

DEL MMACA AL AULA

Diario de diseño de los Drawing Dice

MMACA

SUMA núm. 104
pp. 61-68

Artículo solicitado por *Suma* en abril de 2023 y aceptado en junio de 2023

Proyectos europeos, una oportunidad para desarrollar nuevos materiales

En el MMACA llevamos ya algunos meses implicados en la realización de dos proyectos europeos del programa ERASMUS+ (figura 1).

Uno de ellos, *Numeric[All]*, va orientado al desarrollo de materiales didácticos para adultos con poca formación académica. En él intervienen, junto al MMA-

CA, las entidades AKMI (Grecia), Citizens in Power (Chipre), Logopsycom (Bélgica), y Ludus (Portugal).

El otro, SMEM (*Significant Mathematics for Early Mathematicians*), se centra en alumnos en la franja de edad comprendida entre los 3 y 8 años. Los socios que intervienen en este otro proyecto son Fermat Science (Francia), IMAGINARY (Alemania), Mathematikum (Alemania), MS Archimedes (Serbia) y, de nuevo, Citizens in Power (Chipre).

En ambos proyectos nos ocupamos del diseño y pilotaje de varios módulos expositivos, pensados desde nuestro estilo museográfico, pero también con versiones para el aula que se incluirán en una maleta didáctica. Además, en el caso del proyecto de adultos, se proporcionará una versión *Do It Yourself*, con instrucciones claras para fabricar cada módulo con materiales y herramientas que están al alcance de cualquiera.



Figura 1. Proyectos europeos *Numeric[All]* y SMEM

En consecuencia, los requisitos formales del material que estamos desarrollando para estos proyectos son bastante restrictivos:

- Tiene que ser atractivo para personas que se alejan del perfil de nuestro público habitual (ocuparnos mejor de este público es, de hecho, el motivo principal para participar en ambos proyectos).
- Tiene que favorecer la exploración autónoma, sin requerir la realización de un taller guiado, despertando interés y provocando preguntas en el visitante.
- Tiene que poder fabricarse en formato museográfico: madera, gran tamaño, sin apenas instrucciones, etc.
- Tiene que poder replicarse en un aula: cartón, fotocopidora, tamaño pupitre, etc.
- Tiene que poder incluirse en una maleta pedagógica: ligero, compacto, resistente, etc.

A continuación detallaremos cómo esos requisitos formales han dado forma, en parte, a nuestros diseños.

Dándole una nueva dimensión a la geometría plana

La geometría plana es una fantástica puerta de entrada a la matemática para personas de cualquier edad. Los materiales de tipo geométrico invitan a la manipulación lúdica y, con ella, a la exploración. Por eso hemos querido incluir en ambos proyectos un módulo dedicado a esta rama.

La mayoría de materiales que permiten trabajar la geometría plana constan de un gran número de piezas con las que podemos formar figuras y patrones. En un contexto expositivo, esto implica disponer de una mayor superficie, así como un mayor coste de fabricación y mantenimiento del módulo. Además, en muchos casos solo una parte de las piezas se usa en cada construcción, quedando las otras desaprovechadas (figura 2).

Una posible solución a estos inconvenientes consiste en agrupar estas piezas planas de seis en seis en las caras



Figura 2. Pattern Blocks



Figura 3. De 6 losetas a un cubo

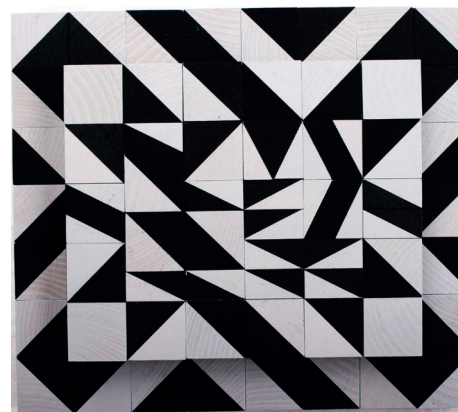


Figura 4. Ornabo (arriba) y Jomili Cubes (abajo)

