Explorando el potencial educativo de las ternas pitagóricas

Félix Martínez de la Rosa

SUMA+ núm. 105
pp. 37-46
Artículo recibido en *Suma* en enero de 2022 y aceptado en diciembre de 2022

El objetivo de este artículo es mostrar el potencial educativo de las ternas pitagóricas. La búsqueda de estas ternas, que son apenas mencionadas en cursos de Matemáticas de Secundaria, dan lugar a interesantes y motivadoras exploraciones visuales y algebraicas, y a relaciones con otros conceptos matemáticos.

Palabras clave: Ternas pitagóricas, Exploraciones, Herramientas visuales, Enseñanza y aprendizaje, Educación Secundaria.

Exploring the educational power of Pythagorean Triples // The goal of this paper is to show the educational potential of the Pythagorean Triples. The search for these Triples, which are barely mentioned in the mathematics of secondary education, give rise to interesting and motivating visual and algebraic explorations, and relationships with other mathematical concepts.

Keywords: Pythagorean Triples, Explorations, Visual tools, Learning and teaching, Secondary Education.

El teorema de Pitágoras es el resultado más conocido y popular de las Matemáticas: si a y b son los catetos de un triángulo rectángulo de hipotenusa c, se verifica que .También es el que se ha demostrado más veces: el libro (Loomis, 1968) recoge 370 demostraciones del teorema, y otras formas de visualizarlo están en https://www.cut-the-knot.org/pythagoras.

Data aproximadamente del año 500 ac y, según se cuenta en (Rothbart y Paulsell, 1974), Pitágoras se llenó de alegría al descubrirlo y ofreció un sacrificio de bueyes para celebrarlo. Sin embargo, el descubrimiento de que $\sqrt{2}$ es irracional hacía imposible que los triángulos rectángulos isósceles tuviesen sus tres lados enteros. Esto disgustó a Pitágoras y a sus seguidores, que intentaron ocultar ese conocimiento arrojando al mar al divulgador del secreto.

Tres números enteros positivos que verifican el teorema de Pitágoras se denomina *terna pitagórica*.

Los antiguos babilonios (sobre el año 1800 ac) ya las conocían, y anotaron cincuenta de ellas en una tablilla en texto cuneiforme que se conserva en la colección Plimpton de la Universidad de Columbia. El tamaño de las ternas, la mayor es (12709, 13500, 18541), sugiere que no fueron obtenidas solo por tanteo, sino que los babilonios conocían el modo de calcularlas (Eckert, 1992). Un recorrido por las antiguas civilizaciones (Babilonia, Egipto, India y China) en las que hay constancia de que el teorema de Pitágoras se conocía antes de la época de la Escuela Pitagórica se puede encontrar en (Feito y Sandoval, 2014), donde se analiza exhaustivamente la tablilla. En (Feito y Sandoval, 2015) se aportan actividades de carácter pluridisciplinar para la utilización de la tablilla con fines didácticos en las clases de Matemáticas en la ESO.

En los textos de secundaria, por ejemplo (Colera y Gaztelu, 2012) o (De Icaza, 2017), se aportan pinceladas históricas con referencias a los antiguos griegos, a la cultura mesopotámica o al triángulo sagrado egipcio de proporciones 3, 4, 5. También se muestran visualizaciones y aplicaciones del teorema, aunque la información sobre las ternas pitagóricas no va más allá de una definición.

La terna pitagórica (3, 4, 5) es la primera que diríamos (al igual que nuestros estudiantes) si alguien nos pregunta por alguna de ellas. Quizás dijésemos (6, 8, 10) u otras que se obtienen multiplicando la terna original por enteros positivos: todas estas dan lugar a triángulos rectángulos semejantes (figura 1).

Por otro lado, si los elementos de una terna pitagórica tienen algún factor común distinto de uno, dividiéndolos por él se da la misma situación. Esto da pie al concepto de *terna primitiva*: son las ternas pitagóricas (a, b, c) tales que a, b y c no tienen factores en común mayores que 1.

Desde un punto de vista educativo, lo interesante de las ternas pitagóricas no es lograr que los estudiantes sepan recitar de memoria un gran número de ellas, sino enseñarles caminos que les permitan obtenerlas de una forma sencilla. Con este fin, en este artículo se muestran exploraciones que pueden resultar motivadoras para los estudiantes de distintos cursos de Matemáticas en la ESO y el bachillerato.

Para llevarlas a cabo se pueden introducir las ideas principales y dejar explorar a los estudiantes, individualmente o en pequeños grupos, para ver lo que son capaces de obtener, las dificultades que se encuentran y las ayudas que necesitan para llegar a un resultado. El profesorado debe sopesar la dificultad de las exploraciones sugeridas para decidir dónde y cuándo plantearlas: si se piensa que alguna no es adecuada para todo un curso de la ESO o Bachillerato, sí podrían serlo para grupos de alumnos en clases especiales o como retos para aquellos más interesados en las matemáticas.

Generando ternas con exploraciones visuales y algebraicas

EXPLORACIÓN 1

Una primera exploración de tipo visual, adecuada para ser propuesta en los cursos iniciales de Matemáticas de la ESO, comienza con la figura 2 (Vinogradova, 2012).

La idea consiste en averiguar cuándo el área azul corresponde al de un cuadrado de lado entero. Dividiendo la figura 2 en cuadrados de lado 1 se observa (figura 3) que eso no siempre ocurre.

