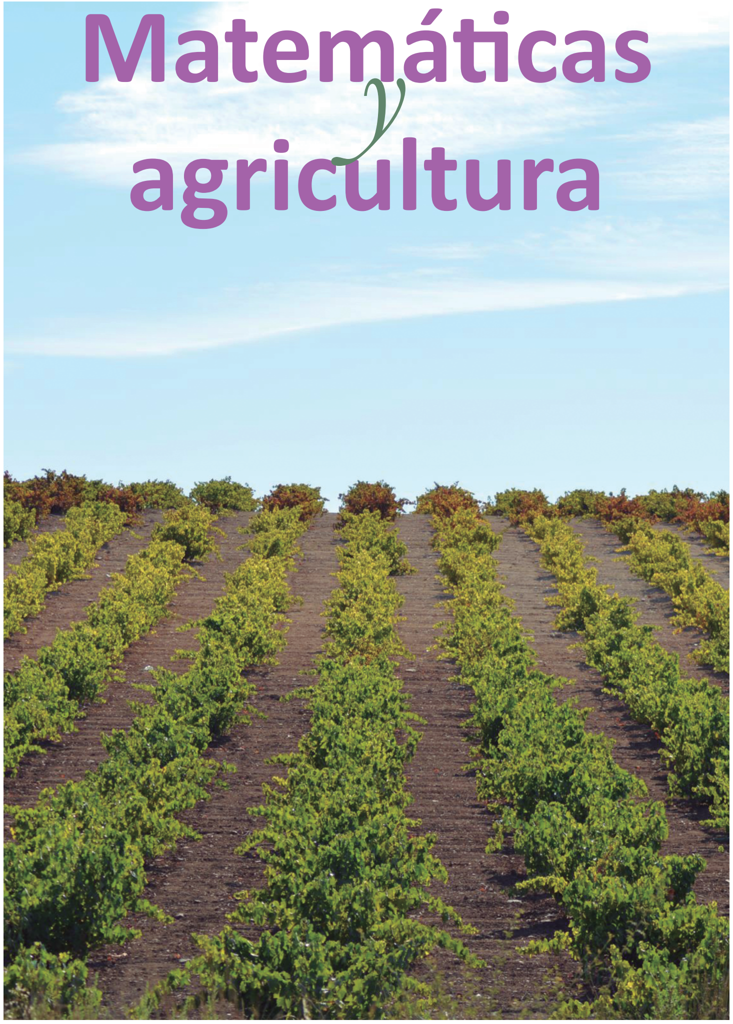
Matemáticas y agricultura



Lorenzo J. Blanco Nieto
Juan Guerra Bermejo
Mariano Terrón Villalba
Beatriz Blanco Otano
Antonio Molano Romero

Día Escolar de las Matemáticas

12 de mayo de 2024

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Imagen de portada: Santos Pino Cerezo

1. Introducción

La historia de las matemáticas nos señala su conexión con diferentes problemas sociales, económicos y culturales que había que resolver para permitir el avance de la sociedad. Ello, nos señala las matemáticas como una actividad humana indisolublemente unida a la experiencia y necesidades de las personas. Su desarrollo a lo largo de los siglos nos sugiere múltiples situaciones que proporcionan un contexto y un pretexto adecuado para la enseñanza y aprendizaje (E/A) de las matemáticas escolares, abarcando todos los ámbitos que permiten el desarrollo personal, social y académico del alumnado.

En las propuestas curriculares, la resolución de problemas y la modelización aparecen como competencias específicas que deben desarrollarse a partir de situaciones reales, diversas, relevantes y multidisciplinares. Especifican, además, la importancia de aprender ambos procesos y aplicarlos en diferentes contextos para ayudar a los estudiantes en su capacidad de usar sus conocimientos matemáticos, reconociendo dónde, cuándo y cómo deben utilizar las matemáticas, al finalizar su periodo escolar.

El entorno inmediato nos sugiere contextos concretos que podemos considerar para la enseñanza formal y no formal, asumiendo que el proceso de E/A de las matemáticas transciende del ámbito escolar y familiar. De esta manera, la agricultura como uno de los sectores esenciales de la economía en España se muestra como un contexto específico y transversal que ofrece múltiples posibilidades para ser considerado en relación a todos los sentidos matemáticos. Unir en el ámbito escolar matemáticas y agricultura puede despertar la curiosidad de los estudiantes y contribuir a la adquisición de las competencias clave, mostrando una matemática útil más allá del ámbito académico y cuya enseñanza debe ser provocadora, motivadora y contextualizada, aunque su aprendizaje exija reflexión y esfuerzo.

Desde la Sociedad Extremeña de Educación Matemática hemos planteado actividades con el objetivo de analizar, describir, enunciar, comunicar, etc., información matemática que aparece ligada a labores y contextos agrícolas, junto con otras tareas cuya resolución muestran el uso que nuestros agricultores hacen de algunos conceptos de las matemáticas escolares. Nuestro objetivo no es tanto que se utilice este cuadernillo para problemas concretos como sugerir la elaboración de nuevas actividades contextualizadas en el entorno inmediato en el que se utilice.

2. Unidades de pesas y medidas en la historia de la agricultura

> En 1290, doña Mayor daba en el término de Badajoz al convento de los Trinitarios una heredad llamada Casas de Doña Mayor, en el camino de La Albuera, con ochenta fanegas de sembraduras [texto del siglo XIII].

En el informe del año 2021 emitido por la Lonja Agropecuaria de Extremadura se hace referencia a la relación entre el cebado de bellotas del porcino ibérico basado en arrobas y su coste en euros.

Actividad 1

¿Conoces o has oído hablar de todas las palabras de los párrafos anteriores? Encuentra el significado de aquellas menos conocidas.

En los textos mostrados encontramos palabras como fanega y arroba relacionadas con unidades de superficie y peso. Estas y otras unidades de medidas surgidas en otras épocas siguen utilizándose en diferentes zonas de nuestro país. El estudio del sistema de pesas y medidas contextualizado en su desarrollo histórico y social o en el contexto agrícola, ganadero y pesquero actual transciende al conocimiento matemático y nos da una nueva dimensión de la importancia de la matemática en la sociedad y su historia. A la vez, nos muestra un ejemplo más de cómo la propia matemática surge a partir de la experiencia para dar solución a problemas o necesidades concretas de la sociedad.

