Geometría esférica con GeoGebra

Esperanza López Centella
José Antonio Sánchez Pelegrín

SUMA+ núm. 105
pp. 21-26

Artículo recibido en *Suma* en diciembre de 2021 y aceptado en septiembre de 2023

En este trabajo presentamos una propuesta didáctica para iniciar al alumnado de Educación Secundaria y Bachillerato en el estudio de la geometría esférica por medio del uso de GeoGebra. Se enfatizan las principales diferencias con la geometría euclídea y se proponen actividades contextualizadas para la aplicación de los contenidos presentados.

Palabras clave: Propuesta didáctica, Geometría esférica, GeoGebra, Geodésicas, Triángulos.

Spherical geometry with GeoGebra // In this work, we present a didactic proposal to initiate high school students in the study of spherical geometry using GeoGebra. Main differences with Euclidean geometry are emphasized and contextualized activities for the application of these new contents are proposed.

Keywords: Didactic proposal, Spherical geometry, GeoGebra, Geodesics, Triangles.

A lo largo de nuestra vida, la constante interacción con nuestro entorno nos permite familiarizarnos de manera natural con la geometría euclídea. No obstante, cuando nos alejamos de esa escala local y abordamos cuestiones de navegación, cartografía, astronomía (Evans, 1998), etc., precisamos del uso de la geometría esférica. Esta necesidad se ha visto y se ve reflejada en los currículos españoles de educación secundaria obligatoria y postobligatoria. En particular, en la asignatura Matemáticas II del segundo curso de Bachillerato del currículo establecido por la Ley Orgánica de Mejora de la Calidad Educativa (MECD, 2014: 421), se incluye el estándar de aprendizaje «Realiza investigaciones de situaciones nuevas de la geometría, relativas a objetos como la esfera, mediante el uso de programas informáticos específicos». Asimismo, entre las competencias específicas y los saberes básicos de la materia de mismo nombre y curso del currículo establecido en el marco de la actual Ley Orgánica por la que se modifica la Ley Orgánica de Educación (MEFP, 2022), se encuentran numerosas referencias al respecto: estudio de objetos geométricos de tres dimensiones (análisis de sus propiedades, determinación de sus atributos), exploración y representación de relaciones de objetos geométricos en el espacio con ayuda de herramientas digitales, resolución de problemas relativos a objetos geométricos en el espacio representados con coordenadas cartesianas, modelos matemáticos (geométricos, algebraicos) para resolver problemas en el espacio y sus conexiones con otras disciplinas y áreas de interés, etc.

Con el fin de responder a esta demanda del currículo diseñamos y presentamos una propuesta didáctica centrada en el estudio de la geometría esférica por medio del uso de GeoGebra. Comenzamos nuestra propuesta presentando la esfera y las coordenadas esféricas y geográficas, así como su utilidad para la geolocalización. A continuación, identificamos las geodésicas en la esfera, mostrando su importancia en la aviación. Posteriormente, estudiamos los triángulos esféricos, sus propiedades y clasificación. Por último, analizamos las circunferencias en la esfera, explorando la relación entre el perímetro y el diámetro. Las construcciones con GeoGebra descritas en el artículo están disponibles a través del siguiente enlace: <geogebra.org/m/e7mavwtc>.

Esfera

Una esfera S es el conjunto de todos los puntos del espacio que equidistan una distancia R (radio) de un punto dado $O = (x_0, y_0, z_0)$ (centro). Un punto (x, y, z) pertenece a la esfera S si se verifica que:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Considerando un sistema de coordenadas con origen en el centro de la esfera, podemos localizar cada punto de la esfera utilizando el denominado sistema de coordenadas esféricas (Whittlesey, 2019). En este sistema, la posición de cada punto se expresa por medio del par de ángulos (φ, θ) que se muestran en la figura 1.

