MATEMÁTICAS A UN CLIC

# Las matemáticas tras la marca turística de «Cabra, la cordobesa»

Tomás J. Recio Muñiz
M.ª del Pilar Sabariego Arenas

SUMA+ núm. 106
pp. 91-130
Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2023 y aceptado en enero de 2024

En memoria de Eugenio Roanes Lozano, con quien el primer autor de este artículo compartió tanta vida, científica y personal.

Cabra es una ciudad de Córdoba, que se encuentra a 70 km al sur de la capital provincial. Situada a 452 m de altitud sobre el nivel del mar, marca el límite entre la campiña cordobesa y la cordillera Subbética. Al ser el centro geográfico de Andalucía se encuentra muy cerca de otras capitales de provincia andaluzas: Jaén, Granada, Málaga y Sevilla. Su término municipal tiene una extensión de 229 km$^2$ y cuenta con una población de 20 097 habitantes, según los datos publicados por el INE el 21 de diciembre de 2022.

En los alrededores de Cabra, y en la misma ciudad, se pueden encontrar vestigios de todas las culturas que han pasado por ella desde la antigüedad: los turdetanos, que la llamaron Licabrum; los romanos, que le cambiaron el nombre a Igabrum (de donde procede su gentilicio: egabrense); los visigodos, que la convirtieron en un importante enclave, llegando a acuñar en él moneda propia, y que la llamaron Egabro; y los musulmanes, quienes la denominaron Qabra, de donde procede su nombre actual.

En épocas más recientes, intentando aprovechar las ventajas que ofrecen las técnicas de marketing y de branding, son muchas las ciudades que han creado símbolos y marcas turísticas que les ayuden a dar a conocer y a promocionar las bondades de su localidad y su entorno. Cabra se ha sumado a esta iniciativa y en la *Resolución de 13 de junio de 2014, de la Dirección General de Administración Local, por la que se admite la inscripción en el Registro Andaluz de Entidades Locales del escudo, la bandera, el logotipo y la marca turística del municipio de Cabra (Córdoba)*, aparece recogida la descripción de la marca turística de Cabra, como un símbolo que pretender aunar y mostrar los aspectos más significativos de Cabra como destino histórico.

Como fondo de la marca turística aparece la estrella andalusí de ocho puntas, como uno de los símbolos históricos de Andalucía, y en su interior se encuentra una media luna que embute la imagen estilizada de una cabra, a la que se le han eliminado los atributos sexuales, que, evidentemente, hace referencia al nombre de la ciudad. Ver figura 1 y también la imagen en la esquina superior izquierda de <https://turismodelasubbetica.es/cabra>. Además, con el fin de situarla geográficamente se incluye el eslogan «CABRA, la cordobesa», cuyas fuentes están —según la mencionada Resolución— en proporción 2:1 (el nombre de «CABRA» tiene el doble de puntos que el lema «la cordobesa»), aunque, observando la figura 1, no está claro qué significa esto: el tamaño de las letras de «CABRA» parece mayor que el doble del tamaño de las letras de «la cordobesa».

En este artículo usaremos, precisamente, esta marca turística como una oportunidad para avanzar en una triple dirección:

— para proponer un ejemplo de las «matemáticas de la vida real», de las «matemáticas en contexto», que podría utilizarse en una enseñanza de las matemáticas que utilice el «aprendizaje basado en la investigación» (Inquiry-Based Mathematics Leaning, IBML, véase, por ejemplo, Dorier y Mass (2020) para una reciente descripción de esta metodología), un enfoque que está implícitamente muy presente en el currículo actual. Por ejemplo, en el currículo de Bachillerato (véase Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022)), se señala que:

> La resolución de problemas y la investigación matemática son dos componentes fundamentales en la enseñanza de las matemáticas. […] Las conexiones establecidas entre las matemáticas y otras áreas de conocimiento, y la resolución de problemas en contextos sociales, están relacionados con la competencia ciudadana.

— Un ejemplo que, al desarrollar una investigación en el ámbito del razonamiento geométrico a través de imágenes que pretenden representar y establecer un vínculo visual con una localidad, aporta, además, una relación con el ámbito STEM (Science, Technology, Engineering, Mathematics), que es otra de las características recogidas en el currículo —el cual, al incluir una referencia a aspectos humanísticos y culturales, tal vez debería referirse más bien a STEAM (A=Arts)— cuando menciona que:

> El razonamiento y la argumentación, la modelización y el pensamiento computacional son elementos característicos de la competencia STEM. […] Debe resaltarse el carácter instrumental de las matemáticas como herramienta fundamental para áreas de conocimiento científico, social, tecnológico, humanístico […] el mismo conocimiento matemático como expresión universal de la cultura contribuye a la competencia en conciencia y expresión culturales.

