



Que los calendarios representan un potente recurso didáctico lo demuestran las numerosas actividades mágico-matemáticas propuestas por todos y cada uno de los mate-magos que operan en el territorio nacional e internacional o por las comunicaciones que los mejores divulgadores e historiadores de las matemáticas han dedicado a ellos. Voluntariamente, no menciono a nadie, en parte para no olvidar a alguien (siempre sucede) y sobre todo porque no es necesario: todos los amigos que están leyendo este artículo conocen a uno o muchos de ellos y ellas. De todas maneras, aquí os dejo un par de ejemplos sencillos de un pequeño juego de magia con el calendario que puede ser el inicio de una interesante investigación didáctica:

1. <<https://oliveriosatisfecho.es/adivinar-la-suma-del-calendario/>>.
2. <<https://www.divulgamat.net/divulgamat15/html/archivos/65calendar.html>><sup>2</sup>.

La ocasión que me lleva a escribir este artículo es la reciente visita al Matematikum de Giessen, donde se organizó la reunión final del proyecto europeo SMEM, destinado a la creación de materiales para niños de 3 a 8 años<sup>3</sup>.

Respecto a la visita anterior, el Matematikum ha aumentado la superficie de su exposición y ha sabido combinar el aumento de la oferta con el mantenimiento de la calidad de las propuestas en todos sus ámbitos: contenidos, diseño, dinámicas... ¡Sigue siendo un lugar imprescindible! Ofrece la oportunidad de tener nuevas experiencias, disfrutar de cada detalle

y seguir investigando y, tocados por el destello de la revelación, descubrir algo más. Todo ello lo realizan sin ostentación ni soberbia, con el más puro rigor científico, la máxima sobriedad y vocación de colaboración. ¡Después de estar allí dentro tres días, a la media hora de haber salido, ya tienes ganas de volver!

En su pequeña tienda compré el calendario del que trata este artículo (figura 2).

Instrucciones:

- Utilice seis de los siete pentominós para marcar la fecha del día actual.
- Por ejemplo: 25 de diciembre<sup>4</sup> (figura 3).

Así que la primera actividad que se ofrece será la de componer seis pentominós (= 30 unidades) para marcar cada fecha posible de un mes determinado.

Antes de continuar creo necesaria una aclaración: ¡no me gustan los pentominós! Pero eso viene de una mala experiencia personal.

Al igual que otros compañeros y compañeras que descubrieron el potencial didáctico de ayudar a aprender matemáticas a través de los materiales, mi primer intento fue el de construir un maletín con actividades variadas para ofrecer a los estudiantes cuando tuviera que reemplazar a algún colega ausente y me había hartado de susurros, risitas, tonterías variadas, idas y venidas del lavabo, etc. El descubrimiento de que estas actividades involucraban a la mayoría de aquellos estudiantes que ni me apreciaban ni me temían, pero que trabajaban y que, una

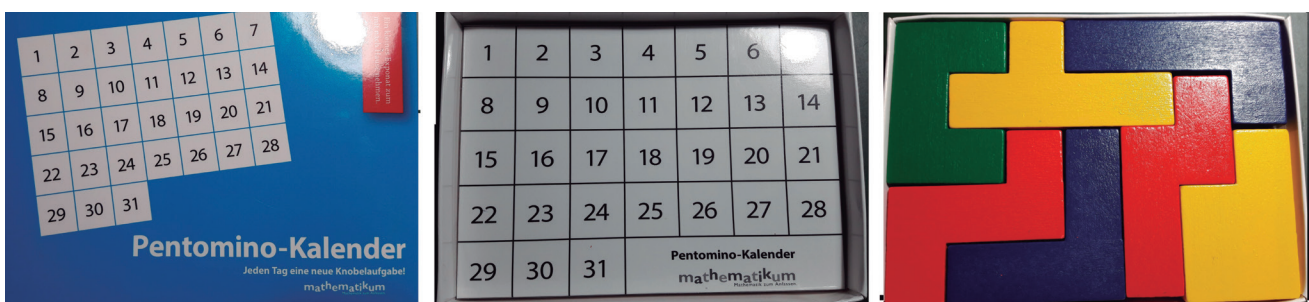


Figura 2. Caja y contenido de Pentomino-Kalender

vez terminada una actividad, me pedían otras, me abrió los ojos: ¿por qué no proponer este material a los estudiantes de mis clases y de forma sistemática? ¡El descubrimiento del agua caliente! ¡Y ciertamente no era un profesor novato! Entonces, esto de llevar a clase materiales se convierte en un vicio para ti y para ellos, ese vicio que nunca, nunca quieres dejar<sup>5</sup>.

