Los buenos retos matemáticos nunca envejecen

MMACA

SUMA+ núm. 105
pp. 87-93
Artículo solicitado por *Suma* en julio de 2023 y aceptado en septiembre de 2023

Hey Hey, My My, Rock&Roll can never die…

My My, hey hey, Rock&Roll is here to stay…

Neil Young

May you stay forever young…

Bob Dylan

En el número 97 de *Suma,* presentamos nuestra versión de un reto matemático atribuido a Martin Gardner[1] (figura 1).

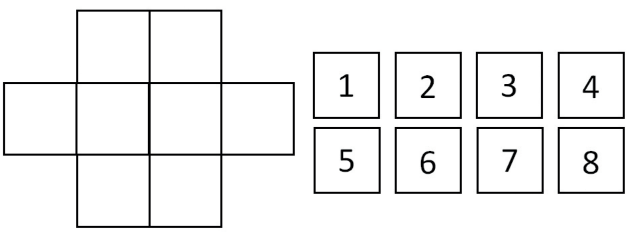

Figura 1. *No Connection* de Martin Gardner: Tablero y fichas del juego

El reto consiste en colocar las fichas en el tablero de manera que números consecutivos no tengan ni lados ni vértices que se toquen[2].

No voy a recordar las soluciones o las posibles versiones comerciales que se han hecho de esta idea. En la figura 2 repetimos el diseño que hemos elaborado en el MMACA para este puzle, añadiendo un componente geométrico, que nos ha reservado interesantes sorpresas.

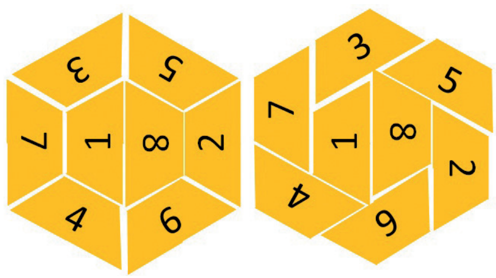

Figura 2. Diseño de MMACA para el No Connection

En el mismo artículo podéis encontrar un rápido análisis de las estrategias que los usuarios del MMACA usan para resolver el reto y algunas de las versiones realizadas para distintas ocasiones: desde la cajita que vendemos en nuestra tienda hasta la versión gigante sobre lona que estrenamos en una exposición temporal en el Castillo de la Bisbal, obligados por la logística del lugar.

Nuestro diseño del puzle y la relación entre el hexágono y los trapecios que lo forman nos permitió una versión adaptada para unos usuarios de menor edad: desapareció la idea de números consecutivos para ser substituida por una versión con colores, en la cual se trata de evitar que trapecios del mismo color se toquen.

Como hemos comprobado en más de una ocasión, buscar versiones aparentemente más fáciles de las actividades y los materiales no comporta renunciar a los aspectos más competenciales de las propuestas y nos permite investigar en contextos diferentes.

Como se puede ver en el citado artículo, la irrupción de los colores abre la conexión con el ámbito de los mapas y del Teorema de los Cuatro Colores, además de la posibilidad de aceptar o rechazar que piezas del mismo color comparten vértices.

Para edades intermedias resulta muy interesante seguir despedazando las piezas (hexágono, trapecio, rombo, triángulo) y focalizar la discusión sobre la relación entre sus áreas y sus perímetros, cosa que comporta alguna dificultad más (figura 3).

Nos permitimos afirmar una vez más que la eficacia didáctica de toda actividad está en nuestras manos y nuestra capacidad de estirar y enriquecer los retos, con el objetivo de empezar a desarrollar procesos de visión espacial, análisis de relaciones, resolución de problemas, conceptualización, pensamiento computacional, comunicación…

Y, como siempre, pensamos que todo proceso debe empezar con la manipulación de los materiales para avanzar después en el campo de lo simbólico y lo abstracto.

Asentado el primer paso de las proporciones entre las áreas de las piezas 1, 2, 3 y 6 (considerando el área del triángulo pequeño como unidad), nos queda preguntarnos cómo construir las piezas de áreas 4 y 5.

