

Planetas y satélites: viajando por el espacio

Francisco J. Carrera Troyano

SUMA núm. 106
pp. 71-78

Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2023 y aceptado en enero de 2024

El objetivo de esta sesión es facilitar la comprensión de cómo los objetos astronómicos orbitan en torno a otros por efecto de su gravedad mutua, en un contexto de mecánica clásica. Se trata de una sesión avanzada para el alumnado «veterano», que ya tiene más experiencia tanto con ESTALMAT como en Secundaria.

La idea es conseguir esto mediante la experimentación (virtual): casi cada transparencia contiene un enlace a una página web con animaciones, muchas interactivas, que explican e ilustran el concepto correspondiente. La sesión se desarrolla en una sala en la que cada asistente usa un ordenador, con el que puede interactuar con las animaciones.

La actividad se divide en tres partes: una primera más conceptual, donde se explican las principales ideas sobre órbitas y su fundamento físico. En la segunda se ven algunas aplicaciones concretas de esas ideas.

Finalmente, en la tercera se plantean dos «ejercicios» para resolver con animaciones interactivas de GeoGebra. Normalmente las dos primeras partes llevan algo más de la mitad del tiempo, procurando dejar la mayor parte del tiempo para los ejercicios. Si sobra tiempo, al final hay algunas transparencias extra para conceptos algo más avanzados.

Órbitas

Se empieza enumerando las leyes de Kepler, con las que ya deben tener familiaridad, ilustrándolas con la animación interactiva de la University of Nebraska-Lincoln Astronomy Education (2008), donde se pueden explorar las órbitas de diversos planetas del Sistema Solar, incluso experimentando con valores distintos, con solapas diferenciadas para cada ley. Como en las leyes de Kepler aparecen elipses se dedica una transparencia a definir las geométricamente

y a definir los principales parámetros que las definen (semieje mayor a y excentricidad e). Hay una tercera transparencia dedicada al concepto general de curvas cónicas, definidas geométricamente, con una aplicación interactiva de Or (2014). Aquí se explica también que las órbitas en general no son solo elipses, sino que también pueden ser circulares (caso particular de elipse) o hiperbólicas, con la parábola como el caso frontera entre la elipse y la hipérbola.

Presentamos en este momento a Newton y su comprensión fundamental de una órbita como una caída constante que se cierra sobre sí misma. Esto se ilustra con la animación del «cañón de Newton» (Fowler, 2017), basada en una ilustración de los *Principia*, en la que, cuando aciertan con una órbita cerrada, el artillero se queja al ser alcanzado por el proyectil, con gran regocijo de la concurrencia. Aquí se dice que las leyes físicas de Newton explican las leyes empíricas y matemáticas de Kepler.

Antes de meternos en esto último, necesitamos definir algunos conceptos. El primero es el de energía y su conservación, que se ilustra en Paul y otros (2024), para el caso concreto de energía cinética (asociada a la velocidad) y energía potencial (asociada a la posición en un campo gravitatorio) y el trasvase entre ellas. La energía potencial se define como cero en el infinito y va decreciendo a valores más y más negativos a medida que acercamos los cuerpos, mientras que la energía cinética va con el cuadrado de la velocidad, así que es siempre positiva o, a lo menos, cero.

Después definimos las componentes de la velocidad que, aunque en todo momento es tangente a la trayectoria (University of Nebraska-Lincoln Astronomy Education, 2008), se puede descomponer en una componente radial y una transversal (perpendicular a la anterior). Esto último nos permite ya definir el momento angular como un vector, cuya dirección nos indica la normal al plano en el que se desarrolla la órbita, y cuyo módulo es el producto de la distancia al foco por la velocidad transversal, que también se conserva (aprovechamos para mencionar

a Emmy Noether y su intuición fundamental de la relación entre las simetrías de los campos y las leyes de conservación).