Mi primera maleta educativa fue el clásico *prêt-à-porter*: tangram chino, descomposición de polígonos, demostraciones del teorema de Pitágoras, triángulos y cuadrados más o menos mágicos, dominós, ilusiones ópticas y, evidentemente, pentominós. Pero nadie elegía nunca los pentominós. ¿Por qué? Me tomó tiempo descubrir de qué acontecimiento había surgido una antipatía tan general, radical y arraigada. Resultó que la colega de Educación Tecnológica hizo diseñar y construir las doce fatídicas piezas y les



Figura 3. Ejemplo de como determinar una fecha con el Pentomino-Kalender

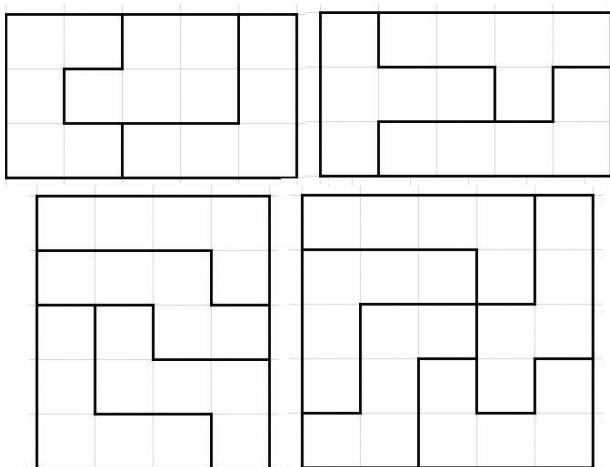


Figura 4. Ejemplos de composición con 3, 4 y 5 pentominos

asignó la primera, única y perentoria tarea de ensamblar el rectángulo de  $12 \times 5$ .

¡Doce, como los doce trabajos de Hércules! Un fin de semana de intentos, llamadas telefónicas, búsquedas en internet, espionaje... y odio permanente. Mirad, si se realiza mal una actividad, sin motivar, graduar o respetar las dinámicas del grupo, ese material se quema para siempre. Ninguna recuperación es posible: construimos los pentominos paso a paso: el mono y el dominó, los dos triminós, los cinco tetraminós y finalmente los doce pentominos, fatídicos, pero ya no misteriosos; la triplicación de las piezas; las primeras combinaciones; composiciones libres..., demasiado tarde.

Cuando las educadoras del MMACA propusieron la actividad con pentominos para el laboratorio destinado al alumnado de primero a cuarto de primaria, me esforcé para convencerlas a buscar otros materiales; pero, como los intentos de imponer un poco de sana gerontocracia en la asociación no funcionaron nunca, tuve que acatar su decisión.

Se debe agregar algunas consideraciones importantes:

1. Las personas involucradas en la propuesta y realización de la actividad no han sufrido mi trauma, no son portadores de la frustración descrita en mi experiencia.

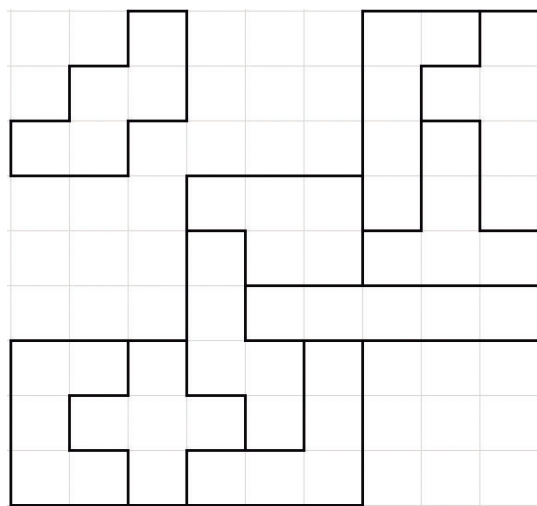


Figura 5. Ejemplo de triplicación de un pentomino

2. La actividad propuesta en el laboratorio del MMACA con los pentominós es la «inteligente»: es decir, la construcción progresiva de las piezas.
3. Es una actividad colectiva y por tanto el trabajo está distribuido. En definitiva, si los doce trabajos se hubieran atribuido a doce pequeños Heracles, se habría perdido obviamente una parte fascinante del mito, ¡pero también muchos esfuerzos inútiles! ¡Y sin la necesidad de implicar a un semidiós! Mejor aún, si en lugar de doce hubieran sido 24 (mira: como en una clase de Primaria): trabajo en parejas y discusión sobre la estrategia y los resultados obtenidos. ¡La Heraclea pasa de ser de un poema épico (y perdido) a un manual pedagógico (y actual)!