— Un ejemplo que plantea la realización de esas tareas de investigación matemática planteadas en un contexto artístico/cultural, mediante el uso de herramientas tecnológicas tales como el bien conocido y fácilmente accesible programa de geometría dinámica y cálculo simbólico, GeoGebra[1]. Se sigue, de este modo, otra de las indicaciones del currículo, cuando señala que:

> El uso de herramientas digitales para investigar, interpretar y analizar juega un papel esencial, ya que procesos y operaciones que con anterioridad requerían sofisticados métodos manuales pueden abordarse en la actualidad de forma sencilla mediante el uso de calculadoras, hojas de cálculo, programas de geometría dinámica u otro software específico, favoreciendo el razonamiento frente a los aprendizajes memorísticos y rutinarios.

Figura 1. Marca Turística de Cabra
Fuente: <https://sites.google.com/site/simbolosdecordoba/subbetica/cabra>

La idea de aprovechar matemáticamente la marca turística de Cabra surge en el blog[2] de la segunda autora de este artículo, Pilar Sabariego, quien desarrolla toda una serie de propiedades geométricas de la imagen de Cabra. En este artículo, por una parte, nos limitaremos solo a alguna de dichas propiedades (por lo que animamos al lector a visitar el blog para un estudio geométrico más amplio de dicha marca turística) y, por otra, presentaremos la exploración de las mismas tanto del modo tradicional (como en el blog mencionado) como usando herramientas digitales de razonamiento automático.

En la siguiente sección haremos una rápida referencia a GeoGebra y a una versión avanzada en términos de razonamiento automático, GeoGebra Discovery, y plantearemos ya una primera y sencilla investigación relativa a la construcción de la imagen de marca de Cabra, usando este programa de geometría dinámica, con sus ventajas y limitaciones. A continuación, en la sección «Segmentos de interés» planteamos el estudio de las longitudes de distintos segmentos que se destacan en la figura 4, y que proporcionan información relevante sobre las características de la marca, tales como la relación entre las diagonales de los cuadrados y el radio de la circunferencia que se aprecia en la marca, etc.

La sección «Modo tradicional» (con resultados ya expuestos en el blog antes mencionado) obtiene tales relaciones al modo tradicional, con razonamiento «humano», constituyendo un ejemplo de investigación elemental —solo requiere usar el teorema de Pitágoras y también argumentar que los dos posibles segmentos denominados *b* en la figura 4 son iguales— pero ciertamente interesante, por el contexto cultural y aplicado de la investigación y la necesidad de modelizar la imagen geométricamente.

La sección «Utilizando GeoGebra Discovery» muestra cómo GeoGebra Discovery es capaz, de manera inmediata, de obtener automáticamente las relaciones buscadas entre los mismos segmentos, salvo ciertas dificultades de interfaz app/usuario que explicaremos someramente allí, como la necesidad de no usar ángulos en la construcción de la figura, ni nombres que involucren números, es decir, es necesario usar un nombre tal como *d'* en vez de *d/2* para obtener propiedades de la mitad del segmento *d*, o la obtención, a veces, de varias relaciones posibles en un solo caso…, que obligan al usuario a decidir cuál es la que considera válida en su contexto.

Es decir, tanto el planteamiento del proceso automático, como la obtención de las relaciones entre los objetos considerados, como su interpretación exigen cierta reflexión en el usuario, que varía según su nivel matemático: puede ser una simple aceptación de la «singularidad» que requiere el trabajar con este programa de ordenador, o comprender la problemática geometría compleja vs. geometría real que está detrás de estas peculiaridades. Esto es, como insistiremos en las conclusiones, el uso de herramientas de razonamiento automático requiere y fomenta, en cualquier caso, una colaboración hombre/máquina que querríamos ejemplificar y a la que querríamos contribuir como el objetivo final de nuestro trabajo.