El área de la zona azul es $c^2 - b^2$. Por tanto, se trata de averiguar cuándo ese área corresponde al cuadrado

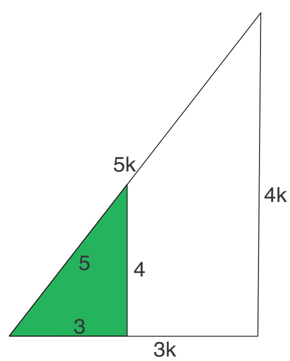

Figura 1

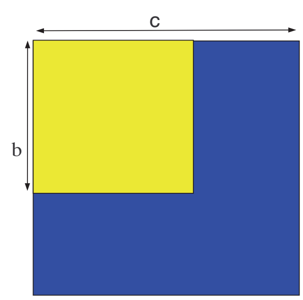

Figura 2

de un entero positivo a, es decir: $c^2 - b^2 = a^2$. Esta idea es el punto de partida de una exploración que se basa en analizar la diferencia entre los lados c y b en dos casos sencillos.

Caso 1: $c^2 - b^2 = 1$. Sustituyendo $c = 1 + b$ en $c^2 - b^2 = a^2$ se obtiene $b = \frac{a^2-1}{2}$ que es un entero positivo siempre que a sea impar y mayor que 1. Tomando el valor $a = 2n + 1$ para n mayor o igual que 1, se llega a la terna que, según se cuenta en (Mohapatra y Parakash, 2010), se le atribuye al propio Pitágoras:

$$(2n + 1, 2n^2 + 2n, 2n^2 + 2n + 1)$$

Caso 2: $c - b = 2$. Sustituyendo $c = 2 + b$ en $c^2 - b^2 = a^2$ se obtiene $b = \frac{a^2-4}{4}$ que es un entero positivo cuando a es un número par y mayor que 2. Tomando $a = 2n + 2$ para n mayor o igual que 1, se llega a la terna:

$$(2n + 2, n^2 + 2n, n^2 + 2n + 2)$$

EXPLORACIÓN 2

En la exploración anterior, el valor de c se calcula añadiendo una o dos unidades al de b. En general, una terna formada por enteros positivos (x, y, z), donde $x < y < z$, cumple que la diferencia entre el tercero y el segundo es otro entero positivo n. Por eso, las ternas se pueden escribir en la forma $(x, y, y + n)$, donde $x^2 + y^2 = (y + n)^2$. Despejando y de esta relación se obtiene la parábola:

$$y = \frac{x^2 - n^2}{2n}$$

Cuando el valor anterior es un entero positivo entonces (x, y, z) es una terna pitagórica. Con esta forma de entender las ternas se obtiene un enfoque gráfico de las mismas: el punto (x, y) es la intersección de la gráfica de la parábola anterior con la circunferencia $x^2 + y^2 = (y + n)^2$.

Los casos $n = 1$ y $n = 2$ dan lugar a las mismas ternas de la exploración 1: si $n = 1$, para que $y = \frac{x^2 - 1^2}{2}$ sea entero positivo debe ser x un número impar mayor que 1, y si $n = 2$, para que $y = \frac{x^2 - 2^2}{4}$ sea entero positivo debe ser x un número par mayor que 2. En las figuras 4 y 5 se visualizan en el plano xy las ternas obtenidas en estos dos casos.

