

Los ejemplos genéricos para trabajar la demostración en secundaria

Georgina Cerqueda Santacreu

Suma núm. 106
pp. 31-40

Artículo recibido en *Suma* en diciembre de 2022 y aceptado en septiembre de 2023

La demostración es clave en matemáticas y también tiene que serlo en la educación matemática. Los ejemplos genéricos, un tipo de demostración realizado sobre un ejemplo que representa a una clase, pueden ser una herramienta para introducir las demostraciones en secundaria. Presentamos las características de los ejemplos genéricos y los resultados preliminares de una prueba que pretende conocer la capacidad de los alumnos de redactar una demostración y observar si los ejemplos genéricos cumplen las funciones de verificación y explicación que ha de tener una demostración.

Palabras clave: Demostración, Ejemplo genérico, Razonamiento, Secundaria.

Generic examples as a tool for teaching proofs in secondary school // Proof is key in mathematics and it also has to be in mathematics education. Generic examples, a type of demonstration performed on an example that represents a class, can be a tool to introduce demonstrations in high school. We present the characteristics of the generic examples and the preliminary results of a test that seeks to determine the students' ability to write a proof and to analyze if the generic examples fulfill the verification and explanation functions that a proof must have.

Keywords: Proof, Generic Example, Reasoning, Secondary School.

Balacheff (2010) afirmó que la respuesta a la pregunta «¿se puede aprender matemáticas sin aprender lo que es una demostración matemática y como construir una?» es «no». La demostración es clave en matemáticas y desarrollar el concepto de demostración también tiene que ser fundamental de la educación matemática (Mariotti, 2006). De hecho, los documentos de políticas educativas o los referentes internacionales, como los *Principios y Estándares para la Educación Matemática* (NCTM, 2000), reclaman

desde hace más de 20 años que las demostraciones tengan un papel más importante en los planes de estudio y que las actividades de demostración sean parte natural de las clases de matemáticas en todos los bloques de contenidos y desde los primeros cursos de la educación primaria hasta bachillerato. Aunque a nivel teórico haya consenso en esta importancia, en general, las recomendaciones no se están aplicando en las aulas. Muchos profesores siguen sin valorar la importancia pedagógica de la demostración, y está

sigue teniendo un papel marginal en la práctica de las clases de matemáticas en la educación obligatoria.

En este artículo vamos a presentar los ejemplos genéricos como una herramienta que puede favorecer la introducción al concepto de demostración matemática. Expondremos los resultados de una prueba piloto que constituye la primera fase de un proyecto de investigación que pretende analizar la influencia de los ejemplos genéricos en la capacidad de producir demostraciones en el alumnado de educación secundaria.

Una definición de demostración para la matemática escolar

La concepción del significado de demostración que tienen los profesores influye en el modo en que las incluyen en sus clases. Tener en cuenta una definición formal y rigurosa del término implica considerar que no es accesible para todos los alumnos o que sólo es oportuno trabajarla en grados educativos superiores. Uno de los retos de los profesores de educación secundaria es cambiar estas creencias y considerar la demostración apropiada para todo el alumnado (Knuth, 2002). Para conseguir este cambio de opinión y diseñar programas coherentes que trabajen la demostración gradualmente con actividades en todos los cursos, es fundamental tener una definición de demostración que se adapte a la educación matemática elemental. Con este propósito, A. J. Stylianides (2007) define demostración como un argumento matemático (secuencia conectada de afirmaciones a favor o en contra de un enunciado) con las siguientes propiedades:

- Utiliza propiedades aceptadas por la comunidad de la clase que son ciertas y no necesitan justificación.
- Utiliza métodos de razonamiento que son válidos y conocidos (o dentro de su alcance) en la comunidad de la clase.
- Se comunica con formas de expresión o representación que son apropiadas y conocidas (o dentro de su alcance) por la comunidad de la clase.