Ahora ya tenemos las herramientas para relacionar los distintos tipos de cónicas que resultan de solucionar las ecuaciones de Newton (en este berenjenal en particular no nos metemos) con la energía total de las órbitas: si es negativa predomina la energía potencial y los objetos no pueden escapar de su atracción mutua (órbitas elípticas cerradas con $e < 1$, con el caso límite de $e = 0$ para la circunferencia), si por el contrario es positiva domina la energía cinética y los objetos se pueden alejar indefinidamente en órbitas hiperbólicas con $e > 1$. De nuevo el caso $e = 1$ corresponde a una órbita parabólica, como límite de una elipse indefinidamente alargada.

La segunda ley de Kepler resulta «simplemente» de la conservación del momento angular, igualando el área barrida con el producto del radio por la velocidad transversal y relacionándolo intuitivamente con el área del triángulo, con referencia a University of Nebraska-Lincoln Astronomy Education (2008).

Antes de meternos a deducir la tercera ley de Kepler este físico impenitente se permite una pequeña diatriba contra la mal llamada «fuerza centrífuga», que se presenta como una manifestación de la inercia, ilustrada con una animación. Igualando entonces la fuerza gravitatoria con la fuerza necesaria para mantener un objeto en una órbita circular venciendo su inercia, se llega a la tercera ley de Kepler para una órbita circular, que se puede generalizar para cualquier órbita cerrada, de nuevo recurriendo a University of Nebraska-Lincoln Astronomy Education (2008).

Finalmente, se dedica una transparencia a la velocidad de escape, siendo esta justo la necesaria para igualar las energías potencial y gravitatoria, correspondiente a una parábola con energía nula, en la que los objetos tendrían velocidad nula en el infinito. Volviendo a la aplicación de Fowler (2017), cuando se alcanza la velocidad de escape se genera una musiquilla que acompaña esta parte de la sesión.

Aplicaciones

Aunque quedan algunos conceptos por introducir, a estas alturas ya hay que meterse con ejemplos para evitar una algarada, así que empezamos con los satélites artificiales. Se comienza explicando con figuras y animaciones que los satélites artificiales viajan en una órbita fija en un plano en el espacio, debajo de la cual gira la Tierra, por lo que la posición aparente del satélite va desplazándose de este a oeste sobre la Tierra en órbitas sucesivas (en el caso de un satélite en una órbita no ecuatorial).

En este momento sacudimos un poco la autocomplacencia del alumnado, preguntándoles por qué, si esto es así, las antenas de televisión vía satélite (de las que van quedando cada vez menos) están fijas con tornillos apuntando siempre al mismo sitio con respecto a la Tierra. Esto nos lleva a deducir el concepto de órbita geosíncrona, como aquella en la que el periodo es igual al periodo de rotación de la Tierra sobre sí misma, con una animación en las transparencias que muestra como el satélite se mantiene en la vertical del observador (si ambos están en el ecuador). Se finaliza esta parte mostrando un diagrama de los distintos tipos de órbitas de los satélites artificiales.

Los dos últimos ejemplos son astronómicos, como no podía ser menos por la naturaleza del tema y por la (de) formación profesional del ponente. El primero de estos se refiere al centro de nuestra galaxia, la Vía Láctea, donde las órbitas de las estrellas en sus inmediaciones revelan la presencia de un objeto que no emite luz con una masa de cuatro millones de veces la masa de nuestro Sol (Galactic Center Group, 2024). En nuestro conocimiento actual de la gravedad esto solo se puede explicar con un agujero negro, que aprovechamos para definir como una zona del espacio donde la velocidad de escape alcanza la de la luz que, al ser inalcanzable, implica necesariamente que nada puede escapar de ahí. Se aprovecha para comentar el premio Nobel de Física de 2020 a Roger Penrose, por probar que este tipo de objetos se podían formar físicamente en el Universo, y a Reinhard Genzel y Andrea Ghez por liderar los equipos de

decenas de científicas y científicos que hicieron las observaciones necesarias durante décadas.

