

# Un recorrido histórico y visual por el cálculo de áreas planas

Félix Martínez de la Rosa

**suma** núm. 106  
pp. 41-46

Artículo recibido en *Suma* en febrero de 2023 y aceptado en enero de 2024

En este artículo se aportan ideas visuales para el cálculo de áreas planas y se utiliza la Historia de las Matemáticas como un recurso didáctico que permita comprender mejor la relación entre esas áreas y las derivadas.

**Palabras clave:** Visualización, Historia de las Matemáticas, Integral definida, Teorema Fundamental del Cálculo Integral.

**A historical and visual journey through the calculation of areas** // This article provides visual ideas for calculating areas and uses the History of Mathematics as a teaching resource that allows a better understanding of the relationship between calculating areas and derivatives.

**Keywords:** Visualization, History of Mathematics, Definite Integral, Fundamental Theorem of Integral Calculus.

Los profesores de matemáticas disponemos de dos excelentes bazas para mejorar la enseñanza de nuestras asignaturas: la visualización y la historia. El razonamiento visual es un recurso poderoso que facilita la comprensión de las características de un concepto matemático (Zimmermann y Cunningham, 1991; Presmeg, 2006). En el libro de Guzmán (1996), se da una atinada definición de lo que se entiende por visualización en matemáticas:

Las ideas, conceptos y métodos de la matemática presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geoméricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de problemas.

La visualización matemática tiene que ver con entender un enunciado mediante la puesta en juego de

diferentes representaciones de la situación en cuestión y ello nos permite realizar una acción que posiblemente puede conducir hacia la solución del problema (Hitt, 2003). Como se dice en (Carvajal y Muñoz, 2019), tan importante es demostrar de manera formal una certeza matemática como generar actividades intelectuales que sugieran una idea o pensamiento. Entre ellas se encuentran las demostraciones visuales, que no son estrictamente demostraciones formales, pero son imágenes bellísimas relacionadas con propiedades o teoremas que generan ideas. También son un recurso fantástico para el trabajo intelectual matemático.

Al emplear imágenes, la visualización es capaz de presentar, de una manera atractiva e intuitiva, ideas y conceptos complicados, lo que facilita el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Algunas de las visualizaciones son muy antiguas, porque los matemáticos siempre han empleado ideas y técnicas visuales para inspirarse. Otra cosa es obtener la demostración formal y rigurosa de un resultado: desde que un matemático tiene una idea hasta que esta se puede probar pueden pasar siglos y, para hacerlo, suelen aparecer nuevas herramientas creadas para poder llevar a cabo la demostración del resultado y que abren nuevos caminos matemáticos.

Mostrar el proceso que va desde la concepción de una idea hasta su demostración, da pie a que los estudiantes comprendan el papel destacado que tiene la historia de las matemáticas. Conocer los enfoques históricos y las ideas que dan lugar a nuevos conceptos y herramientas tiene un gran valor educativo

y motivador para los estudiantes. Por ejemplo, en González (2004) se reclama una función didáctica para la historia de las matemáticas como instrumento para comprender sus fundamentos y las dificultades de sus conceptos.

Un ejemplo modélico de lo que se ha expuesto es el cálculo de áreas planas. Este artículo comienza aportando ideas visuales, antiguas y recientes, para obtenerlas. Después se dan algunas formas de aproximar el área de un recinto plano. Esto último da paso al cálculo aproximado del área bajo una curva empleando las sumas de las áreas de rectángulos. Este método es poco efectivo porque para cada caso se requiere un enfoque distinto. Para hacer factible el cálculo se necesitan nuevas herramientas. Las ideas de matemáticos ilustres como Barrow, Newton y Leibniz, que comenzaron a intuir la relación entre el cálculo del área bajo una curva con las derivadas, dieron lugar a una intensa actividad matemática que culminó, en el siglo XIX, con el descubrimiento del Teorema Fundamental del Cálculo Integral. Por último, se expone una sencilla exploración que puede servir para comprender mejor esta relación, y se concluye con una demostración sencilla del citado resultado.

## Cálculo visual de áreas

Tomando como referencia el área de un rectángulo, en las Matemáticas de primero de ESO las áreas de trapecios o triángulos se obtienen empleando sencillas manipulaciones (figuras 1 y 2). Descomponiendo

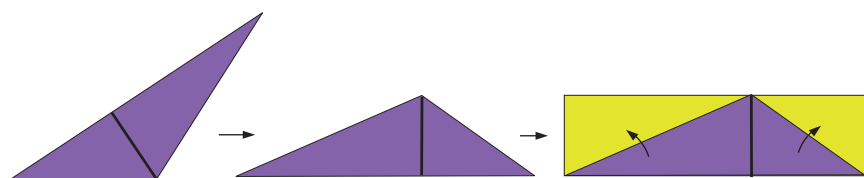


Figura 1

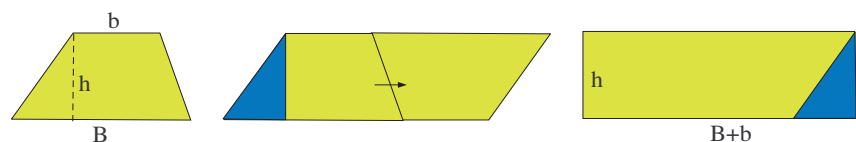


Figura 2

un polígono regular en triángulos se puede obtener su área. Para aproximar el área de un círculo, Arquímedes usó polígonos inscritos y circunscritos: el área buscada está entre las áreas de esos polígonos.

La idea de manipular un objeto para hallar su área ya la empleó el rabino barcelonés del siglo XII Abraham Bar Hiyya, para obtener el área de un círculo (figura 3) (Garber y Tsaban, 2001).

Bar Hiyya visualizó el círculo como una colección de circunferencias concéntricas. Si se estas se cortan por el radio y se abren en abanico hasta obtener líneas rectas, se forma un triángulo cuya área (la mitad del producto entre el radio y la longitud del círculo) coincide con la del círculo. La misma idea se emplea en Mnatsanakian (1997) y en Apostol (2000) para calcular el área de un anillo circular (figura 4).