Si queremos que esta inquietud salga del alumnado, será suficiente añadir un dado y aprovechar el plus de motivación que acompaña al juego.

Las distintas combinaciones de piezas que nos permiten llegar al mismo resultado nos invitan a emprender rápidas incursiones en territorios tan relevantes como la equivalencia de los polígonos, la combinatoria o la composición de los números[3] (figura 4).

Analizadas las figuras, debería resultar suficientemente fácil reconocer los ejes que permiten clasificarlas: valor de su área (en unidades) y número de piezas que las componen.

Organizados en grupos y por turnos, empezamos ordenadamente a construir y definir figuras de valor mínimo y menor número de piezas, dando más relevancia a la construcción de polígonos convexos regulares o semirregulares.

A partir de un determinado momento, y en relación con la edad o habilidades del alumnado, podemos pasar de la construcción física de los objetos a su representación numérica (tabla 1).

Figura 3. Figuras primarias (Pattern Blocks)

Figura 4. Composición de figuras (Pattern Blocks)

NÚMERO DE PIEZAS \ VALOR DEL ÁREA	1	2	3	4	6	7	7	8
1	1	2	3		6			
2		1+1	2+1	3+1	3+3	6+1	6+1	6+2
				2+2				
3			1+1+1	2+1+1	3+2+1	3+3+1	3+3+1	6+1+1
					2+2+2	3+2+2	3+2+2	3+3+2
4				1+1+1+1	3+1+1+1	3+2+1+1	3+2+1+1	3+2+2+1
					2+2+1+1	2+2+2+1	2+2+2+1	2+2+2+2
5					2+1+1+1+1	3+1+1+1+1	3+1+1+1+1	3+2+1+1+1
						2+2+1+1+1	2+2+1+1+1	2+2+2+1+1
6					1+1+1+1+1+1	2+1+1+1+1+1	2+1+1+1+1+1	3+1+1+1+1+1
								2+2+1+1+1+1

Tabla 1

La estructura isométrica de las figuras permite escoger sin discusiones el elemento que se utiliza como unidad de medida del perímetro (el lado del triángulo pequeño). Será también fácil aceptar la relación que se descubre entre los perímetros de las piezas: 3, 4, 5 y 6.

Confrontar estas variaciones tan regulares en una tabla debería evidenciar sus diferencias respecto a la unidad de referencia (tabla 2).

Otra actividad que se puede introducir para alternar los momentos más disciplinares y convergentes con otros más lúdicos y creativos puede ser la de dejar que cada grupito de alumnos invente formas más o menos regulares con un número más elevado de piezas y desafíe al resto de la clase a calcular su valor en unidades[4] (figura 5).

Otras reflexiones que pueden aparecer o se pueden provocar:

— Parece evidente que podemos añadir un número indeterminado de pequeños triángulos y siempre podremos construir, alternativamente, paralelogramos o trapecios más grandes, aparte de montar composiciones de otros polígonos regulares, semirregulares o irregulares. Ya no

Forma	Área	R áreas	Perímetro	R perímetro
Triángulo pequeño	1	1	3	1
Rombo	1×2	2	4	4/3=1+1/3
Trapecio 1	1×3	3	5	5/3=1+2/3
Triángulo grande	1×4	4	6	6/3=2
Parelelogramo	1×4	4	6	6/3=2
Héxagono	1×6	6	6	6/3=2
Trapecio 2	1×5	5	7	7/3=2+1/3

