Embaldosamos hasta el infinito

Isabel Hidalgo Rangel
Daniel Ruiz Aguilera

SUMA+ núm. 104
pp. 69-74
Artículo solicitado por *Suma* en abril de 2023 y aceptado en junio de 2023

Una de las sesiones de ESTALMAT en Illes Balears (desde su inicio, en el curso 2016-2017), se dedica al estudio de las teselaciones del plano. Para ello se propone la exploración del material *Pattern blocks*, creado en los años 60 (*Elementary Science Study,* 1974), que consiste en un juego de piezas geométricas de colores y formas diversas (figura 1), y con el que se puede trabajar buena parte de la geometría plana. Uno de los antecedentes más remarcables del uso de juego de piezas de mosaico para la enseñanza de propiedades geométricas es de Puig Adam (1956). Para esta sesión el material utilizado es: una caja de *Pattern blocks* para cada grupo de tres alumnos, una cámara de documentos para poder visualizar las construcciones y trasladar las preguntas a partir del material directamente, una pantalla y ordenador para proyectar un simulador virtual y GeoGebra, y una pequeña ficha a modo de registro. También es necesario unas tijeras para cada grupo.

La sesión comienza con un primer momento de manipulación libre (figura 2). Se reparte una caja de *Pattern blocks* por grupo y se anima a los alumnos a construir aquello que les apetezca. Ya desde este momento aparecen construcciones geométricas muy diversas, con simetrías, traslaciones y rotaciones (algunas en forma de mandalas), aunque también aparecen otras figuras con formas humanas, animales y flores, entre otras. Con ello se pretende motivar a los alumnos para el estudio posterior: *¿qué vamos a hacer hoy*?

La primera propuesta consiste en un estudio de las figuras geométricas con las que han estado jugando. Después de este primer contacto, los alumnos observan que las piezas de un mismo color corresponden a una misma forma geométrica. En este momento se hace un breve repaso por los nombres de dichas figuras: cuadrado (naranja), triángulo equilátero (verde), hexágono regular (amarilla), trapecio (roja), rombo (azul) y rombo (blanca). A continuación, se traslada la primera pregunta: *¿qué miden los ángulos interiores de las piezas?* La dificultad radica en encontrar dichas medidas sin un transportador de ángulos, usando únicamente la comparación. Los patrones elegidos suelen ser el ángulo recto del cuadrado, o el ángulo de 60º del triángulo equilátero. A partir de ellos, con composición y descomposición, se descubren el resto de los ángulos. Para animar a la justificación,

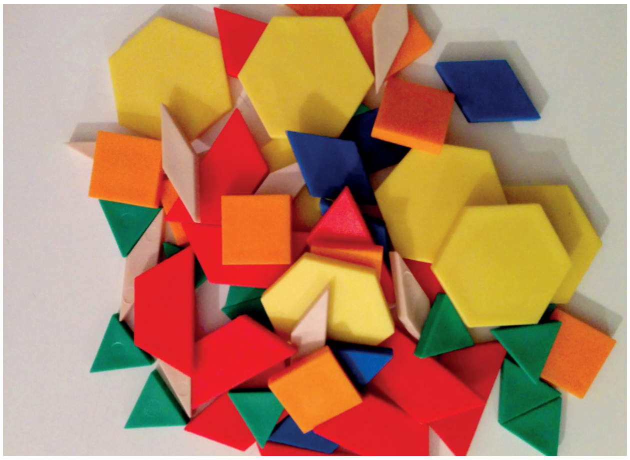


Figura 1. *Pattern blocks*

se propone la pregunta *¿por qué*? a cada uno de los resultados (figura 3). Así, se llega a la conclusión de que los ángulos interiores de las piezas son de 30°, 60°, 90°, 120°, 150°. En este momento la justificación llega a pedir la explicación de porqué el ángulo completo tiene 360° (y no 100°, o 400°), llegando a la conclusión de que dicha convención pudo ser motivada por practicidad, ya que 360 tiene una gran cantidad de divisores.

