El Teorema de Futurama: permutaciones de cuerpos y mentes en el siglo XXXI

Angélica Benito Sualdea
Ana Granados Sanandrés

SUMA+ núm. 105
pp. 95-102
Artículo solicitado por *Suma* en julio de 2023 y aceptado en septiembre de 2023

La serie Futurama inicia su emisión en 1999 siguiendo el éxito de su «hermana mayor»: Los Simpsons. A diferencia de esta, una buena parte de los guionistas de Futurama tienen un perfil muy peculiar: son científicos, muchos de ellos con doctorados en Física, Matemáticas, etc. El personaje principal, Fry, fue criogenizado por error a finales del siglo XX y «despierta» mil años después, en pleno siglo XXXI.

El problema (y su solución) que centrará esta actividad aparece por primera vez en el episodio de la serie titulado «El prisionero de Benda» (temporada 6, episodio 10). El guionista de este capítulo fue Ken Keeler, un doctor en Matemática Aplicada por la Universidad de Harvard. Keeler realizó la demostración de este teorema para la serie, recibiendo por ello el premio del Gremio de Guionistas de América como el mejor guion original de televisión en 2010.

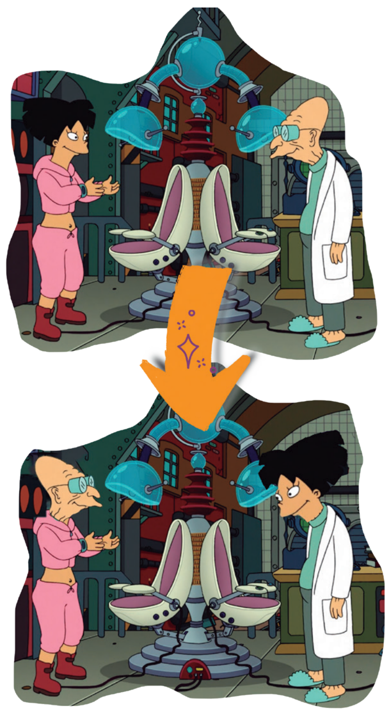

Figura 1. Funcionamiento de la máquina *intercambiadora de cerebros*

El problema de Futurama: El Profesor Farnsworth y Amy deciden probar su flamante máquina «intercambiadora de cerebros» que acaban de inventar. El mecanismo es sencillo: dos personas entran en la máquina y salen con el cuerpo del otro (figura 1).

Al cabo de varias aventuras (y desventuras), los dos personajes deciden recuperar su cuerpo original. Cuando intentan deshacer el intercambio, descubren un *error* clave en el diseño de la máquina: el mismo par de personas *no* puede entrar en la máquina más de una vez. Piensan en pedir ayuda a Bender, pero…

Esta es la historia que da inicio a nuestra sesión doble de ESTALMAT (2 horas y media) dirigida a alumnos de segundo año, y que dividimos en dos partes: una pequeña introducción al lenguaje algebraico de las permutaciones como grupo seguida por el descubrimiento de cómo resolver el problema planteado en el episodio mencionado.

El problema de Futurama y el lenguaje de las permutaciones

Es posible que muchos de los alumnos ya hayan visto en sus institutos o en sesiones anteriores de ESTALMAT algunas ideas sobre permutaciones. Por esto, iniciamos esta parte de la sesión con un «bombardeo de ideas previas» con el objetivo doble de centrar la discusión y llegar a una definición rigurosa de permutación.

Permutemos

¿Qué es una permutación? Una *permutación* es una reordenación de *n* objetos, que podemos considerar como una reordenación de los números {1,…,*n*}.

1. ¿Conoces algún ejemplo de permutación que no sea de números?
2. Dados 4 objetos distintos, ¿cuántas posibles permutaciones hay? ¿Y si tenemos 7? ¿Y para *n* objetos distintos?

Trabajar con permutaciones requiere introducir una notación adecuada de manera progresiva y natural. El primer paso es escribir la función de una manera que sea compacta y que les resulte sencilla. Empezamos con un ejemplo que desembocará en el uso de ¡una matriz! y que dará paso a la notación de ciclos.