En la definición propuesta, la comunidad de la clase esta formada por los estudiantes y los elementos que se consideran conocidos son aquellos que se pueden suponer adquiridos en base a experiencias previas de clase y no a los conocimientos de cada alumno en concreto. Así, esta definición repara en el punto de vista del estudiante, considerando qué sabe en un momento concreto. Esta característica de la definición confiere flexibilidad suficiente para que sea consistente en todos los cursos, pero permite que un razonamiento pueda ser aceptado como demostración en un curso pero no en otro. Por otro lado, la definición de A. J. Stylianides también considera el punto de vista de las matemáticas académicas en cuanto a las formas de razonamiento y a las propiedades utilizadas para aceptar un argumento como demostración. La definición de demostración para la matemática elemental no acepta tampoco aquellos razonamientos que no son válidos en la disciplina, como el razonamiento empírico. El profesor actúa como representante de la comunidad matemática, ejerciendo un rol activo aceptando o no los argumentos como demostraciones y ayudando a los alumnos a diferenciar cuales son los métodos, razonamientos o representaciones válidos para que sus argumentos vayan aproximándose a demostraciones aceptables.

¿Por qué demostrar en secundaria e incluso antes?

Los estudios realizados muestran que los alumnos de todos los niveles, incluso los más avanzados, tienen dificultades para entender el concepto de prueba matemática y para realizar demostraciones (G. J. Stylianides y otros, 2017). Este hecho puede ser debido, en parte, porque las demostraciones se introducen sin la progresión y el soporte necesarios en bachillerato o en cursos universitarios (G. J. Stylianides y A. J. Stylianides, 2006). Los alumnos deben aprender al mismo tiempo las normas de las demostraciones y los conceptos matemáticos, generalmente más abstractos, que aparecen en estos cursos.

La importancia de demostrar viene dada por sus funciones. En las matemáticas académicas, la función

principal de demostrar ha sido tradicionalmente la de verificación: la validez de una afirmación no está clara hasta que se demuestra. Aún así, los matemáticos también esperan que la demostración cumpla una función explicativa, mostrando los motivos por los que la propiedad demostrada es verdadera. Desde la perspectiva didáctica y la matemática escolar, esta función es la más relevante. Demostrar con el objetivo de transmitir las ideas matemáticas por las cuales la propiedad es cierta permite profundizar en la comprensión de los conceptos y mejorar el aprendizaje de los alumnos (Hanna, 2000; Rocha, 2019). Para Hanna (1990), el objetivo de los profesores ha de ser que sus alumnos entiendan las matemáticas y, para conseguir esto, hay que aumentar la presencia de las demostraciones explicativas en los currículos. Siguiendo estas ideas, las recomendaciones del NTCM (2000) proponen que el fin de demostrar sea responder a la pregunta «¿por qué esto funciona?» en lugar de «¿esto funciona siempre?». Del mismo modo que con la definición de demostración que se tienen en cuenta, el rol que se le otorga es fundamental para mejorar su uso en las clases (Hanna, 2000). Aceptando que el propósito de la demostración es la explicación, podemos ajustar los métodos de razonamiento y representación al contexto del grupo, reduciendo el formalismo, y consiguiendo que las actividades de prueba sean adecuadas para todos los cursos educativos, promuevan un aprendizaje significativo en los alumnos y permitan desarrollar su conocimiento matemático.

Un tercer argumento para iniciar la demostración en las escuelas es el hecho de que es central en la matemática como disciplina y que la matemática escolar debe representar la estructura y las ideas de esta disciplina sin distorsiones, ofreciendo continuidad entre las matemáticas que realizan los estudiantes durante su educación y las que realizan los matemáticos y matemáticas (G.J. Stylianides y A.J. Stylianides, 2006).

Demostando con ejemplos genéricos

Existen distintos esquemas para realizar una demostración, siendo el ejemplo genérico uno de ellos.