Aprovechando que el público asistente está algo más relajado, aprovechamos para puntualizar que, en realidad, la Tierra no gira alrededor del Sol, sino que los dos astros giran en torno a un punto fijo, llamado centro de masas. Esto hace que el Sol se bambolee en poco en su posición mientras que la Tierra se desplaza cientos de millones de kilómetros en su órbita anual.

Con todo nuestro respeto a la Benemérita, aquí preguntamos al alumnado por las multas por exceso de tráfico (esperamos que a sus progenitores) y explicamos el efecto Doppler en Walsh (2022), o cambio de la frecuencia de una onda por el desplazamiento relativo del emisor y del receptor.

Estas dos cuñas son necesarias para el tercer y último ejemplo: la detección de planetas extrasolares. Se explican brevemente dos métodos, el de ocultación (el planeta se interpone entre su estrella y el observador, haciendo que el brillo aparente de aquella disminuya periódicamente durante un cierto intervalo) y el de velocidades radiales (el espectro de la estrella se desplaza periódicamente hacia el rojo y hacia el azul por efecto de su «bamboleo» debido a la presencia de uno o varios planetas). Aquí también comentamos el Premio Nobel de Física de 2019 a Michel Mayor y Didier Queloz, por su descubrimiento del primer planeta en torno a otra estrella no compacta. Se termina esta sección diciendo cuantos planetas extrasolares se conocen (más de cinco mil confirmados actualmente, con más de nueve mil candidatos esperando confirmación), incluyendo una referencia donde se pueden explorar visualmente las configuraciones de algunos de los sistemas planetarios descubiertos (NASA, 2024).

La última transparencia de esta parte es una llamada de atención rápida al hecho de que, para definir una órbita real en el sistema solar hacen falta seis elementos, llamados orbitales, que incluyen el semieje mayor a y la excentricidad e , pero también su orientación con respecto a la eclíptica y la dirección del perihelio.

Ejercicios

En esta última parte, cuya duración hemos ido alargando con la experiencia de sucesivas ediciones (a expensas de conceptos que parecían imprescindibles y han resultado ser superfluos para el nivel requerido), planteamos dos «ejercicios» que se deben resolver mediante el uso de aplicaciones de GeoGebra desarrolladas «ex profeso». El primero de ellos es nuevo del curso 2023–2024.

Para desarrollar estas aplicaciones ha sido fundamental contar con un punto de partida, la aplicación de Skinner (2017a); ver otras aplicaciones en Skinner (2017b). También se ha necesitado el aparato astronómico y matemático descrito en Martínez, y otros (2005). Para el segundo ejercicio hemos usado las aproximaciones circulares a las órbitas de la Tierra y Marte de Burnett (1997), y las conversiones entre los calendarios gregoriano (básicamente el que usamos todos los días) y juliano (que cuenta el tiempo uniformemente desde un tiempo remoto en el pasado) de Jefferys (1998). Empezamos esta sección recordando las imágenes que han visto de lanzamientos de satélites, empezando en una posición vertical y como la trayectoria se va curvando hasta alcanzar normalmente una órbita circular que se denomina de aparcamiento. En la transparencia siguiente se muestra cómo, para cambiar de órbita, es necesario un cambio de velocidad Δv que, dependiendo de su orientación y magnitud, puede dar lugar a órbitas muy distintas (Johnston, 2007). Aquí pueden enredar un poco con la aplicación de Carrera (2024a), (una de las desarrolladas para esta actividad) donde, empezando desde una órbita circular ecuatorial geosíncrona, pueden escoger un Δv entre $400 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ y una orientación β entre 0 (alineada con la velocidad orbital inicial) y 360 grados, en dirección contraria a las agujas del reloj. Aquí ven que si $\beta = 0$ la órbita se convierte en una elipse con un semieje mayor a mayor que el radio inicial, cuyo perigeo (punto más cercano a la Tierra) es el punto original (figura 1, panel superior) y su apogeo (punto más alejado de la Tierra) el punto directamente opuesto. Si $\beta = 180$ grados la órbita también es una elipse con un semieje mayor a menor que el radio inicial, siendo el apogeo el punto inicial