Así, las coordenadas cartesianas y esféricas satisfacen la siguiente relación:

$$x = R \operatorname{sen}\varphi \cos\theta,$$

$$y = R \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta,$$

$$z = R \cos\varphi.$$

Como comprobaremos más adelante, la intersección de un plano secante con la esfera es una circunferencia. Si el centro de la esfera pertenece a dicho plano, la intersección resultante se denomina circunferencia máxima. En el caso de la Tierra, las semicircunferencias máximas que pasan por los polos geográficos se denominan meridianos. Las circunferencias resultantes de cortes de planos perpendiculares a la recta que une los polos se llaman paralelos. En particular, el único paralelo que es una circunferencia máxima recibe el nombre de ecuador terrestre (ver figura 2).

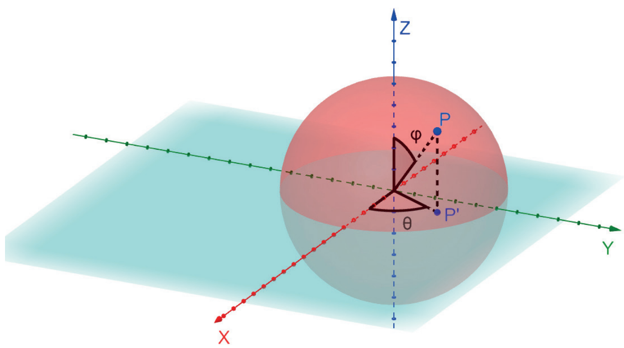

Figura 1. Coordenadas esféricas

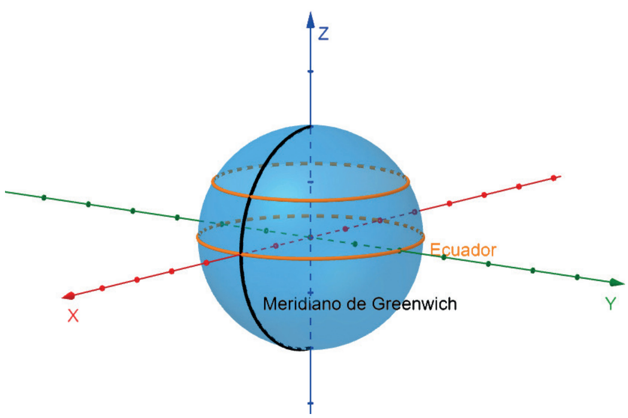

Figura 2. Paralelos y meridianos terrestres

A partir de las coordenadas esféricas (φ, θ) de un punto en la Tierra, podemos obtener las llamadas coordenadas geográficas (l_1, l_2) (Chang, 2016). La coordenada l_1 (latitud) mide el ángulo que forma la recta que pasa por dicho punto y el centro de la Tierra con el plano ecuatorial (plano que contiene el ecuador terrestre). La coordenada l_2 (longitud) mide el ángulo entre el meridiano que pasa por dicho punto y el meridiano de referencia (meridiano de Greenwich). Por tanto, la relación entre coordenadas geográficas y esféricas es:

$$(l_1, l_2) = (90^\circ - \varphi, \theta).$$

Actividades
Representa en GeoGebra la esfera terrestre de radio 6371 km. Sitúa sobre ella las siguientes ciudades a partir de sus coordenadas geográficas:
Tokio, (35°41’23”, 139°41’32”)
Londres, (51°30’26”, –0°7’39”)
Madrid, (40°25’0”, –3°42’12”)
Nueva York, (40°39’51”, –73°56’19”)
Johannesburgo, (–26°12’16”, 28°2’30”)
Sídney, (–33°52’0”, 151°12’0”)
Río de Janeiro, (–22°54’13”, –43°12’35”)

Propuesta didáctica: Geometría en la esfera

GEODÉSICAS

Al igual que en el plano, en la esfera se define la distancia entre dos puntos como el ínfimo de las longitudes de las curvas que los unen. En geometría euclídea, la curva que minimiza la distancia entre dos puntos del plano es el segmento de recta que los une. En cualquier geometría, las curvas que minimizan la distancia entre dos puntos se denominan geodésicas (do Carmo, 1976). En particular, cabe preguntarse cuáles son las geodésicas de la esfera. Para dar respuesta a esta cuestión, dados dos puntos A y B de una esfera con centro en el origen de coordenadas compararemos la longitud de distintas curvas que los unen.