Tabla 2

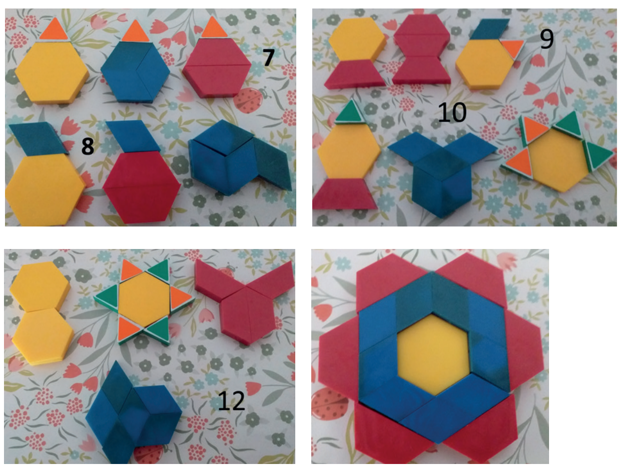

Figura 5. Mosaicos

Figura 6. *Lectio magistralis* en el Campidoglio de Roma, en 2003, en ocasión del 90 aniversario de Emma
Foto: F. Martín Casaderrey

necesitamos los dados, pero todavía podemos conducir la experiencia añadiendo físicamente las piezas. Dependiendo de la edad y del interés que habremos sabido despertar, llegará pronto también el momento en que podremos olvidar las piezas tangibles y construir nuestra serie de valores de manera abstracta sobre la base de los patrones encontrados.

— Se nos ofrece una inmejorable ocasión para reflexionar sobre los incrementos de áreas y perímetros e introducir o revisar las famosas actividades sobre rectángulos equivalentes e isoperimétricos de Emma Castelnuovo (las del hilo, para entendernos[5]) (figura 6).
— Con el alumnado de 5-8 años no es necesario guiar este tipo de análisis; la experiencia es suficientemente impactante para que se quede en el patrimonio latente de sus competencias matemáticas, lista para despertarse cuando otra experiencia similar se presente.

Este año, en el ámbito del proyecto europeo *SMEM Significant Mathematics for Early Mathematicia*n, destinado al alumnado de 3 a 8 años, nos hemos encontrado con la urgencia de añadir una actividad más a la Maleta Didáctica, que es uno de los productos de dicho proyecto.

Todos los módulos de una exposición —y aún más si tiene el formato de una *pop-up exhibition*— obligan a ser construidos en materiales ligeros y de pequeño formato (tableros DINA3), montaje y desmontaje rápido y simple. Deben proponer retos que, sin demasiadas explicaciones, estimulen la búsqueda de una solución.

Pensamos entonces que el citado *No Connection* de Martin Gardner basada en las piezas de colores podía ser un recurso rápido y útil. Consideramos que se debía ofrecer una actividad más inmediatamente comprensible y así transformamos de esta manera el tablero original (figura 7).

La actividad consiste en rellenar el tablero con piezas cuadradas de distintos colores sin que piezas del mismo color se toquen.

Aun siendo muy parecido al tablero original del artículo de Martin Gardner, en este caso se evita la discusión sobre si los vértices se pueden o no se pueden tocar.

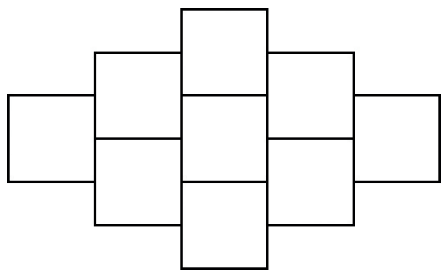

Figura 7. Diseño de un nuevo módulo para el alumnado más joven, inspirado en el *No Connection*

Con respecto a la actividad:

- —¿Cuántos colores distintos serán necesarios?
- —¿El número de piezas de cada color será el mismo?
- —¿Debemos disponer del número y la distribución de piezas que permitan resolver exactamente el reto o poner más? ¿Abrimos el reto a distintas interpretaciones o imponemos la tarea?

El pilotaje del módulo se hizo en la *Festa de la Ciència* de Barcelona (10 y 11 de junio de 2023) usando cuadrados y hexágonos (figura 8).

En todos los materiales del MMACA el diseño tiene un papel importante, no por su impacto ornamental, sino como elemento comunicativo, por su contribución a impulsar a nuestros usuarios de cualquier edad y habilidad a la acción. Es muy probable, en tal sentido, que el puzle de hexágonos tenga un mayor impacto estético en nuestros jóvenes usuarios, o, por lo menos, es lo que hemos experimentado a menudo en nuestras anteriores propuestas.