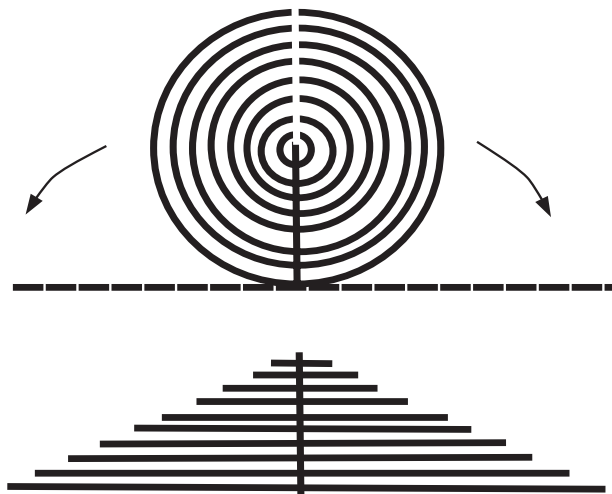


Figura 3

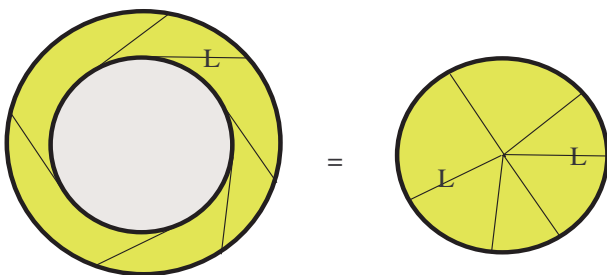


Figura 4

Se observa que los segmentos tangentes interiores tienen la misma longitud y «barren» el área del anillo. Al recolocarlos con un punto de inicio común, se forma un círculo cuya área es la misma que la del anillo (el mismo resultado se obtiene al sustituir el círculo interior por un óvalo). La generalización de este proceso consiste en sustituir el círculo o el óvalo por una curva suave. Trazando segmentos tangentes de longitud variable se obtiene una región «barrida» por ellos. Al trasladarlos de forma paralela a sí mismos, haciendo que todos comiencen en el mismo punto, se obtiene una región cuya área coincide con la de la región mencionada (figura 5).

Por ejemplo, si un niño arrastra un juguete por el suelo con una cuerda (de longitud  $L$ ) y camina en línea recta (por el eje  $x$ ), la cuerda se mantiene tangente a la curva que traza el juguete. Esta curva es una tractriz. Trasladando estas tangentes de forma paralela a sí mismas, llevándolas a un punto de inicio común, el cálculo del área entre la curva y el eje  $x$  se obtiene de una forma visual: es la cuarta parte del área del círculo de radio  $L$  (figura 6).

Conociendo que la pendiente de la tangente a la gráfica de una función en un punto es la derivada de la función en ese punto, se puede aplicar lo anterior

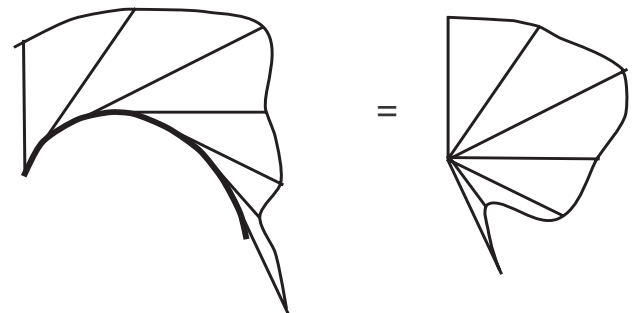


Figura 5

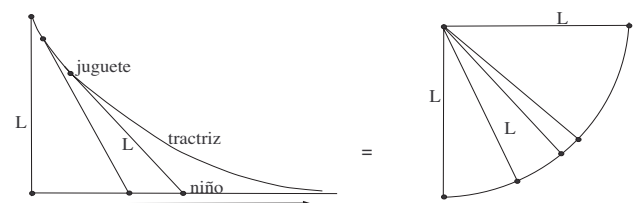


Figura 6

al cálculo del área del recinto entre la gráfica de la función la exponencial

$$f(x) = e^{\frac{x}{b}}$$

donde  $b > 0$ , y el eje  $x$ , en el intervalo  $(-\infty, a]$ . La ecuación de la recta tangente en  $x = t$  es:

$$y - e^{\frac{t}{b}} = \frac{1}{b} e^{\frac{t}{b}}(x - t)$$

Haciendo  $y = 0$  se tiene que la tangente en  $x = t$  corta al eje  $x$  en  $x = t - b$ , por lo que la base de todos los triángulos formados a partir de esas tangentes es  $b$  (figura 7, izquierda). Esto permite relocalar a todas esas tangentes de forma que rellenen el triángulo de la figura 7 (derecha): el doble del área de este triángulo es el área buscada.

*Nota.* La tangente a la gráfica de una función  $f(x)$  en  $x = a$  corta al eje  $x$  en

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

Se denomina *subtangente* en  $a$  al valor

$$s(a) = \frac{f(a)}{f'(a)}$$

Este concepto es un clásico del análisis. En 1684 Leibniz planteó el problema de encontrar todas las curvas con subtangentes constantes: la solución son las curvas exponenciales. El cálculo de otras áreas usando esta herramienta se analiza en Apostol y Mnatsnakian (2002a y 2002b).

El cálculo del área entre una parábola y una o dos de sus tangentes también se puede obtener mediante la manipulación del recinto. En primer lugar, se considera la parábola dada por la función  $f(x) = ax^2 + bx + c$  para  $a > 0$  (el caso  $a < 0$  es similar) y su recta tangente en  $x = t$ ,  $T(x) = f(t) + f'(t)(x - t)$ . Para calcular el área del recinto comprendido entre ambas en un intervalo  $[x_0, x_1]$ , los estudiantes saben que deben restar sus ecuaciones. Además, debido a la tangencia, solo debe aparecer un único punto de corte (doble). En efecto:

$$f(x) - T(x) = ax^2 + bx + c - (at^2 + bt + c) - (2at + b)(x - t) = a(x - t)^2$$

La consecuencia de esta operación se visualiza en la figura 8: el área buscada es la misma que la del recinto comprendido entre la parábola  $y = a(x - t)^2$  y el eje  $x$ .