Para ello, consideramos un tercer punto C arbitrario y construimos el plano que contiene a los puntos A, B y C. Trazamos una recta perpendicular a dicho plano pasando por el origen, denotando por D a la intersección de esta recta con el plano. Consideramos el arco de circunferencia con centro en D que pasa por los puntos A y B. Variando la posición del punto, obtenemos distintos arcos de circunferencia que unen A y B, pudiendo hallar aquel de longitud mínima, es decir, la geodésica que une A y B. Podemos comprobar que cuando hacemos coincidir C con el centro de la esfera este arco de circunferencia tiene una longitud mínima. Así, vemos que las geodésicas en la esfera son los arcos de circunferencias máximas. La figura 3 muestra esta construcción en GeoGebra.

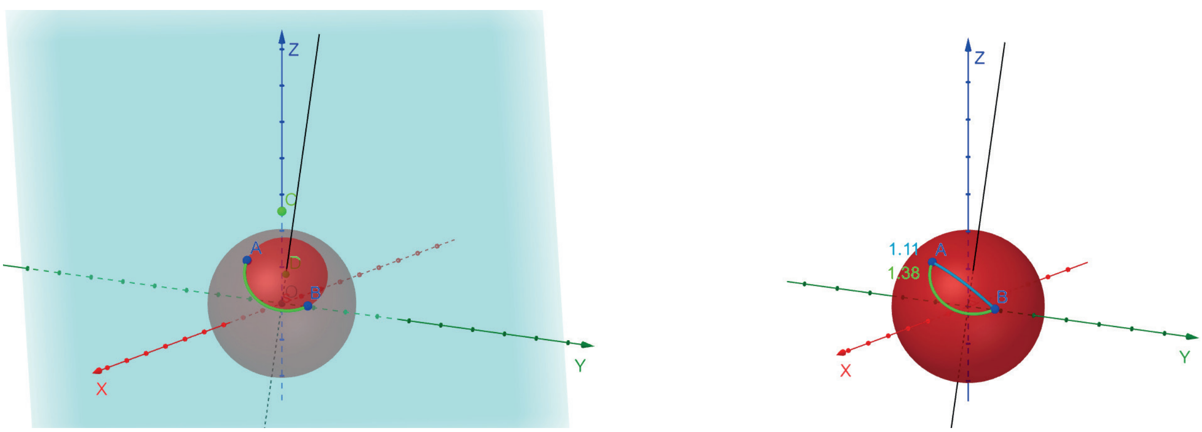

Figura 3. Construcción de una curva y una geodésica entre dos puntos

> *Actividades*
>
> ¿Cuál es la ruta aérea más corta entre Nueva York y Tokio? ¿Y entre Madrid y Sídney?
>
> ¿Qué ruta seguirías para ir de Río de Janeiro a Tokio haciendo escala en Johannesburgo?
>
> Una compañía de envíos internacionales cuenta con puntos de distribución en Londres y Sídney. ¿Dónde debería construir un centro logístico que equidiste de ambas ciudades (y esté lo más cerca posible de ambas)?

TRIÁNGULOS

En geometría plana, un triángulo queda definido a partir de tres puntos no alineados conectados por segmentos (geodésicas). Análogamente, tres puntos de la esfera que no pertenezcan a la misma circunferencia máxima unidos por arcos de circunferencias máximas (geodésicas) determinan un triángulo (Van Brummelen, 2013). A diferencia de lo que ocurre en el caso euclídeo, la suma de los ángulos interiores de un triángulo en la esfera no es constante.

Consideremos el triángulo formado por tres puntos *A, B* y *C* de la esfera (no pertenecientes a la misma circunferencia máxima) unidos por geodésicas. Para medir sus ángulos interiores, trazamos las rectas tangentes a las geodésicas en los vértices. Variando la posición de los vértices podemos comprobar cómo la suma de los ángulos interiores toma valores entre 180º y 540º (ver figura 4).