El estudio de las piezas continúa con la búsqueda del perímetro y el área de cada una de las piezas, teniendo en cuenta que la unidad de longitud es el lado del cuadrado. Si bien el perímetro es una tarea muy asequible (aparecen únicamente longitudes enteras), el cálculo de las áreas no lo es tanto. En este caso, el patrón unidad de superficie que adoptan los alumnos es doble: el triángulo equilátero y el cuadrado. A partir del triángulo equilátero se pueden componer el hexágono, el rombo azul y el trapecio. En una

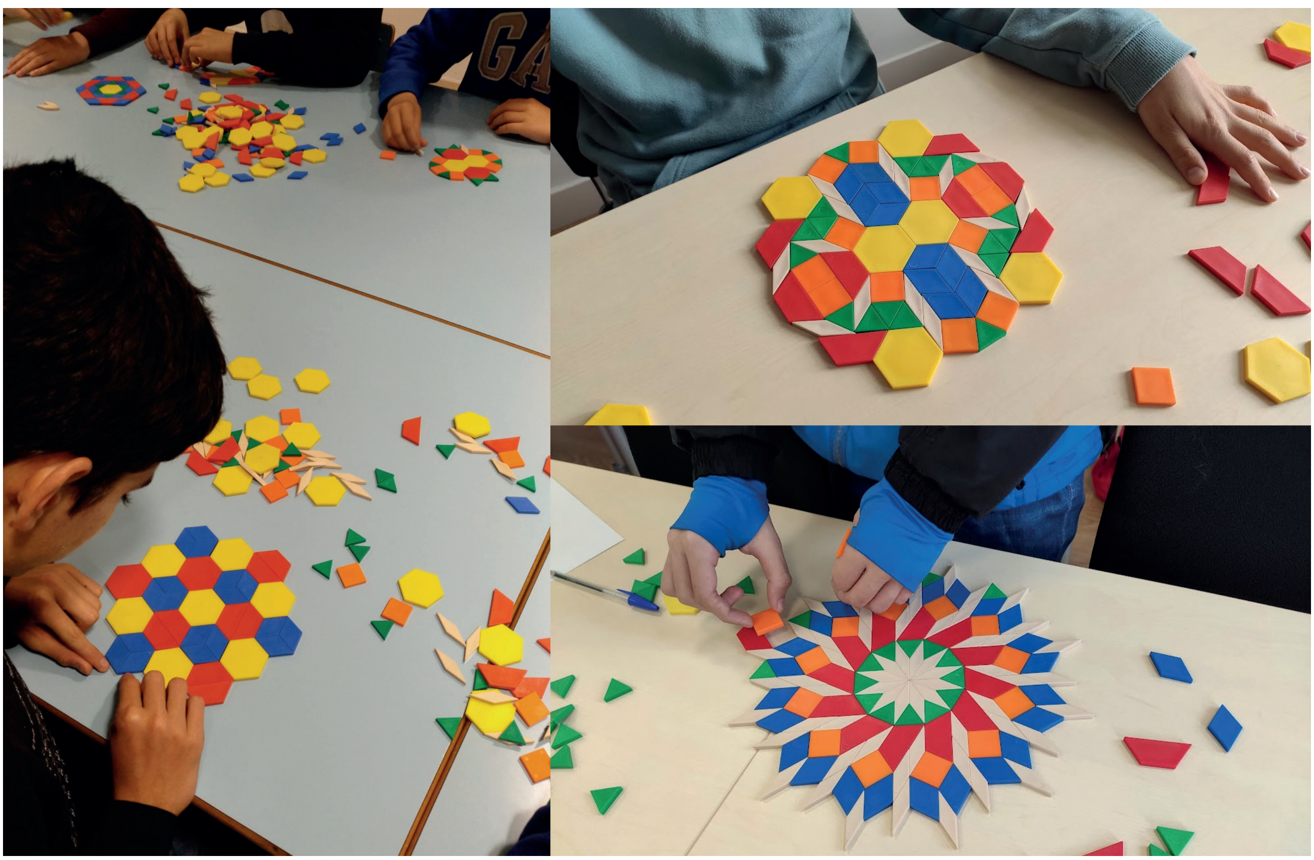


Figura 2. Manipulación libre para descubrir el material

primera aproximación, algunos alumnos consideran que la superficie del triángulo equilátero es la mitad de la del cuadrado, ya que da la sensación de que la altura del triángulo es la misma que el lado del cuadrado, un error que debe ser discutido de inmediato. Después de una observación más detallada, los alumnos llegan a la conclusión que no es así, y entonces calculan el área del triángulo equilátero por medio de Pitágoras. De todas formas, hay alumnos que desconocen Pitágoras (algunos son de 1.º de ESO), y se las ingenian para intentar descubrir relaciones racionales de las longitudes. El caso más remarcable se produjo en la sesión de 2023, cuando una alumna vio que, si unía las alturas de 7 triángulos equiláteros, obtenía una longitud muy similar a los lados de 6 cuadrados (figura 4). En efecto, $6/7 = 0,857142...$ es una muy buena aproximación racional a la altura del triángulo equilátero, que es $\sqrt{3}/2 = 0,860254037...$