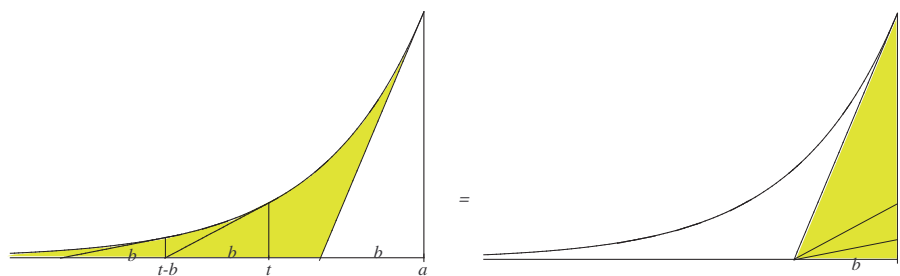


Figura 7

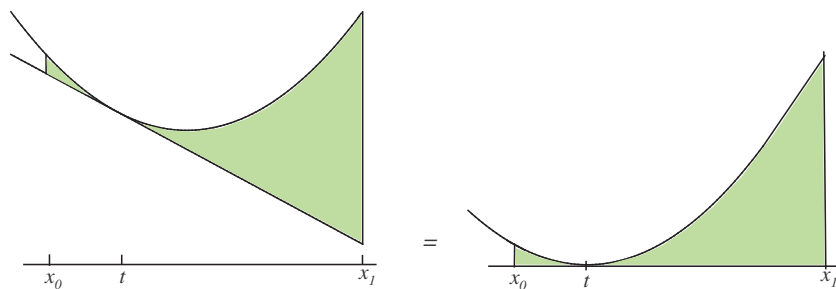


Figura 8

En segundo lugar, se considera la parábola dada por  $f(x)$  y sus tangentes  $T_1(x)$  y  $T_2(x)$  en  $t_1$  y  $t_2$ . Para calcular el área del recinto encerrado entre todas ellas se necesita saber el punto de corte entre las tangentes. Ya se ha visto que:

$$\begin{aligned} f(x) &= T_1(x) + a(x - t_1)^2 \\ f(x) &= T_2(x) + a(x - t_2)^2 \end{aligned}$$

El punto de corte entre las tangentes se calcula igualando  $T_1(x)$  y  $T_2(x)$ . De las expresiones anteriores se obtiene  $a(x - t_1)^2 = a(x - t_2)^2$ , cuya única solución es el punto medio entre  $t_1$  y  $t_2$ :

$$x = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

(figura 9, izquierda).

El dibujo de la figura 9, derecha, se obtiene (a partir del de la izquierda) gracias a la figura 8 (Martínez, 2021). Aparecen dos parábolas, de ecuaciones  $y = a(x - t_1)^2$ , e  $y = a(x - t_2)^2$ , y se visualiza que el área buscada es el doble del área bajo una de ellas en el intervalo

$$\left[ t_1, \frac{t_1 + t_2}{2} \right]$$

*Nota.* El área buscada es:

$$2 \int_{t_1}^{\frac{t_1 + t_2}{2}} a(x - t_1)^2 dx = \frac{1}{12} a(t_2 - t_1)^3$$

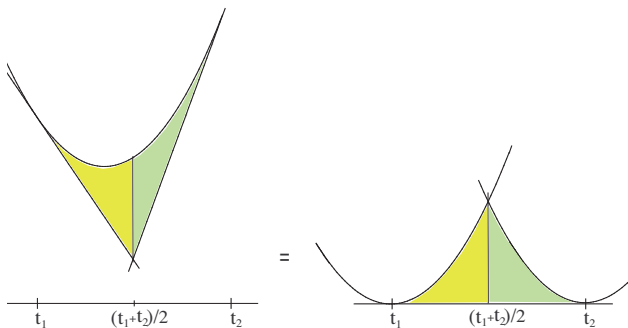


Figura 9

## Del área de un recinto plano al área encerrada por la gráfica de una función

Saber el valor aproximado del área de un recinto plano irregular, como puede ser una superficie de cultivo, ha sido siempre un conocimiento muypreciado por cualquier propietario de un terreno. Por ejemplo, en Bourne (1968) se describe el método empleado por los antiguos anglosajones para calcular el área de sus tierras: usaban largos surcos del mismo ancho, obteniendo el área mediante la longitud total de los surcos (figura 10, izquierda). Otra opción, que se da en Martin y Ponte (1985), consiste en realizar un dibujo a escala del terreno y elegir un punto central desde el que se mide la distancia hasta el borde (figura 10, derecha). Separando estos «radios» en 10 grados se obtienen 36 sectores «circulares» cuya área aproximada es

$$\left(\frac{1}{36}\right)\pi r_i^2$$

La suma total es la aproximación buscada.

Otra posibilidad es emplear una unidad de área como puede ser un cuadrado. Una primera aproximación consiste en saber cuántas de estas unidades caben en el interior del recinto (figura 11, izquierda): es un valor del área por defecto. Si se recubre el terreno con estas unidades se obtiene un valor por exceso (figura 11, derecha).

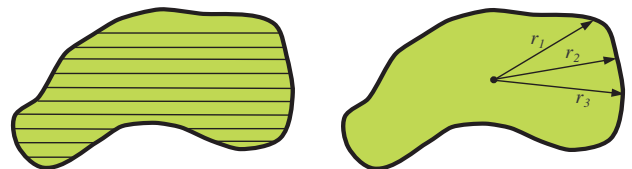


Figura 10

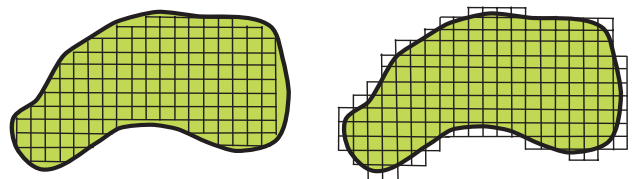


Figura 11

El área del recinto está entre esos dos valores. Utilizando una unidad de área cada vez más pequeña, los valores por defecto y por exceso tienden al valor del área.