Tal eficacia comunicativa hacia una determinada tarea de rápida resolución puede representar un obstáculo para orientar una sucesiva investigación hacia otros desarrollos del reto propuesto.

Damos por sentado que el lector de este artículo ha descubierto que se puede rellenar el tablero solamente con piezas de tres colores, respetando las condiciones establecidas.

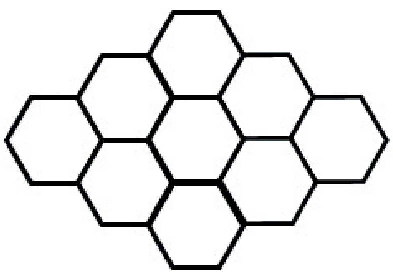

Figura 8. El mismo módulo con hexágonos

La pregunta siguiente es: ¿Serán suficientes tres colores para rellenar tableros con más celdas?

Para investigar esta cuestión puede que convenga volver al tablero de celdas cuadradas para que sea más fácil añadir columnas de celdas en medio y encontrar patrones (figura 9).

Después de la experimentación empírica podemos plantearnos nuevas preguntas:

- —¿Siempre será posible resolver el reto con solo tres colores? ¿Por qué?
- —¿Hay un patrón para prever cuántas celdas formarán el tablero después de 5 desarrollos sucesivos? ¿Y de 10? ¿Y de 100?
- —El número de piezas de cada color, ¿será siempre igual? ¿Podemos saberlo antes de diseñar el tablero? ¿Cómo?

Si se recogen los datos en una tabla, con o sin Excel, el patrón aparecerá de modo claro e inequívoco, y nos sorprenderemos por no haberlo visto llegar.

Una gran lección para nuestro alumnado de la utilidad de no saltarse pasos y trabajar de una forma organizada.

Una vez más, un aparente retroceso hacia las competencias aparentemente menores del alumnado más joven nos permite después avanzar en direcciones diferentes, pero no menos ricas, hacia la misma meta: construir a través de la experiencia conceptos matemáticos sólidos y desarrollar de forma intuitiva competencias altas y empezar a aplicar elementos del pensamiento computacional[6].

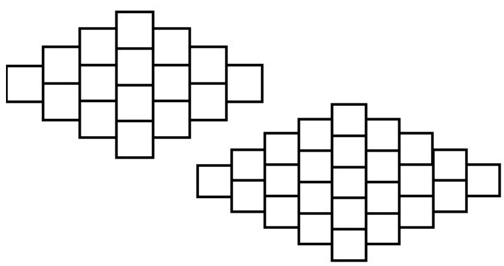

Figura 9. Buscando patrones: versiones del módulo con más piezas

En todo caso, el reto nos pareció suficientemente interesante para discutirlo con el grupo de amigos que constituye el Nodo Barcelona del proyecto de formación del profesorado *HelloMath* de EduCaixa[7].

No tardaron en aparecer nuevos pequeños descubrimientos.

— La relación del tablero con los números triangulares: las piezas de cada tablero son la suma de dos números triangulares consecutivos: 1, 1+2+1, 1+2+3+2+1, … (tabla 3).
— Esto nos permite evidenciar la relación con los cuadrados de manera visual (figura 10).

n	1	2	3	4	5	6	7	...
T	1	3	6	10	15	21	28	...
Tn+Tn-1	1	4	9	16	25	36	49	...
T^2	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	...

Tabla 3

Y descubrir que el cuadrado que se forma con nueve piezas de tres colores es un cuadrado latino, con diferentes colores en cada línea y columna.

— Resolviendo el reto con más piezas, pero sólo 3 colores, los cuadrados que se irán formando no pueden tener la misma característica, pero sí un patrón (figura 11).