La distribución del trabajo en el grupo resulta fundamental también en la actividad con el calendario.

con «solo» 6 variantes<sup>6</sup> (figura 7). Es obvio que, en la mayoría de los casos, existe un patrón que se repite (la posición del rectángulo), alrededor del cual se organizan pequeñas variaciones. Si marcamos las fechas (días y meses) en que aparecen más maneras de resolver el puzzle tenemos los resultados de la figura 8.



Figura 6. Caja y contenido de A-Puzzle-A-Day

## El calendario

Antes de discutir los posibles usos del *Pentomino-Kalender*, echemos un vistazo a un producto similar en el mercado, el *A-Puzzle-A-Day* que permite señalar día y mes; usa los mismos 7 pentominós más un rectángulo de  $3 \times 2$ , ya que, dejando descubiertos día y mes, es necesario tapar cada vez 41 celdas ( $7 \times 5 + 3 \times 2$ ) <<https://www.dragonford.com/product/a-puzzle-a-day/>> (figura 6). Carlos Luna me ha pasado un archivo relativo a las posibles soluciones. La fecha que menos soluciones tiene resulta ser el 6 de octubre,

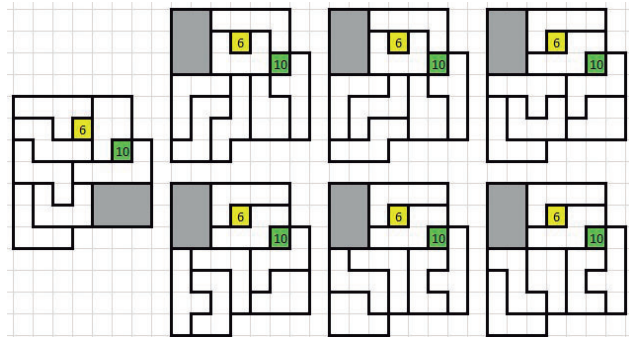


Figura 7. Posibles soluciones para la fecha del 6 de octubre

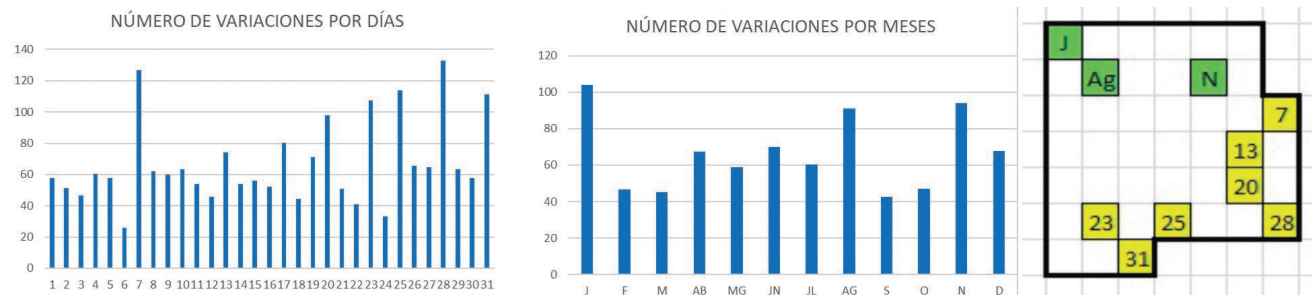


Figura 8. Estudio estadístico de las fechas con más soluciones alternativas

También aparecen bloques de piezas que forman subunidades (casi) regulares, lo que sugiere una idea de simetría. La búsqueda posterior de Carlos Luna fue en esta dirección <<https://github.com/Carlos-LunaMota/A-Puzzle-A-Day/blob/main/A-Puzzle-A-Day%20Symmetrical%20Solutions.pdf>> y generó una lista de las soluciones de calendario que presentan estos bloques e invitan a buscar soluciones alternativas, pero igualmente simétricas.

Se puede ver un ejemplo en la figura 9<sup>7</sup>.