La idea anterior sirve de introducción al cálculo del área bajo una curva definida por una función  $f$  no negativa en  $[a, b]$  y el eje  $x$ . En los textos Colera y Oliveira (2009) y Escoredo (2009), se utiliza una partición del intervalo  $[a, b]$ :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Tomando los rectángulos de base  $x_i - x_{i-1}$  y de altura el menor y el mayor valor de la función en cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  el área se aproxima, por defecto y por exceso, mediante la suma de las áreas de los rectángulos que se obtienen. Si al aumentar el número de puntos de la partición su diámetro tiende a cero, esas sumas dan lugar al valor del área buscada que se denomina

$$\int_a^b f(x) dx$$

Otra forma consiste en emplear los rectángulos de base  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  y altura  $f(x_i^*)$  donde  $x_i^*$  está en  $[x_{i-1}, x_i]$  (figura 12, izquierda). El límite de la suma de las áreas de estos rectángulos (suma de Riemann) es el área buscada (Colera y Oliveira, 2009):

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$$

Por otro lado, si  $f(x)$  toma valores positivos y negativos en  $[a, b]$ , el valor

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$$

es la diferencia entre la suma de las áreas de los rectángulos que están por encima del eje  $x$  menos las de los que están por debajo (figura 12, derecha).

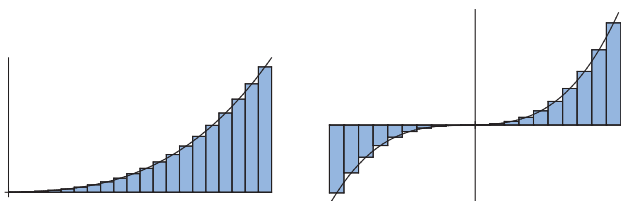


Figura 12

Por eso, el valor

$$\int_a^b f(x) dx$$

se denomina el «área con signo» de  $f(x)$  en  $[a, b]$ .

Como se cuenta en Bressoud (2011), la idea de concebir la integral definida a través del límite de una suma fue introducida por Cauchy en 1823, quien popularizó la notación

$$\int_a^b f(x) dx$$

(que fue primero sugerida por Fourier en 1822). Lo hizo para funciones continuas y tomó el valor de la función en el extremo izquierdo de cada subintervalo de la partición. Riemman en 1867 introdujo la idea de elegir un punto cualquiera, y se planteó la integrabilidad de funciones no continuas.

El inconveniente de las sumas de Riemman es que no son fáciles de calcular. Un ejemplo se da en Schaumberger (1971) donde, para la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

en  $[a, b]$  con  $0 < a < b$ , se elige la media geométrica de los extremos de cada subintervalo,

$$x_i^* = \sqrt{x_i x_{i-1}}$$

obteniendo:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(x_i^*)^2} \Delta x_i &= \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i x_{i-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i} \right) \end{aligned}$$

Simplificando la última expresión se llega al resultado:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

Otros casos donde también se puede hallar la suma de Riemman son las funciones  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = x^3$  en el intervalo  $[0, 1]$ . Para ello se elige la partición:

$$\left[ 0, \frac{1}{n} \right], \left[ \frac{1}{n}, \frac{2}{n} \right], \dots, \left[ \frac{n-1}{n}, 1 \right]$$

Tomando el extremo derecho de cada subintervalo se obtienen las sumas:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1^2 + 2^2 + \dots + n^2)}{n^3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^3 \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1^3 + 2^3 + \dots + n^3)}{n^4}$$

En ambos casos, las sumas de potencias de enteros que aparecen se pueden calcular empleando la visualización. La primera (la suma de cuadrados) se obtiene a través de la figura 13 (Kalman, 1991).

El rectángulo grande está formado por  $(2n + 1)(1 + 2 + 3 + \dots + n)$  cuadrados, que se pueden distribuir en tres grupos de  $(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$  cuadrados cada uno. Hay un grupo a la izquierda, otro a la derecha y uno central (formado a partir del patrón de colores de la imagen izquierda). Aplicando la suma de una progresión aritmética se obtiene:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 =$$

$$= \frac{(1n + 1)(1 + 2 + 3 + \dots + n)}{3} =$$

$$= \frac{(2n + 1)n(n + 1)}{6}$$

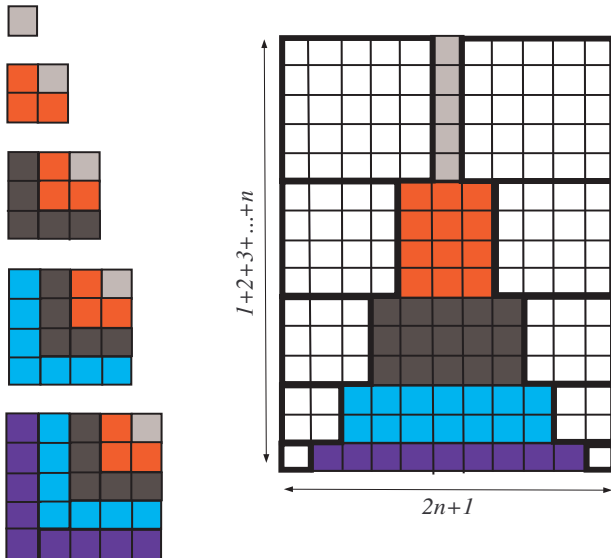


Figura 13

Por tanto, el área buscada es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1^2 + 2^2 + \dots + n^2)}{n^3} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n + 1)n(n + 1)}{6} = \frac{1}{3}$$

La segunda (la suma de cubos) se obtiene con la figura 14 (Martínez, 2022).

Se visualiza la relación:

$$(1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = 1^3 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 3^2 +$$

$$+ 4 \cdot 4^2 + \dots + n \cdot n^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

Por tanto, el área buscada es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1^3 + 2^3 + \dots + n^3)}{n^4} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + 2 + 3 + \dots + n)^2}{6} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 1)^2 n^2}{4n^4} = \frac{1}{4}$$

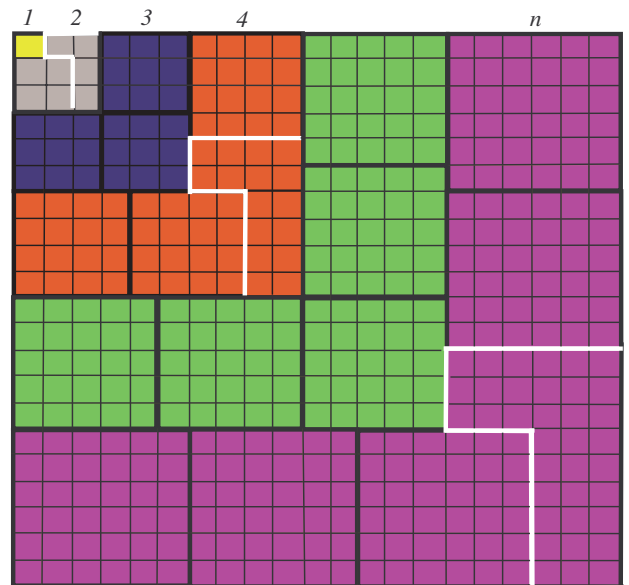


Figura 14

## Notas históricas sobre la relación entre el área y la derivada

Como se ha visto, el uso de las sumas de Riemman no da lugar a una forma sencilla y sistemática de obtener las áreas. Fueron los matemáticos del siglo XVII los primeros en reconocer la relación entre las áreas y las derivadas que desembocó, en el siglo XIX, en el Teorema Fundamental del Cálculo Integral.