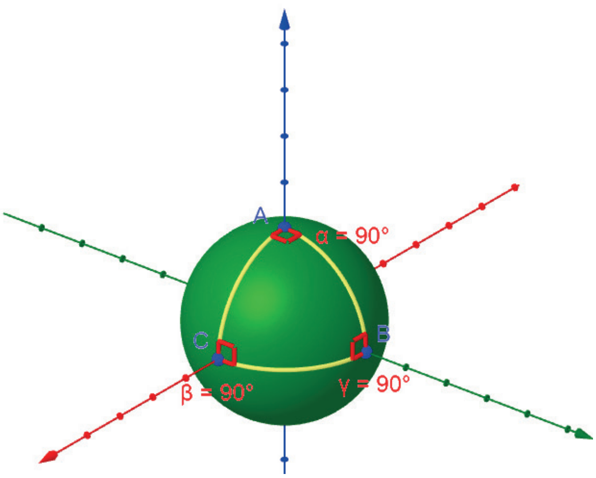

Figura 4. Triángulo equilátero en la esfera

> *Actividades*
>
> Construye todos los triángulos posibles en la Tierra usando como vértices los puntos determinados por las coordenadas geográficas de Tokio, Londres, Nueva York, Sídney y Río de Janeiro. Clasifícalos a partir de la longitud de sus lados. ¿Cómo los clasificarías a partir de sus ángulos?
>
> Dos flamencos se encuentran en un punto del ecuador terrestre tras haber volado, siguiendo las rutas más cortas, la misma distancia desde sus respectivos lugares de origen: Johannesburgo y Sídney. Identifica dicho punto.

CIRCUNFERENCIAS

Una circunferencia es el conjunto de todos los puntos que equidistan una distancia (radio) de un punto dado (centro). A continuación, comprobaremos que los cortes de la esfera por planos son, efectivamente, circunferencias (recordemos que estamos midiendo la distancia usando geodésicas en la esfera). Para ello, consideremos la intersección de la esfera de centro el origen de coordenadas con un plano. Llamemos *C* al punto de la esfera perteneciente a la recta perpendicular a dicho plano que pasa por el origen. Podemos comprobar que las geodésicas que unen *C* con los puntos de la intersección de la esfera con el plano tienen todas la misma longitud.

A partir de esta construcción también podemos observar que, a diferencia del caso euclídeo, el cociente

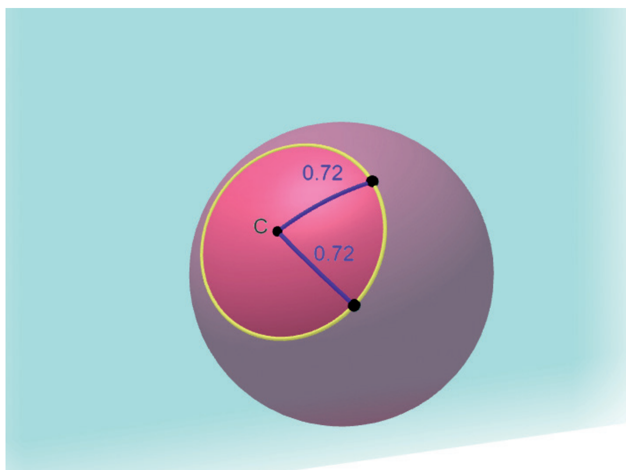

Figura 5. Circunferencia en la esfera

entre el perímetro y el diámetro de las circunferencias en la esfera no es constante. A medida que aumentamos el radio de la circunferencia este cociente se aproxima a 0, mientras que al disminuir el radio dicho cociente se acerca a π (ver figura 6).

Actividades
¿Por qué el cociente entre el perímetro y el diámetro de una circunferencia en la esfera se aproxima a π conforme disminuye el radio de esta?

Conclusiones

Esta propuesta didáctica trata de acercar al alumnado a la geometría esférica, resaltando sus principales diferencias con la euclídea. La abstracción de conceptos conocidos por el alumnado en geometría euclídea nos permite concretarlos en la esférica. Esto favorece tanto la adquisición de nuevo conocimiento como la profundización en nociones conocidas. Además, el uso de un software dinámico como GeoGebra promueve la autonomía en la exploración de estos conceptos por parte del alumnado. Las actividades propuestas motivan el empleo en contextos y situaciones reales de las nociones previamente presentadas. En conclusión, destacamos la riqueza didáctica de la propuesta, así como su sencilla implementación en el aula.