Denotemos

Escribimos las permutaciones de forma matemática: Tenemos 4 elementos distintos (que denotaremos como 1, 2, 3 y 4). Queremos que el 1 vaya al 4; el 3 al 1; el 4 al 3; y que el 2 se quede fijo:

1 → 4

3 → 1

4 → 3

Lo escribimos como una *matriz de dos filas:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

¡¡Ventajas!! Es muy fácil de entender y de ver cómo se «intercambian» los números.

¡¡Inconvenientes!! Cada vez que queremos escribir una permutación tenemos que escribir dos veces cada número… ¡qué pereza!

La notación de ciclos: Es una forma más sencilla para describir la permutación *sin escribir la matriz*.

El ejemplo anterior simplemente se representaría como (1 4 3).

Pero… ¡¿Esto qué quiere decir?! Con esta notación sólo tenemos que seguir el orden de lectura para ver que el 1 va al 4, que a su vez va al 3, que de vuelta va al 1, formando un ciclo. Como el 2 no aparece en el ciclo, quiere decir que se queda fijo.

Antes de comenzar con los ejercicios por grupos, discutimos un poco más sobre la relación entre permutaciones y ciclos. Los estudiantes, de manera natural, se dan cuenta de que con un ciclo no podemos cubrir todas las permutaciones.

Permutemos

3. ¿Cualquier permutación de cuatro elementos se puede escribir como un ciclo?
4. ¿Cómo podemos resolver este problema? Fíjate en el ejemplo que has pensado.

Ejercicio 1.1. Escribe en forma de matriz de dos filas las siguientes permutaciones:

(1 3 5) (2 7 6 8) y (1 4) (5 3) (2 9)

Ejercicio 1.2. ¿Cuáles de las siguientes permutaciones de {1, 2, …, 8} son iguales?

(1 3 5) (2 7 6 8)   (2 7 6 8) (1 3 5)   (7 6 8 2) (1 3 5)

(3 5 1) (6 8 2 7)   (8 2 7 6) (5 1 3)   (6 8 2 7) (5 1 3)

El último ejercicio lleva a la clase a darse cuenta de que hay muchas formas posibles de escribir una permutación usando la notación de ciclos. Este hecho lo relacionamos con la factorización de un número e introduciremos la versión «equivalente» a la descomposición en producto de primos en la siguiente receta:

1. Empieza por el elemento más pequeño. Si el elemento queda fijo, pasa al siguiente número. Si no queda fijo, comienza la permutación con este número como la primera entrada del ciclo y complétalo.
2. Una vez que has completado el ciclo, comprueba si hay algún otro elemento que no queda fijo, si lo hay, repite el paso 1.

COMBINACIÓN DE PERMUTACIONES

Llegados a este punto, hemos observado que es interesante saber escribir una permutación, pero… ¿qué pasa si queremos combinar varias de ellas? Planteamos si hay situaciones de la vida real en las que se encadenan sucesivas «reordenaciones» (¡juguemos al mus!).

Necesitamos una notación para la composición de permutaciones. ¿Qué pasa si en $\{1, 2, 3\}$ empezamos con la permutación (1 2) seguida de la (1 3)? Esto lo escribiremos *de derecha a izquierda*, es decir, (1 3) (1 2): el 1 va al 3; el 3 va al 1 que va al 2; y el 2 va al 1, o lo que es igual (1 3 2) (observa que la realización de la operación es de izquierda a derecha).

Inmediatamente, la primera pregunta que surge es la conmutatividad de esta operación: observamos que (1 2) (1 3) = (1 2 3). ¡La composición no es conmutativa!

Combinemos

Ejercicio 1.3. Escribe como una única permutación las siguientes combinaciones de permutaciones de {1, 2, 3, 4, 5, 6}:

(1 3 4 2) (3 6 4 5) (1 6 2 3) =

(1 2) (2 3) (3 4) (4 5) =

(1 3 5) (3 2) (5 4 3 2 1) (4 1 3) (1 3) =

EXISTENCIA DE ELEMENTO NEUTRO E INVERSO

En la búsqueda de la estructura de grupo, planteamos la existencia de un *elemento neutro*, es decir, ¿existe alguna permutación que no haga nada al combinarla con otras? (Como el 0 en la suma o resta o el 1 en el producto o división). El primer ejemplo que sugieren es el que se produce cuando, durante un juego de cartas, el jugador que reparte da a cortar la baraja al jugador situado a su izquierda, y este, en lugar de dividir el mazo en dos, le da un ligero golpe y lo deja como está.