## Dos maneras de construir la estrella andalusí

GeoGebra Discovery[3] es una versión de GeoGebra con más herramientas de razonamiento automático, que utiliza algoritmos de geometría algebraica computacional, trabajando en un contexto de geometría algebraica compleja. Es decir, GeoGebra Discovery, internamente, traduce en términos de ecuaciones polinómicas (rectas por dos puntos, condiciones de paralelismo, perpendicularidad, circunferencia con centro en un punto y radio dado, intersección de dos rectas, etc.) cada paso de una construcción geométrica sobre la pantalla gráfica.

Pero no tiene en cuenta aspectos relacionados con el signo (para, por ejemplo, distinguir entre los dos puntos que resultan de la intersección recta/círculo, o para establecer que la longitud de un segmento es la raíz positiva de la suma de los cuadrados de las diferencias de coordenadas de sus extremos) porque eso sería propio de la geometría real y, actualmente, en aras a una mayor eficiencia, GeoGebra Discovery desarrolla algoritmos de geometría compleja, una geometría mucho más sencilla que la versión real, como es bien sabido: una ecuación de grado $n$ tiene $n$ raíces complejas, pero no hay teorema equivalente en el caso real, por ejemplo.

Teniendo en cuenta esto, si queremos aplicar estos algoritmos de demostración automática, no podemos realizar un giro de 45° a un cuadrilátero inicial a partir del cual comenzar a construir la estrella andalusí, puesto que esto implica, en general, utilizar senos y cosenos, y estos no son polinomios, por lo que no está programado en GeoGebra Discovery el manejo de ángulos, en el caso de usar herramientas de demostración automática. Para empezar, esta restricción plantea ya la necesidad de realizar una investigación elemental…

Una solución, para construir el cuadrado girado 45° con respecto al cuadrado inicial, podría ser el proceder del siguiente modo alternativo: tras construir el cuadrilátero inicial, $ABCD$, usando el comando «Polígono regular» de GeoGebra, comenzando por los puntos $A$ y $B$ e indicando que queremos construir un polígono de cuatro lados, calculamos el centro del cuadrilátero, $E$, como intersección de las rectas $j = DB$ y $k = AC$. Luego construimos la recta $l$ perpendicular al segmento $h = DC$, y la circunferencia, $c$, de centro $E$ y que pasa por $C$. De este modo, hallamos el punto $F$ como intersección de la recta $l$ y la circunferencia, $c$. A continuación, hallamos el simétrico de $F$ respecto de la recta $j = DB$, $F'$, y con los puntos $F$ y $F'$, y la herramienta «Polígono regular» de lado $FF'$, y cuatro lados, construimos el cuadrado que resulta de girar 45° el cuadrado inicial (ver figura 2).

## Segmentos de interés

Si nos fijamos en la marca turística de Cabra, dentro de la estrella andalusí hay una circunferencia de la no se dice nada en la Resolución de 13 de junio de 2014, a pesar de que es la que rodea a la media luna. Así que iniciamos la investigación sobre las matemáticas de la marca preguntándonos ¿cuál será su radio si suponemos que el lado de los cuadrados mide $a$? (figura 3). Más generalmente, ¿cuál será el valor relativo de los distintos segmentos que han sido destacados en la figura 4?

Veámoslo de dos modos distintos: tradicional o clásico y utilizando GeoGebra Discovery.

## Modo Tradicional

Trabajemos con el triángulo y algunos de los segmentos marcados en la figura 4.

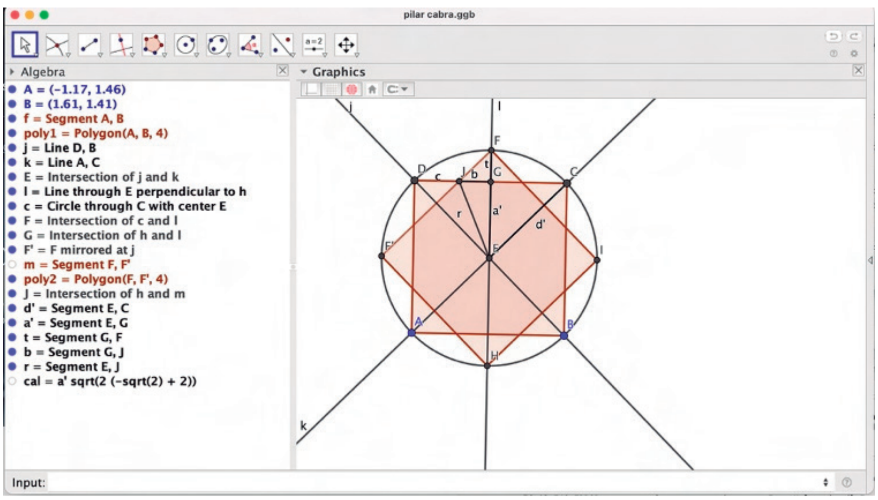


Figura 2. Construcción de la estrella andalusí sin realizar un giro de 45°

Comencemos indicando que la longitud del segmento discontinuo, $b$, es

$$b = \frac{d}{2} - \frac{a}{2}$$

debido a la simetría y a la semejanza de los triángulos que se forman en la estrella andalusí.