de un cubo (figura 3). Esto nos permitiría trabajar, por ejemplo, con 24 losetas cuadradas con tan solo 4 objetos, que se estarían usando todo el rato. El precio a pagar en términos de flexibilidad (ahora algunas losetas forman parte del mismo cubo y, por lo tanto, no pueden combinarse entre ellas) queda compensado por el hecho de que los cubos son más fáciles de manipular que las figuras planas y, en nuestra experiencia, suelen atraer más la atención del público.

La idea de crear cubos con diferentes patrones geométricos en sus caras ha sido ya explotada con fines lúdicos y educativos. Un ejemplo de ello sería Ornabo (figura 4), un conjunto de 25 cubos de madera cuyas caras contienen triángulos, rectángulos y sectores circulares con los que formar figuras tanto geométricas como representaciones de objetos reales. Otro buen ejemplo serían los Jomili Cubes (figura 4), que combinan cubos y medios-cubos con sencillos patrones triangulares en blanco y negro.

En ambos ejemplos, el material consta de un gran número de piezas y se orienta a la creación artística, alejándose, por lo tanto, de algunos de nuestros objetivos.

Una idea, muchas opciones

Agrupar las losetas de seis en seis en las caras de un cubo es solo el punto de partida de nuestro trabajo. Quedan muchas decisiones por tomar antes de dar por acabado el diseño de este módulo: número de dados, patrones a emplear, material utilizado, actividades propuestas, etc.

LOS PATRONES DE LAS CARAS

El factor que quizá marca de manera más contundente el resto del diseño es, sin duda, el diseño de las caras de nuestros dados. Aquí entran a escena varias preguntas fundamentales:

¿Deben ser todos los dados iguales? Es evidente que tener dados diferentes permite aumentar muchísimo el número de figuras que podremos formar, pero es una idea que descartamos rápidamente por resultar confuso y frustrante para el usuario.

¿Tienen que encajar todas las caras entre sí? Exigir que cualquier cara encaje perfectamente con cualquier otra es bastante restrictivo, pero abre la puerta a explorar el material desde un punto de vista puramente combinatorio (¿Cuántas figuras diferentes puedes formar con estos 4 dados?). Por otra parte, permitir que algunas caras no encajen entre ellas puede facilitar la creación de figuras semejantes. Buscando un equilibrio entre ambas opciones, lo mejor será restringir los patrones de manera que sólo toquen las aristas en el punto medio o sus extremos (figura 5).

¿Qué tipo de patrones podemos dibujar en cada cara? De cara a mantener los diseños lo más sencillos posible, usaremos caminos poligonales o arcos de circunferencia delimitados por los puntos comentados, empleando un máximo de dos segmentos en el primer caso y un solo arco en el segundo. Aun con estas restricciones, disponemos de muchas opciones válidas entre las que escoger (figuras 6, 7 y 8).

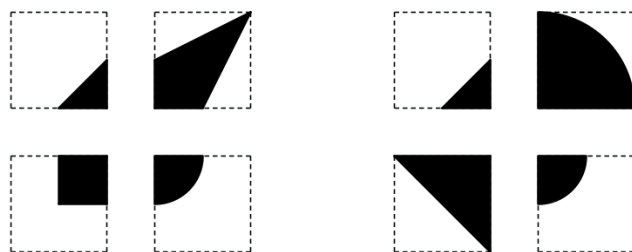


Figura 5. Diseño basado en el punto medio de cada cara para que todas encajen entre sí (izquierda) versus diseño basado en el punto medio y en las esquinas (derecha)