La siguiente dificultad que se presenta es el cálculo del área del rombo blanco, ya que no aparece de forma inmediata ninguna relación con el resto de las figuras. Una primera respuesta es que la superficie del triángulo equilátero y la del rombo es la misma, pero de nuevo esta respuesta se basa en una visualización a partir de jugar con las piezas (figura 5). En el momento de formalizar dicha relación se observa que no es correcta. Después de varios minutos, no es extraño ver la relación entre figuras con la construcción de un pentágono equilátero, que lleva a la conclusión de que el área del rombo blanco es la mitad de la del cuadrado.

De todas formas, en la sesión de 2017, una alumna descubrió otra justificación. Colocando dos rombos unidos como se muestra en la figura 6, se obtiene un paralelogramo que tiene la misma altura y base que el cuadrado y, por tanto, el área del rombo blanco será la mitad de la del cuadrado. Esta brillante justificación está animada, sin lugar a dudas, por el uso del material físico.

Después del estudio de las piezas, se propone empezar el estudio de las teselaciones. ¿*Qué entendemos por embaldosar el plano*? Hay dos condiciones necesarias: que no queden huecos entre las figuras y que se recubra toda una superficie (que en nuestro caso será ilimitada). La pregunta que se traslada ahora es: *Si tomamos piezas de un único color, ¿cómo podemos embaldosar una superficie ilimitada?* Después de unos minutos de exploración, los alumnos llegan a la conclusión de que todas las piezas sirven para embaldosar el plano. En este punto, también es bueno animar a los

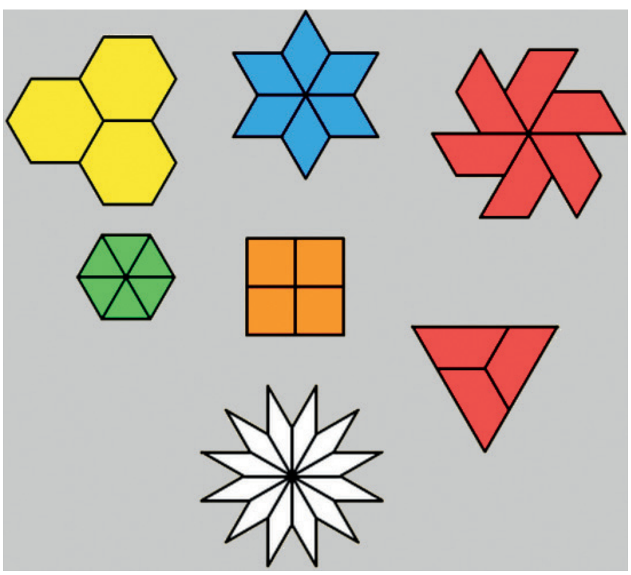


Figura 3. Medida de los ángulos interiores a partir de la división del ángulo completo