Mason y Pimm (1984) fueron los primeros en usar el término ejemplo genérico y lo definen como un ejemplo presentado de manera que destaca su rol como portador de generalidad. Para ellos, la demostración genérica es aquella que utiliza un ejemplo genérico y «aunque se dé en términos de un número particular, no recae en ninguna propiedad específica de este número». Esto significa que al usar un ejemplo genérico en una demostración estamos usando un objeto específico, pero solo se utilizan las características que son generales a la clase que representa y no en aquellas que son concretas del ejemplo. Para Balacheff (1988), la justificación con ejemplo genérico se basa en operaciones o transformaciones que se realizan sobre un ejemplo seleccionado como representante característico de la clase e implica hacer explícitas las razones por las cuales la propiedad es cierta. Del mismo modo, Rowland (1998) también diferencia entre el razonamiento empírico, que sólo presenta un caso concreto, y el ejemplo genérico, que proporciona información de las razones por las cuales la proposición es cierta para cualquier ejemplo que cumpla las condiciones del enunciado. Es decir, lo que caracteriza el ejemplo genérico es la manera en que se presenta la verificación y no el hecho de haber verificado la propiedad para un caso. Este razonamiento usado en la verificación del ejemplo genérico puede ser reproducido sobre cualquier otro ejemplo de la clase, lo que nos da generalidad.

A pesar de que muchos autores usen el término demostración genérica para referirse a un razonamiento que utiliza un ejemplo genérico para demostrar una propiedad, no existe un criterio bien definido para determinar si podemos considerarlo o no una demostración. Para Rowland (1998) no es justificable que las demostraciones genéricas sean vistas como inferiores a las demostraciones formales en un contexto escolar, sobretodo teniendo en cuenta su poder de explicación y de convicción. Argumenta que muestran generalidad y que, si los estudiantes son capaces de percibirla, entonces redactar una demostración formal es solo cuestión de notación. En cambio, Leron y Zaslavsky (2014), consideran que los argumentos basados en ejemplos genéricos no demuestran realmente el teorema, ya que les falta la

meticulosidad de la demostración formal, en la que se utiliza el razonamiento deductivo en todos los pasos. Por lo tanto, las principales diferencias de criterio dependen de la cantidad de detalles y explicaciones que se necesitan para justificar que un razonamiento aplicado sobre un ejemplo genérico también se podrá aplicar sobre cualquier otro ejemplo. En general, el rigor y la formalidad necesaria para aceptar una demostración genérica como demostración dependerá de la comunidad en la que se realice (Dogan y Williams-Pierce, 2021).

Reid y Vallejo (2018), consideran que la meticulosidad no puede ser un criterio para aceptar o no una demostración, y establecen unos criterios basados en factores sociales y psicológicos. El primero de los criterios es la necesidad o no de producir más ejemplos. El ejemplo genérico proporciona un modelo que puede ser reproducido para encontrar infinitos ejemplos más, de modo que elimina la necesidad de seguir produciéndolos. El segundo criterio es que el ejemplo genérico ha mostrar los motivos por los cuales la propiedad es cierta, es decir, tiene que cumplir con la función explicativa de las demostraciones. En las producciones escritas de los alumnos, los autores sugieren que para determinar si el argumento es una demostración, esta tiene que incluir evidencia de consciencia de generalidad y evidencia de razonamiento matemático. El profesor debe poder asegurar que el alumno no está usando el ejemplo para hacer una verificación empírica y tiene que poder establecer que es consciente de que su argumento es suficientemente general como para ser válido en todos los casos. Por otro lado, también debe mos-

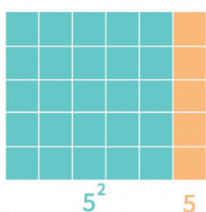
trar, con textos escritos u otras representaciones que completen el ejemplo, las razones matemáticas por las cuales se puede extrapolar la estructura utilizada con otro ejemplo y llegar a la misma conclusión. Para esto, tanto alumnos como profesores deben saber cuales son las evidencias que se deben incluir en el razonamiento, teniendo así claro que se espera de ellos cuando redactan una demostración.