Referencias bibliográficas

Chang, K. (2016), *Introduction to Geographic Information Systems (9th ed.),* McGraw-Hill, Nueva York.

do Carmo, M., (1976), *Differential geometry of curves and surfaces,* Prentice Hall, Nueva Jersey.

Evans, J. (1998), *The History and Practice of Ancient Astronomy,* Oxford University Press, Nueva York.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España, *Boletín Oficial del Estado*, núm. 3, Sec. I, pp. 169-546.

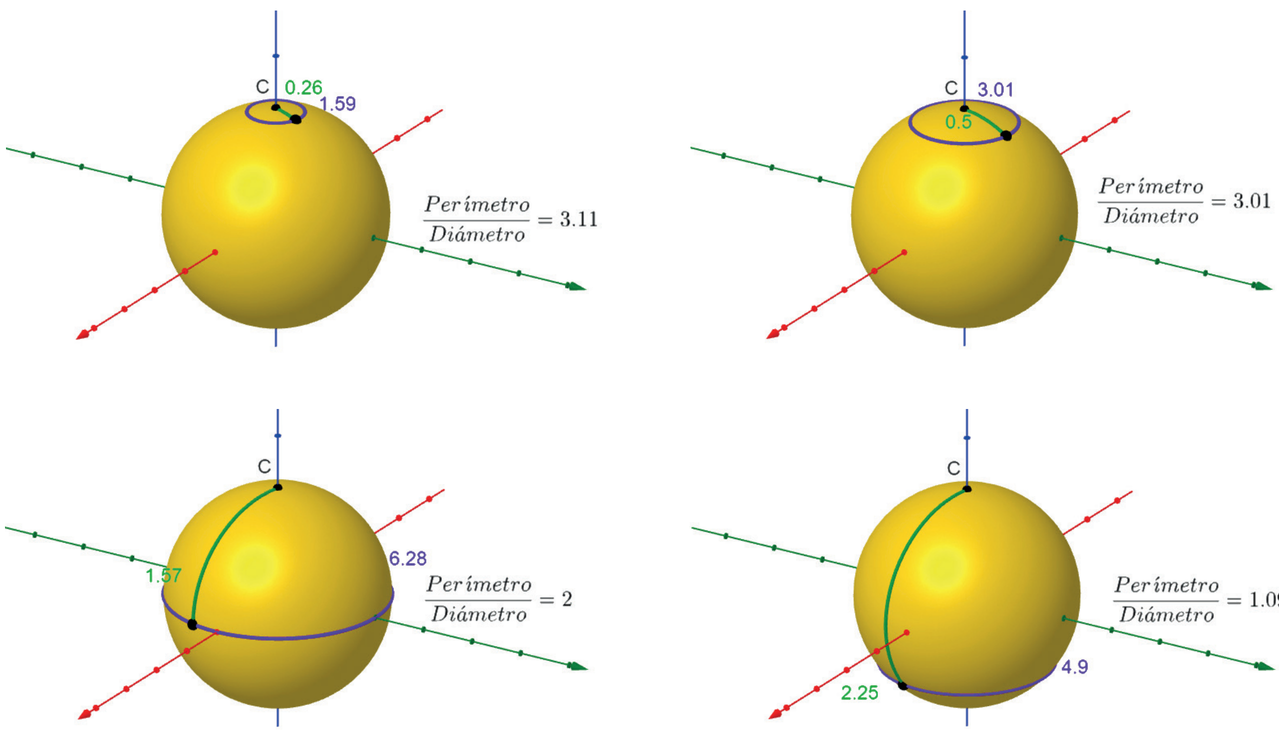

Figura 6. Cociente entre el perímetro y el diámetro de una circunferencia

Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato, Ministerio de Educación y Formación Profesional de España, *Boletín Oficial del Estado*, núm. 82, Sec. I., pp. 46047-46408.

Van Brummelen, G. (2013), *Heavenly Mathematics: The Forgotten Art of Spherical Trigonometry,* Princeton University Press, Nueva Jersey.

Whittlesey, M. A. (2019), *Spherical Geometry and its Applications,* CRC Press, Boca Ratón.

Esperanza López Centella
Universidad de Granada
<esperanza@ugr.es>

José Antonio Sánchez Pelegrín
Universidad de Córdoba
<jpelegrin@uco.es>