estudiados en Rico (2006), recogidos en la tabla 1.

REPRESENTACIÓN

Lupiañez (2016) considera la noción de representación clave para favorecer la relación con los objetos matemáticos, que son abstractos. Señala que los símbolos, las gráficas y las expresiones verbales que se utilizan para nombrar los conceptos y procedimientos matemáticos forman parte de las representaciones de los objetos matemáticos. Se clasifican en varios sistemas atendiendo a sus características y propiedades, siendo los más usuales las representaciones simbólicas y gráficas. Una representación sistemática como la del grafo da la oportunidad de trabajar nuevos métodos de representación.

Rel lensman y otros (2017) consideran dos tipos de representaciones gráficas tenidas en cuenta: situacionales y matemáticas. Las situacionales se caracterizan por tener escasa abstracción y ser más artísticas en lo referente a su apariencia, pudiendo hacer que el alumnado se pierda en detalles no relevantes.

Procesos cognitivos en la matematización	
Horizontal	Vertical
Identificar las matemáticas que presenta el problema.	Utilizar representación.
Representar el problema de una manera distinta.	Usar lenguaje simbólico, formal y técnico conjunto con sus operaciones.
Comprender la relación entre los lenguajes natural, simbólico y formal.	Ajustar, combinar e integrar modelos matemáticos.
Encontrar patrones y relaciones.	Argumentar.
Reconocer isomorfismos respecto a otros problemas.	Generalizar.
Traducir el problema a un modelo matemático.	

Tabla 1. Caracterización de la matematización horizontal y vertical, según Rico (2006: 287)

Las matemáticas se caracterizan por su abstracción, porque se realizan para representar las características matemáticas y facilitan el uso de métodos matemáticos (figura 2).

La experiencia

El taller se ha realizado en el curso de 1.º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología, con participación voluntaria, en el centro educativo IES Alpujarra de Órgiva situado en la provincia de Granada donde realizaba mi estancia de prácticas del Máster en Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato con especialidad en Matemáticas. Una versión más completa aparece en el Trabajo Fin de Máster realizado (Romera, 2021).

La descripción de la experiencia se divide en tres etapas: planificación, desarrollo y resultados.

PLANIFICACIÓN

Previamente se indagó otras investigaciones como el trabajo de Braicovich (2010), que estudia el impacto de la implementación de la teoría de grafos en geometría, concluyendo que el alumnado se ayuda de los grafos para representar y modelizar problemas. La autora se apoya en Rosenstein y otros (1997)

que destacan las cualidades instructivas de los grafos: aplicabilidad, atracción, adecuación y accesibilidad.

Núñez y otros (2004) realizan una propuesta para el aprendizaje de la combinatoria usando el problema de los puentes de Königsberg, apoyándose en la historia. A diferencia de estos trabajos, en la experiencia realizada no se introduce ni se necesita trabajar previamente el contenido de grafos para la resolución del taller.

Se han preparado seis actividades para su resolución aplicando grafos como herramientas de representación o matematización, pero sin necesidad de formular conceptualmente el concepto de grafo.

La actividad 1 se resuelve y discute en gran grupo con la finalidad de introducir los conceptos de grafo y sus elementos (vértice y aristas), que aparecerán de forma natural para desarrollar la experiencia y facilitar el uso del lenguaje matemático.

Actividad 1. *Tienes que moverte desde el punto O al punto A. ¿Cuál es el camino más largo si no está permitido pasar por una línea más de una vez?* (Balbuena y de la Coba, 1992).

La actividad 2 se llama «Recomendar amistades», para una red social. Considera que dos usuarios