La comparación de algunas de las propiedades de los objetos para intercambiar por otros de la misma especie y la importancia de que estas permutas fueran adecuadas y justas, provocó la necesidad de diseñar algunos patrones consensuados socialmente, dando origen al proceso de medir. Para medir magnitudes es necesario definir una unidad, sus múltiplos y divisores y comparar con ella la cantidad a medir. Obviamente, en un principio estas unidades fueron escogidas a partir de dimensiones naturales claramente visibles y fáciles de manejar. Así, para las medidas de longitud pudieron utilizarse el pie, el brazo o el dedo pulgar. Para el peso se consideró la cantidad de grano que pudiera transportar una persona o la cantidad que pudiera producir una determinada extensión de terreno y de aquí que la «fanega» (del árabe fanica que significa saco) fuera utilizada como unidad de superficie y de capacidad. Obviamente, las condiciones del terreno y del clima provocaron que estas unidades de peso y medidas tuvieran diferente valor en cada una de las regiones habitadas.

Figura 1. Instrumentos de medidas para áridos.
Museo Histórico de Llerena (Badajoz)

Actividad 2

Busca información (nombre, origen, valor, instrumento de tales medidas…) acerca de las unidades tradicionales utilizadas en tu comunidad y provincia.

Actividad 3

Clasifica las unidades anteriores y relaciona su valor con las unidades del Sistema Métrico Decimal. Distingue, al menos, entre las unidades de longitud, superficie, peso y capacidad.

Es probable que en la búsqueda hayáis encontrado unidades como vara, milla, legua, onza, cuarterón, arroba, quintal, jarro, mitailla, etc., que son nombres generalizados, junto a otros nombres específicos de vuestra región. Observarás, además, que algunos de estos términos se utilizaban para medir diferentes magnitudes y con valores propios en cada zona.

Actividad 4

Busca información y analiza la diferencia entre los valores de las unidades encontradas en relación con las mismas unidades de medida de magnitudes de otras provincias o regiones.

Álava	2 510,7 m^2
Albacete	7 005,6 m^2
Extremadura	6 439,56 m^2
Guadalajara	3 105,4 m^2
Madrid	3 423,0 m^2
Soria	2 235,9 m^2
Zamora	3 553,9 m^2

Tabla 1. Variación en m^2 de la fanega como unidad de superficie en algunos lugares

En España el sistema de medida que trajeron los romanos, sustituyó al que utilizaban los íberos y sirvió de base durante mucho tiempo, con diferentes valores de unas regiones a otras. A partir del siglo XIII fue instaurándose la «vara de tres pies romanos» como la más común para medir longitudes, por imperativo real. En 1849 las Cortes decretan que el Sistema Métrico Decimal (SMD) se enseñara en las escuelas desde el 1 de enero de 1852, con el objetivo de unificar las pesas y medidas en todo el territorio nacional.

El estudio histórico de las unidades de medidas propias de cada región es interesante como recurso didáctico dado el sentido de transversalidad que sugiere y, además, porque su comprensión permite ejemplificar los estadios a seguir en el aprendizaje y la adquisición del sentido de la medida, señalado en el currículo de matemáticas. La comparación de las diferentes medidas sugiere actividades matemáticas relacionadas con el sentido numérico y de medida. Así, la tabla 2 (ver página 6) muestra el valor de varias unidades y la relación entre ellas, nos sugiere múltiples conceptos y procesos numéricos, propios del currículo.

Actividad 5

Observa y analiza la tabla. Trata de comunicar a tu compañero la información matemática que contiene.

Medidas para áridos y granos											
	Cahíz	**Carga**	**Fanega**	**Almud**	**Cuartilla**	**Celemín**	**Cuartillo**	**Quinto**	**Ochavo**	**Ochavillo**	**Litros**
Cahíz	1	3	12	24	48	144	576	720	2304	9216	666,000
Carga		1	4	8	16	48	192	240	768	3072	222,000
Fanega			1	2	4	12	48	60	192	768	55,500
Almud				1	2	6	24	30	96	384	27,750
Cuartilla					1	3	12	15	48	192	13,870
Celemín						1	4	5	16	64	4,625
Cuartillo							1	1+1/4	4	16	1,156
Quinto								1	3+1/5	12+4/5	0.925
Ochavo									1	4	0,289
Ocahvillo										1	0,072

NOTAS:
1. **Las equivalencias en litros aquí expuestas corresponden a las medidas castellanas, siendo las extremeñas las siguientes:**
   Cáceres: 1 fanega = 53,75 litros. Badajoz: 1 fanega = 55,81 litros.
2. **En algunos lugares se confunde el Almud con el Celemín.**
3. **El algunos lugares se llama "almuez" al "almud"**

Tabla 2. Medida para áridos y granos editada por Sociedad Extremeña de Educación Matemática

Actividad 6

Si tuviéramos tres fanegas, dos almudes y un celemín, ¿cuántos litros tendríamos?

Actividad 7

A partir de las tablas anteriores enuncia diferentes problemas aritméticos.

La Sociedad Extremeña de Educación Matemática (SEEM) «Ventura Reyes Prósper» estudió y recopiló instrumentos y unidades de medidas tradicionales obtenidas de diferentes ámbitos (agrícola, profesional, artesanal, doméstico, etc.) utilizadas en Extremadura y el Alentejo portugués que se encuentran expuestas en el Museo Histórico Ciudad de Llerena (Badajoz).

Figura 2. Exposición de Pesas y Medidas. Museo Histórico de Llenera (Badajoz)

3. Algunas actividades específicas. Las matemáticas en los olivares

Entendemos que las matemáticas han surgido de la experiencia y del conocimiento de las personas, por lo que tienen que estar al servicio de la ciudadanía. Su uso nos permite analizar, representar e interpretar datos, resolver problemas, tomar decisiones y diseñar modelos…, que son actividades que pueden contribuir al desarrollo social, cultural y económico de la sociedad.