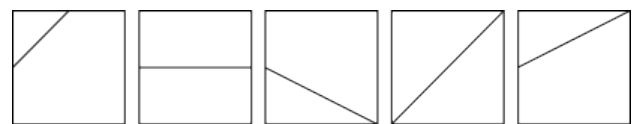


Figura 6. Patrones con un segmento

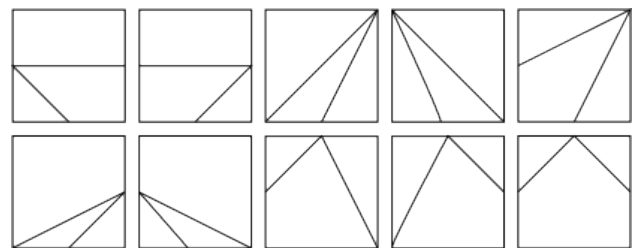


Figura 7. Patrones con dos segmentos

En vista a las opciones exploradas hasta el momento, merece la pena observar que algunos patrones son asimétricos, y su inclusión en los dados requerirá, en general, usar dos caras de los dados (una para cada posible orientación del patrón) si queremos formar figuras simétricas con ellos.

También parece buena idea incluir el centro del cuadrado como vértice posible para los segmentos poligonales (figura 9).

¿El diseño consiste en líneas o en áreas? Un diseño basado en áreas es, a priori, más intuitivo y vistoso. Sin embargo, algunas figuras requieren el doble de patrones cuando trabajamos con áreas en vez de líneas, haciendo de estas últimas una opción más versátil (figura 10).



Figura 8. Patrones con un arco

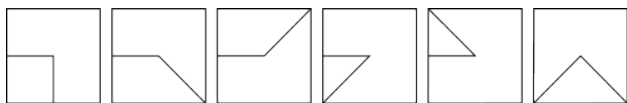


Figura 9. Patrones con dos segmentos partiendo del centro del cuadrado

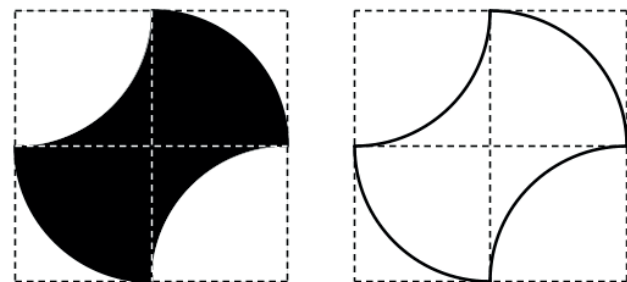


Figura 10. La figura de la izquierda, basada en áreas, requiere dos patrones (complementarios entre sí) mientras que la figura de la derecha, basada en líneas, se ha formado con cuatro copias de un único patrón

NÚMERO DE DADOS

Es evidente que el número de dados influirá en el tipo de actividades que podemos proponer. El mínimo que consideramos viable es de 4 dados, que,

de manera automática, el visitante tiende a agrupar en un cuadrado de tamaño 2×2 . También sería razonable usar 6 ($= 2 \times 3$) o 9 ($= 3 \times 3$) dados, pero ello nos obligaría a tener caras que cumplan diferentes roles (caras-esquina, caras-arista y caras-centrales) mientras que en la versión con 4 dados todas tienen el mismo papel (figura 11).

Otra opción interesante sería la de utilizar ocho dados. Esto permitiría trabajar a dos personas a la vez (generando una conversación) o realizar varios diseños simultáneamente (para poder compararlos), siendo ambas actividades muy deseables desde el punto de vista didáctico (figura 12).