Por otro lado, por el teorema de Pitágoras:

$$\frac{d}{2} = a\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por tanto,

$$b = a\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}a$$

Si aplicamos de nuevo el Teorema de Pitágoras en el triángulo marrón, hallaremos cuál es valor del radio de la circunferencia:

$$r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}a\right)^2$$

$$r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \left[1^2 + (\sqrt{2}-1)^2\right]$$

$$r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 (1 + 2 - 2\sqrt{2} + 1)$$

$$r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 (4 - 2\sqrt{2})$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 (4 - 2\sqrt{2})}$$

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{4-2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}a$$

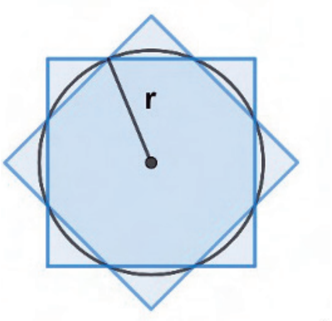


Figura 3. Circunferencia interna de la estrella andalusí

## Utilizando GeoGebra Discovery

Conviene tener en cuenta que en el resultado final la nomenclatura puede cambiar según el orden en el que se realice la construcción.

Comencemos construyendo varios segmentos:

- —El segmento $r$, que va desde $E$ hasta $J$, la intersección de los dos lados $h$ y $m$ de los dos cuadrados.
- —El segmento $d'$, que va desde $E$ hasta $C$, que en el modo tradicional es $d/2$, pero que GeoGebra Discovery no permite nombrar con un cociente.
- —El segmento $a'$, que va desde $F$ hasta $G$, el punto de corte de $l$ y el lado $DC$, que es la mitad del lado del cuadrado inicial, $a/2$ en el modo tradicional, pero que, como ya sabemos, GeoGebra Discovery no nos permite nombrar así.
- —El segmento $t$, que es $GF$.
- —El segmento $b$, que es $JG$.

Una vez construidos todos los estos segmentos, le pedimos a GeoGebra Discovery que nos diga qué relación existe entre algunos de ellos, usando, precisamente, el comando *Relación(<objeto>, <objeto>)*, que en este caso es, por ejemplo, *Relación(b, t)*. Así, GeoGebra Discovery nos permite comprobar (la respuesta no es solo numérica, aproximadamente correcta, sino matemáticamente rigurosa, puesto que los algoritmos que usa GeoGebra Discovery internamente terminan, finalmente, verificando si $1 = 0$, o no) que:

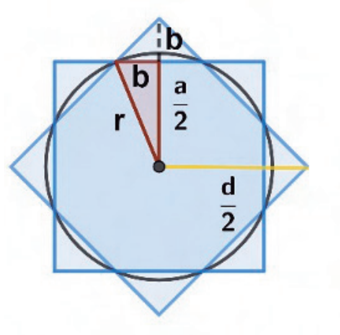


Figura 4. Algunos segmentos de interés dentro de la estrella andalusí

1. *b* y *t* miden lo mismo (ver figura 5).
2. $b = \left(\sqrt{2}-1\right)\cdot a'$

   GeoGebra Discovery nos da una relación doble ya que trabaja en geometría compleja y no elige los signos de las raíces (ver figura 6), pero es fácil comprobar que, desde el punto de vista real, la relación es la indicada tomando la raíz positiva de 2.

3. Del mismo modo obtenemos la relación existente entre *d'* y *a'*:

   $d' = \sqrt{2}\cdot a'$

   (figura 7).

4. Finalmente, GeoGebra Discovery nos dice que la relación entre *r* y *a'* también es doble en el contexto complejo:

$$r = \sqrt{2\cdot\left(2-2\sqrt{2}\right)}\cdot a'$$

y

$$r = \sqrt{2\cdot\left(2+2\sqrt{2}\right)}\cdot a'$$

aunque en el contexto real la correcta es la primera (figura 8).