Veamos a continuación dos ejemplos genéricos para demostrar propiedades numéricas elementales. En el primero (figura 1) se demuestra que la suma de un número y su cuadrado siempre es un resultado par. En el segundo (figura 2) demostramos que los cuadrados perfectos tienen un número impar de divisores.

Vemos en los dos ejemplos que la demostración no recae en ninguna característica específica del número escogido y que podríamos haber elegido cualquier otro ejemplo y reproducir la misma estructura de razonamiento. Este hecho es el que proporciona generalidad al ejemplo genérico y nos permite aceptarlo como demostración.

Por otro lado, Yopp y Ely (2016) definen un marco para asegurar que un ejemplo se ha usado de forma genérica, con características observables directamente sobre el argumento. Este marco consiste en desarrollar una secuencia de garantías desde el ejemplo hasta la conclusión y determinar en cada uno de los pasos de esta secuencia qué nuevas características han aparecido para argumentar el ejemplo. El ejemplo será genérico cuando las garantías usen solo características

La suma de un número y cuadrado siempre es par



$$5^2 + 5 = 5 \cdot (5+1) = 5 \cdot 6 = 30$$

par

5^2 significa 5 veces 5. Si le añadimos otro 5, tenemos 6 veces 5. En general, al sumar un número y su cuadrado obtendremos el número multiplicado por su siguiente, puesto que lo tenemos una vez más. Uno de los dos factores será par, por lo que el resultado será siempre par.

Figura 1. Demostración genérica

del ejemplo que son comunes a todos los objetos que cumplen la definición del enunciado o bien características establecidas en pasos anteriores.

En la figura 3 vemos una producción de un alumno intentando demostrar con un ejemplo genérico que la suma de seis números consecutivos nunca será un múltiplo de seis. Podemos ver que el ejemplo no se usa de forma genérica en la totalidad del argumento ya que en el momento en que se calcula el valor de la suma se dejan de utilizar características comunes a todos los números consecutivos, puesto que el valor obtenido depende del ejemplo escogido inicialmente. Para finalizar el argumento, se usa el caso particular 21 para ver que no es múltiplo de 6. Al usar este resultado, el tratamiento del ejemplo deja de ser genérico y su razonamiento no es una demostración para todos los casos. Para escribir una demostración genérica correcta, el alumno tendría que haber argumentado que la suma de los seis números nunca será múltiplo de seis por ser la suma de un múltiplo de seis (en su caso, seis veces el tercer número) y tres, que no es múltiplo de seis.

Yopp, Ely y Johnson-Leung (2015) afirman que su marco de análisis de los ejemplos genéricos puede ser usado por el profesor para dirigir la atención de los estudiantes en el uso del ejemplo, preguntando a los alumnos que analicen si su razonamiento utiliza alguna característica propia del ejemplo escogido. Así, los propios alumnos pueden validar su razonamiento sin la necesidad de que el profesor sea quien lo apruebe.

Los ejemplos genéricos como herramienta pedagógica

Varios autores han señalado la importancia de trabajar con ejemplos genéricos y los consideran una herramienta potente para trabajar la demostración en cualquier nivel (Rowland, 1998; Dreyfus y otros, 2012; Reid y Vallejo Vargas, 2018). Por ejemplo, para Leron y Zaslavsky (2014), la demostración genérica permite al alumnado de todos los niveles acceder a las ideas principales de la demostración, eludiendo los obstáculos que suponen en formalismo, el lenguaje

Los cuadrados perfectos tienen un número impar de divisores

| | | |
|--------------|---------------|-------------|
| $6^2 = 36 =$ | 1×36 | 2 divisores |
| | 2×18 | 2 divisores |
| | 3×12 | 2 divisores |
| | 4×9 | 2 divisores |
| | 6×6 | 1 divisor |

Listamos sistemáticamente todas las factorizaciones de 36 en dos factores. En la lista aparecen todos los divisores de 36. Cada factorización aporta dos divisores distintos de 36 excepto la de 6×6 , que sólo aporta un divisor. Por lo tanto, tenemos $4 \times 2 + 1 = 9$ divisores, que es impar. La factorización en dos factores igual, que es la que nos da el número impar, aparecerá siempre que el número sea un cuadrado perfecto.