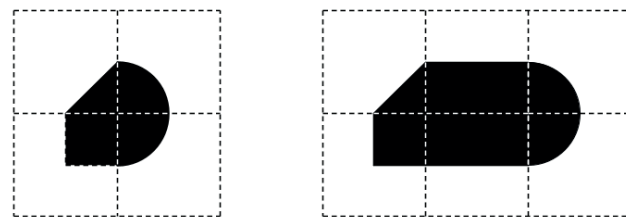


Figura 11. En la figura de la izquierda todos los dados cumplen la misma función (esquinas), mientras que en la figura de la derecha cumplen dos roles (esquinas y aristas)

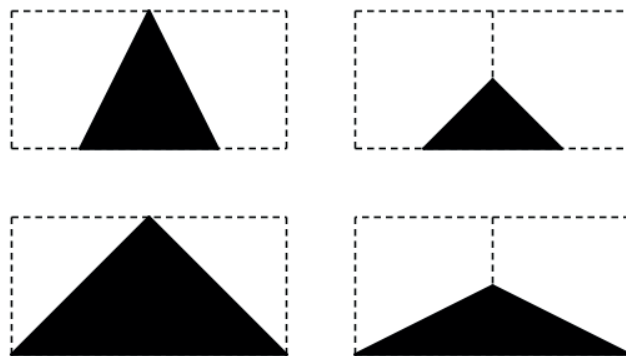


Figura 12. ¿Qué relación hay entre estas 4 figuras?

ERGONOMÍA Y PROCESO DE FABRICACIÓN

Para asegurar que el usuario pueda concentrarse en los aspectos matemáticos del material, es importante trabajar con dados que sean cómodos, resistentes y fáciles de manipular. Aquí, sin duda, la mejor opción para un museo es la madera (grabada mecánicamente o con un láser) (figura 13).

Dicho esto, también estamos experimentando con otros materiales que simplifiquen el proceso de fabricación en el aula. Por un lado, hemos considerado la opción de hacer una versión para impresora 3D, que es un equipamiento cada vez más presente en centros educativos (figura 14).

Tanto el plástico como la madera, permiten marcar los patrones en relieve, de manera que puedan ser usados por personas invidentes. De hecho, estamos colaborando con la ONCE para crear toda una línea de materiales especialmente adecuados para este público.

Por otro lado, estamos buscando opciones aún más fáciles de fabricar, haciendo uso de la papiroflexia. Partiendo de seis papeles cuadrados, existen varios modelos conocidos como son el cubo de Paul Jackson o el cubo Sonobe. Una vez plegados, se pueden

pintar las formas deseadas en sus caras, y el proceso de fabricación es una actividad didáctica interesante en sí misma.

También barajamos una versión recortable con los patrones pre-dibujados para simplificar el proceso en caso de querer fabricar gran cantidad de dados (figura 15). Esta versión estaría formada por menos piezas de papel que se encajarían formando una especie de nudo borromeo.

El diseño de este tipo de materiales es una oportunidad excelente para profundizar en los aspectos geométricos del proceso de construcción y el desarrollo de nuevas técnicas de fabricación.



Figura 13. Prototipo en madera

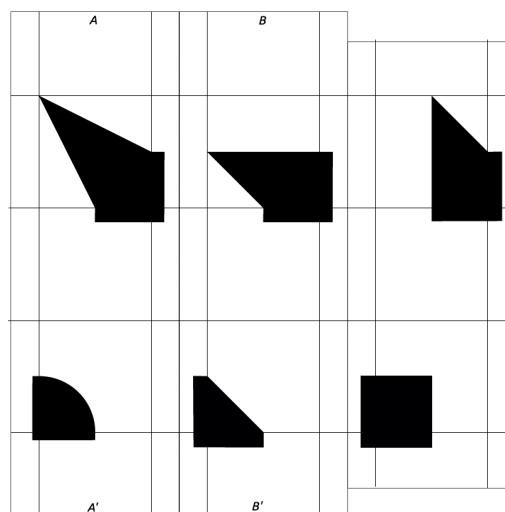


Figura 14. Prototipo para impresora 3D



Figura 15. Prototipo recortable

INSTRUCCIONES Y ACTIVIDADES DE AULA

Finalmente, es necesario diseñar instrucciones, tanto para las personas que van a usar el material como para el personal docente que las acompañará.