y el perigeo el punto opuesto (figura 1, panel intermedio). Finalmente, para un $\Delta v > 0$ dado, el efecto principal de cambiar la orientación β es girar la línea perigeo–apogeo respecto de la dirección inicial (figura 1, panel inferior).

Aquí les planteamos el primer ejercicio: se tienen dos satélites (Target e Interceptor) inicialmente en la misma órbita circular (en este caso una órbita «baja» con una altura sobre la superficie terrestre de 400 km), con Target adelantado en su órbita un ángulo α_{initial}

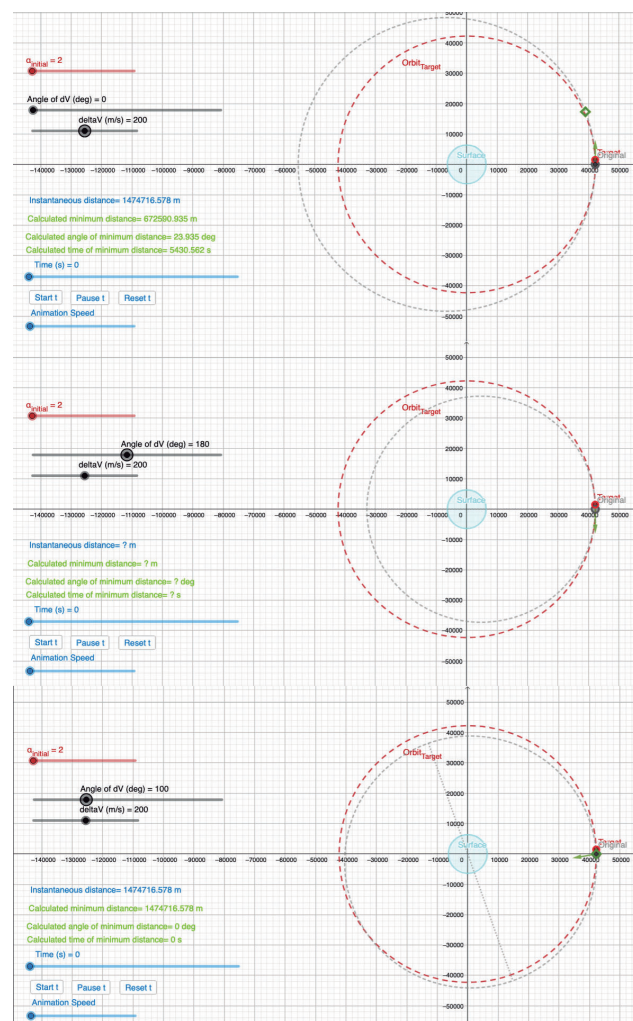


Figura 1. Órbita inicial geosíncrona (línea roja de trazos) y órbitas elípticas (línea gris de trazos) correspondientes al mismo $\Delta v = 100 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ y ángulos $\beta = 0$ (arriba), $\beta = 180$ grados (en medio) y $\beta = 100$ grados (abajo). La línea entre el perigeo y el apogeo está indicada con una línea de puntos grises. El vector Δ está representado con una flecha verde