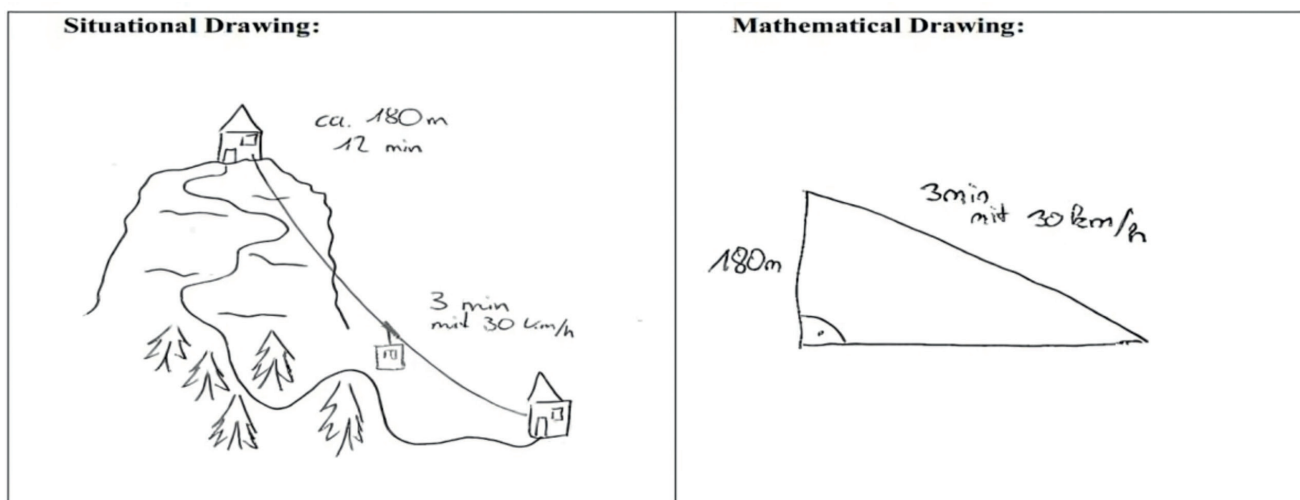


Figura 2. Representación situacional y matemática (Rellensman y otros, 2017)

tienen una relación fuerte si presentan tres o más cosas en común, en caso contrario, una relación débil. La red social recomienda como amigos al protagonista aquellos usuarios que tienen relación fuerte con sus amigos y los que tienen una relación fuerte con los anteriores. La actividad da información de varios usuarios y tendrán que buscar la lista de usuarios recomendados que daría el algoritmo de la red social.

La actividad 3 es una variante del problema clásico de «La mesa redonda» y da un paso más respecto a la actividad 2 que sirve de base, ya que además de matematizar el problema, se debe buscar una estrategia para la resolución. En este momento del curso ya han estudiado la combinatoria y puede encontrarse a alumnado que intente resolverlo mediante combinatoria, lo que resulta tedioso y se le indicaría el uso de otras estrategias.

La actividad 4 está basada en el teorema de los cuatro colores. Se le proporciona varias figuras para que las coloreen con el menor número posible de colores (figura 4).

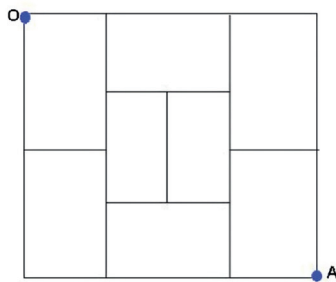


Figura 3. Circuito de la actividad 1

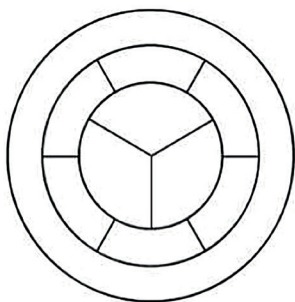


Figura 4. Ejemplo de gráfica para examinar si se verifica el teorema de los 4 colores, en la actividad 4 (Switch-math)

El grafo como instrumento no es tan intuitivo aquí, pero como ya han trabajado en las actividades anteriores, se quiere estudiar si, además de organizar datos, les puede suponer una buena herramienta de matematización.

En la actividad 5 deben encontrar el camino más óptimo dado un grafo (figura 5) buscando una estrategia de resolución, siendo necesario que apliquen un algoritmo. Existen dos soluciones posibles y es interesante observar sus estrategias.

Actividad 5. Se ha medido la distancia en horas entre 9 ciudades y se quiere llegar desde el Origen (O) hasta la ciudad Z en el menor tiempo posible. Las ciudades están representadas con letras mayúsculas, y el tiempo entre las ciudades está indicado en las líneas que las unen. Determina la ruta a seguir para llegar lo antes posible.

En la actividad 6 se le proporciona un mapa del municipio, extraído de Google Maps (figura 6), y deben buscar una vía de salida desde el instituto en el caso de catástrofe. En esta tarea entra en juego todo lo visto anteriormente.