En los números racionales, dado un número distinto de cero, se puede encontrar su inverso y lo mismo sucede con los reales. Para las permutaciones también existen inversos, es decir, podemos encontrar un elemento que al combinarlo con el original nos dé la identidad. En este caso, el concepto de *elemento inverso* no es tan intuitivo: al barajar un mazo de cartas, no es tan sencillo ver cómo podemos volver a la configuración inicial y, menos aún, cuál sería el algoritmo que tendríamos que seguir.

Combinemos

Ejercicio 1.4. Calcula las siguientes inversas en {1, 2, …, 6} y combínalas con la permutación que aparece entre corchetes para comprobar que son inversas:

$[(1\ 3\ 4)]^{-1}$

$[(2\ 5\ 6)]^{-1}$

$[(1\ 3\ 4)\ (2\ 5\ 6)]^{-1}$

$[(1\ 2)\ (2\ 3)\ (3\ 4)\ (4\ 5)]^{-1}$

Algunas curiosidades de las permutaciones: la estructura de grupo

Dependiendo del ritmo y del interés del grupo, en alguna de las sesiones hemos avanzado hasta comprobar la estructura de grupo (que ellos conocen de otros ejemplos) y alguna propiedad adicional.

— *Asociatividad*. Dadas tres permutaciones p_1, p_2 y p_3. hay dos maneras posibles de combinarlas las tres siguiendo el orden en el que las hemos escrito: $p_1\ [p_2\ p_3]$ y $[p_1\ p_2]\ p_3$

— ¿Importa la manera de agrupar las combinaciones de las permutaciones? La respuesta es no y por eso decimos que *combinar permutaciones es una operación asociativa*.

Ejercicio 1.5. Calcula (1 3 4 5) (2 4 3) (1 6 3) de las dos posibles formas.

— Recuerda que la *operación combinar NO es conmutativa*, es decir, es muy importante el orden en el que leamos las combinaciones de las permutaciones.

Ejercicio 1.6. Escribe un ejemplo, distinto del que vimos antes, de combinación de permutaciones que no sea conmutativo.

— *Transposición*: Una trasposición es una permutación en la que solo se reordenan dos elementos. Por ejemplo: (1 2) o (5 7) o (2 6).

— *Toda permutación se puede escribir como combinación de transposiciones*. Las transposiciones juegan el papel de los números primos. Por ejemplo, en {1, 2, 3, 4, 5} tenemos la permutación (1 2 5). Esta permutación se puede conseguir considerando primero la transposición (1 5) y después la transposición (1 2), es decir, (1 2) (1 5).

Ejercicio 1.7. Escribe (1 2 3 4) como producto de transposiciones en {1, 2, 3, 4, 5}.

Con esto finalizamos la primera parte de la sesión e iniciaremos el recreo que, como es habitual, comienza con la degustación de mini toros de chocolate del siglo XXXI. Tras el descanso, ¡nos enfrentaremos al Teorema de Futurama!

Descubramos el Teorema de Futurama

Esta segunda parte consistirá en la matematización de las partes relacionadas con la «máquina intercambiadora de mentes». Visionaremos partes del episodio mientras iremos escribiendo en el lenguaje de las permutaciones lo que va ocurriendo. Indicamos a continuación los tiempos aproximados de cada escena y las preguntas que se les van formulando:

~(1:45 a 3:45)

Ejercicio 2.1. Escribe lo que acaba de ocurrir en el lenguaje de las permutaciones.

Ejercicio 2.2. ¿Pueden recuperar Amy y el Profesor su cuerpo original? ¿qué operación necesitan hacer en lenguaje matemático?

¡Ayuda! El problema general que se plantea en el episodio es si existe una manera (sin inventar otra máquina, lo cual no ven posible) de recuperar los cuerpos originales. Amy y el Profesor no pueden volver a entrar juntos a la máquina, pero ¿qué pasa si le piden ayuda a Bender? ¿pueden recuperar los tres su cuerpo original? Es decir, necesitamos responder si se puede calcular $(1\ 2)^{-1}$ en {1, 2, 3} con las restricciones de la máquina.