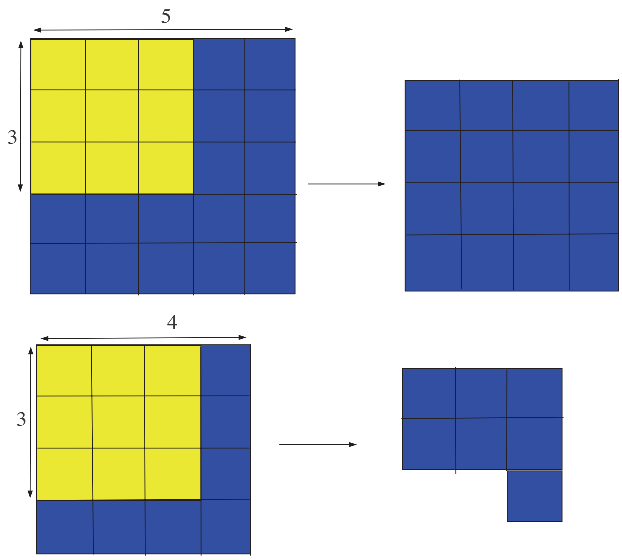

Figura 3

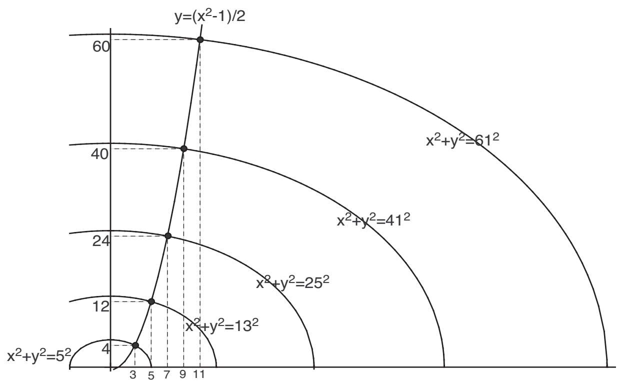

Figura 4

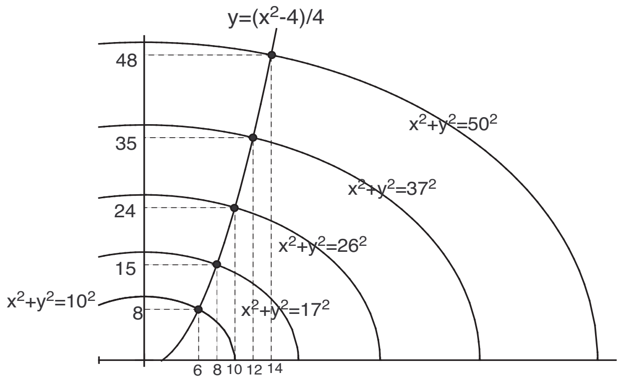

Figura 5

EXPLORACIÓN 3

Otro técnica de exploración también apta para cursos iniciales de la ESO, se basa en crear patrones de colores que den lugar a las ternas (Booze, 2011). Para ello partimos de un cuadrado de longitud x, impar, que se fragmenta en pequeños cuadraditos de lado 1. Dentro del grande, en el centro, se van tomando cuadrados interiores de área y, impar, cada vez más pequeños. Se colorean de rojo las zonas que están a la derecha e izquierda de estos últimos (figura 6).

Las zonas de arriba y abajo de cada cuadrado interior, se colorean en azul formando un patrón en escalera (figura 7).

Cada una de las imágenes de la figura 7 da lugar a una terna pitagórica que se obtiene de la distribución de los siguientes colores,

(Amarillo, Blanco + Rojo, Blanco + Rojo + Azul)

La figura 7 da lugar a las ternas pitagóricas:

(16, 63, 65) ; (28, 45, 53) ; (36, 27,45) ; (40, 9, 41)

Observación. Si partimos de impares positivos, x, y, $x > y$, las fórmulas que corresponden a la distribución de los colores son:

Blanco + Rojo: ocupan x columnas (el ancho total) e y filas. En total, $x \cdot y$.

Amarillo: aparece en $(x - y)$ filas. En la figura 8 se analiza la distribución del amarillo en las filas de la parte de arriba de cada dibujo. Para ello se invierte la zona de los colores amarillos de la derecha formando rectángulos (igual en la de abajo) (figura 8). En total $(x - y) = \left(\frac{x+y}{2}\right)$.

Blanco + Rojo + Azul: es el área total x^2, menos el color Amarillo:

$$x^2 - (x-y)\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{x^2+y^2}{2}$$

Para x e y impares positivos, $x > y$, la terna pitagórica obtenida es,

$$\left(x \cdot y, \frac{x^2-y^2}{2}, \frac{x^2+y^2}{2}\right)$$

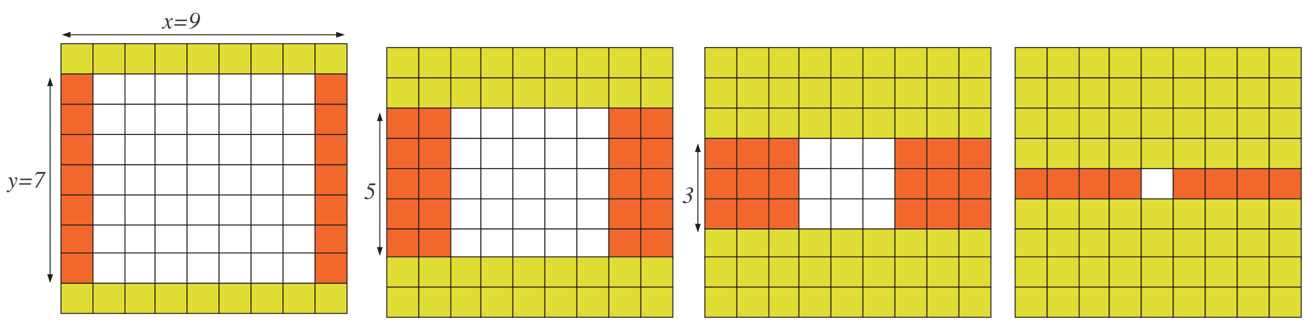

Figura 6

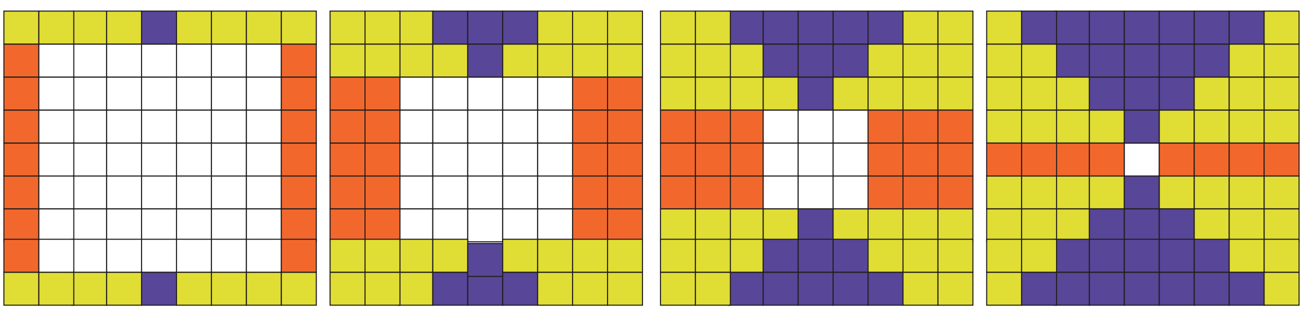

Figura 7

Esta fórmula da la posibilidad de obtener ternas que contengan a un número impar fijado de antemano. Por ejemplo, si descomponemos el 45 en $x \cdot y$, se tienen varias opciones para x e y:

Si $45 = x \cdot y = 15 \cdot 3$, la terna es (45, 108, 117)

Si $45 = x \cdot y = 9 \cdot 5$, la terna es (45, 28, 53)

Si $45 = x \cdot y = 45 \cdot 1$, la terna es (45, 1012, 1013)

EXPLORACIÓN 4

Una relativamente sencilla exploración algebraica descrita en (Rothbart y Paulsell, 1974) da una manera de obtener todas la ternas pitagóricas, y extiende lo descrito en la anterior exploración: hace posible conseguir ternas con cualquier valor prefijado (no solo impar):

(a, b, c) es una terna pitagórica si y solo si existen dos enteros positivos u y v con la misma paridad, $u > v$, siendo $u \cdot v$ un cuadrado perfecto, tales que $(a, b, c) =$

$$\left(\sqrt{u \cdot v}, \frac{u-v}{2}, \frac{u+v}{2}\right)$$

Partimos de la terna (a, b, c). Entonces $a^2 = c^2 - b^2 =$ $= (c + b)(c - b)$. Denominamos:

$$u = c + b, v = c - b$$

Estos dos valores verifican que $u \cdot v$ es un cuadrado perfecto, y que u y v son enteros positivos con la misma paridad. Por otro lado, resolviendo el sistema $(u = c + b, v = c - b)$ se obtiene:

$$b = \frac{u-v}{2}, c = \frac{u+v}{2}$$

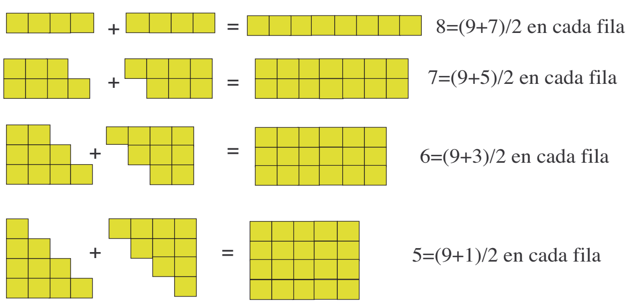

Figura 8

Además, $a^2 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b) = u \cdot v$, luego $a = \sqrt{u \cdot v}$.

Recíprocamente, sean u y v dos enteros positivos con la misma paridad, $u > v$, siendo $u \cdot v$ un cuadrado perfecto, entonces es fácil comprobar que se obtiene la terna pitagórica:

$$\left(\sqrt{u \cdot v}, \frac{u-v}{2}, \frac{u+v}{2}\right)$$

Esta fórmula permite obtener ternas pitagóricas que contengan cualquier valor predeterminado (esto ya se hizo en la *exploración 3* pero sólo con números impares). Supongamos que queremos que en la terna aparezca $a = 12$, entonces escribimos $a^2 = 144 = u \cdot v$. El valor 144 se puede factorizar de varias formas, y cada una de ellas da paso a una terna pitagórica conteniendo el valor 12. Por ejemplo en el caso $144 = 72 \cdot 2 = u \cdot v$, se obtiene la terna (12, 35, 37). Para que aparezca el valor 45, tomamos por ejemplo $45^2 = 2025 = 81 \cdot 25$ y se obtiene la terna (45, 28, 53).

Si distinguimos los casos en que a sea par o impar, la fórmula anterior se simplifica dando lugar a otras expresiones para las ternas:

Si $a > 1$ es un entero positivo impar, tomando $a^2 = a^2 \cdot 1 = u \cdot v$, se obtiene:

$$\left(a, \frac{a^2-1}{2}, \frac{a^2+1}{2}\right)$$

Esta terna también se obtiene en la exploración 2 para el caso $x = a, y = 1$.

Si $a > 2$ es un entero positivo par, tomando $a^2 = \frac{a^2}{2} \cdot 2 = u \cdot v$, se obtiene:

$$\left(a, \frac{a^2-4}{4}, \frac{a^2+4}{4}\right)$$

Varias maneras de obtener la fórmula ($2m\,n$, m^2 - n^2, $m^2 + n^2$)

Una fórmula muy conocida para obtener ternas, que según (Beaureaud y Suryanaran, 1996) procede de la

Grecia antigua, aunque según (Wade y Wade, 2003) fue descubierta por los babilonios, es:

$(2m\,n, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$ donde m y n son enteros positivos tales que $m > n$.

La obtención de esta fórmula se puede hacer empleando distintos procedimientos.

EMPLEANDO REGLAS ALGEBRAICAS

Para que (a, b, c) sea una terna pitagórica se tiene que cumplir que $a^2 + b^2 = c^2$. Despejando a^2 se obtiene $a^2 = (c + b)(c - b)$, por tanto:

$$\frac{(c+b)}{a} = \frac{1}{\frac{(c-b)}{a}}$$

Si denominamos $\frac{(c+b)}{a} = \frac{m}{n}$, entonces $\frac{(c-b)}{a} = \frac{n}{m}$, por tanto:

$\frac{c+b}{a} + \frac{c-b}{a} = \frac{2c}{a}$, luego $\frac{2c}{a} = \frac{m}{n} + \frac{n}{m}$, por lo que

$c = a\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}\right)$

$\frac{c+b}{a} + \frac{c-b}{a} = \frac{2b}{a}$, luego $\frac{2b}{a} = \frac{m}{n} + \frac{n}{m}$, por lo que

$b = a\left(\frac{m^2-n^2}{2mn}\right)$

Para el caso $a = 2mn$ se obtiene la fórmula buscada.