En el siglo XVII no existían las funciones. Los objetos con los que se trabajaba eran las curvas (el paso del análisis de las curvas al análisis de funciones lo dio Euler en 1748, en su libro *Introductio in analysis infinitorum*), y había dos problemas a los que se dedicaba mucho esfuerzo: encontrar la tangente a una curva en un punto (el problema de las tangentes), y calcular el área bajo una curva (el problema de las cuadraturas). Hay tres nombres que destacan en la búsqueda de la relación entre ambos problemas: Barrow, Newton y Leibniz. Es muy instructivo ver los distintos enfoques que utilizaron.

### BARROW: ENFOQUE GEOMÉTRICO

Isaac Barrow (1630-1677) fue el primero en darse cuenta de la relación entre el problema de las tangentes y el del área limitada por una curva. En 1670 en su libro *Lecturas geométricas* expuso un resultado (en su forma original está en Wagner, 2001, y Ponce y Maldonado, 2014) que da paso a esta relación.

Empleando un lenguaje moderno, se considera una función  $f$  estrictamente creciente, positiva y continua en  $[a, b]$ . Se toma la función  $F$  cuyo valor en cada  $x$  de  $[a, b]$  es el área bajo la gráfica de  $f$  desde  $a$  hasta  $x$ . Desde cada punto  $X$  del intervalo se levanta una perpendicular que corta a la función  $F$  en el punto  $D$ , y a la función  $f$  en  $E$  (figura 15). El teorema de Barrow dice que:

Si se traza una recta desde  $D$  hasta un punto  $Q$  del eje  $x$ , de forma que se produzca la siguiente igualdad entre longitudes:

$$\frac{\overline{XD}}{\overline{XQ}} = \overline{XE}$$

entonces esa recta es tangente a la gráfica de  $F$  en  $D$ .

Notemos que  $\overline{XD}$  y  $\overline{XE}$  son las alturas respectivas de  $F$  y de  $f$  correspondientes a  $X$ . Ya que

$$\frac{\overline{XD}}{\overline{XQ}}$$

es la pendiente de la tangente a la función área  $F$ , se comienza a intuir la relación: la derivada de la función área  $F$  es  $f$ .

### NEWTON: ENFOQUE DINÁMICO

Isaac Newton (1642-1727), el alumno más destacado de Barrow, pensó que la velocidad de un objeto se podría representar como una curva y que la cuadratura de esa curva (el área bajo ella) sería la distancia recorrida por el mismo.

Se parte de una curva  $ABC$  y del área de una región  $ADB$  encerrada por el segmento vertical que empieza en  $D$ . Un pequeño cambio  $DE$  en el tiempo (eje horizontal) da lugar a un pequeño cambio en la distancia recorrida representada por el área  $DEFB$  (figura 16). Como se describe en Perkins (2012), Newton pensó que en encontrar un rectángulo  $DEGH$  con la misma área que  $DEFB$ .

Como el área del rectángulo  $DEGH$  es el producto de las longitudes  $DH$  y  $DE$  entonces:

$$DH = \frac{DEGH}{DE} = \frac{\text{cambio en la distancia recorrida durante el tiempo } DE}{\text{cambio en el tiempo } DE}$$

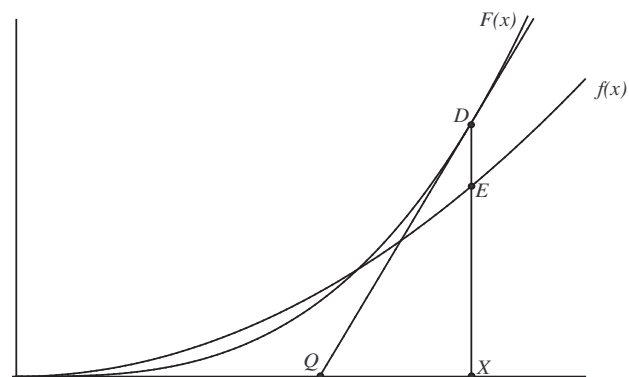


Figura 15

Suponiendo que  $DE$  es «infinitamente pequeño» entonces  $DH$  llega a ser igual que  $DB$ . En este caso, el cociente anterior se lee como:  $DB$  es la razón del cambio en el área  $ABD$  en el punto  $D$ .

Al ser  $DB$  la altura de la curva  $ABC$  en  $D$ , el resultado final de la exploración es el mismo que obtuvo Barrow: La altura de una curva en un punto es igual a la razón de cambio de la cuadratura de la curva en ese punto.

**LEIBNIZ: SUMA DE ÁREAS INFINITESIMALES**

Gottfried Leibniz (1646-1716) interpretaba una curva como la razón, en cada punto, entre el movimiento vertical y el horizontal.

En la figura 17, izquierda, la distancia entre las marcas,  $AD = OD - OA$  y  $FC = OF - OC$ , las denominó con la letra  $d$  seguida de una variable. Si  $x$  representa la distancia horizontal entonces  $AD = dx$ . Si  $y$  representa la distancia vertical entonces  $FC = dy$ . Denominó «triángulo diferencial» al que tiene lados  $dx$  y  $dy$  siendo  $dy/dx$  la pendiente de la hipotenusa. A las cantidades «infinitamente pequeñas»  $dx$  y  $dy$  las denominó «diferenciales». Por ejemplo, tomando la parábola  $y = x^2$  (figura 17, derecha), se observa que:

$$dy = (x + dx)^2 - x^2 = x^2 + 2x dx + (dx)^2 - x^2 = 2x dx + (dx)^2$$

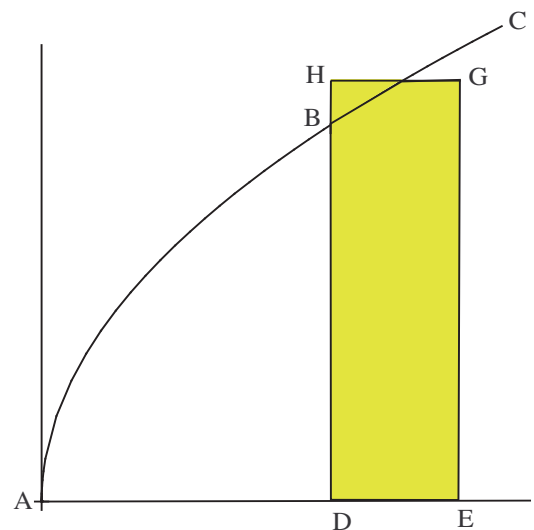
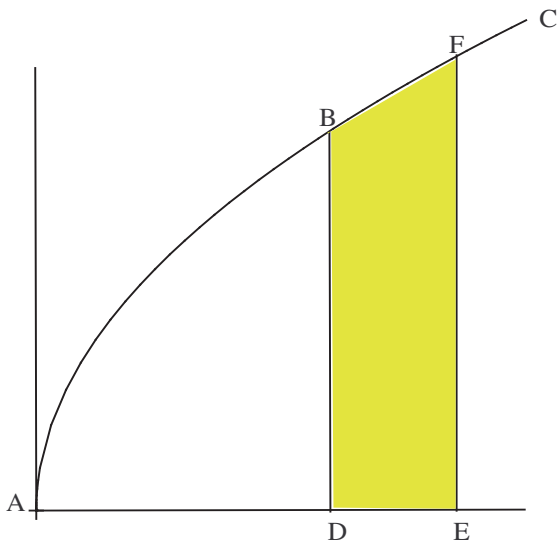


Figura 16

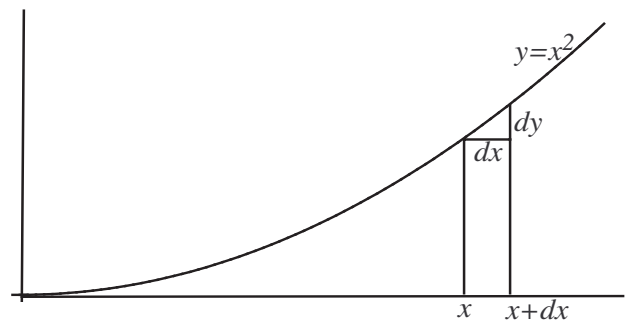
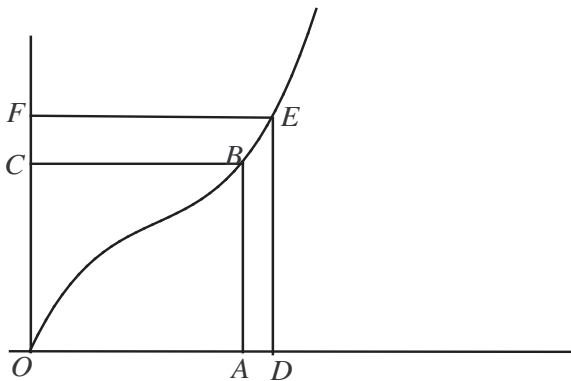


Figura 17

Despreciando el valor  $(dx)^2$  obtenemos que

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Como la distancia  $x$  está formada por muchos pequeños segmentos  $AD = dx$ , Leibniz alargó la letra «s» para crear el símbolo de la integral y representar la suma de todos ellos:

$$x = \int dx$$

Esta notación le permitió expresar el área de una forma nueva. Por ejemplo, el área bajo la gráfica de  $y = x^2$  es la suma de infinitos rectángulos de base  $dx$  y altura  $x^2$ , y se expresa

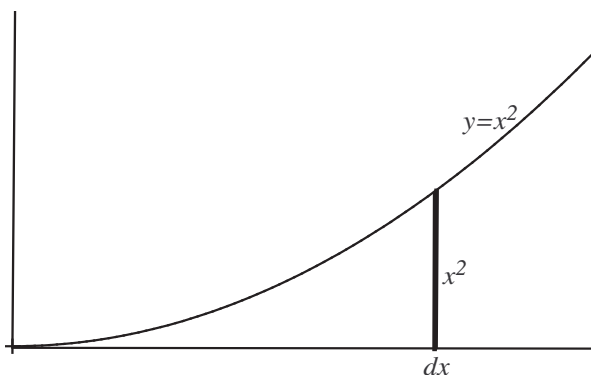
$$\int_a^b f(x) dx$$

(figura 18, izquierda).

En general la cuadratura de una curva  $y$  (el área bajo ella) se expresa por  $\int y dx$ . Un pequeño cambio en el área se expresa como  $d \int y dx$  y se corresponde con la altura de la curva  $y$ , es decir  $y = d \int y dx$  (figura 16, derecha). Surge de nuevo la relación entre la altura de la curva y la derivada de la función área.

## Una exploración para relacionar áreas y derivadas y conectar con el Teorema Fundamental del Cálculo

Para calcular el área entre una curva definida por una función continua  $f$  no negativa en un intervalo y el



eje  $x$ , los estudiantes de primer curso de Cálculo en la universidad utilizan la regla de Barrow. Para funciones que cambian de signo saben que tienen que separar la parte positiva de la negativa y cambiar el signo en este último caso. ¿Qué significa el número

$$\int_a^b f(x) dx?$$

les pregunto; la respuesta (el área con signo de  $f$  en  $[a, b]$ ) solo la conoce quien ha aproximado estas áreas usando rectángulos. También les planteo una segunda cuestión. Ellos saben que toda función derivable en  $[a, b]$  es también continua en ese intervalo. ¿Hay alguna manera de completar la frase si  $f$  es continua en  $[a, b]$  entonces...?

La respuesta ( $f$  tiene antiderivada) solo la puede responder quien conoce y ha entendido el Teorema Fundamental del Cálculo Integral. Los estudiantes que han cursado la asignatura Matemáticas II deberían saberlo porque en las directrices y orientaciones para las pruebas de acceso a la Universidad para la asignatura (BOE del 4 de febrero de 2022) se especifica:

Conocer la noción de función integral (o función área) y aplicar el teorema fundamental del cálculo y la regla de Barrow.