~ (3:45 a 4:30)

Pregunta 2.3. ¿Qué posibles permutaciones han podido ocurrir después de entrar Bender? Escríbelo usando el lenguaje de permutaciones y transposiciones (ciclos de longitud 2).

Pregunta 2.4. ¿Y si entrara ahora Leela? ¿podrán recuperar su cuerpo original los cuatro? Es decir, en {1, 2, 3, 4}, ¿existe la inversa de la combinación de permutaciones calculada arriba?

~ (5:09 a 5:34)

Pregunta 2.5: Y si después del primer cambio entre Amy y el Profesor hubieran llegado Leela y Bender a la vez, ¿habría una forma de que los cuatro recuperaran su cuerpo? Es decir, nos preguntamos si existe $(1\ 2)^{-1}$ en {1, 2, 3, 4} con las restricciones de la máquina.

En este momento, todos los grupos de estudiantes suelen llegar a la forma de encontrar $(1\ 2)^{-1}$ considerando dos de los elementos del grupo como «nuevos» o «externos». De hecho, con más generalidad y, como veremos más adelante, este será el enunciado del Teorema de Futurama. El siguiente paso es, trabajando en sus mesas, aumentar el número de personas que entran en la máquina, ver la necesidad de los dos elementos externos y tratar de encontrar un algoritmo que responda a la pregunta (cosa que no siempre consiguen, ya que no es sencillo).

Juguemos

1. En tu mesa de 5, coged etiquetas, ponedle vuestro nombre y un número (distinto cada uno) del 1 al 5.
2. Siguiendo las reglas, entrad varias veces en la máquina.
3. Escribe la permutación final que os ha quedado de dos maneras:
   a. Como combinación de las transposiciones que habéis ido haciendo.
   b. Como una única permutación final.

¿Qué cuerpo y cerebro tiene cada uno?

¿Podéis volver a recuperar vuestros cuerpos? ¿Y si pedís ayuda a dos "profes" que no han entrado antes en la máquina?

~ (9:55 a 10:44). El problema general

La pregunta que se plantea en el episodio es:.

Si en la máquina entran n personas, ¿existe una manera para que cada uno recupere su cuerpo original?

La respuesta es ¡SÍ!, de hecho, la respuesta a esta pregunta es el llamado Teorema de Futurama o Teorema de Keeler.

TEOREMA DE FUTURAMA

No importa cómo un grupo de gente haya intercambiado sus mentes y sus cuerpos, siempre es posible que cada persona recupere su cuerpo usando como mucho dos personas extra.

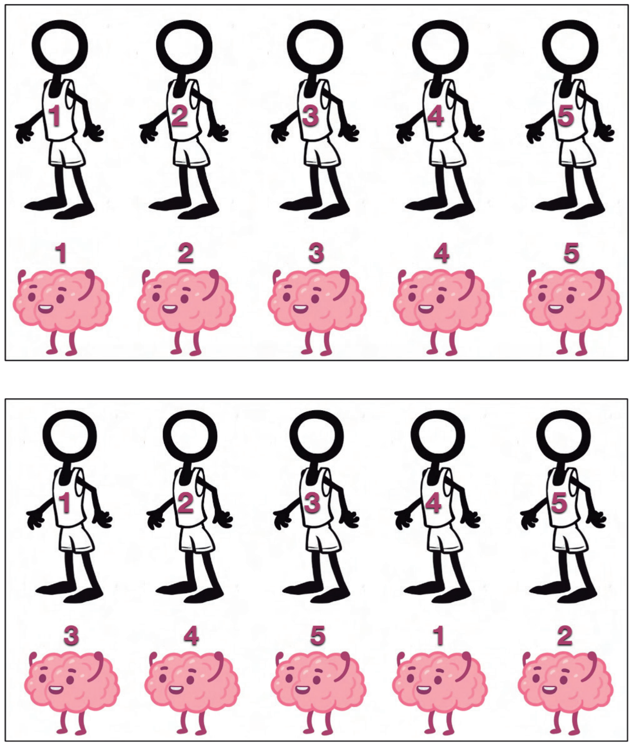

Figura 2. Intercambio de mentes, situación inicial (arriba) y final (abajo)