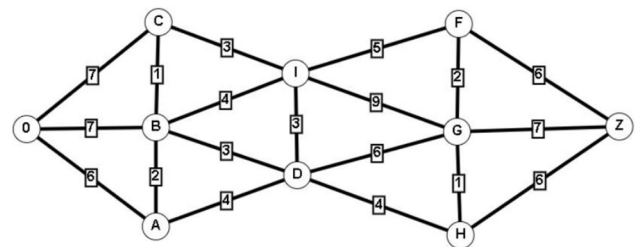


Figura 5. Grafo de la actividad 5



Figura 6. Mapa de la actividad 6

En resumen, se trata de una propuesta con representación de problemas clásicos de la teoría de grafos, como son el 1 y el 5 sobre recorridos y el 4 sobre el problema de los colores, y en la que plantean aplicaciones prácticas, como son las actividades 2, 3 y 6. La complejidad es creciente, especialmente en representaciones: en la 1 se parte de una representación gráfica dada, que se utiliza para introducir los conceptos e ideas necesarios; la 2 y la 3 parten de representación verbal, con vértices bien definidos; la 4 presenta los datos de manera gráfica, pero las regiones deben convertirse en vértices y las fronteras en caminos; en la 5 se parte de una representación gráfica, en la que es fácil diferenciar vértices y caminos, pero deben crear su propio algoritmo; y la 6 se presenta de manera gráfica, pero requiere tomar decisiones para identificar vértices y elegir un algoritmo.

Se prepara una hoja de registro para tomar apreciaciones de forma simultánea al desarrollo del taller, registrando así la existencia o ausencia de ciertos rasgos. Para su realización se han estudiado las variables, dimensiones e indicadores presentes en las actividades.

DESARROLLO

En el taller participan voluntariamente 19 estudiantes, fuera del horario de la clase habitual, trabajando inicialmente de forma individual en la actividad 1 y con puesta en común en gran grupo. Para comunicarse adecuadamente se introducen y nombran conceptos como «etiqueta», «vértice», «arista» y «grafo» conforme aparecen y se necesitan. Se muestran otros ejemplos de grafos como la estructura de una molécula, un mapa del metro, un árbol genealógico, etc. Finalmente, se les indica que pueden utilizar lo visto en esta actividad en el resto de tareas.

El resto de actividades se trabajó por grupos (de dos o tres alumnos) sin puesta en común. El alumnado se ayuda entre sí, discute los problemas y realizan preguntas. Se mantiene una observación no participante, recogiendo comportamientos y notas, estando pendiente del trabajo del alumnado, animándolos a seguir otras estrategias cuando sea necesario, y dándoles el visto bueno, además de comentar algunos resultados para que continúen con las actividades.

Durante el desarrollo se aprecia que el tiempo de realización previsto (1.45 h) se ha cumplido y algunos grupos han terminado 15 minutos antes. Las actividades que les resultan más interesantes son la 3 y la 4, generando más preguntas, debate y argumentaciones. El tiempo empleado en la actividad 4 ha sido mayor respecto a las otras para aquellos que han utilizado el grafo, mientras que el tiempo empleado en la creación y búsqueda de algoritmos presentes en las actividades 5 y 6 ha sido menor de lo esperado. En total se recogieron 19 respuestas de la actividad 1 (individual); de la 2, 3, 4 y 5 (parejas) 9 respuestas; y de la 6 (2 o 3 estudiantes) 5 respuestas.

Las variables estudiadas son la matematización, la representación, los procedimientos y el éxito de la resolución, y se les conceden las dimensiones que aparecen en la tabla 2.

Para interpretar las respuestas y adscribir las a las variables y sus dimensiones se usan los indicadores que aparecen en la tabla 3.

RESULTADOS

Primero se realiza una introducción donde se describe la cantidad de resultados obtenidos por actividad, la forma de cuantificar las apreciaciones anotadas y las variables estudiadas. Luego se desarrolla un balance de cada actividad, señalando los procesos más usados, y, por último, la descripción de la variable éxito en cada problemas cuantificando los logros.