Esta consideración es también, aplicable a los trabajos que se desarrollan en el campo. Así, cualquier informe sobre agricultura o ganadería sería imposible entenderlo sin conocer las relaciones numéricas o la interpretación de gráficos de datos o estadísticos. El uso de estos textos en el aula favorece, además, la competencia de comunicación matemática y permite visualizar su sentido y utilidad.

Como diseñar un olivar

Asumiendo la diversidad de aplicaciones de las matemáticas en las tareas del campo hemos escogido un ejemplo sencillo que muestra la importancia del sombreamiento en el diseño de un olivar, aprovechando la geometría solar y la orientación para conseguir que su producción sea óptima.

Actividad 8

A continuación, mostramos un texto y unas representaciones sobre una plantación de olivos, donde aparecen algunos conceptos matemáticos que deberías conocer y que te ayudarán a hacer una representación sin fijarte en las figuras mostradas.

> En una plantación, cuando se pretende mejorar el aprovechamiento de la luz, disminuyendo el sombreamiento entre las plantas, debemos recurrir a marcos rectangulares, en nuestro caso 7×5: distancia de las calles de 7 metros y separación de las plantas en una hilera de 5 metros. Orientamos las calles más anchas en dirección norte-sur y de esta forma se proyecta la sombra sobre las calles más anchas y no sobre los olivos de la misma fila.
>
> Comenzamos por trazar una línea recta base, con orientación este-oeste, haciéndola coincidir lo máximo posible con uno de los linderos. A continuación, trazamos rectas perpendiculares partiendo de un extremo de la recta base. Para trazar las perpendiculares en el terreno utilizaremos cuerdas marcadas de acuerdo a alguna terna de números como las que indicamos (3, 4 y 5; 5, 12 y 13; 30, 40 y 50), para garantizar dibujar correctamente un ángulo recto (figura 3, página 8)
>
> Una vez trazadas sobre el terreno la línea base y las líneas perpendiculares, procedemos a señalar la posición de cada árbol. Para comprobar si la señalización es correcta, podemos utilizar una cuerda de longitud la suma de los términos del marco, en nuestro caso 12 metros (marcos de 7×5), con una marca a los 7 metros. Dos personas con la cuerda de 12 metros por los extremos se sitúan en los puntos A y B, y sucesivos, tensando la cuerda en ángulo recto y comprobando que el punto del árbol coincide con la marca de los 7 metros (figura 4, página 8).

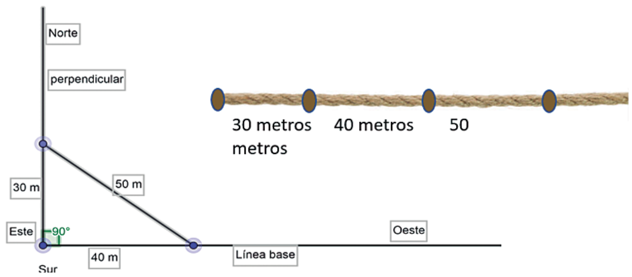


Figura 3. Aplicación del Teorema de Pitágoras para dibujar ángulos rectos

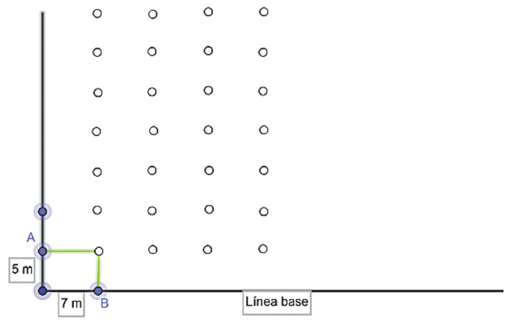


Figura 4. Geometría para situar los olivos

A modo de ayuda para la tarea escolar, el texto nos sugiere una duda que enunciamos como actividad.

Actividad 9

¿Por qué el uso de las ternas de números señaladas en el texto garantiza que el ángulo formado sea recto? ¿Existe en la historia de las matemáticas alguna sociedad que utilizara un recurso similar?

Actividad 10

¿Cuántos olivos podríamos plantar en una parcela de 304 m de larga y 157 m de ancha siguiendo las recomendaciones del texto anterior?

Es frecuente que *terrenos agrícolas* estén situados en pendientes lo que genera alguna dificultad si queremos representarlo en un plano, como puede serlo la proyección en el plano de la esfera terrestre. Así, una recta AB, que representa una distancia natural del terreno, quedará representada en el plano por un segmento menor a partir de su proyección sobre la horizontal. También tendremos que considerar su desnivel h, obtenido como la diferencia de cotas entre los puntos B y A (figura 5).

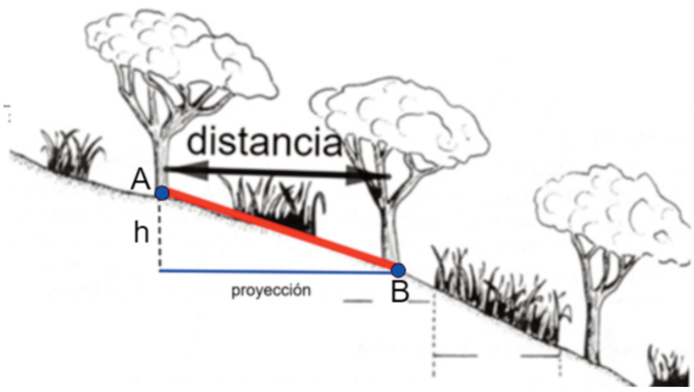


Figura 5. Representación de la *superficie agraria*

Actividad 11

En el texto anterior se mencionan las proyecciones de la esfera terrestre sobre el plano lo que da origen a diferentes mapamundis ¿Cuántas proyecciones diferentes conoces?

En nuestro caso, una superficie del terreno vendrá representada por su proyección que será menor y que recibe el nombre de *superficie agraria.* No obstante, como el crecimiento de los diferentes cultivos es perpendicular a la horizontal, el aprovechamiento agrícola de un terreno con pendiente es similar al de su proyección horizontal.

Al realizar una plantación de olivos la distancia entre sus troncos la determinaremos midiendo horizontalmente sin considerar la inclinación del terreno. Así, a dos parcelas, una horizontal y otra con pendiente, que tengan la misma *superficie agraria* les asignaremos el mismo valor agrícola, aunque la segunda superficie real es mayor que la primera.