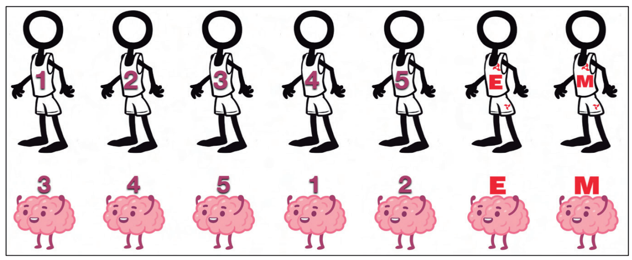

Figura 3. E y M acuden a nuestra ayuda

Vamos a probar el teorema, pero lo vamos a hacer por pasos en un ejemplo particular. En las mesas de 5, les proponemos que jueguen con tarjetas como las de la figura 2 arriba simulando la entrada en la máquina de varios de ellos, llegando, por ejemplo, a la configuración final de la figura 2 abajo, es decir, a (1 3 5 2 4). En este ejemplo, el cuerpo 1 tiene la mente de 3; el cuerpo 3 la mente del 5; …

No sabemos cómo hemos llegado a la permutación (1 3 5 2 4), pero como puede haber sucedido con cambios cualesquiera, en principio no podemos utilizar permutaciones del tipo (i j) con i, j en $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Necesitamos que nos ayuden dos fichajes estrella… Llamemos a E y M, dos personas de ESTALMAT-Madrid (figura 3).

El inicio del algoritmo solución consiste en realizar una serie de preguntas encadenadas que nos permitirá ordenar los cuerpos en fila (figura 4, abajo): ¿Quién tiene el cerebro 1? El cuerpo 4 (figura 4, arriba). ¿Quién tiene el cerebro 4? El cuerpo 2; ¿y quién tiene el cerebro 2? El cuerpo 5; ahora, ¿quién tiene el cerebro 5? El cuerpo 3. Finalmente, ¿quién tiene el cerebro 3? El cuerpo 1.

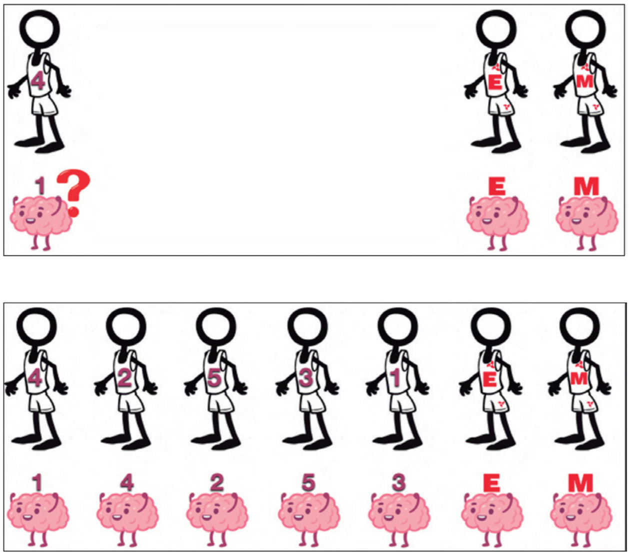

Figura 4. Ordenación de cuerpos marcada por el número de los cerebros

Una vez ordenados los cuerpos, hacemos uso de las ayudas. El primero en jugar es M, que hará de pivote, cambiando su cuerpo con el cuerpo que aloja al cerebro 1 (figura 5 arriba). Esta es la trasposición (M 4) que se ve en la figura 5 abajo.

El siguiente en entrar en juego es E quien, de manera sucesiva, entrará en la máquina con todos los jugadores restantes de manera ordenada, comenzando con el que está más a la derecha de la fila (figura 6 arriba) y terminando con el de la izquierda (figura 6 abajo). Es decir, hemos realizado las trasposiciones: (E 1), (E 3), (E 5), (E 2) y (E 4).