(regulable en la aplicación de Skinner (2017a) con una barra deslizadora). Se trata de escoger la combinación de Δv y β (también con barras deslizadoras) que darle al Interceptor para que se acerque lo más posible al Target, idealmente alcanzándolo. La propia aplicación ya calcula la distancia mínima, el ángulo al que se produce y el tiempo que se tarda en alcanzar esa posición, para cada combinación. Cuando se ha alcanzado una combinación satisfactoria se puede animar las órbitas para ver moverse ambos satélites. La solución pasa necesariamente por generar una órbita elíptica inclinada, en la que el Interceptor va por debajo del Target, convirtiendo su energía potencial en energía cinética para «adelantarlo». Con estas herramientas no es fácil alcanzar una solución con una distancia mínima menor que 1 km (por ejemplo), y se genera una rivalidad muy entretenida. ¡Sobre todo los chascos cuando algunas de las «soluciones» que encuentran implican un perigeo por debajo de la superficie de la Tierra! (figura 2).

Tras dedicarle un rato a este primer ejercicio, explicamos cómo pasar de una órbita circular a otra órbita circular con un radio mayor mediante media elipse, cuyo perigeo sea tangente a la primera y cuyo apogeo sea tangente a la segunda, teniendo que usar un $\Delta v > 0$ con $\beta = 0$ tanto al principio (para aumentar la energía y conseguir alejarse más) como al final (para aumentar la energía y evitar «caer» de nuevo hacia la Tierra). El tiempo que se tarda en este

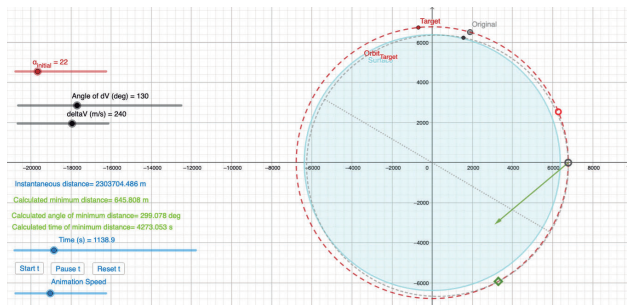


Figura 2. Ejemplo de una órbita de encuentro entre dos satélites no válida. El rombo verde indica el momento en el que los dos satélites se encontrarían a una distancia mínima de ~600 m, pero el punto negro indica el momento en el que el interceptor chocaría con la superficie terrestre (indicada por el círculo azul claro). Tipos y colores de líneas como en la figura 1

trayecto es la mitad del periodo de la órbita elíptica. Este tipo de órbitas se llaman órbitas de Hohmann y también se muestran en Johnston (2007) y Skinner (2017a). Se puede demostrar que estas órbitas son las que requieren la mínima energía.

A continuación, comentamos que este tipo de órbitas también se usan para lanzar sondas a otros planetas, teniendo buen cuidado de sincronizar la salida de la Tierra de manera que el planeta destino se encuentre en el lugar de su órbita al que llega la sonda. Se comenta que esta es una simplificación en varios aspectos: las órbitas de los planetas no son circulares, no están en el mismo plano y, además, tanto cerca del planeta origen como del planeta destino hay que tener en cuenta también la influencia gravitatoria de los mismos, no solo la del Sol. En la práctica lo que se usan son métodos numéricos precisos teniendo en cuenta todos los factores relevantes.

El segundo ejercicio consiste en diseñar una órbita de Hohmann para ir desde la Tierra a Marte, incluyendo determinar cuál sería la fecha de lanzamiento óptima, teniendo en cuenta la configuración de los dos planetas en cada momento. Para llevarlo a cabo hemos desarrollado tres aplicaciones de GeoGebra. La primera es muy simplona (Carrera, 2024c), dados los semiejes mayores de las órbitas de la Tierra (1 UA ~ 1,5 · 10⁸ km) y Marte (1,52 UA), supuestas circulares, proporciona el semieje mayor a y la excentricidad e de la órbita de Hohmann, además de su periodo. Generalmente, empezamos por la segunda aplicación (Carrera, 2020a), (el panel superior de la figura 3 muestra la situación inicial) usando barras deslizadoras para probar diversos valores de a y e hasta conseguir una órbita elíptica tangente a las de la Tierra y Marte, que comprobamos después con Carrera (2024c). Tras animar la sonda y los planetas se comprueba que la sonda describe dicha órbita, tardando medio periodo en llegar a la órbita de Marte (figura 3, panel intermedio, se observa cómo la sonda alcanza la órbita de Marte, pero el planeta no se encuentra en ese punto). Con una tercera barra deslizadora cambiamos el ángulo inicial de Marte (tomando como referencia la línea inicial Sol-Tierra) para que se encuentre en el punto en el que la órbita de Hohmann «toca» a la órbita de Marte.