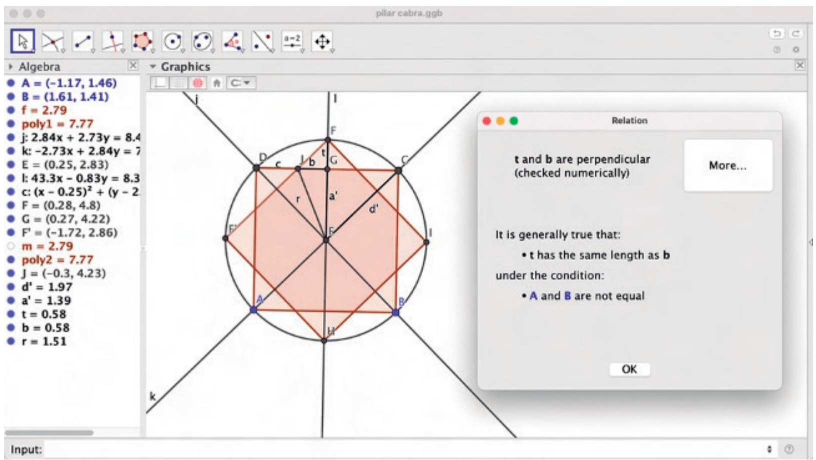


Figura 5. GeoGebra Discovery nos dice que t y b son numéricamente iguales y que la respuesta es matemáticamente fiable, no aproximada

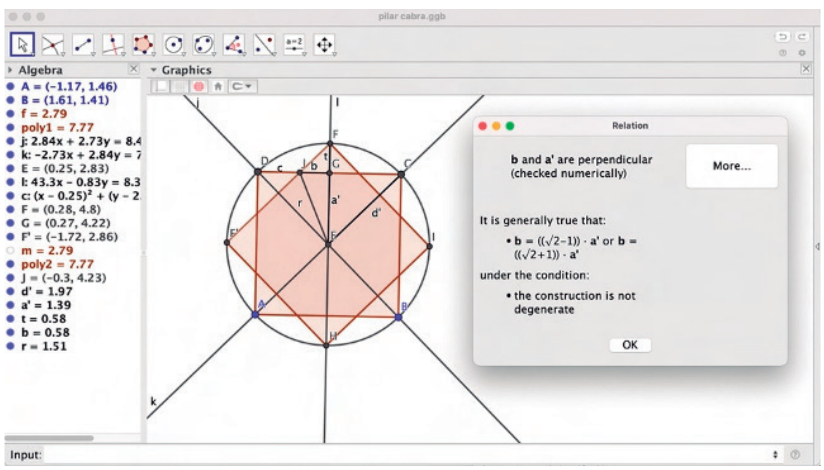


Figura 6. GeoGebra Discovery nos dice que $b = \left(\sqrt{2}-1\right)\cdot a'$ desde el punto de vista real

## Conclusiones

Creemos que en este artículo ha quedado patente tanto la posibilidad de investigar matemáticamente, con conocimientos elementales y en contextos aparentemente muy alejados del currículo y muy próximos real, como la sorprendente —y todavía poco conocida— capacidad de los programas de geometría dinámica para resolver, instantáneamente, cuestiones de cierta complejidad y dificultad, como la obtención de la razón radio/diagonal de la figura 8.

Pero también se ha mostrado cómo el uso de tales herramientas exige, para su manejo y, sobre todo, para su interpretación, la competencia humana, mostrando, de esta forma, cómo la colaboración hombre/máquina permite desarrollar –tal vez de una manera distinta, pero no menos poderosa que la tradicional— «Las competencias específicas de resolución de problemas, razonamiento y prueba…» a las que hace referencia el vigente currículo.

Contribuir a la divulgación de estas herramientas, a su cuidada aplicación en el ámbito escolar, y a su utilización en contextos STEAM como el que nos ha proporcionado la marca turística de la bella ciudad de Cabra, es nuestro deseo.