Un ejemplo, que pone de manifiesto la diferencia entre las definiciones de superficie, es el trabajo realizado sobre la parcela de la figura 6.

La representación obtenida a partir de una fotografía aérea es, realmente, una proyección sobre un plano horizontal y representa la *superficie agraria* con unas dimensiones de perímetro 426 m y superficie 10 844 m^2. Sin embargo, una imagen similar según Ortofoto del SIGPAC (Sistema de Información Geográfica de Parcelas Agrícolas) nos indicaría una parcela de 11 391 m^2, con una pendiente media de 12,90 %. En este caso se ha tenido en cuenta el desnivel o pendiente del terreno.

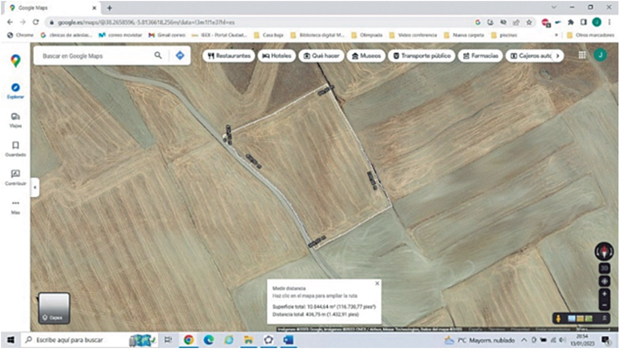


Figura 6. Fotografía aérea. Las parcelas suelen ser irregulares

Actividad 12

Calcula el error, absoluto y relativo, según las dimensiones anteriores.

Obviamente, puede medirse sobre el terreno y el resultado es ligeramente diferente a los anteriores.

Actividad 13

Hemos medido la longitud de los lados de la parcela obteniendo las medidas de la figura 7. Diseña un procedimiento para calcular la superficie irregular de la figura.

Un procedimiento es triangular la superficie y medir utilizado la cinta métrica. Así, hemos obtenido diez triángulos diferentes cuyos datos se reflejan en la figura 8. El resultado calculado nos ha dado una parcela con un perímetro 456,8 m y superficie 11 478 m^2.

La triangulación nos permite utilizar la fórmula de Herón ya que podemos medir todas las líneas que conforman cada uno de los lados de los triángulos.

La superficie $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7 + S_8 + S_9 + S_{10}$.

Siendo a, b y c los lados de un triángulo y p es el semiperímetro la fórmula de Herón para calcular su superficie es:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Ejemplo:

$$S_1 = \sqrt{99{,}1(99{,}1-51{,}70)(99{,}1-78)(99{,}1-68{,}5)} = 1\,741{,}52 \text{ m}^2$$

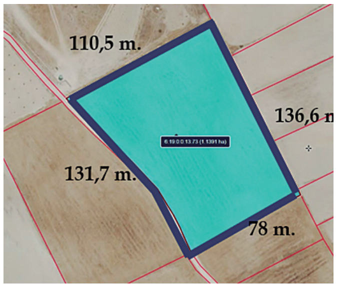


Figura 7. Parcela representada por un polígono irregular

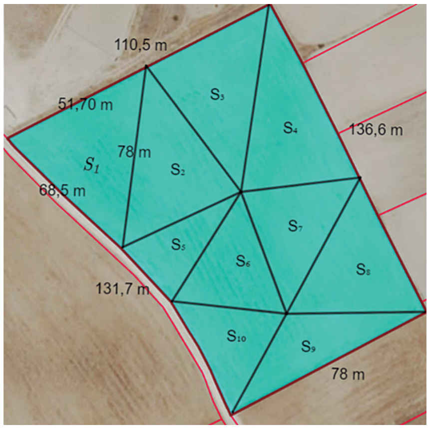


Figura 8. Triangulación de la parcela

Actividad 14

Dibuja una figura irregular con medidas reales para poder utilizar la fórmula de Herón para calcular su superficie. Enuncia un problema relativo a ello y dáselo a tu compañero para que lo resuelva.

Actividad 15

Dividir una parcela triangular cualquiera en seis subparcelas triangulares equivalentes es decir que tengan la misma superficie.

Actividad 16

Una parcela tiene forma triangular cuyos lados miden 160 m, 120 m y 80 m. Justifica que el triángulo es oblicuángulo. Calcula su área con la fórmula de Herón. Dibuja un triángulo a escala (1 metro lo reducimos a 1/4 cm), toma un lado como base y mide su correspondiente altura para calcular su área. Compara los resultados.

Fecha de recolección, índice de madurez de la aceituna y rendimiento industrial

Es evidente que para optimizar la producción agrícola es muy importante determinar el momento idóneo para la recolección de cualquier fruto, lo que implica conocer su evolución hasta la maduración completa.

El color de la aceituna es un factor determinante de su grado de madurez. El color de partida es un verde intenso pasando, a medida que avanza el otoño, a verde claro y posteriormente amarillento. A partir de aquí, comienza una fase denominada envero, de cambio del color amarillento hasta un morado intenso, prácticamente negro. El envero comienza con la aparición de pequeñas manchas violetas en el pico de la aceituna que poco a poco se extienden hasta ocupar toda la piel (o epicarpio). El color morado va extendiéndose hasta dar color a toda la pulpa (mesocarpio). Finalmente, cada variedad adquiere un color característico, aunque dentro de la gama de morados. Por lo tanto, la maduración de la aceituna es el tiempo que transcurre desde la aparición de las primeras manchas violetas hasta la total coloración del fruto.