Variables	Dimensiones
Matematización	– Horizontal – Vertical
Representación	– Verbal – Gráfica – Simbólica – Situacional
Procedimientos	– Destrezas – Razonamientos – Estrategias
Éxito	– Resuelve completamente – Resuelve parcialmente – No resuelve

Tabla 2. Variables y dimensiones de estudio

Tratamiento de los resultados

Para exponer los resultados nos basamos en las respuestas y en las apreciaciones anotadas durante la observación. Estas se han obtenido usando la hoja de registro, rellena durante la experiencia, formada por las variables, dimensiones e indicadores de las tablas 2 y 3. Se observa cómo trabaja cada grupo en cada actividad recabando

esta información en la hoja de registro. Por ejemplo, en la actividad 1 algunos alumnos han realizado conjeturas al debatir entre ellos, como «no es posible recorrer todas las líneas del mapa de una sola vez», pero no lo han escrito en la hoja de problemas, por tanto, la presencia de este hecho se ha señalado en la hoja de registro en el indicador correspondiente (tabla 3).

Dimensiones	Indicadores
Matematización horizontal	<ul style="list-style-type: none"> – Identificar las matemáticas del problema – Representar el problema de forma distinta – Comprender la relación entre los lenguajes natural, simbólico y formal – Encontrar patrones y relaciones – Reconocer isomorfismos respecto a otros tipos de problemas – Traducir el problema a un modelo matemático
Matematización vertical	<ul style="list-style-type: none"> – Utilizar representaciones – Usar lenguaje simbólico, formal y técnico conjunto con sus operaciones – Ajustar, combinar e integrar modelos matemáticos – Argumentar – Generalizar
Verbal	<ul style="list-style-type: none"> – Utilizar conceptos matemáticos adecuados
Gráfica	<ul style="list-style-type: none"> – Representación matemática del grafo
Simbólica	<ul style="list-style-type: none"> – Uso del punto como vértice y la flecha como arista – Uso de etiquetas para vértices y aristas – Representar dirección de aristas
Situacional	<ul style="list-style-type: none"> – Representación poco abstracta – Apariencia artística
Destrezas	<ul style="list-style-type: none"> – Representación del grafo y sus caminos – Uso de notación y lenguaje matemático formal – Organizar datos – Conjeturar – Operar – Argumentar
Razonamientos	<ul style="list-style-type: none"> – Obtener patrones y regularidades – Identificar la información de un grafo – Búsqueda de ejemplos y contraejemplos – Reconocimiento de actividades similares – Justificar resultados y procedimientos
Estrategias	<ul style="list-style-type: none"> – Comparar caminos – Cribar y seleccionar información relevante – Utilización de algoritmos – Matematizar – Reformular problema – Uso de lenguajes: verbal, numérico y gráfico

Tabla 3. Dimensiones e indicadores ligados a las variables

Para cuantificar las apreciaciones sobre las variables, que junto con la hoja de problemas nos da un balance general de las respuestas y el éxito, nos ayudamos de tres tablas. Una para estudiar el grado y tipo de matematización, otra para estudiar las destrezas, los razonamientos y las estrategias trabajadas, siendo estas dos tablas comunes en todas las actividades apoyándonos en las 2 y 3 de este mismo texto, y, en la última, específica para cada actividad, se resumen los indicadores más trabajados y el éxito o no de la solución del problema de cada grupo.

Balance de cada actividad

La actividad 1 permite introducir el grafo y movilizar la representación verbal, hablando de líneas, caminos máximos, recorrido, etc. Antes de introducir el concepto de grafo etiquetado, dos de los 19 estudiantes realizan representación simbólica, etiquetando aristas y adjudicándoles pesos. En la resolución emplean el método de ensayo-error, aunque realizan conjeturas.

En la actividad 2, siete grupos realizan representaciones. Uno realiza primero una tabla y luego un árbol (grafo), cinco grupos que utilizan grafos hacen representación simbólica, tomando letras o nombres de los usuarios como vértices del grafo, o fijando etiquetas a las aristas para representar el tipo de relación como se muestra en la figura 7.

De forma general en los nueve grupos se encuentran de forma recurrente los indicadores marcados en la tabla 4.

Los dos grupos que no realizan representaciones trabajan sustrayendo la información sobre el enunciado del problema, pero no obtienen una resolución correcta. Los grupos que usan grafo y matematizan presentan los procesos cognitivos recogidos en la tabla 5.

En la actividad 3, tres grupos utilizan grafos para su resolución, otros tres usan una representación situacional trabajando mediante ensayo-error, y los últimos tres grupos utilizan un esquema. Los grupos que usan grafo presentan destrezas como la representación del grafo y sus caminos, notación matemática y representación correcta de la dirección de las aristas, así como el razonamiento para buscar ejemplos y justificar los resultados. Las estrategias más utilizadas son la comparación de caminos, la selección de datos, la matematización y el lenguaje matemático. El uso del grafo los lleva a seleccionar los datos adecuados y a movilizar el proceso de matematización.