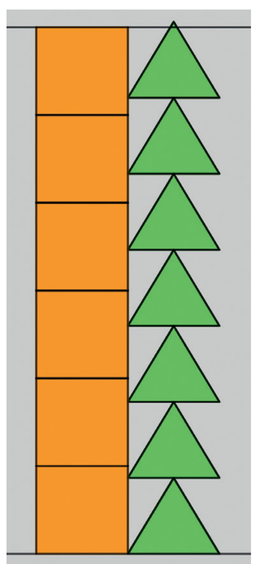


Figura 4. Comparativa de alturas entre cuadrados y triángulos

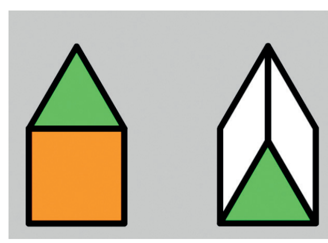


Figura 5. Pentágono equilátero compuesto por diferentes figuras

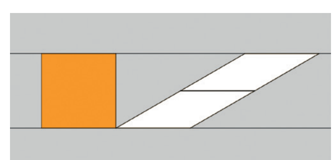


Figura 6. El área del cuadrado y el área de dos rombos blancos coinciden

alumnos a que busquen diferentes formas de embaldosar una superficie ilimitada usando piezas de un único color (figura 7).

La siguiente propuesta aparece con una situación: *Vamos a la tienda de materiales de construcción y nos encontramos con una baldosa que está de oferta, pero nos llama la atención por su forma* (figura 8).

¿*Podremos embaldosar el plano con ellas*? Si es posible, ¿*cómo se puede describir la construcción del mosaico de manera sencilla*? Para desarrollar la respuesta, se reparte una hoja con muchas copias de este cuadrilátero y tijeras para recortar. De nuevo, un momento de exploración manipulativa se hace necesario. Después de valorar diferentes posibilidades, se llega a la conclusión que sí es posible teselar el plano con estos cuadriláteros (figura 9). La dificultad ahora se traslada a la representación. Se les propone el uso de letras para los vértices del cuadrilátero, y describen un algoritmo para construir la teselación. De todas formas, siempre aparece una de las descripciones más simples: «Solo hay que juntar lados iguales con lados iguales».

A continuación, se construye dicha teselación en GeoGebra (<https://www.geogebra.org/m/m9wy8jbz>), teniendo en cuenta que la figura inicial se debe rotar 180°, con el centro en el punto medio de cada lado. Así, la construcción depende únicamente de los vértices iniciales del cuadrilátero cóncavo. Una breve manipulación de esta hoja de GeoGebra hace llegar a la conclusión que todo cuadrilátero simple tesela el plano (figura 10).

Otra actividad que se puede desarrollar con *Pattern blocks*, que será relevante para el estudio de las