Pero, más que a un punto final de un recorrido, nos parece que hemos llegado a una posición de salida de otras aventuras, ya que retos de cuadrados latinos (todo tipo de sudokus, numéricos o visuales), grecolatinos, mágicos, etc., se encuentran por docenas en la red: algunos son triviales, pero otros resultan muy interesantes, como los cuadrados mágicos de NRICH.

Esperamos que este artículo, como todos los que publica *Suma*, sirva para animaros a desarrollar y aplicar en vuestras clases estos y otros retos.

Figura 10. El cuadrado latino formado por la suma de dos números triangulares consecutivos

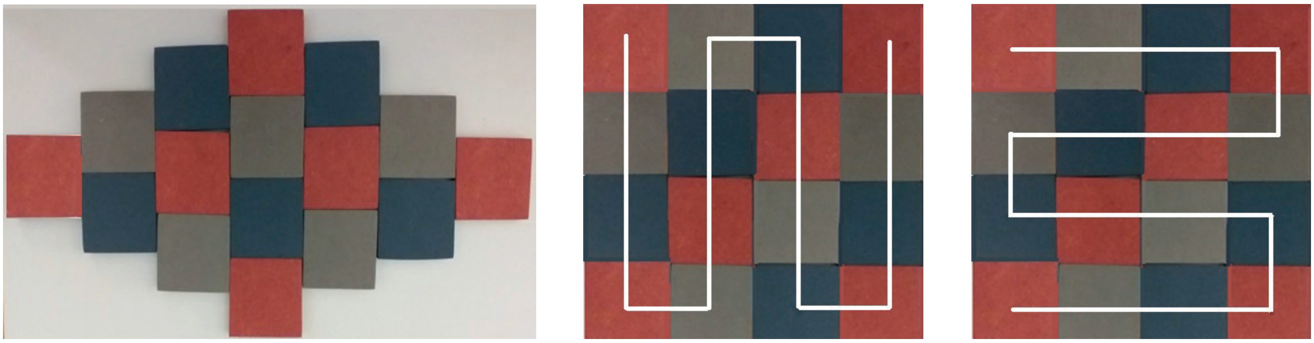

Figura 11. Otros cuadrados con patrones

MMACA
Museu de Matemàtiques de Catalunya,
Cornellá de Llobregat (Barcelona)
<contacte@mmaca.cat>

1 Martin Gardner No Connection - *The Colossal Book of Short Puzzles and Problems,* Norton &Co (2006).

2 En la misma semana en que Josep Rey nos había presentado su versión del reto, el añorado amigo Juanjo Cárdenas me desafió con este puzle. Buenos recuerdos, dulce nostalgia y firme convicción de que se debe aprovechar cada ocasión para homenajear a los amigos que están y a los que se han ido.

3 El pasaje entre la visión del número como suma de unidades (cuenta) y de bloques (suma) sigue siendo una de las competencias básicas que nuestro alumnado de escuela primaria debe llegar a consolidar, paso previo para el desarrollo del cálculo mental y el álgebra.

4 La secuenciación y composición de las figuras son obra de Gala (6 años) y Emma (9 años).

5 Usando índice y pulgar de las dos manos, se puede ir cambiando los lados del rectángulo formado por un hilo grueso. Se pregunta a la clase si la medida del perímetro y del área se mantienen iguales en el curso de esta operación. A partir de 5.º de Primaria, hay un gran número de alumnos que sostienen que ambas magnitudes se mantienen constantes. Partiendo de la fórmula: área=base x altura y se puede ver que lo que se gana de base se pierde en altura. Sin introducir fórmulas o valores numéricos, será suficiente unir los dedos de cada mano (posición límite, con base o altura=0), para que todo el mundo se dé cuenta de que el área cambia.

A partir de aquí se puede empezar a calcular las áreas e investigar a qué figura le corresponderá su valor máximo. Y pasar a investigar los perímetros de rectángulos equivalentes.

6 Ese alegre desconocido que ha sustituido la creatividad en las sesudas conversaciones entre educadores.

7 Eulàlia Tramuns, Belén Garrido, Anton Aubanell, Raül Fernández, Arnau Sanchez y Guido Ramellini.