UTILIZANDO LA RELACIÓN CON LA CIRCUNFERENCIA

Observemos que cada terna pitagórica (a, b, c) cumple $a^2 + b^2 = c^2$, por tanto el punto $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$ se encuentra sobre la circunferencia unidad $x^2 + y^2 = 1$. Esta relación se utiliza en (Kleiman, 1972) y (Cannon, 2011) para obtener la fórmula. Se toma la recta $y = Kx - 1$, que pasa por el punto $(0, -1)$ y tiene pendiente racional, K (figura 9).

La intersección entre la recta y la circunferencia se produce en el punto $P\left(\frac{2K}{K^2+1}, \frac{K^2-1}{K^2+1}\right)$. Si se expresa $K = \frac{m}{n}$, donde m y n son enteros positivos, $m > n$, se obtiene $\left(\frac{2mn}{m^2+n^2}, \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}\right)$ y por tanto $(2m\,n, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$ es una terna pitagórica.

EMPLEANDO EL ÁNGULO DOBLE

Otra manera obtener las ternas consiste en recurrir a las fórmulas del ángulo doble (Houston, 1994). Partiendo de dos enteros positivos $m > n$ se construye el triángulo rectángulo cuyos catetos son m y n, y a es el ángulo opuesto al cateto n. Entonces:

$$\mathrm{sen}\,a = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}} \; ; \; \cos a = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

Empleando las fórmulas del ángulo doble, se obtiene:

$$\mathrm{sen}\,2a = \frac{2mn}{m^2+n^2} \; ; \; \cos 2a = \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$$

Teniendo en cuenta que $\mathrm{sen}^2 2a + \cos^2 2a = 1$, un razonamiento similar al de la exploración anterior produce la terna buscada (figura 10).

Si m y n son uno par y el otro impar, y primos entre sí, la fórmula anterior da lugar a todas la ternas pitagóricas primitivas (aunque no a todas las ternas: (9,12,15) no se obtiene). Al par (m, n) se le denomina

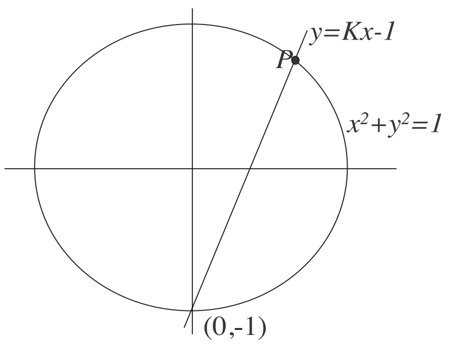

Figura 9

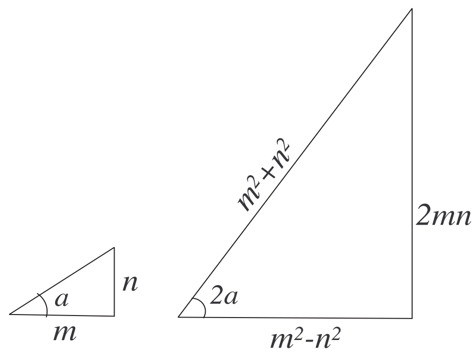

Figura 10

generador de la terna o *par pitagórico*. Este concepto se desarrolla en (Saunders y Randall, 1994), donde se muestra que si (m, n), $m > n$, es un par pitagórico, lo son también $(2m + n, m)$, $(2n + m, n)$ y $(2m - n, m)$.

Por ejemplo, (2, 1) da lugar a (5, 2), (4, 1) y (3, 2) y a su vez cada uno de ellos da lugar a otros tres, obteniéndose un árbol de pares pitagóricos (y por tanto de ternas pitagóricas). Además, cualquier par pitagórico está en una rama de ese árbol cuyo origen es (2, 1).

Superposición de cuadrados

En la exploración 1 se superpuso un cuadrado pequeño dentro de otro mayor. Si se realiza esta exploración empleando dos cuadrados en lugar de uno y se analizan las figuras a que da lugar se obtienen nuevas ideas para generar ternas pitagóricas.

A partir de los enteros positivos $a < b < c$, se superpone un cuadrado de lado a y otro de lado b en el de lado c como se muestra en la figura 11 (Gómez, 2005).

En la figura 11 se visualiza que $a^2 + b^2 = c^2$ si y sólo si $n^2 = 2k\,m$, lo que indica la relación entre las ternas pitagóricas y un tipo de factorización de cuadrados pares.

Si partimos de la terna (a, b, c), en la figura 11 se observan los valores de k, m y n que cumplen la relación $n^2 = 2k\,m$,:

$$\begin{cases} k = c - b \\ m = c - a \\ n = a - b = a + b - c \end{cases}$$

Recíprocamente, si partimos de $n^2 = 2k\,m$, los valores de a, b y c que forman la terna pitagórica se obtienen despejando en el sistema anterior:

$$\begin{cases} a = n + k \\ b = n + m \\ c = n + k + m \end{cases}$$

En el caso en que k y m sean relativamente primos se obtiene una terna primitiva (Teigen y Hadwin, 1971).