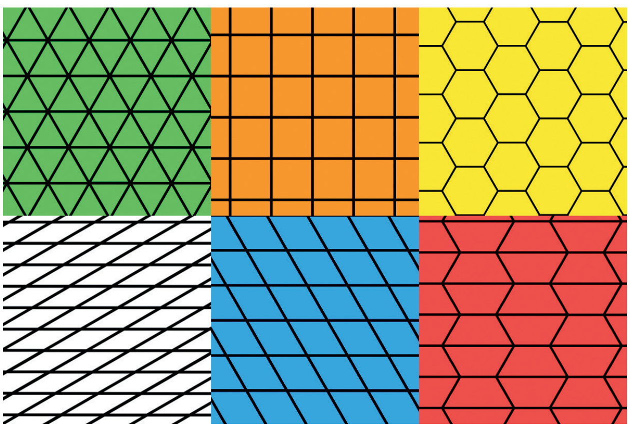


Figura 7. Teselaciones con piezas de un único color

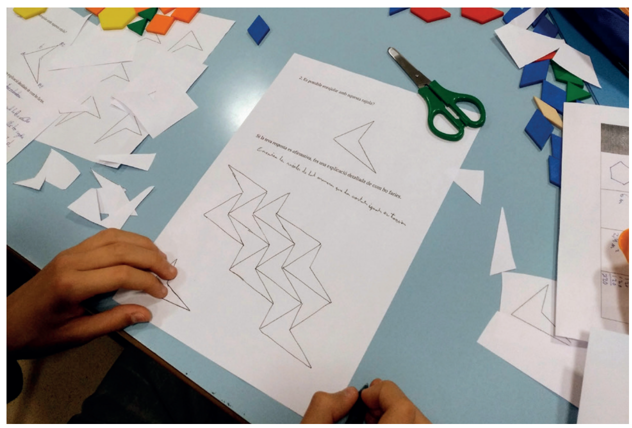


Figura 9. Resolución del embaldosado con la baldosa cóncava

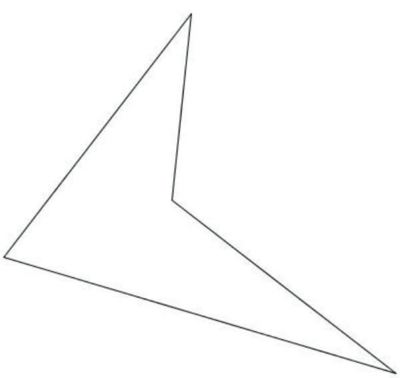


Figura 8. Baldosa de oferta

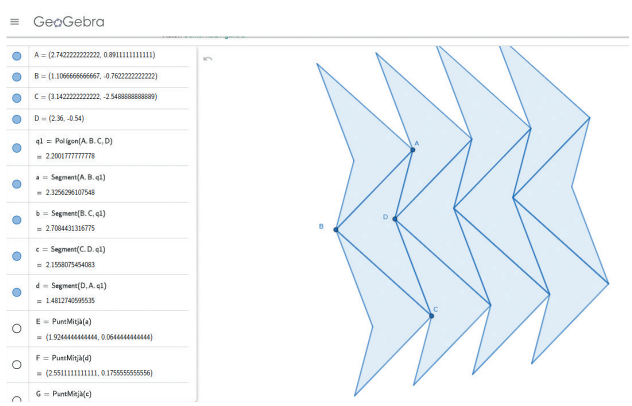


Figura 10. Construcción en GeoGebra de la teselación con un cuadrilátero cóncavo

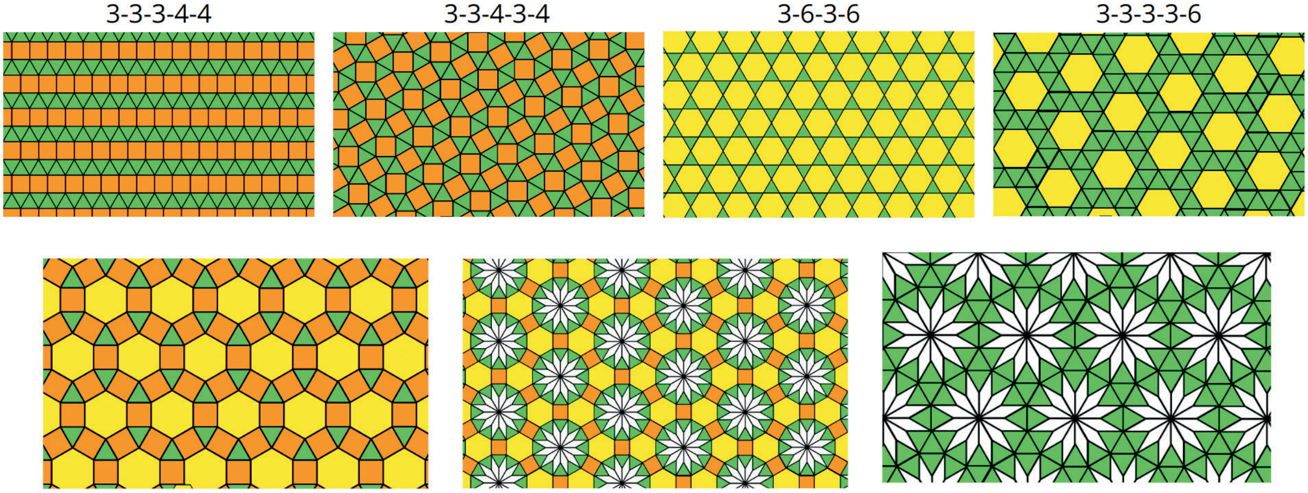
teselaciones semiregulares, es la búsqueda de polígonos regulares, más allá de los que aparecen en las piezas. Efectivamente, se puede construir un dodecágono regular, ya que sus ángulos interiores son de 150°. Entonces, se propone un reto: *¿cuántos dodecágonos regulares sois capaces de construir*? A continuación, gracias a la cámara de documentos, se van exponiendo diferentes configuraciones (figura 11). Si se añade la restricción del uso únicamente del triángulo equilátero y del rombo blanco, aparecen infinidad de soluciones. Una conclusión interesante a la que llegan los alumnos es que la superficie de todo dodecágono regular siempre estará formado por 12 triángulos equiláteros y 6 cuadrados, por lo que cualquier solución será componer y descomponer estas 18 piezas.