Volviendo al *Pentomino-Kalender*, no estoy seguro de poder garantizar que los razonamientos que generaron las soluciones del *A-Puzzle-A-Day* se puedan usar automáticamente para guiar investigaciones similares en nuestro calendario con pentominós. El patrón que se desprende es consistente con algunas de las fechas con mayores variaciones, pero las diferencias en la forma del tablero y de las piezas en los dos juegos, aunque no excesivas, son suficientes para aconsejar cierta precaución para corroborar, con un análisis específico y exhaustivo, estas posibilidades.

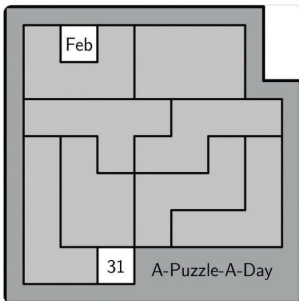


Figura 9. Ejemplo de fecha en que aparecen dos bloques casi regulares

Podemos, de todos modos, formular la hipótesis de que algo parecido puede suceder en nuestro calendario de pentominós, como se puede comprobar en el ejemplo de la figura 10, no exhaustivo, relativo a la fecha 9 de cualquier mes.

En principio, no se me ocurriría sugerir a nadie que encuentre las 31 soluciones (¡mínimo!) del calendario<sup>8</sup>, sin embargo, si se distribuye el trabajo, la tarea se vuelve mucho más asequible y no genera aburrimiento ni frustración. También permite al profesor experimentado asignar fechas más fáciles a los estudiantes con mayores dificultades. Además, tiene la pinta de ser una de esas actividades que pueden reservar sorpresas y revelar habilidades de intuición espacial en estudiantes que no son particularmente dotados para las matemáticas.

Una vez empezado el trabajo, resulta muy útil ordenar los resultados como se ve en la figura 11. Como siempre, la solución a la tarea asignada representa solo el primer paso (y muchas veces tampoco el más importante) de la actividad que, bien discutida, debe generar preguntas y por tanto otras propuestas de investigación y trabajo.

La primera: ¿Qué pentominós se descartan más veces (es decir, son más incómodos de colocar)? El análisis de las soluciones recogidas en el diagrama anterior me generó cierta sorpresa. El pentominó descartado más veces (9 de 31) resultó ser el de la figura 12. Lo que determina inmediatamente una nueva pregunta: ¿son las que encontré las únicas soluciones posibles? Dejo abierta la respuesta, pero, como hemos visto en el caso de la fecha 9, es bastante probable que algunas

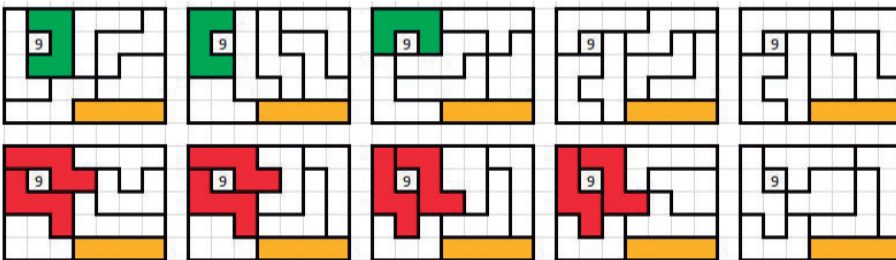


Figura 10. Ejemplos de fecha con composiciones alternativas en las que se repiten acoplamientos de pentominós (Pentomino-Kalender)

composiciones (si no todas) tengan diferentes soluciones posibles. Tenemos otro ejemplo en la figura 13.

Buscar sistemáticamente todas las soluciones posibles implica, si lo realiza una sola persona, una cierta dedicación, no sé hasta qué punto interesante o

gratificante. Incluso como tarea de clase supone un esfuerzo que quizás no compense.

Esta perplejidad puede generar una rica pregunta adicional: ¿podría un patrón facilitar este minucioso trabajo de investigación? Es decir: ¿hay algún