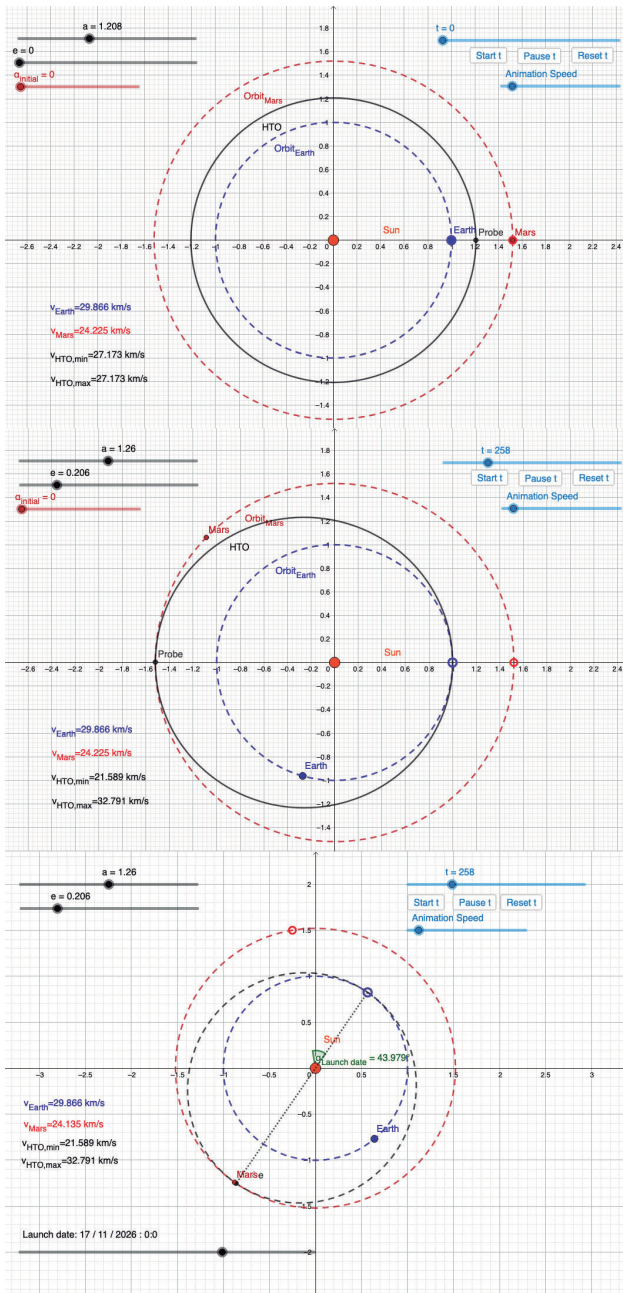


Figura 3. En el panel superior se muestra la pantalla inicial de la aplicación interactiva. La línea azul de trazos indica la órbita de la Tierra (el punto azul relleno la posición instantánea de la Tierra y el punto azul vacío la posición inicial de la Tierra), la línea roja de trazos indica la órbita de Marte (el punto rojo relleno la posición instantánea de Marte y el punto rojo vacío la posición inicial de Marte), la línea negra continua indica la órbita de la sonda (el punto negro indica la posición instantánea de la sonda, la posición inicial de la sonda coincide con la de la Tierra). En el panel intermedio se aprecia un paso intermedio. En el panel inferior se ve el estado final de la segunda aplicación (la fecha de lanzamiento se ve abajo a la izquierda)