A continuación, se propone el estudio de mosaicos semirregulares, aquellos que se forman con polígonos regulares, de manera que en cada vértice siempre aparece la misma configuración, siguiendo siempre el mismo orden. Así, aparecen todos los mosaicos semirregulares (figuras 12 y 13), a excepción del que se construye con octógonos y cuadrados, ya que los octógonos no se pueden construir con *Pattern blocks*. La consigna para descubrirlos es *usando únicamente cuadrados y triángulos equiláteros, ¿cómo embaldosarías un espacio ilimitado siguiendo estas restricciones?*

Figura 11. Construcción de diferentes dodecágonos regulares

Figura 12. Construcción del mosaico 3-3-4-3-4

3-3-3-4-4 3-3-4-3-4 3-6-3-6 3-3-3-3-6



3-4-6-4 4-12-6 3-12-12

Figura 13. Mosaicos semirregulares construibles con pattern blocks

La sesión finaliza con una construcción de mosaicos a partir de modelos incompletos, por lo que deben observar el patrón de construcción, y con unos minutos para construir mosaicos de manera libre (figura 14).

Conclusiones

Como se ha podido comprobar, el estudio de las propiedades geométricas a partir de material manipulativo, como es el caso de *Pattern blocks*, puede ser muy beneficioso a todas las edades, ya que anima la exploración y el descubrimiento. De todas formas, después de un momento de manipulación, debe seguir un momento de representación, formalización y justificación de las propiedades observadas, ya que se pueden generar algunas confusiones asociadas a la observación y la manipulación del material.

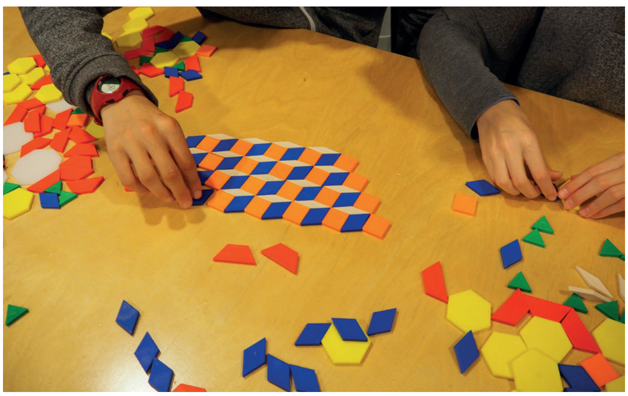


Figura 14. Construcción de un mosaico con sensación de profundidad

Agradecimientos

Este trabajo forma parte del proyecto FCT-21-17644 de la Fundación Española para la Ciencia y Tecnología.

Referencias bibliográficas

Elementary Science Study (1974), *Teacher's Guide for Pattern Blocks*, California State Department of Education, Sacramento, <https://tinyurl.com/pattern-blocks-libro> [consultado el 2 de julio de 2023].

Puig-Adam, P. (1960), «La matemática y su enseñanza actual», *Enseñanza Media,* n.º 72, Madrid, <https://tinyurl.com/ensenanza-puig-adam> [consultado el 2 de julio de 2023].

Riera, J.V., M. A. Rueda y D. Ruiz-Aguilera (2015), «Mosaicos con pattern blocks», *Actas JAEM 2015,* Cartagena, <https://17jaem.semrm.com/aportaciones/n147.pdf>.

Isabel Hidalgo Rangel
IES Santanyí, Santanyí (Mallorca)
<isa.ishira@gmail.com>

Daniel Ruiz Aguilera
Universitat de les Illes Balears
<daniel.ruiz@uib.es>