Figura 2. Demostración genérica

$$\begin{aligned}
 &1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \\
 &(3-2) + (3-1) + 3 + (3+1) + (3+2) + (3+3) \\
 &\quad \downarrow \\
 &3 \cdot 6 - 2 - 1 + 1 + 2 + 3 \\
 &\quad \downarrow \\
 &3 \cdot 6 + 3 \\
 &48 + 3 = 21 \quad \longrightarrow \quad \frac{21}{6} = \frac{7}{2}
 \end{aligned}$$

Figura 3. Intento de demostración genérica producida por un alumno

simbólico y la generalización total. Por este motivo, los autores consideran que los ejemplos genéricos pueden ayudar al alumno a entender y producir demostraciones. El hecho de que el ejemplo genérico muestre una estructura que se puede reproducir sobre cualquier otro ejemplo permite que aparezcan las ideas necesarias para la demostración formal. La observación de esta estructura y del razonamiento matemático asociado dota a los ejemplos genéricos de potencial para facilitar la transición entre los razonamientos empíricos y las demostraciones generales (Reid y Vallejo Vargas, 2018; Dogan y Willams-Pierce, 2021).

Diagnóstico del nivel de demostración

Presentamos ahora los resultados de la prueba piloto del cuestionario de diagnóstico que realizamos como primera fase de la investigación. La prueba diagnóstica está diseñada con la finalidad de determinar la capacidad de los alumnos para producir una demostración, determinar la comprensión y las preferencias de los alumnos respecto a distintos tipos de razonamiento, poder observar si los ejemplos genéricos cumplen las funciones de verificación y explicación que ha de tener una demostración, así como determinar en qué medida los alumnos conocen el concepto de demostración matemática. En esta experimentación se ha aplicado una prueba diagnóstica inicial a un grupo heterogéneo de 17 alumnos de segundo de segundo ciclo de Segona Ensenyança de l'Escola Andorrana (equivalente a 4.º de ESO). Además, dos alumnas han realizado la prueba en una entrevista individual para poder determinar el grado de comprensión de los enunciados y analizar sus razonamientos matemáticos paralelamente a su trabajo escrito.

En la primera parte de la prueba se pide a los alumnos que demuestren que la suma de un número y su cuadrado siempre es un número par y que valoren si su razonamiento es general. Pretendemos así conocer el nivel de demostración de los alumnos sin tener ninguna referencia previa. Clasificamos las respuestas de los alumnos en función de los cuatro niveles de demostración descritos por Knuth, Choppin y

Bieda (2010). En el nivel 0, los alumnos ignoran la necesidad de una demostración. En el nivel 1, ven la necesidad pero su argumento no es general. Este nivel se divide en cuatro subniveles, según el uso que le dan a los ejemplos. Knuth, Choppin y Bieda sitúan a las demostraciones con ejemplos genéricos en el subnivel más alto del nivel 1. En el nivel 2, los alumnos intentan producir un argumento general, pero su argumento no es completo o correcto. Finalmente, en el nivel 3 los alumnos producen un argumento general, aunque falte formalismo o rigor. En la tabla 1 se muestra el porcentaje de alumnos en cada nivel.

Vemos que tres alumnos ignoran la necesidad de una demostración. Además, un alumno ha dejado el ejercicio en blanco y otro ha hecho una verificación empírica que no corresponde al enunciado.

El porcentaje más alto de alumnos se encuentra en el nivel 1, viendo la necesidad de demostrar pero produciendo un razonamiento no general. Cuatro de estos alumnos se encuentran en el nivel 1.a, considerando suficiente testear algunos casos aleatorios para justificar la propiedad. Tres alumnos realizan una verificación empírica sistemática (nivel 1.b), por ejemplo verificando todos los números del 1 al 10 y asegurando que esto seguirá sucediendo (figura 4).