El modelo para predecir el momento ideal de la recolección se basa en unos cálculos a partir de los distintos colores de una cantidad de aceituna recogida como muestra (figura 9). Así, recolectamos

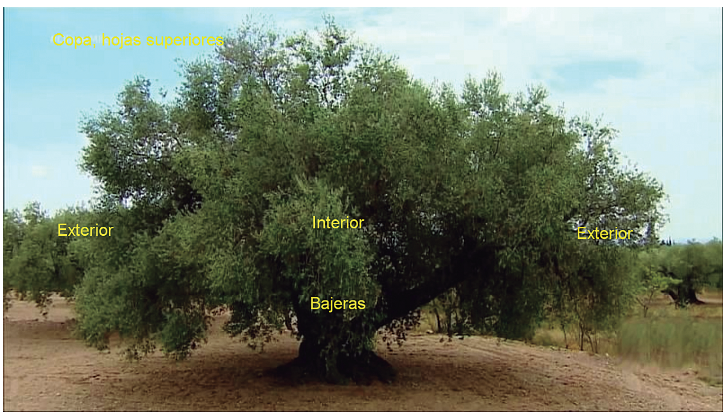


Figura 9. Zonas de muestro en la recogida de aceituna

dos kilos de aceituna, tomados a la altura de la vista del recolector, de los cuatro puntos cardinales de la planta y del interior y exterior, ya que la madurez y el contenido graso varían en las diferentes zonas del olivo. A continuación, se homogeniza la muestra, se toman 100 frutos al azar que se clasifican por categorías según se especifica en la tabla 3.

Color de la Piel	Valor
A. Verde intenso	0
B. Verde amarillento	1
C. Verde y manchas rojizas en menos de la mitad del fruto. Inicio de envero	2
D. Rojiza o morada en más de la mitad del fruto. Final de envero	3
E. Negra y pulpa blanca	4
F. Negra y pulpa morada sin llegar a la mitad de la pulpa	5
G. Negra y pulpa morada sin llegar al hueso	6
H. Negra y pulpa morada totalmente hasta el hueso	7

Tabla 3. Valoración del color de la piel de las aceitunas, dando valores

Se define el Índice de Madurez (*IM*) como el sumatorio del número de aceitunas de cada categoría por el valor numérico de su categoría dividido por 100.

Es decir, aplicamos la fórmula:

$$IM = \frac{0 \cdot A + 1 \cdot B + 2 \cdot C + 3 \cdot D + 4 \cdot E + 5 \cdot F + 6 \cdot G + 7 \cdot H}{100}$$

De esta manera, las variedades Picual, Hojiblanca, Lechín, Cornicabra y otras que desarrollan mucho el color morado tendrían un IM sobre un 3,5, mientras que la variedad Arbequina lo tendría sobre un valor de 4.

Actividad 17

En varios olivares de diferentes variedades, hemos recogido unas muestras de 100 frutos:

Variedad	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*Total*
Picual	4	15	23	18	19	13	5	3	100
Hojiblanca	1	9	25	20	15	13	11	6	100
Arbequina	0	6	14	22	19	18	15	6	100

Determinar el *IM* de cada olivar.

Además del índice de madurez, en otras variedades como la Arbequina, suelen utilizarse otros parámetros relacionados con la riqueza grasa y el agua que contiene la aceituna que varían con el tiempo y ayuda a elegir el mejor momento de la recolección que determinará el tipo de aceite resultante. Obviamente, la relación entre estos índices implica otras expresiones matemáticas.

Otro aspecto fundamental es el rendimiento del fruto en relación a la producción total de aceite. Así, dada la complejidad de la extracción del aceite, realizada mediante procesos mecánicos de molienda, centrifugación, etc., es imposible que, al final de ellos, se extraiga la totalidad del aceite que contiene la aceituna. En los datos manejados en la Almazara Oleícola Berlangueña S.L. se indica que poco más del 16 % del peso total de la aceituna se convertirá en aceite de oliva.

Patrimonio industrial y paseos matemáticos

El proceso de producción del aceite ha cambiado a lo largo de la historia, lo que es aprovechado en algunos pueblos para exponer los objetos y maquinarias tradicionales a modo de museo industrial. Así, en la visita a la Cooperativa del Campo de San Pedro en Guareña (Badajoz), además de proponer actividades similares a las anteriores, los estudiantes centran su mirada matemática en cuatro piedras de molino de las que se utilizaban para moler las aceitunas de una antigua almazara (figura 10) y en los depósitos para guardar el vino y el aceite (figura 11).

El estudio de las piedras de molino es conveniente hacerlo en el lugar donde están instaladas, aunque también pueden ser representadas con material manipulativo o virtual. Enunciamos las siguientes

Figura 10. Piedras de Molino de aceite en Guareña (Badajoz) y representación con GeoGebra

Figura 11. Depósitos de aceite en Guareña (Badajoz)

actividades porque es fácil encontrar en cualquier entorno urbano o rural algunos objetos similares que sugerirán problemas como los que proponemos.

Actividad 18

Antes de hacer ninguna medición estima las dimensiones y peso de cada una de las piedras. Anota las estimaciones de tus compañeros y calcula la media y la desviación media.

Actividad 19

Toma las medidas que consideres y calcula el volumen de las piedras. Describe el proceso seguido.

Actividad 20

Determina el peso en kg de las cuatro piedras de granito, dado que la densidad de la piedra es de 2 800 kg/m³.

En el applet de GeoGebra <https://www.geogebra.org/m/g6xvy4aj> se puede acceder a una reproducción de la instalación de las cuatro piedras de molino lo que nos permite hacer una adaptación de la actividad anterior en las aulas.

Actividad 21

Ajusta los valores del radio de la base y de la altura del cono naranja para que coincida con las medidas de los conos del applet de GeoGebra.

Actividad 22

A partir de los valores obtenidos, determina el peso en kg de las cuatro piedras de granito, dado que la densidad de la piedra es de 2 800 kg/m³.

También, los depósitos son objetos de mirada matemática y nos permiten plantear actividades a partir de la información que nos dan. En las visitas a una cooperativa recomendamos que sean los propios estudiantes los que analicen el contexto y busquen la información.

Actividad 23

Busca en los carteles de los depósitos y analiza y describe la información matemática que nos dan. Trata de comunicársela a tus compañeros.

Actividad 24

En un depósito de vino encontramos dos carteles. Uno nos indica la capacidad de 189 000 litros, y otro nos dice que el volumen es de 189 m³. ¿Hay algún error en la información?

La lectura de los depósitos nos muestra una curiosidad ya que unos señalan algunas de sus dimensiones y la capacidad en litros y otros en kilogramos.

Actividad 25

En el letrero del depósito de aceituna de la figura 11, se puede leer: diámetro 3 400, altura 6 000, capacidad 49 990 kg. Interpreta estos valores. Con esta información explica qué otras propiedades podríamos conocer de los depósitos.