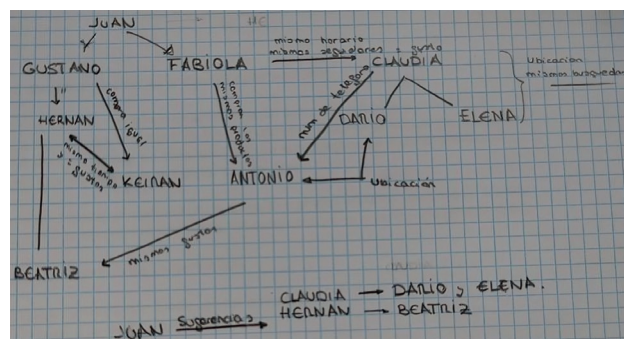


Figura 7. Respuesta de un grupo: ejemplo de uso del grafo como matematización y organizador de datos

Destrezas		Razonamientos		Estrategias	
Representación grafo y caminos	X	Obtener patrones y regularidades		Comparar caminos	
Notación matemática		Identificar información grafo	X	Cribar y seleccionar datos	X
Conjeturar		Búsqueda ejemplos y contraejemplos		Usar algoritmos	
Operar		Reconocer actividades similares		Matematizar	X
Argumentar		Justificar resultados y procedimientos	X	Reformular problema	X
Representación correcta dirección aristas				Uso lenguaje verbal, numérico y grafo	X

Tabla 4. Destrezas, razonamientos y estrategias presentes en las respuestas de la actividad 2

Matematización horizontal		Matematización vertical	
Identificar matemáticas del problema	X	Utilizar representaciones	X
Representar el problema de una manera distinta	X	Usar lenguaje simbólico, formal y técnico con sus operadores	
Comprender la relación entre lenguaje natural, simbólico y formal	X	Ajustar, combinar e integrar modelos matemáticos	
Encontrar patrones y relaciones	X	Argumentar	X
Reconocer isomorfismo respecto a otros problemas	X	Generalizar	
Traducir el problema a un modelo matemático			

Tabla 5. Indicadores de matematización presentes en la resolución de la actividad 2

En la actividad 4, cinco grupos utilizan el grafo, destacando el proceso de matematización, la realización de conjeturas y argumentos apoyándose en el grafo, potenciando así la matematización vertical en mayor medida (figura 8).

En la actividad 5 todos los grupos son capaces de identificar las partes del grafo y su significado, incorporando el lenguaje matemático para la comunicación y argumentación. Además, reconocen problemas similares en otras materias y de la vida cotidiana,

comprobando que es una buena herramienta para crear o utilizar algoritmos.

En la actividad 6 hay grupos que toman como vértices los edificios y negocios señalados por el propio Google Maps, y las aristas como las calles que unen esos vértices (figura 9).

Otros grupos realizan la ruta por calles, considerando los vértices como puntos de esas calles, y tomando puntos de referencia no marcados en el mapa (figura 10).