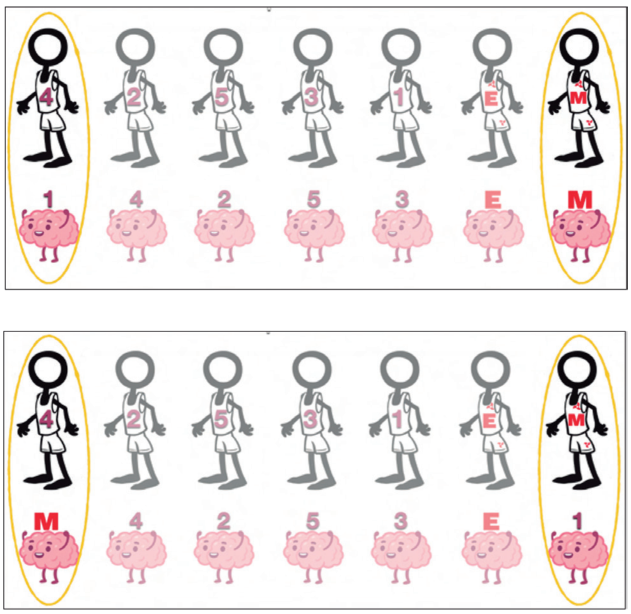

Figura 5. M entra a jugar pivotando con el cuerpo que aloja al cerebro de 1

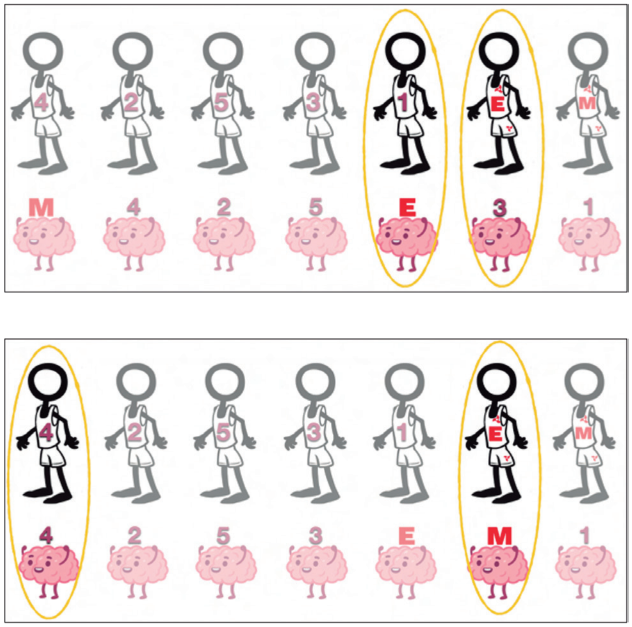

Figura 6. E juega pivotando, de manera ordenada, con todos los jugadores

Obsérvese que ahora todos los jugadores han recuperado su cerebro, salvo el jugador 1, que actualmente tiene el cerebro de E. Para finalizar, vuelve a entrar M en el juego y cambia su cuerpo con el único que queda por entrar: el último de la fila, es decir, realizamos la trasposición (1 M).

Finalmente, todos los jugadores han conseguido recuperar cuerpo y mente, aunque E y M tienen sus

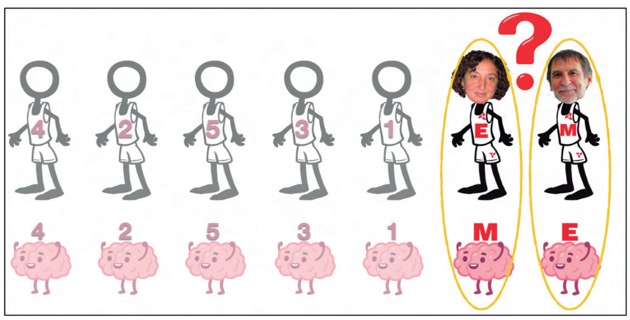

Figura 7. Estalmat-Madrid, Merche y Eugenio

cerebros y cuerpos intercambiados. ¿Querrán entrar a la máquina? Eugenio y Merche tienen la última palabra (figura 7).