Actividad 26

A partir de los datos anteriores calcular el volumen del depósito.

Actividad 27

Teniendo en cuenta que el índice de producción aproximado de las aceitunas, según el apartado anterior, es poco más de un 16 %, ¿qué cantidad de aceite podremos esperar si el depósito estuviera lleno de aceitunas? Da el resultado en litros y kilogramos.

4. Modelización matemática y agricultura

Un modelo matemático de un fenómeno real es un esquema simplificado e idealizado usado para entender los comportamientos que existen en el sistema. Así, partiendo del mundo agrícola, y utilizando herramientas matemáticas podremos llegar a soluciones que deberán ser interpretadas y validadas en contextos relacionados con la agricultura para analizar y resolver situaciones que permitan un desarrollo sostenible más eficaz y equilibrado de los problemas del sector.

Los cambios y avances derivados de la introducción de la tecnología agrícola (maquinarias) y, más recientemente, con las nuevas tecnologías nos permiten entender el campo con mayor facilidad y precisión. El estudio del comportamiento de la tierra a nivel macroscópico proporciona información que da una nueva oportunidad a la matemática para optimizar los recursos y mejorar la producción de alimentos.

En nuestro caso, gracias a las imágenes cedidas por Agroinsider y a los valores de producción proporcionados por Palminha, ejemplificaremos lo anterior en un cultivo de arroz. La cosechadora, con tecnología GPS, nos permite obtener un mapa de producción conociendo cuánto se produjo en cada zona del cultivo (figura 12).

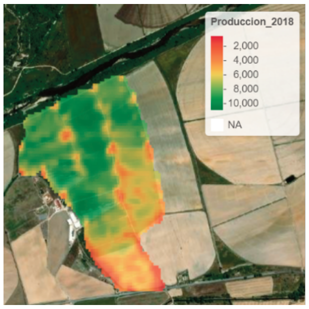


Figura 12. Mapa de producción del cultivo de arroz elaborado con GPS

Los datos de producción de 2018 nos indican que la producción media fue de 7 244 kg/ha, observando que la zona cercana al río tiene una mayor producción a pesar de que el trato de la tierra es el mismo en todo el cultivo. Las características del terreno en cada zona determinan la producción, por lo que el mapa a diseñar nos ayudará a delimitar donde podremos tomar medidas adecuadas para optimizar los resultados.

Los satélites de agencias como la NASA (Administración Nacional de Aeronáutica y el Espacio) y AESA (Agencia Espacial Europea), entre otros, nos permiten acceder a imágenes de teledetección del campo, y obtener representaciones de la superficie terrestre cuya resolución es suficiente para replicar la situación y realizar una predicción en el futuro.

Una vez tomada la imagen espectral del cultivo es necesario procesarla y utilizar algunos de los múltiples índices existentes, más o menos complejos. En este ejemplo, usaremos un indicador de la biomasa fotosintéticamente activa NDVI (Índice de Vegetación de Diferencia Normalizada) que es un indicador de la salud de la vegetación. Así, de la multiplicidad de imágenes que obtenemos elegimos aquellas que tengan un valor máximo para este índice.

En la imagen de NDVI (figura 13) se pueden observar patrones similares a la producción, pues el valor del índice es mayor en la parte cercana al río, el valor medio obtenido para la finca es 0,7531 en el índice.

Queremos definir una función ($Y = f(X)$) que nos permita expresar la variable Y (producción) en función de la variable X (imagen NDVI). De las diferentes posibilidades la más generalizada para estas situaciones es un modelo lineal o una regresión lineal $Y = b \cdot X + a$. De esta manera, pretendemos construir una función que al tomar una medición del mes en el que se da el máximo de NDVI, tras multiplicar por b y sumar a obtener así la estimación de producción. Los coeficientes de la regresión se obtienen de esta manera:

$b = Sxy / Sx^2$; siendo Sxy la covarianza xy, y Sx^2 la varianza de x

$a = \overline{Y} - b \cdot \overline{X}$; siendo $\overline{Y}$ y $\overline{X}$ las medias de Y y X.

Actividad 28

Calcular el valor de dichos coeficientes teniendo en cuenta: $\overline{Y} = 7\,307{,}50$ kg/ha, $\overline{X} = 0{,}7531$, $Sx^2 = 0{,}003482$, $Sxy = 56{,}3272$

Solución: $b = 16176{,}68$; $a = -4874{,}16$

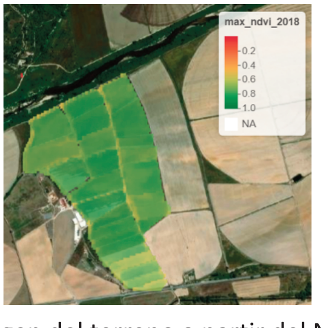


Figura 13. Imagen del terreno a partir del NDVI, en 2018

Actividad 29

Interpreta la gráfica de la figura 14 en función de la producción de arroz.

Mediante esta regresión podemos decir que cuando el NDVI ronde por ejemplo 0,7 la producción de arroz será en torno a 6 toneladas la hectárea, por cada 0,05 que aumente el NDVI la producción subirá en torno a 0,809 to/ha (0,05 ·b). Esta información nos permite realizar la predicción para otro año.

En la imagen obtenida de NDVI para el 2019 (figura 15), se observa que el cultivo estuvo más sano que el de 2018, pues el valor del índice es mayor. Una vez calculado el NDVI tras multiplicar esta imagen por 16 175,82 que es el valor obtenido por la recta de regresión y restarle 4 874,16 obtenemos la estimación para la producción de 2019.

Actividad 30

Calcular la producción media estimada del 2019 si el NDVI medio es 0,7555776.

La solución sería de una estimación de $Y = 7\,347{,}93$. Es decir, se prevé que se producirá en torno a 7,35 toneladas de arroz por hectárea de cultivo, ligeramente mayor que en 2018. Obviamente, podríamos hacer un nuevo mapa para toda la finca.

Con estos resultados, el agrónomo podría aplicar técnicas en la parcela para aumentar la producción en las zonas menos productivas, o hacer lo contrario, pues puede que estuviese dedicando recursos a zonas donde la producción va a ser baja, con lo que retirar esos recursos reduce costes y así aumenta el beneficio neto de la campaña. El modelo matemático informa y el agricultor decide de acuerdo a sus intereses, con una mejor información.