Por ejemplo, para $n = 6$ hay tres maneras de factorizar su cuadrado en la forma $n^2 = 2k\,m$:

$$n^2 = 36 = 2 \cdot 1 \cdot 18 = 2 \cdot 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 6$$

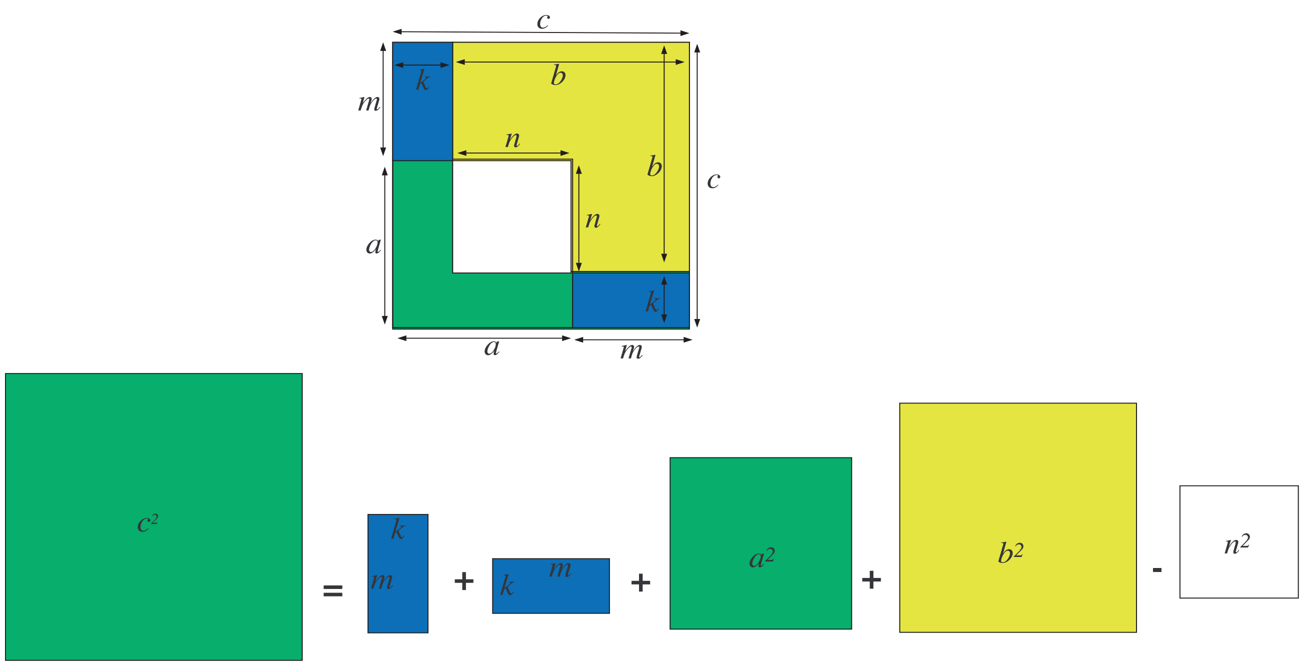

Figura 11

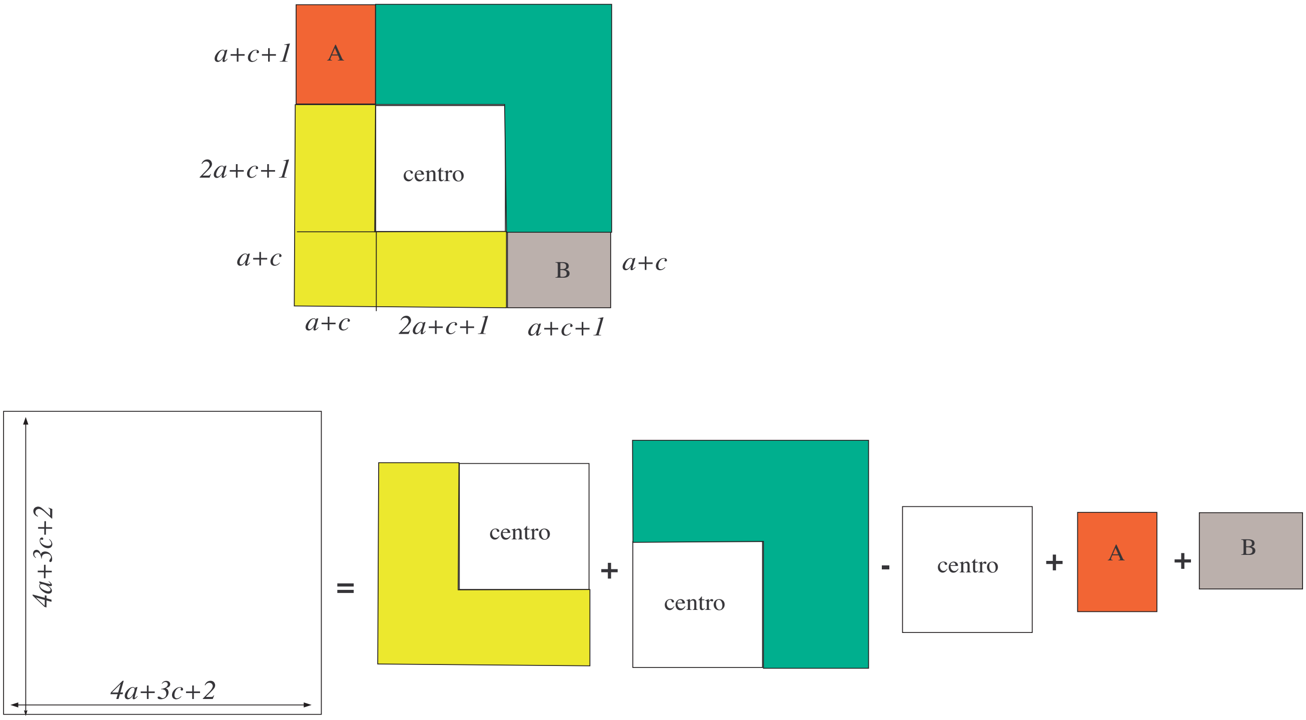

Figura 12

De aquí se obtienen los valores $k = 1, m = 18$; $k = 2, m = 9$ y $k = 3, m = 6$ que dan lugar a las ternas (7, 24, 25), (8, 15, 17) y (9, 12, 15), siendo primitivas la primera y la segunda.

TERNAS CASI ISÓSCELES

Como ya se dijo en la introducción, no existen ternas pitagóricas que den lugar a triángulos rectángulos isósceles, porque no es posible que una terna de

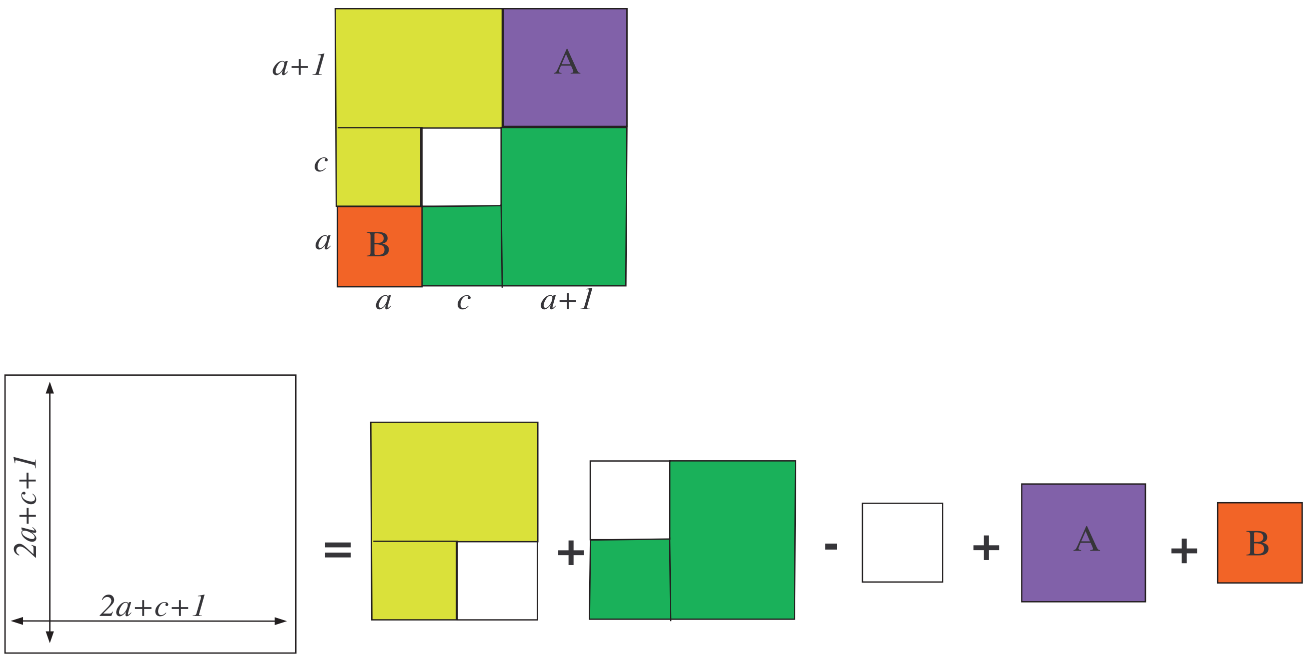

Figura 13

enteros positivos (a, a, c) cumpla que $a^2 + a^2 = c^2$. Sin embargo, sí las hay del tipo $(a, a + 1, c)$ por ejemplo (3, 4, 5). Estas se denominan *ternas pitagóricas casi isósceles*. La cuestión es si hay alguna forma de obtenerlas de una forma sencilla y si hay un número ilimitado de ellas. La respuesta es afirmativa y la forma de generarlas se expone en (Nelsen, 2016). Para ello se utiliza la técnica visual de la superposición, insertando dos cuadrados pequeños en uno grande, con las medidas adecuadas. Primero se construye el cuadrado mayor de lado $(4a + 3c + 2)$ de la figura 12 (arriba).

En la figura 12 (abajo) se observa la relación:

$$(4a + 3c + 2)^2 = (3a + 2c + 1)^2 + (3a + 2c + 2)^2 - (2a + c + 1)^2 + 2(a + c)(a + c + 1)$$

Ahora se construye el cuadrado de lado $(2a + c + 1)$ de la figura 13 (arriba).