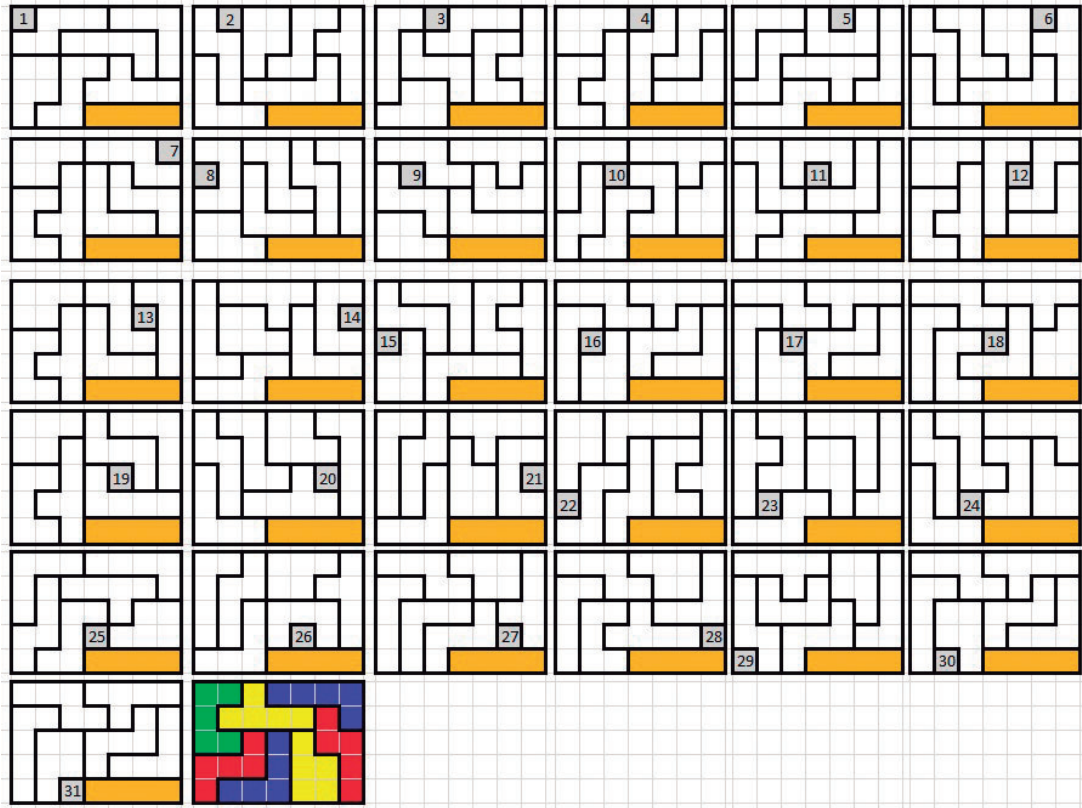


Figura 11 Ejemplo de composiciones relativos a las 31 fechas con Pentomino-Kalender

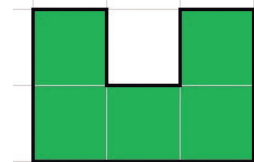


Figura 12. El pentominó U



Figura 13. Composiciones alternativas con Pentomino-Kalender para la fecha 25 de diciembre

pentominó especialmente sugerente? ¿Se pueden relacionar estos patrones y la simetría?

La respuesta que me di a mí mismo volvió a sacar a relucir el pentominó en forma de U, que parece haber sido creado específicamente para rodear, al menos por tres lados, la celda que contiene la fecha buscada. Con algunas excepciones obvias: ¡las esquinas!

¿Qué pentominós podrían rodear por sí solos los números colocados en las esquinas del calendario, a saber: 1, 7, 28, 29 y 31? (figura 14) ¿Será posible con cada uno de los tres pentominós marcar las cinco celdas de las esquinas?

Ahora podríamos investigar qué celdas podrían enmarcarse con el patrón U, comenzando por los bordes del calendario. Una vez resuelta la primera línea (del 2 al 6 y luego el 8, 14, 15, 21, 22, del 23 al 27 y finalmente el 30), puedes seguir probando con las alineaciones más internas: del 9 al 13, 16, 20 y 23. Quedarían por ordenar las tres casillas centrales, que corresponden a los números 17, 18 y 19, que la U no logra enmarcar.

La dificultad de resolver estos últimos ejercicios, menos fáciles, aplicando el patrón U, debería conducir a una observación más precisa de la tabla/calendario, formada por un rectángulo de  $5 \times 5$  añadido a un cuadrado de  $4 \times 4$  (¡las subunidades!) y a un enfoque tímidamente computacional.

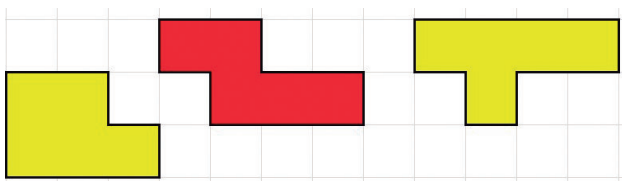


Figura 14. Pentominós que potencialmente envuelven una fecha

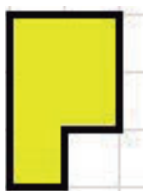


Figura 15. El pentominó P

La asimetría de la figura y los pentominós a colocar tienden a dividir el calendario en partes cada vez más pequeñas, pero que necesariamente deben tener áreas divisibles por 5, para colocar los pentominós restantes. Esta observación se configura como un límite y una pista más.