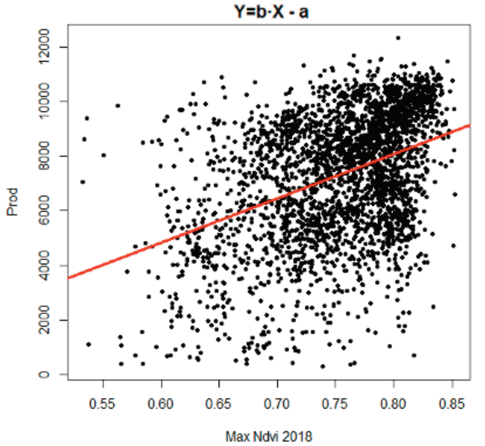


Figura 14. Regresión lineal

Figura 15. Imagen del terreno a partir del NDVI, en 2019

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Comisión Ejecutiva

Presidente: **Julio Rodríguez Taboada**
Secretario General: **Agustín Carrillo de Albornoz Torres**
Vicepresidente: **Onofre Monzó del Olmo**
Tesorera: **Encarnación Amaro Parrado**
Secretaría técnica adjunta: **Bienvenido Espinar Cepas**
Secretaría de relaciones internacionales: **M.ª Claudia Lázaro del Pozo**
Revista Suma: **Iolanda Guevara Casanova**
Servicio de publicaciones: **Juan Martínez-Tébar Giménez**
Secretaría de actividades y formación del profesorado: **Juana M.ª Navas Pleguezuelos**
Secretaría de actividades con alumnos: **Francisco Haro Laguardia**
Secretaría de divulgación: **Juan Carlos Toscano Grimaldi**

Sociedades Federadas

Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática «Miguel de Guzmán»
Presidenta: **Sonsoles Blázquez Martín**
IES Pío del Rio Hortega, Avda. R. J. Montero 7, 47160 Portillo, Valladolid

Asociación Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)
Presidente: **Julio Rodríguez Taboada**
Facultade de Ciencias da Educación da Universidade da Coruña
Campus de Elviña, 15071 A Coruña

Euskadiko Matematika Irakasleen Elkartea «EMIE 20+11»
Presidenta: **Ana Fernández de Betoño Sáenz de Olamendi**
IES Miguel de Unamuno BHI, c/ Vicente Gonzalez de Etxabarri, s/n
01009 Vitoria-Gasteiz. 01009 Vitoria-Gasteiz (Araba)

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT)
Presidenta: **M. Carme Vicens Andrés**
C/ Alcalde Joaquim Jardí, 3. 3r 2a. 43780, Gandesa

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»
Presidente: **Salvador Guerrero Hidalgo**
Centro de Documentacion SAEM Thales, Facultad de Ciencias, Dpto Matemáticas, Campus Río San Pedro s/n, Torre Central 4º planta
11510 Puerto Real (Cádiz)

Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas
Presidenta: **Esther García Giménez**
IUMA, Edificio de Matemáticas, 1.ª planta, Universidad de Zaragoza,
C/ Pedro Cerbuna s/n. 50009 Zaragoza

Sociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de Pedrayes»
Presidente: **Rubén Pérez Zamanillo**
IES Mata Jove, Plaza Club Patín Gijón Solimar, 33213 Gijón (Asturias)

Sociedad Canaria «Luis Balbuena Castellano» de Profesores de Matemáticas
Presidente: **Agar Arrocha Reyes**
C/ La Isa, 33, Cercado Mesa. 38205 La Laguna (Santa Cruz de Tenerife)

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: **Serapio García Cuesta**
IES Universidad Laboral, Avda. de la Mancha s/n, 02006 Albacete

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidente: **Bienvenido Espinar Cepas**
Facultad de Matemáticas. Universidad de Murcia. Campus de Espinardo. 30100 Murcia

Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»
Presidente: **José Pedro Martín Lorenzo**
Centro Educativo Municipal, 2,ª planta, C/ San Juan nº 3A, 06400
Don Benito (Badajoz)

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»
Presidente: **José Luis Muñoz Casado**
Facultad de CC. Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid,
Plaza de las Ciencias, 3, 28040 Madrid

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: **Carmen Espeso Ortiz**
Avda. del Deporte s/n. 39012 Santander

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidente: **Jesús Diego Rodríguez García**
IES Enrique Nieto. Departamento de Matemáticas, C/ Avenida de la Juventud, 4. 52005 Melilla

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira»-Matematika Irakasleen Nafar Elkartea
Presidente: **J. Javier Jiménez Ibáñez**
IES Alhama, Avda. Villar, 44. 31591 Corella (Navarra)

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas
Presidente: **José Javier Etayo Gordejuela**
Facultad de Educación. Despacho 3215
C/ Rector Royo Villanova, s/n. 28040 Madrid

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas «A prima»
Presidenta: **Clara Jiménez Gestal**
Facultad de Ciencia y Tecnología Edificio Científico Tecnológico,
CCT; C/ Madre de Dios, 53. 26006 Logroño

Sociedade de Ensinantes de Ciencias de Galicia (ENCIGA)
Coord. Sección Matemáticas: **Iria Fernández Fontenla**
Facultade de Ciencias, Rúa Alfonso X o Sabio, s/n. 27002 Lugo

Societat Balear de Matemàtiques SBM-XEIX
Presidente: **Daniel Ruiz Aguilera**
C/ Miquel Capllonch, 30, 3A. 07010 Palma (Illes Balears)

Societat d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»
Presidente: **Onofre Monzó del Olmo**
Departamento de Didáctica de la Matemática, Apdo. 22045. 46071
València

SUMA+

Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje
de las matemáticas · **septiembre 2023**

– núm. 104 –

Revista Suma
Tirada: 5 500 ejemplares
Depósito legal: Gr 752-1988
ISSN: 1130-488X
Twitter: @suma_fespm

Suma es una revista de didáctica de las matemáticas de periodicidad cuatrimestral cuyo objetivo es tratar sobre los aspectos relacionados con su enseñanza y aprendizaje y destinada, sobre todo, al profesorado que trabaja en educación infantil, primaria, secundaria y universitaria.