En la realización de la prueba con una alumna de manera individual, se le ha pedido razonar esta parte y ha utilizado un ejemplo genérico, aunque no ha escrito este razonamiento. Se transcribe a continuación la parte de la entrevista:

| Nivel 0 | Nivel 1 | Nivel 2 | Nivel 3 | Otros |
|---------|---------|---------|---------|--------|
| 3 (16) | 7 (40) | 6 (33) | 0 (0) | 2 (11) |

Tabla 1. Alumnos (porcentajes) por nivel de demostración

Penso q-e s-i, per-q-e s-i fins el numero 10 han sigut parells els altres numeros mes grans també ho serien.

Figura 4. Justificación de la propiedad por verificación empírica sistemática producida por una alumna

—Profesora: ¿Que el cuadrado de un número impar es un número impar te parezca evidente?

—Alumna: Mm... (pausa de 15 segundos) No. Pero con los ejemplos que me vienen a la cabeza siempre pasa.

—Profesora: ¿Siempre pasa?

—Alumna: Es como... por ejemplo, con el 5... Claro, si sumas 5 y 5 se queda par. Pero entonces haces 5 y 5 y sigue siendo par. Pero a la que añades 5 más, que es lo que hace que sea impar, te queda impar el resultado. ¿Sabes?

Por otra parte, un tercio de los alumnos se encuentran en el nivel 2, intentando redactar un argumento general, pero produciendo un argumento incompleto o incorrecto. La mayoría de los alumnos situados en el nivel 2 han intentado producir un argumento general representado narrativamente, sin hacer uso de visualizaciones ni representaciones simbólicas. Además, todos han usado el hecho que un número par al cuadrado es par y un número impar al cuadrado es impar. El nivel de justificación de esta propiedad es distinta según los alumnos, encontrando alumnos que la escriben sin necesidad de justificarla y alumnos que realizan una verificación empírica para completar esta parte de la argumentación general. Por lo tanto, en un mismo intento de demostración se combinan razonamientos de distintos niveles. Ninguno de los alumnos se encuentra en el nivel 3 de demostración.

En una segunda parte del cuestionario queremos analizar como los alumnos perciben y comprenden demostraciones dadas. Por eso, realizamos una segunda actividad (actividad 2.1) en la que mostramos un ejemplo genérico que demuestra que la suma de cinco números consecutivos siempre es un múltiplo de cinco. Basándonos en el modelo de comprensión de la demostración de Mejía-Ramos y otros (2012), pedimos a los alumnos que expliquen una parte del razonamiento, que valoren la generalidad del mismo y que demuestren una propiedad similar. En esta parte también presentamos dos actividades (actividades 2.2 y 2.3) en las que se muestran distintas «demostraciones» de que cualquier número par elevado al cuadrado es divisible por cuatro y que la diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos es

siempre un número impar. Para cada razonamiento presentado, se pide valorar si entienden el razonamiento, si creen que muestra que la propiedad es cierta para todos los números, si sirve para explicar los motivos por los cuales la propiedad es cierta y si sirve para convencer de la certeza de la propiedad. Nuestro objetivo es saber si los alumnos son capaces de distinguir entre el uso empírico de los ejemplos y su uso como ejemplos genéricos. Para finalizar esta parte, y siguiendo de nuevo el modelo de comprensión de la demostración (Mejía-Ramos y otros, 2012), pedimos a los alumnos que demuestren una propiedad similar, para saber si son capaces de transmitir las ideas de la demostración a otra demostración. Recogemos algunos resultados del análisis de estas actividades:

- El razonamiento algebraico sólo es comprendido por un tercio de los alumnos. Sin embargo, tres alumnos afirman que no entienden el razonamiento algebraico pero dicen que les convence de la certeza de la propiedad. Por otro lado, dos alumnos señalan la demostración genérica visual como el razonamiento que ofrece más explicación pero afirman que prefieren la demostración algebraica. Veamos a continuación tres justificaciones para preferir el razonamiento algebraico (figura 5). El primer alumno lo escoge solo por el hecho de usar álgebra y los otros dos porque ofrece generalidad. Vemos que esto no significa comprensión ni convicción, puesto que en la tercera imagen de la figura 5, leemos que prefiere la demostración algebraica porque «pone una fórmula que permite comprobarlo con otros números... pero creo que no demuestra». De los seis alumnos que señalan el razonamiento algebraico, cuatro intentan utilizarlo para probar una propiedad similar a la demostrada. Aún así, cometen errores o solo la utilizan para intentar convertir el enunciado en una fórmula algebraica, sin realizar ningún razonamiento para demostrar (figura 6).
- En la actividad 2.3, la mayoría de los alumnos (72%) escogen como demostración preferida y como demostración más explicativa la demostración genérica visual. De hecho, todos

los alumnos, excepto uno, dicen comprender el razonamiento usado. En la actividad 2.2 los alumnos que afirman entender el razonamiento de la demostración genérica visual también son mayoría (66,7 %), siendo este razonamiento el más comprendido después del empírico (88,9 %). Sin embargo, solo una alumna intentó (sin éxito) resolver la actividad de demostración de una propiedad similar replicando la misma estructura.

- En las actividades 2.2 y 2.3 el razonamiento empírico es el comprendido por más alumnos. En ambas actividades aproximadamente la mitad de los alumnos no son capaces de ver, o no están seguros, que el razonamiento no prueba la validez de la propiedad para todos los números. Además, en la primera actividad, la mayoría de los alumnos creen que la verificación empírica ofrece una explicación a los motivos por los cuales la propiedad es cierta (no así en la segunda actividad).
- En la actividad 2.1, la mitad de los alumnos entienden el razonamiento del ejemplo ge-

nérico y son capaces de explicarlo. Además, todos ellos son capaces de ver que la estructura utilizada sobre el ejemplo se podría reproducir sobre cualquier otro ejemplo. Sin embargo, solo cuatro alumnos lo utilizan correctamente para explicar los motivos por los cuales la propiedad anunciada deja ser cierta si cambiamos las condiciones del enunciado.

Conclusiones

Entre las distintas demostraciones que se han presentado se incluían varias demostraciones basadas en ejemplos genéricos, que usaban razonamientos narrativos para acompañar cálculos o representaciones visuales. En general, los alumnos han considerado que entendían el razonamiento de las demostraciones genéricas visuales pero no las han usado en sus razonamientos. En cuanto a las demostraciones con ejemplos genéricos sin representación visual, no todas han tenido el mismo nivel de comprensión, convicción o muestra de generalidad. Por lo tanto,

La resposta 1, ja que utilitza algebra per explicar-ho

La 1a ja que demostra que la teoria és certa gràcies a una fórmula que ens permet comprovar-ho amb altres nombres, a més s'entén bastant ho però crec que no demostra perquè el resultat es pot dividir entre 4

Pensa que la primera és la més adequada per mi, ja que amb factors algebraics ens assegurarem que sempre sigui possible.

Figura 5. Motivos para preferir el razonamiento algebraico

$(x^2 - 1) \div 4 = \text{número amb residu } 1$

Figura 6. Transcripción del enunciado al álgebra en un intento de demostración

tendremos que estudiar qué representaciones de las demostraciones genéricas son más accesibles para los alumnos y cuáles son los motivos por los que se producen estas diferencias.

Por otro lado, hemos visto una preferencia por el lenguaje algebraico no ligada a la explicación o comprensión que da, ni a al dominio que tienen de su uso los estudiantes. En estos casos, los alumnos prefieren un razonamiento algebraico solo por la forma, lo que se conoce como esquema de resolución por convicción externa. Consideramos que esto puede ser debido al peso que se da al álgebra en los últimos cursos de secundaria y a la creencia de que un razonamiento que utilice expresiones algebraicas es más complejo y más parecido a los razonamientos matemáticos de cursos avanzados y, por lo tanto, más valorado por el profesor. Esperamos poder explicar esta preferencia con los datos de las siguientes fases de la investigación.