Hay muchas más observaciones sobre cómo ciertos pentominós tienden a dividir el calendario que podrían surgir de los estudiantes durante esta actividad. No hace falta recordar la importancia de anotarlos en una especie de cuaderno de bitácora para poder recordarlos y analizarlos en el momento oportuno.

Cada una de estas observaciones puede originar una «conversación» y generar una nueva investigación.

Por ejemplo, seguro que al intentar resolver algunos de los retos planteados habría ayudado poder:

Duplicar uno de los pentominós ya usado (en general, me atrevo a afirmar que el más deseado es el de la figura 15).

Intercambiar uno de los siete pentominós en dotación por uno de los cinco que quedaron fuera del juego (figura 16).

## Conclusiones

No tengo ninguna duda de que los principales focos de interés de la actividad están relacionados con la conversación que se puede crear entre parejas, grupos y toda la clase sobre los resultados y estrategias utilizadas. Estas conversaciones fomentan competencias

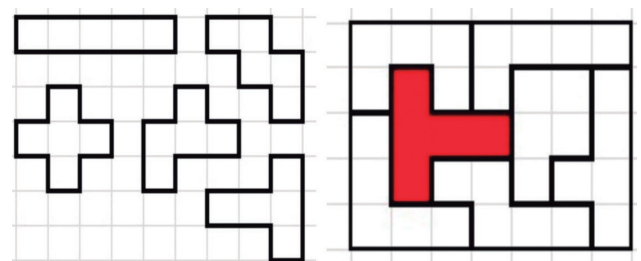


Figura 16. Otros pentominós

que no son silo comunicativas, sino que se refieren a las áreas de formulación de hipótesis y resolución de problemas. Requieren utilizar un método y proceder de manera ordenada, con herramientas diferentes, no únicamente manipulativas.

También es una actividad que, con diferentes objetivos y necesidades, se puede proponer a alumnos de muy distintos ciclos y no solo de primaria, sin necesitar habilidades particulares.

Además, como ocurre en muchas situaciones, cada vez resulta más fácil y rápido resolver los retos y cada vez el pensamiento anticipa más la manipulación que ya casi estorba.

Los buenos materiales han de permitir que en un determinado momento puedan ser repuestos en un cajón para seguir nuestro viaje matemático sin ellos, pero siempre sabiendo dónde recuperarlos rápidamente cada vez que nos hagan falta.

---

## MMACA

Museu de Matemàtiques de Catalunya,  
Cornellà de Llobregat (Barcelona)  
<contacte@mmaca.cat>

1 Se debe poner el dedo encima del año que se trate. Mover el dedo en el sentido de las agujas del reloj tantas veces como indique el código del mes. Luego mover tantas veces como el día del mes. Si es enero o febrero de un año bisiesto, retroceder una casilla. Mirar el día de la semana.

2 Todas las referencias a actividades de magia y matemáticas del artículo se deben a otro socio: Sergio Belmonte.

3 En algunas de las anteriores entregas de la sesión del MMACA hablamos de este proyecto.

4 Fum, Fum, Fum.

5 «...quel vizio che non vorresti smettere, smettere mai» da Luciano Ligabue Certe Notti <<https://www.youtube.com/watch?v=sU-Rek0ZaupE>>.

6 Por cierto, la fecha con más soluciones del *A-Puzzle-A-Day* es el 25 de enero ¡con 216 variantes!, pero hay varias con un número parecido de variantes.

7 ¿Por qué limitarnos a las fechas canónicas?

8 Esta consideración no se aplica a los socios del MMACA en periodos de descanso ni a aquellos *friquis* que todos conocemos.

9 No quiero robarle a nadie la satisfacción de encontrar una o más soluciones para este reto y me limito a señalar la solución que encontré para los 5 vértices con el tercer pentominó. Para resolver los dos casos 7 y 31 tuve que usar un criterio más «elástico», sin envolver la fecha con la pieza escogida. Sería genial si alguien encontrara una solución que cumpliera plenamente con la inserción de la celda indicada en ese único pentominó, como en los tres casos de las fechas 1, 28 y 29.