La revista *Suma* se edita en
Badalona (Barcelona) — España

Normas de publicación

1. Para el envío de artículos o cualquier consulta sobre su contenido se utilizará el correo electrónico de la redacción de *Suma* <articulos@revistasuma.es> o la dirección postal de la co-directora:

   Iolanda Guevara Casanova
   c/ Temple n.º 26, 2º, 2ª
   08911 Badalona
2. Si los trabajos, imágenes incluidas, ocupan más de 5 Mb sólo se enviaran por correo postal en soporte magnético (CD-ROM, DVD-ROM o *pen drive*).
3. Los trabajos deben ser enviados como archivo en formato .TXT, .ODT, .RTF, .DOC, .DOCX, adjunto a un mensaje de correo electrónico en el que deben figurar:
   a) El título del trabajo, los nombres y apellidos de todos los autores, su lugar de trabajo y su dirección completa así como la sociedad federada a la que pertenecen (si se desea).

   Y a efectos de comunicación:

   b) El correo electrónico, teléfono y dirección postal del autor de contacto.
4. Se debe enviar una segunda versión del original en la que no aparezcan los nombres de los autores, ni información relativa a ellos o que pueda servir para identificarlos (por ejemplo, institución a la que pertenecen, citas y referencias bibliográficas propias, agradecimientos, datos del proyecto en el que se enmarca el trabajo). En esta versión se reemplazarán las citas y referencias bibliográficas por «Autor, 2012» o «Autor y otros, 2012». En las referencias bibliográficas propias se debe eliminar el título y el nombre de la revista o el título del libro donde se publica.
5. Se admiten diversos tipos de trabajos: teóricos, informes de investigaciones, divulgación, innovación didáctica…
6. Junto con el artículo se remitirá un resumen (máximo de 600 caracteres incluyendo espacios), una traducción del mismo y del título en inglés, y cinco palabras clave jerarquizadas (en castellano e inglés).

   Ejemplo: Investigación didáctica, Álgebra, Modelización y dificultades, Enseñanza y aprendizaje, Secundaria y bachillerato.
7. El texto irá una sola columna y tendrá una longitud máxima de 25 000 caracteres sin contar espacios pero incluyendo las tablas, las figuras y los anexos.
8. Los esquemas, dibujos, gráficas e imágenes serán enviados preferentemente en formato TIF o EPS, aunque será admisible el formato JPEG, de modo que, a una resolución mínima de 300 ppp, la imagen tenga un tamaño mínimo de 8 × 8 cm, y en color original. Se adjuntarán en una carpeta aparte del documento del texto, ya que las imágenes incrustadas en el texto no son válidas para su posterior edición. Cada archivo estará claramente identificado y se indicará en el texto el lugar donde se ubica. De igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.
9. Si alguna expresion no se puede escribir con los carácteres disponibles en la fuente Times New Roman, se incluirá, con un editor de ecuaciones, fuera del texto. Si esto no fuera posible, se incorporará como imagen. En tales casos se indicará el lugar que ocupan las fórmulas en el texto, haciendo referencia al nombre del archivo que las contiene.
10. Las referencias bibliográficas se dispondrán al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición.

    Ejemplos:

    Gómez, E. (1990), *Título,* Editorial, Lugar de edición.
    Gómez, E. (1990*a*), *Título,* Editorial, Lugar de edición.
    Gómez, E., y J. Pérez (1990), *Título,* Editorial, Lugar de edición.
    Gómez, E., J. Pérez y D. Hernández (1990), *Título,* Editorial, Lugar de edición.

    En los artículos de revistas y capítulos de libro se seguirá la pauta que se muestra a continuación:

    Gómez, E. (1990), «Título», *Revista,* n.º 31, 35-56.
    Gómez, E. (1990), «Título», en J. Pérez (ed.), *Título,* Editorial, Lugar de edición, 13-23.
11. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: «[…] supone un gran avance (Hernández, 1992)». Si el autor aparece explícitamente en el texto, tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: «[…] según Rico (1993)».
12. Si se cita una referencia de más de tres autores se puede citar el primero seguido de la expresión *y otros.* Por ejemplo: «Bartolomé y otros (1982)», «Gelpi y otros (1987)». Pero en la bibliografía deben aparecer todos los autores.
13. Todas las referencias bibliográficas deben corresponder a menciones hechas en el texto.
14. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente con superíndices a lo largo del artículo y se incluirán al final del texto.
15. A la recepción del trabajo se enviará un correo electrónico como acuse de recibo.
16. Cada trabajo será remitido a dos asesores para ser evaluado. Estos no serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo, aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo o recomendarán posibles modificaciones acordes con las normas y criterios de *Suma*.
17. Si los dos informes son positivos, el artículo será publicado. Si los dos informes son negativos, se desestimará su publicación. Si existe discrepancia entre los informes, se solicitará un tercer informe que decidirá su publicación o no.
18. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como —en caso afirmativo— la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido.
19. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

Boletín de suscripción

Tarifas	Suscripción anual	Número suelto	Monografía
Particulares	25 €	10 €	15 €
Centros	40 €	15 €	15 €
Europa	50 €	20 €	15 €
Resto del mundo	60 €	22 €	15 €

Fotocopiar esta hoja y enviar:

por correo a: Encarni Amaro Parrado (Tesorería de la FESPM)
C/ La Palma nº1, 1ºB,
23740, Andújar-Jaén.

por correo-e a: admin@fespm.es

Deseo suscribirme a la revista *Suma*:

Nombre y apellidos: NIF/CIF:

Dirección: Teléfono:

Población: CP:

Provincia: País:

Correo electrónico:

	Importe (€)
Suscripción a partir del año (3 números) ____________	
N.os sueltos ______________________________	
Total	

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto)

☐ Transferencia bancaria (IBAN ES79 2100 2153 3802 0010 9089)

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM

Fecha y firma:

Nombre y apellidos:

IBAN: Entidad: Oficina: DC Cuenta

Banco/Caja:

Agencia n.º: Dirección:

Población: Provincia:

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que, periódicamente, les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista *Suma*.

Atentamente (fecha y firma):