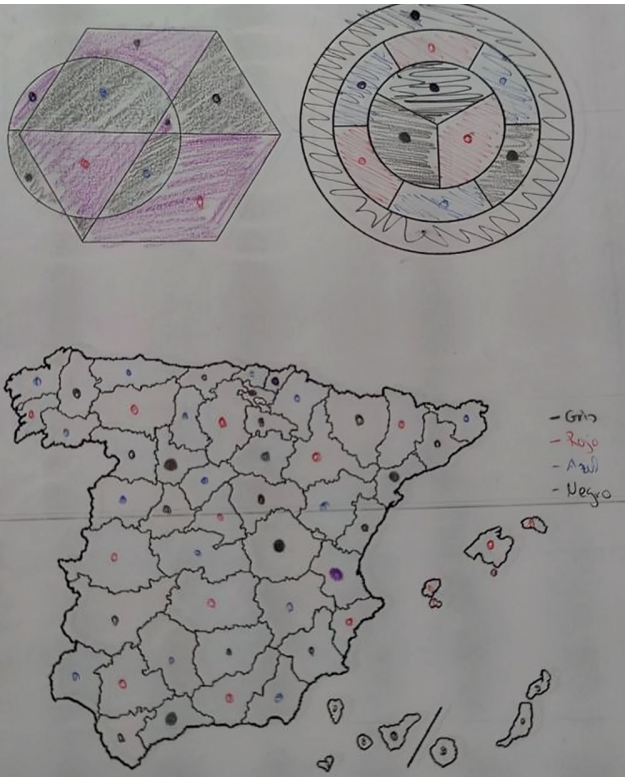


Figura 8. Ejemplo matematización para el teorema de los cuatro colores



Figura 9. Ejemplo 1: respuesta de la actividad 6

Todos matematizan usando el grafo y debaten qué componentes serían los vértices y aristas, argumentando y justificando los procesos cuando comparan las distintas posibilidades. Así, reflexionan de una forma más profunda, dándose cuenta de otras actividades similares.

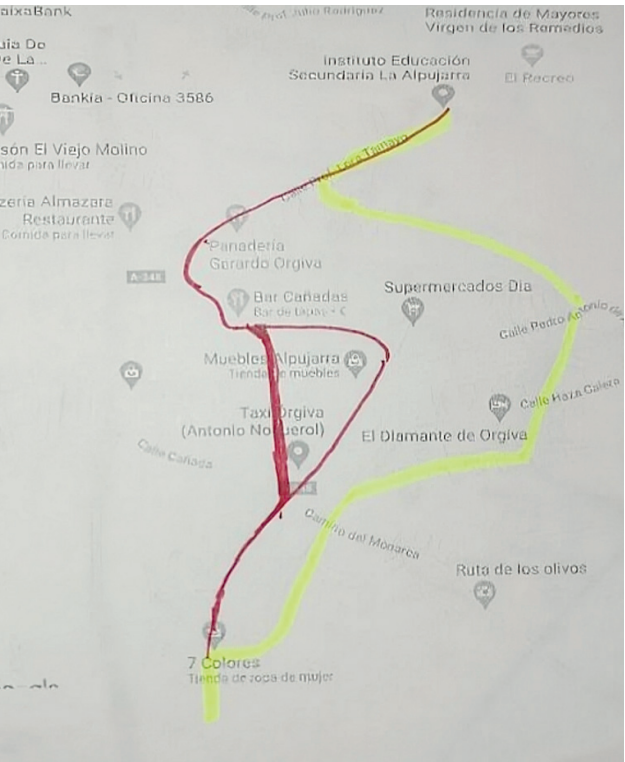


Figura 10. Ejemplo 2 ejercicio de la actividad 6

Variable éxito

Para medir la variable éxito se realizó una tabla para cada actividad con los indicadores más utilizados por cada grupo y con el tipo de solución obtenida.

En la actividad 1, un alumno encuentra un camino de 24 unidades, siete alumnos de 22 unidades, uno de 21 unidades, nueve de 20 unidades y uno de 18 unidades, siendo el camino de 24 unidades el máximo encontrado en el grupo.

En la actividad 2, usando la tabla mencionada (tabla 6), se observa que el uso de grafo, la representación, el etiquetado y la selección de datos de forma correcta, lleva a una solución exitosa. Además, el uso de grafos va ligado al proceso de matematización del problema.

En la actividad 3 todos llegan a una solución exitosa de forma completa, tanto si han usado grafo como si no. Sin embargo no todos desarrollan los mismos procesos cognitivos, siendo los alumnos que usan el grafo los que más procesos cognitivos han trabajado.

Para la actividad 4 se obtienen los resultados presentados en la tabla 7.

En la actividad 5, dos grupos llegan a una solución correcta y el resto a una solución incompleta. El indicador que posiblemente explica esta diferencia

GR	Grafo	Etiquetado	Matemati- zación	Interpretación grafo	Selección datos correcta	Reformulación problema	Uso lenguaje verbal y grafo	Justificación	Solución Correcta
1	X	X	X	X	X	X	X	X	X
2	X	X	X	X	X	X	X	X	X
3	X	X	X	X	X	X	X	X	X
4					X				
5	X		X			X	X	X	
6	X	X	X			X	X	X	
7					X				
8	X		X	X	X	X	X	X	X
9	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Tabla 6. Los indicadores más usados y la variable éxito de la actividad 2

GR	Grafo	Conjeturar	Argumentar	Patrones y regularidades	Matematización	Lenguaje	Solución (X/3)
1	X	X	X	X	X	X	3/3
2	X	X		X	X	X	3/3
3		X	X				
4		X	X				0/3
5	X			X	X	X	2/3
6	X	X	X	X	X	X	2/3
7			X	X			1/3
8	X		X	X	X	X	3/3
9	X	X	X	X	X	X	3/3

Tabla 7. Los indicadores más usados y la variable éxito de la actividad 4

es la justificación de los procedimientos del uso del algoritmo.