El hecho de que la mayoría de los alumnos que han intentado producir una demostración general hayan escrito un argumento incompleto, en que utilizan propiedades sin justificación (o con una justificación autoritaria o empírica), se puede deber a que no conocen el concepto de demostración. Esto nos hace incluir en la versión definitiva de la prueba un inciso sobre la necesidad de justificar todos los pasos de la demostración. De esta manera, esperamos poder diferenciar a los alumnos que son capaces de completar los agujeros de su razonamiento de aquellos que no, pudiendo hacer un análisis más preciso de sus niveles de demostración iniciales.

Referencias bibliográficas

- BALACHEFF, N. (1988), *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège*, Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG, Université Joseph-Fourier.
- (2010), «Bridging Knowing and Proving in Mathematics: A Didactical Perspective», en G. Hanna, H. N. Jahnke y H. Pulte (ed.), *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives*, Springer, 115-135.
- DOGAN, M. F., y C. WILLIAMS-PIERCE (2021), «The role of generic examples in teachers' proving activities», *Educational Studies in Mathematics*, n.º 106(1), 133-150.
- HANNA, G. (1990), «Some pedagogical aspects of proof», *Interchange*, n.º 21, 6-13.
- (2000), «Proof, Explanation and Exploration: An Overview», *Educational Studies in Mathematics*, n.º 44(1), 5-23.
- KNUTH, E. (2002), «Teachers' Conceptions of Proof in the Context of Secondary School Mathematics», *Journal of Mathematics Teacher Education*, n.º 5(1), 61-88.
- LERON, U., y O. ZASLAVSKY (2014), «Generic Proving: Reflections on Scope and Method», en M. Pitsici (ed.), *The Best Writing on Mathematics 2014*, Princeton University Press, 198-215.
- MARIOTTI, M. A. (2006), «Proof and proving in mathematics education», en Á. Gutiérrez y P. Boero (ed.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*, Brill Sense, 173-204.
- MASON, J., y D. PIMM (1984), «Generic examples: Seeing the general in the particular», *Educational studies in mathematics*, n.º 15(3), 277-289.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM) (2000), *Principles and standards for school mathematics*, NCTM, Reston.
- REID, D. A., y E. VALLEJO-VARGAS (2018), «When is a generic argument a proof?», en A. J. Stylianides y G. Harel (ed.), *Advances in mathematics education research on proof and proving*, Springer, 239-251.
- ROCHA, H. (2019), «Mathematical proof: from mathematics to school mathematics», *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, n.º 377(2140), 20180045.
- ROWLAND, T. (1998), «Conviction, explanation and generic examples», *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, volume 4, 65-72.
- STYLIANIDES, A. J. (2007), «Proof and Proving in School Mathematics», *Journal for Research in Mathematics Education*, n.º 38(3), 289-321.
- STYLIANIDES, G. J., y STYLIANIDES, A. J. (2006), «“Making proof central to pre-high school mathematics is an appropriate instructional goal”: Provable,

refutable, or undecidable proposition?», *Proceedings of PME 30*, 5, 209-216.

STYLIANIDES, G. J., STYLIANIDES, A. J., y WEBER, K. (2017), «Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward», en J. Cai (ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education*, NCTM, 237-266.

YOPP, D. A., y R. ELY (2016), «When does an argument use a generic example?», *Educational Studies in Mathematics*, n.º 91(1), 37-53.

YOPP, D. A., R. ELY, y J. JOHNSON-LEUNG, (2015), «Generic example proving criteria for all», *For the Learning of Mathematics*, n.º 35(3), 8-13.

Georgina Cerqueda Santacreu

Universitat d'Andorra y Escola Andorrana
de Segona Ensenyança d'Ordino
<gcerqueda@uda.ad>