Armados con todos estos datos, nos vamos a la tercera aplicación de Carrera (2020b), donde la barra deslizador para la posición inicial de Marte se ha sustituido por una barra deslizador para la fecha de lanzamiento que, al irlo moviendo, utiliza Burnett (1997) y Jefferys (1998) para mostrar las posiciones aproximadas de la Tierra y Marte para cada fecha. Una vez que se ha alcanzado la configuración deseada (hay una cada dos años aproximadamente), se puede animar el movimiento para ver cómo la sonda abandona a la Tierra y se va acercando a Marte, alcanzándolo tras medio periodo (figura 3, panel inferior). Sin ánimo de spoilers, sugerimos estar atentos a las noticias en torno a noviembre de 2026.

Transparencias extra

Hemos preparado algunas transparencias adicionales por si sobrara tiempo, aunque, en nuestra experiencia, esto pasa raramente.

El primero de estos conceptos es la relación que hay entre, por un lado, el cociente entre la masa útil que llega al destino y la que se necesita al lanzamiento, y, por otro, el Δv que se pretende conseguir o se necesita. Esa relación es muy desfavorable, en el sentido de que el cociente depende exponencialmente de Δv . Hay que tener en cuenta que la masa útil incluye el combustible necesario para igualarse con la velocidad del planeta de llegada, todo lo necesario para la supervivencia de la tripulación (si la hay) durante todo el viaje, y el combustible necesario para volver.

Se motiva así la necesidad de usar técnicas para reducir este gasto de combustible. Se discuten brevemente la asistencia gravitatoria (uso de la gravedad de otro planeta en el camino para impulsar la sonda), el aerofrenado (aprovechamiento de la atmósfera del planeta destino para ir reduciendo el semieje mayor de la órbita de aparcamiento inicial por rozamiento con la misma) y la aerocaptura (frenado súbito para posarse en el planeta usando también la atmósfera para disipar la velocidad en exceso), hablando brevemente de sus ventajas e inconvenientes (alineamientos propicios, mayor tiempo de vuelo, riesgos...).

Por último, describimos brevemente el problema de tres cuerpos moviéndose en su campo gravitatorio común. Al contrario que el problema de dos cuerpos tratado más arriba, no tiene solución analítica general. Tratamos una restricción de este a dos cuerpos moviéndose en órbitas circulares alrededor del centro de masas en su campo común, y un tercero en el potencial combinado de esos dos. En el sistema de referencia que gira con los dos cuerpos principales se definen los puntos de Lagrange, como puntos de equilibrio estable, con muchas aplicaciones en astronomía (satélites troyanos de Júpiter, estrellas binarias con transferencia de masa...) y en astronáutica.

Conclusiones

Hemos descrito una actividad sobre órbitas que se lleva a cabo con alumnado veterano de ESTALMAT Cantabria desde 2016. Con la experiencia se ha ido transformando hasta adoptar su formato actual (que sigue en evolución), siendo desde el principio una actividad interactiva basada en animaciones por ordenador.

En la primera parte damos conceptos básicos, empezando por las leyes de Kepler, la idea geométrica de elipses y cónicas en general, las órbitas cerradas como «caídas» que se cierran sobre sí mismas, y las leyes de Newton como motivación física de las leyes de Kepler, empíricas y matemáticas.

En la segunda parte vemos aplicaciones de estos conceptos a satélites artificiales, al centro de nuestra Galaxia y a la detección de planetas extrasolares.

En la tercera parte planteamos dos ejercicios usando aplicaciones de GeoGebra desarrolladas específicamente para esta actividad. El primer ejercicio ilustra la dificultad del cambio de órbitas y el encuentro entre dos satélites. En el segundo ejercicio diseñamos la órbita de una misión simplificada a Marte, incluyendo una fecha apropiada para el lanzamiento.