En la actividad 6, cuatro de ellos comparan varios caminos, usan un algoritmo para encontrar el óptimo y dan la solución correcta, mientras el otro grupo da una solución sin comparar otras opciones, siendo una de las actividades con más logro de aciertos junto con la actividad 3.

Conclusiones

Nuestra experiencia muestra que el grafo es una herramienta que se puede introducir de forma natural al estudiantado. Aunque ha sido una introducción breve e informal del concepto los estudiantes han utilizado esta herramienta sin entrar a una explicación profunda.

El alumnado que ha utilizado el grafo ha involucrado el proceso de matematización, mejorando su resolución en los problemas y colaborando en el desarrollo y adquisición de la competencia matemática. La dimensión de la matematización más desarrollada es la horizontal, en la que se llevan a cabo varios procesos cognitivos, de los que se resaltan:

- Identificar las matemáticas que presenta el problema.
- Representar el problema de una manera distinta.

La destreza más trabajada ha sido la representación del grafo y sus caminos para la resolución de los problemas, mostrando mayor utilidad que otro tipo de representaciones. También destaca la representación correcta del grafo dirigido y la argumentación. En los procedimientos se ha apreciado como el grafo ha facilitado la justificación de los resultados y la correcta identificación de la información. Por último, los procedimientos que destacan han sido el uso de estrategias, como la comparación de caminos, el cribado y la selección de datos, y, sobre todo, la matematización, así como el uso de lenguaje verbal, numérico y grafo.

Se aprecia que el alumnado ha usado el grafo como un «organizador» de los datos, coincidiendo en esto con el trabajo de Braicovich (2010). Además, gracias a la representación gráfica, el alumnado ha podido recordar situaciones y problemas similares en otras materias, tomando conciencia del uso de esta herramienta matemática y su utilidad en otras áreas.

Referencias bibliográficas

- ALSINA, C. (2010), *Mapas del metro y redes neuronales. La teoría de grafos*, RBA Coleccionables, Barcelona.
- BALBUENA, L. y M. D. de la COBA (1992), *La matemática recreativa visto por los alumnos*, La Laguna: Proyecto Sur, Granada.
- BRAICOVICH, T. (2010), «La geometría de los grafos o los grafos de los poliedros», *V Coloquio Internacional*

- Enseñanza de las Matemáticas*, Pontificia Universidad Católica del Perú, 49-60.
- JA (2021), *Orden de 15 de enero de 2021, por la cual se desarrolla el currículo de Bachillerato y ESO en la Comunidad Autónoma de Andalucía*, Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, n.º 7.
- LUPIÁÑEZ, J. L. (2016), «Sistemas de representación», en L. Rico y A. Moreno (coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria*, Pirámide, Madrid, 119-137.
- MECD (2015), *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la ESO y Bachillerato*, Boletín Oficial del Estado, n.º 3.
- NUÑEZ, J., M. ALFONSO, S. BUENO, M. R. DIÁNEZ y M. C. de ELÍAS (2004), «Siete puentes, un camino: Königsberg», *Suma*, n.º 45, 69-78.
- OECD (2010), *PISA 2012, Mathematics Framework*, OECD Publications, París.
- RELLENSMANN, J., S. SCHUKAJLOW y C. LEOPOLD (2017), «Make a drawing. Effects of strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students' mathematical modelling performance», *Educ. Stud. Math*, n.º 95, 53-78.
- RICO, L. (2006), «Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas», *Revista de educación*, n.º 1, 275-294.
- ROMERA, L. (2021), *Breve investigación sobre el empleo del grafo en el aula*, Trabajo Fin de Máster Universitario del Profesorado de Educación Secundaria y Bachillerato (TFM), Especialidad Matemáticas, UGR.
- ROSENSTEIN, J., D. FRANZBLAU y F. ROBERTS (1997), *Discrete Mathematics in the Schools*, American Mathematical Society NCTM.

Pablo Flores Martínez

Universidad de Granada
<pflores@ugr.es>

Luz Romera Cara

Universidad de Granada
<luz91rc@gmail.com>