Para que el material sea autoexplicativo se pueden sugerir algunas imágenes de muestra, siempre evitando que el panel se convierta en un manual de instrucciones, muy distante de la filosofía que siguen los módulos expositivos del MMACA. Cuando incluimos texto procuramos que sea lo más breve posible. Además, en el caso del proyecto destinado a adultos, *Numeric[All]*, el público al que va dirigido puede tener dificultades para leer, así que incluir imágenes o iconografía facilita tener una primera idea para manipular el material.

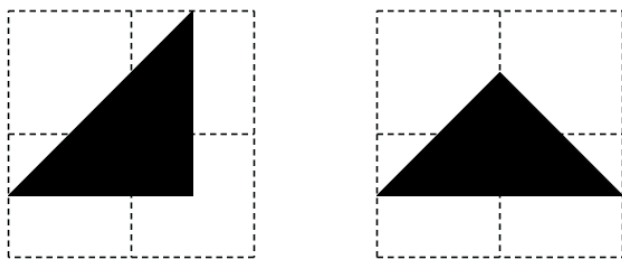


Figura 16. ¿Qué relaciones hay entre estas dos figuras?
¿Cuál es más grande?

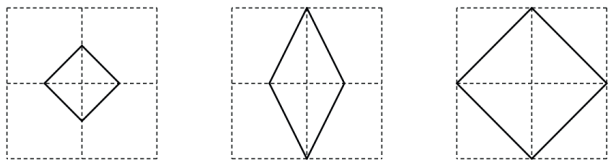


Figura 17. ¿Qué relaciones hay entre estas tres figuras?

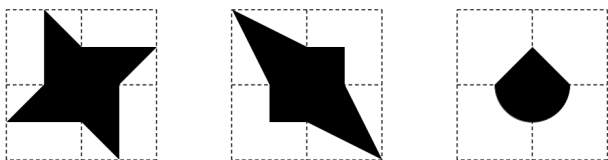


Figura 18. La figura de la izquierda tiene simetría de rotación. La figura de la derecha tiene simetría de reflexión. La figura central tiene ambas. ¿Cuántas figuras diferentes puedes formar con estos dados?
¿Cuántas tendrán algún tipo de simetría?

Así, los Drawing Dice se podrían acompañar de unas instrucciones consistentes en apenas tres o cuatro ejemplos y un par de preguntas adaptadas a las edades y los niveles de formación (ver los ejemplos de las figuras 16, 17, 18, 19 y 20).

A partir de estos ejemplos es fácil desarrollar actividades guiadas que exploren conceptos clave de la geometría plana:

- Vocabulario básico para referirse a figuras geométricas (vértice, arista, arco, etc.).
- Cálculo de perímetros usando el teorema de Pitágoras.
- Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples.
- Clasificación de polígonos, especialmente de triángulos y cuadriláteros.
- Semejanza de figuras y factores de escala de longitudes y áreas.
- Distinción entre fondo y forma, y su uso para calcular áreas.
- Traslación, rotación y simetría de figuras planas
- Combinatoria básica.

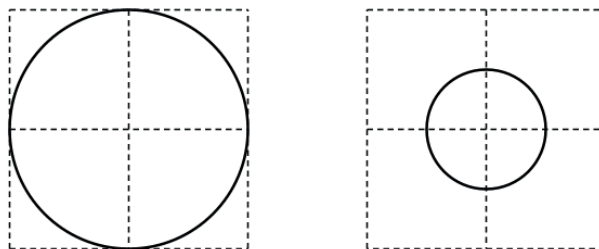


Figura 19. ¿Cuántas figuras diferentes puedes formar con los 4 arcos grandes?
¿Cuántos círculos pequeños caben dentro del grande?