Sin embargo, a lo largo del curso los problemas de tiempo se acumulan y provocan que los últimos temas se expliquen a toda velocidad. Así que los aspectos históricos se zanján mencionando a Newton

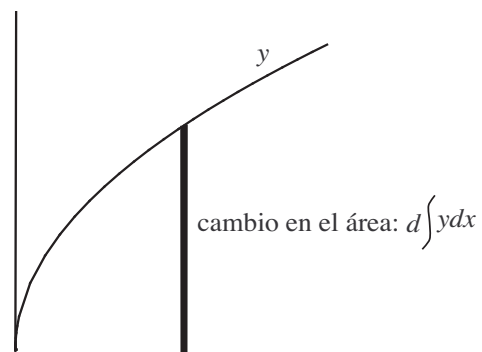


Figura 18

y Leibniz como inventores del Cálculo (a Barrow no saben bien donde ubicarlo), y la integral definida se obtiene, de una manera mecánica, a través de la Regla de Barrow. De esta forma, el motivo de que el cálculo del área encerrada por  $f$  se resuelva mediante una función cuya derivada es  $f$ , queda envuelta en un cierto misterio.

En el caso de la asignatura Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II, la directriz para las pruebas de acceso es:

Cálculo de áreas: La integral definida.  
Regla de Barrow.

Por lo que los estudiantes que la han cursado desconocen el teorema, y el cálculo de áreas empleando derivadas parece algo que tiene que ver más con la magia que con la ciencia.

Hay una exploración sencilla (basada en el artículo de Johnson, 2010), que puede ofrecer algo de luz sobre la relación entre el cálculo de áreas y las derivadas y entender el significado de la expresión

$$\int_a^x f(t) dt$$

una función definida por una integral y cuya variable está en su límite superior. Consta de dos pasos.

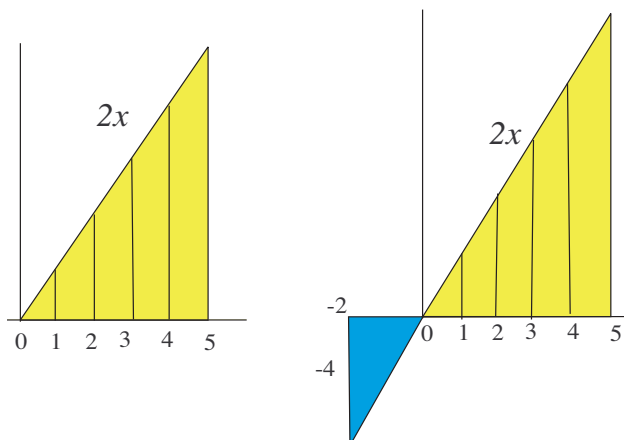


Figura 19

*Paso 1.* En la figura 19, está dibujada la gráfica de la función  $f(t) = 2t$  en los intervalos  $[0, x]$  y  $[-2, x]$  para  $x = 1, 2, 3, 4, 5$ .

En cada intervalo  $[0, x]$  la función  $f(t) = 2t$  es positiva y el valor de la integral

$$\int_0^x 2t dt$$

representa el área bajo la función. Los valores de los pares

$$(x, \int_0^x 2t dt)$$

son:

$$(1, 1); (2, 4); (3, 9); (4, 16) \text{ y } (5, 25).$$

En cada intervalo  $[-2, x]$  la función cambia de signo por lo que la integral

$$\int_{-2}^x 2t dt$$

representa el «área con signo» de la función. Los valores de los pares

$$(x, \int_{-2}^x 2t dt)$$

son:

$$(1, -3); (2, 0); (3, 5); (4, 12); (5, 21).$$

Es claro que los primeros valores se ajustan a los de la función  $F(x) = x^2$ , mientras que los segundos se ajustan con  $G(x) = x^2 - 4$ , lo que sugiere que:

$$F(x) = x^2 = \int_0^x 2t dt, \text{ y } G(x) = x^2 - 4 = \int_{-2}^x 2t dt$$

Además  $F'(x) = G'(x) = f(x) = 2x$ , y  $G(x) = F(x) - 4$ .

*Primera conclusión:*

$$\int_a^x 2t dt$$

es una función cuya derivada es  $f(x) = 2x$ .

*Paso 2.* Se trata de calcular

$$\int_2^5 2x dx$$

de dos formas distintas. Ya que la función  $f(x) = 2x$  es no negativa en  $[2, 5]$ , el valor de la integral es el

área bajo  $f$  en  $[2, 5]$ . Esta área se puede obtener a través de la descomposición de la figura 20.

En la figura se aprecia que

$$\int_2^5 2x dx = 25 - 4 = F(5) - F(2)$$

Además, teniendo en cuenta la relación entre  $F$  y  $G$ , se obtiene:

$$F(5) - F(2) = (F(5) - 4) - (F(2) - 4) = G(5) - G(2)$$

Por tanto

$$\int_2^5 2x dx = G(5) - G(2)$$

Segunda conclusión:

$$\int_2^5 2x dx$$

se puede obtener como la diferencia de valores en 5 y 2, tanto de  $F$  como de  $G$ , siendo la derivada de ambas funciones igual a  $f(x)$ .

### Una demostración corta del Teorema Fundamental del Cálculo Integral

Los matemáticos del siglo XVIII prestaron poca atención a las ideas de Barrow, Newton y Leibniz. Hubo que esperar a que Cauchy en 1823, en su libro de 1823 *Résumé des leçons données à l'École royale polytechnique sur le calcul infinitésimal*, demostrase que la función

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

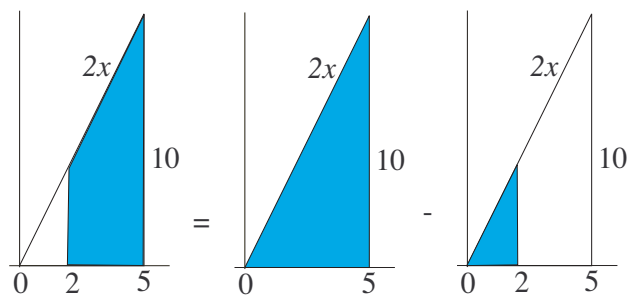


Figura 20

es una primitiva de  $f$  y que el cálculo de la integral definida se realiza con cualquier primitiva de  $f$ . Posteriormente, en 1876, Paul du Bois-Reymond acuñó el nombre de Teorema Fundamental del Cálculo Integral para el enunciado:

Parte 1. Si  $f$  es continua en  $[a, b]$ , entonces la función

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

es derivable y  $F'(x) = f(x)$  para cada  $x$  de  $[a, b]$ .