Finalmente, tenemos una serie de transparencias con conceptos adicionales, por si hubiera tiempo (lo que

raramente sucede), donde motivamos la necesidad de ahorrar combustible en las órbitas entre planetas y mostramos algunas posibles soluciones. Terminamos con una breve discusión sobre el problema de tres cuerpos y su relevancia.

Esperamos con este artículo haber despertado la curiosidad del público lector sobre este tema que fascina al autor, y haber fomentado sus ganas de experimentar un poco con los enlaces proporcionados, de la misma manera que esperamos estarlo haciendo con el alumnado veterano desde hace ya siete años. Y quizá también invitar a algo de investigación personal posterior, la única que al final satisface.

Referencias bibliográficas

- BURNETT, K. (1997), *Planet positions using circular orbits*, <<http://www.stargazing.net/kepler/circle.html>>.
- CARRERA, F. J. (2020a), *HTO Earth Mars 200301*, <<https://www.geogebra.org/m/ezhqjvmu>>.
- (2020b), *HTO Earth Mars JD 200305*, <<https://www.geogebra.org/m/vxct4y7u>>.
- (2024a), *Interception in circular Geosynchronous Earth Orbit with elliptical orbit*, <<https://www.geogebra.org/m/kg48asbe>>.
- (2024b), *Interception in circular Low Earth Orbit with elliptical orbit*, <<https://www.geogebra.org/m/ffbj3vk>>.
- (2024c), *rmin, rmax to a, e, T*, <<https://www.geogebra.org/m/p6gnnq5t>>.
- FOWLER, M. (2017), *Understanding Newton's Mountain*, <http://galileoand einstein.phys.virginia.edu/more_stuff/flashlets/NewtMtn/home.html>.
- GALACTIC CENTER GROUP (2024), *Animation*, University of California Los Angeles, <<https://galacticcenter.astro.ucla.edu/animation.html>>.
- JEFFERYS, B. (1998), *Julian Day Numbers*, <<https://quasar.as.utexas.edu/BillInfo/JulianDatesG.html>>.
- JOHNSTON, H. (2007), *Spaceflight: Animations*, <<http://www.physics.usyd.edu.au/~helenj/Planets/orbits.html>>.
- MARTÍNEZ, V.J., J.A. MIRALLES, E. MARCO Y D. GALADÍ-ENRÍQUEZ (2005), *Astronomía fundamental*, Publicaciones de la Universidad de Valencia, <<https://puv.uv.es/libro/astronomia-fundamental.html>>.

- NASA (2024), *Eyes on exoplanets*, <<https://exoplanets.nasa.gov/eyes-on-exoplanets/#/>>.
- OR, A. (2014), *Sections of Cones*, <<https://www.geogebra.org/m/vwUxZJPR>>.
- PAUL, A. y otros (2024), «*Energy Skate Park: Basics*», PhET, Interactive Simulations, University of Colorado Boulder, <https://phet.colorado.edu/sims/html/energy-skate-park-basics/latest/energy-skate-park-basics_en.html>.
- SKINNER, A. (2017a), *Earth and Mars Hohmann Transfer*, <<https://www.geogebra.org/m/TbxE3Ha3>>.
- (2017b), *Amanda Skinner site of GeoGebra*, <<https://www.geogebra.org/u/amanda.skinner>>.
- UNIVERSITY OF NEBRASKA-LINCOLN ASTRONOMY EDUCATION (2008), *Planetary orbits*, <<http://astro.unl.edu/naap/pos/animations/kepler.html>>.
- WALSH, T. (2022), *oPhysics: Interactive Physics Simulations*, <<http://ophysics.com/waves11.html>>.

Francisco J. Carrera Troyano
Instituto de Física de Cantabria
(CSIC-Universidad de Cantabria)
<carreraf@ifca.unican.es>