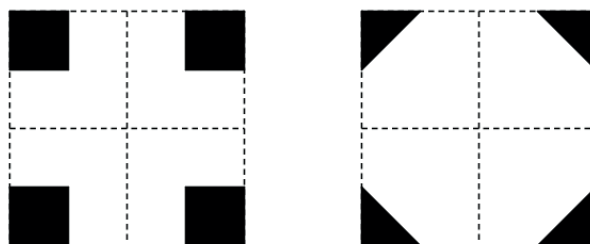


Figura 20. Sabiendo que cada dado mide 6 cm de ancho, calcula el área de la cruz y el octógono blancos

Por supuesto, este temario sólo nos da una idea de cuán flexible es el material. Para el público de menor edad, o con menor formación, es posible adaptar cada propuesta de manera que no requiera conocimientos previos o argumentos formales.

Poniendo a prueba el material

Tras realizar algunas pruebas internas, hemos concretado las ideas anteriores en dos versiones de este módulo, una para el proyecto *Numeric[All]* y otra para el proyecto SMEM.

En el primer caso, se ha optado por cuatro dados iguales con un diseño basado en líneas, ya que permiten un mayor rango de posibilidades a un docente que trabaje con adultos. Aún estamos valorando qué variante de estos dados se incluye finalmente en el proyecto (figuras 21 y 22).

En el segundo caso, se ha preferido trabajar con cuatro dados iguales con un diseño basado en áreas, porque van dirigidos a alumnos de temprana edad. También se ha decidido añadir un marco de madera que delimita el espacio de trabajo y facilita la manipulación de los dados en estas edades (figura 23).

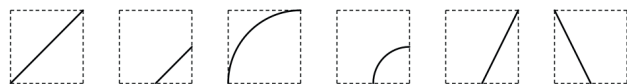


Figura 21 Variante 1 *Numeric[All]*

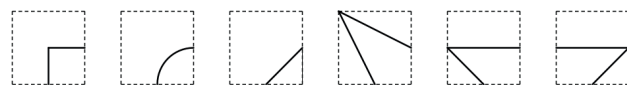


Figura 22 Variante 2 *Numeric[All]*

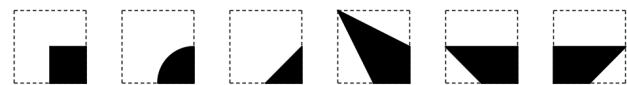


Figura 23. Versión SMEM

En el momento de redactar este artículo, ambos proyectos se encuentran en fases diferentes. En el caso de *Numeric[All]* la fase de pilotaje final con adultos no se ha realizado todavía. En el caso del proyecto SMEM sí se ha pilotado el material en tres centros de Cornellá (Dolors Almeda, Escola Martinet y Sant Ildefons) y, en paralelo, en varias escuelas de los otros países miembros del proyecto.

Las maestras y maestros de estos centros han hecho una observación del tipo de acercamiento e interacción de los niños con los diferentes materiales SMEM y han respondido a un formulario, diseñado dentro del proyecto, y común para todos los países.

Los Drawing Dice, en concreto, han funcionado muy bien, siendo un material muy autoexplicativo y motivador. Tanto los niños más pequeños como los mayores han mostrado interés por él y han buscado figuras nuevas, diferentes de las mostradas como ejemplo en el panel.

Una vez pongamos en común las valoraciones de los pilotajes con el resto de participantes internacionales, tanto en un proyecto como en el otro, veremos si es necesario modificar el diseño del material o las actividades ligadas a él.



Figura 24. ¡Drawing Dice para todos los gustos!

Conclusiones

En este artículo hemos explicado el proceso que seguimos en el MMACA a la hora de diseñar nuestros materiales pedagógicos, incluyendo el

tipo de decisiones a tomar y los factores que las determinan. Esperamos que esta exposición sea inspiradora y animamos a todo el mundo a crear y compartir su propia versión de los Drawing Dice (figura 24).

MMACA

Museu de Matemàtiques de Catalunya,
Cornellà de Llobregat (Barcelona)
<contacte@mmaca.cat>