Parte 2. Si  $f$  es continua en  $[a, b]$  y  $G'(x) = f(x)$  para cada  $x$  de  $[a, b]$  entonces,

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$$

En los textos de bachillerato Colera y Oliveira (2009) y Escoredo (2009), el teorema se prueba con la misma demostración que dio Cauchy. Para la parte 1 se aplica el teorema del valor medio integral en la definición de la derivada de  $F$ . La parte 2 (denominada regla de Barrow en los textos) se prueba basándose en que dos primitivas de  $f$  solo difieren en una constante. Esta demostración resulta algo farragosa, pero hay una forma más corta de probar el teorema (Toumasis, 1993) que consiste en demostrar primero la parte 2. Se toma la partición  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ . La idea es aplicar el teorema del valor medio a  $G$  en cada subintervalo  $(x_{i-1}, x_i)$ . Al hacerlo se obtiene un punto  $x_i^*$  tal que:

$$G(x_i) - G(x_{i-1}) = G'(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

Suponiendo que la longitud de cada subintervalo tiende a cero si  $n$  tiende a infinito, la parte 2 del teorema sale de la igualdad,

$$\begin{aligned} \int_a^b G'(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n G'(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n G(x_i^*) - G(x_{i-1}) = G(b) - G(a) \end{aligned}$$

Para probar la parte 1 tomamos la función

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Por la parte 2 se deduce que si  $G'(x) = f(x)$  para cada  $x$  de  $[a, b]$ , entonces,

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt = G(x) - G(a)$$

Finalmente, al ser  $G(a)$  una constante tenemos que  $F'(x) = G'(x) = f(x)$ .

## Resumen final

El desarrollo histórico de los conceptos matemáticos está repleto de ideas visuales (empleadas por los matemáticos de cualquier época para analizar sus intuiciones) que pueden ser utilizadas en las clases para interesar y motivar a los estudiantes, y facilitarles su comprensión. En este artículo se han combinado la visualización y la historia de las matemáticas, usándolos como recursos didácticos para la enseñanza del cálculo de áreas planas. Para ello se han expuesto técnicas visuales que permiten manipular determinados recintos planos cuya área se quiere calcular. Y se han esbozado las ideas del siglo XVII con las que matemáticos ilustres comenzaron a intuir la relación entre el cálculo de áreas y las derivadas. El resultado fue el Teorema Fundamental del Cálculo Integral, del que aquí se da una corta y sencilla demostración.

## Referencias bibliográficas

- APOSTOL, T. (2000), «A Visual Approach to Calculus Problems», *Engineering and Science*, n.º 3, 22-31.
- APOSTOL, T., y M. MNATSAKIAN (2002a), «Subtangents: an aid to visual calculus», *American Math. Monthly*, vol. 109(6), 525-533.
- (2002b), «Tangents and subtangents used to calculate áreas», *American Math. Monthly*, vol. 109(10), 900-908.
- BOURNE, H. N. (1968), «The concept of área», *The Arithmetic Teacher*, vol. 15(3), 233-243.
- BRESSOUD, D. (2011), «Historical reflections on teaching the fundamental theorem of integral calculus», *American Math. Monthly*, vol. 118(2), 99-115.
- CARVAJAL, A., y J. L. MUÑOZ (2019), *Demostraciones visuales en Matemáticas*, La Catarata (colección miradas matemáticas), Madrid.
- COLERA, J., y M. J. OLIVEIRA, (2009), *Bachillerato 2, Matemáticas II*, Anaya, Madrid.
- ESCOREDO, A., y OTROS (2009), *Matemáticas II, 2.º bachillerato*, Santillana Educación, Madrid.
- GARBER, D., y B. TSABAN (2001), «A mechanical derivation of the area of the sphere», *American Math. Monthly*, vol. 108(1), 10-15.
- GONZÁLEZ, P. M. (2004), «La historia de las Matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza», *Suma*, n.º 45, 17-28.
- GUZMÁN, M. DE (1996), *El rincón de la pizarra: ensayos de visualización en análisis matemático*, Pirámide, Madrid.
- HITT, F. (2003), «Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología», *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, vol. x, n.º 2, 213-223.
- JOHNSON, H. L. (2010), «Investigating the fundamental theorem of calculus», *Mathematics Teacher*, vol. 103(6), 430-435.
- KALMAN, D. (1991), «Sums of squares», *College Mathematics Journal*, vol. 22(2), 124.
- MARTIN, W. G., y J. PONTE (1985), «Measuring the area of golf Green and other irregular regions», *Mathematics Teacher*, vol. 78(5), 385-389.
- MARTÍNEZ, F. (2021), «Area between a parabola and two tangent lines», *International J. Math. Education in Science and Technology*, vol. 52(9), 1405-1406.
- (2022), «Proof without words: Sum of cubes in puzzle form», *Far east journal of mathematical education*, vol. 23, 7.
- MNATSAKIAN, M. (1997), «Annular Rings of Equal Area», *Math Horizons*, vol. 5(2), 5-8.
- PERKINS, D. (2012), *Calculus and its origins*, The Mathematical Association of America, USA.
- PONCE-CAMPUZANO, J. C., y M. A. MALDONADO-AGUILAR, (2014), «The fundamental theorem of calculus within a geometric context, based on Isaac Barrow's work», *International J. Math. Education in Science and Technology*, vol. 45(2), 293-303.
- PRESMEG, N. C. (2006), «Research on visualization in learning and teaching mathematics», *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, Sense Publishers, 205-235.

SCHAUMBERGER, N. (1971), «The evaluation of  $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x}}$  and  $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x}}$ », *The Mathematics Teacher*, vol. 64(7), 605-606.

TOUMASIS, C. (1993), «What is the fundamental theorem of integral calculus?», *International J.*

*Math. Education in Science and Technology*, vol. 24(5), pp. 685-687.

WAGNER, J. (2001), «Barrow's fundamental theorem», *The college math. Journal*, vol. 32(1), 58-59.

ZIMMERMAN, W., y S. CUNNINGHAM (eds.) (1991), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, The Mathematical Association of America, USA.

---

Félix Martínez de la Rosa

Universidad de Cádiz

<felix.martinez@uca.es>