En la figura 13 (abajo) se observa que:

$$(2a + c + 1)^2 = 2(a + c)(a + c + 1) - c^2 + (a + 1)^2 + a^2$$

Por último, sustituyendo esta expresión en la primera fórmula obtenida tenemos:

$$(4a + 3c + 2)^2 = (3a + 2c + 1)^2 + (3a + 2c + 2)^2 + c^2 - (a + 1)^2 - a^2$$

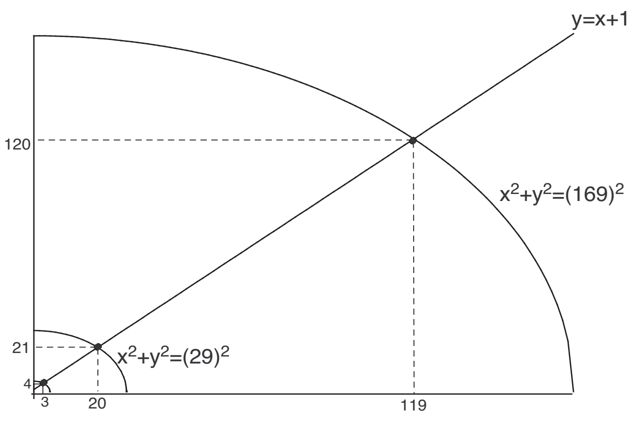

Figura 14

Esto quiere decir que a partir de una terna casi isósceles $(a, a + 1, c)$ se genera otra:

$$(3a + 2c + 1, 3a + 2c + 2, 4a + 3c + 2)$$

Por tanto, a partir de (3, 4, 5) se obtiene (20, 21, 29), y de ella (119, 120, 169), etc. La figura 14 representa gráficamente la disposición de estas ternas.

Resumen final

A lo largo de este artículo se han mostrado exploraciones que llevan a la obtención de ternas pitagóricas. La fragmentación de un cuadrado en otros de lado 1 hace surgir patrones de colores que dan lugar a las ternas. Se pone de manifiesto la relación con las parábolas, las circunferencias y las fórmulas del ángulo doble. Por último, la superposición de cuadrados da la ocasión de calcular ternas casi isósceles.

Este es un tema de gran interés histórico que se trata de manera muy breve en la enseñanza secundaria y el bachillerato. Para la búsqueda de estas ternas solo se requieren conocimientos matemáticos que se imparten en Secundaria. Esta búsqueda da paso a exploraciones visuales y de tipo algebraico y relativamente sencillas, que pueden sorprender y motivar a los estudiantes, y contribuir a mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

Referencias bibliográficas

Beauread, R., y E. Suryanarayan (1996), «Pythagorean Triples: the hyperbolic view», *The College Mathematics Journal,* vol. 27(3), 170-181.

Booze, D. A. (2011), «Visualizing Pythagorean Triples an Beyond», *Mathematics Teacher,* vol. 104(5), 393-398.

Cannon, L. O. (2011), «Pythagorean Triples: Avenues for Exploration», *Mathematics Teacher,* vol. 105(4), 311-315.

Colera, J., y I. Gaztelu (2012), *Matemáticas, 2º educación secundaria,* Anaya. Madrid.

De Icaza, A. (2017), *Matemáticas 3. Recursos didácticos,* Ed. Santillana, Ciudad de México.

Eckert, J. E. (1992), «Primitive Pythagorean Triples», *The College Mathematical Journal,* vol. 23(5), 413-417.

Feito, M., y C. Sandoval (2014), «Matemáticas y competencias básicas a partir de la tablilla Plimpton 322 (1)», *Suma,* n.º 77, 31-40.

Feito, M., y C. Sandoval (2015), «Matemáticas y competencias básicas a partir de la tablilla Plimpton 322 (2)», *Suma,* nº 78, 9-21.

Gómez, J. (2005), «Proof without words: Pythagorean triples and Factorizations of even squares», *Mathematic Magazine,* vol. 78(1), 14.

Houston, D. (1994), «Proof without words: Pythagorean triples via Double Angle Formulas», *Mathematic Magazine,* vol. 67(3), 187.

Kleiman, S. L. (1972), «Pythagorean Triples by Geometry», *Two-years College Mathematic journal,* vol. 3(1), 39-41.

Loomis, E. S. (1968), *The Pythagorean Proposition, National Council of Teachers of Mathematics,* Washington, D.C.

Mohapatra, A., y N. Prakash (2010), «A generalized formula to determine Pythagorean Triples», *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* vol. 41(1), 131-135.

Nelsen, R. B. (2016), «Proof without words: Infinitely many almost-isosceles Pythegorean triples exist», *Mathematic Magazine,* vol. 89(2), 103-104.

Rothbart, A., y B. Paulsell (1974), «Pythagorean Triples: a new, easy-to-derive formula with some geometric applications», *The Mathematics Teacher,* vol. 67(3), 215-218.

Saunders, R., y T. Randall, (1994), «The family tree of the Pythagorean triplets revisited», *The Mathematical Gazette,* vol. 78(482), 190-193.

Teigen, M. G., y D. W. Hadwin (1971), «On generating Pythagorean Triples», *American Mathematical Monthly,* vol. 78, 378-379.

Vinogradova, N. (2012), «Searching for Pythagorean Triples», *Mathematics Teaching in the middle school,* vol. 18(3), 140-143.

Wade, P. W., y W. R. Wade (2003), «Recursions that produce Pythagorean Triples», *The College Mathematical Journal,* vol. 34(2), 98-111.

Félix Martínez de la Rosa
Universidad de Cádiz
<felix.martinez@uca.es>