Resumiendo, ahora en términos de permutaciones, o trasposiciones, las operaciones que se han ido realizando en este ejemplo han sido las siguientes:

Partimos de (1 3 5 2 4). El primer cambio se hace con el pivote M, realizándose (4 M) (aquí el cuerpo 4 es el primero de la fila tras la ordenación):

(4 M) (1 3 5 2 4) = (1 3 5 2 4 M).

A continuación, empezaremos a pivotar con E, con los cuerpos ordenados de derecha a izquierda en la fila, encadenándose las trasposiciones (E 1), (E 3), (E 5), (E 2) y (E 4):

(1 E) (1 3 5 2 4 M) = (1 E 3 5 2 4 M);

(3 E) (1 E 3 5 2 4 M) = (1 E 5 2 4 M);

(5 E) (1 E 5 2 4 M) = (1 E 2 4 M);

(2 E) (1 E 2 4 M) = (1 E 4 M);

(4 E) (1 E 4 M) = (1 E M).

Para terminar, volvemos con M que entra con el único cuerpo que no está emparejado con su cerebro (el último de la fila), realizamos la trasposición (1 M):

(1 M) (1 E M) = (E M).

Si Eugenio y Merche quieren recuperar su cuerpo, lo único que tienen que hacer es entrar juntos a la máquina, realizando la permutación (E M) que nos llevará a la identidad:

(E M) (E M) = (1).

Con este proceso, hemos construido de manera implícita la inversa de (1 3 5 2 4) dentro de {1, 2, 3, 4, 5, E, M} siguiendo la siguiente cadena de trasposiciones:

Figura 8. Fotograma extraído del episodio «*El prisionero de Benda*» de la serie Futurama

(E M) (1 M) (4 E) (2 E) (5 E) (3 E) (1 E) (4 M) =
= (1 4 2 5 3)

que, efectivamente, es $(1\ 3\ 5\ 2\ 4)^{-1}$.

En las escenas finales de este capítulo 10 de la temporada 6 de Futurama, se puede ver una pizarra en la que se enuncia y demuestra este resultado, aunque sus «Eugenio y Merche» son dos habitantes del país *Globetrotters*. Como se puede observar en la figura 8, la notación es ligeramente distinta a la utilizada en este trabajo.

Conclusiones

Esta sesión la hemos desarrollado cuatro veces a lo largo de los últimos años. Sorprendentemente, la parte que nosotras considerábamos que podía resultar más árida, es decir, la introducción al lenguaje de las permutaciones, al grupo le suele resultar altamente atractiva. De hecho, en los últimos dos años, nos han llegado a demandar más actividades relacionadas con la composición y con las propiedades de las permutaciones. El grupo se adapta rápidamente y de manera casi uniforme a este nuevo lenguaje, comprendiendo en todo momento los conceptos que hay detrás. Cabe destacar que, después de que discutamos en grupo qué significa que un elemento sea el inverso de otro dado, los estudiantes solos, de manera autónoma, son capaces de darse cuenta de lo sencillo que es calcular la inversa de una permutación ¡basta leerla al revés!

La segunda parte tiene un tono más lúdico, aunque no por ello menos profundo y, de nuevo, nos vuelve a sorprender que traducen todo lo que ven en el vídeo, sin pedírselo casi, al lenguaje de permutaciones. Cuando inician la parte del juego, en la que realizan permutaciones de cinco jugadores, son ellos y ellas sin nuestra ayuda quienes quieren construir una solución. Aunque en muchos casos consiguen llegar a ella por ensayo y error, siempre intentan transcribirla para ver si obtienen un patrón que les lleve a una «fórmula general», es decir, a escribir la prueba del teorema.

Hay que mencionar que, de momento, ningún grupo ha conseguido esa «fórmula general» pero que, cuando les comenzamos a mostrar la solución de la manera que ha sido expuesta en este trabajo, suelen llegar a ver el algoritmo antes de completar la prueba. En general, basta mostrarles un par de pasos: el de ordenar cuerpos y cerebros; y el que comienza con el segundo pivotaje (figuras 4, 5 y 6 izquierda).

En general, es una sesión muy satisfactoria, donde tanto los estudiantes como nosotras disfrutamos mucho.

Angélica Benito Sualdea
Universidad Autónoma de Madrid
angelica.benito@uam.es

Ana Granados Sanandrés
Saint Louis University
ana.granados@slu.edu