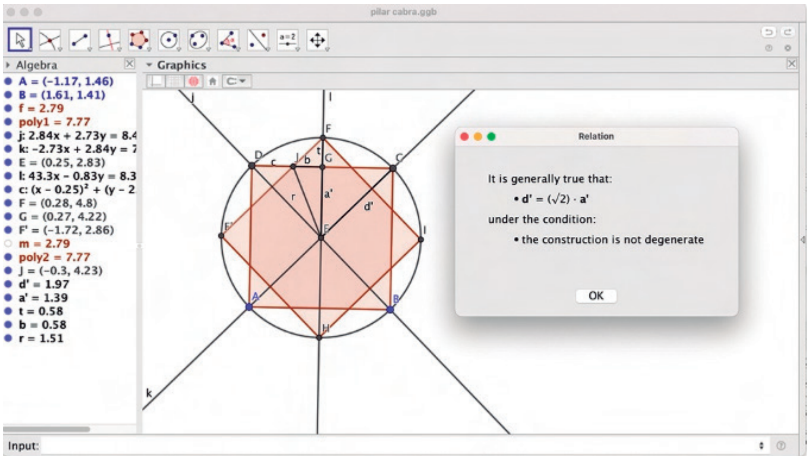


Figura 7. GeoGebra Discovery nos dice que $d' = \sqrt{2} \cdot a'$

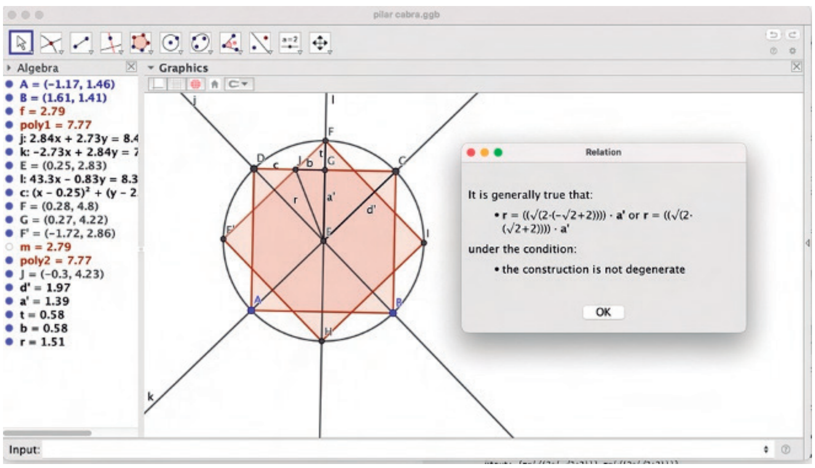


Figura 8. GeoGebra Discovery nos dice que en el contexto real $r = \sqrt{2 \cdot \left(2 - 2\sqrt{2}\right)} \cdot a$

## Referencias bibliográficas


Dorier, J. L., y K. Maass (2020), «Inquiry-Based Mathematics Education», en S. Lerman (ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education,* Springer, Cham, <https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_176>.

Losada-Liste, R., y T. Recio (2023): «Inclinando la botella de Piaget con GeoGebra Discovery», *Boletín de la Soc. Puig Adam,* n.º 115, 43-86.

*Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato, Boletín Oficial del Estado, n.º 82, 6 de abril de 2022, <https://www.boe.es/buscar/act.php?id=BOE-A-2022-5521>*

*Resolución de 13 de junio de 2014, de la Dirección General de Administración Local, por la que se admite la inscripción en el Registro Andaluz de Entidades Locales del escudo, la bandera, el logotipo y la marca turística del municipio de Cabra (Córdoba),* Boletín Oficial de la Junta de Andalucía (BOJA), n.º 122, 26 de junio de 2014, <https://www.juntadeandalucia.es/boja/2014/122/9>.

Sabariego, P. (2023), *Cabra, la cordobesa. Marca turística,* <https://pilarsabariego.com/cabra-la-cordobesa-marca-turistica/>.



**Tomás J. Recio Muñiz**
Universidad Antonio de Nebrija
<trecio@nebrija.es>

**M.ª del Pilar Sabariego Arenas**
Consejería de Educación, Formación Profesional y Universidades de Cantabria
<sabariego0@educantabria.es>


1 <www.geogebra.com>

2 <https://pilarsabariego.com/cabra-la-cordobesa-marca-turistica/>

3 El lector interesado puede consultar la página web desarrollada por el profesor Rafael Losada-Liste <https://www.geogebra.org/m/v6prxfzh#material/cwwx3ask> donde se realiza, en español, una sencilla y muy completa introducción a GeoGebra Discovery: qué es, quién lo desarrolla, cómo se puede descargar o usar sin descargar, cuáles son sus principales comandos, algunas referencias. Esta página forma parte del libro GeoGebra que desarrolla en paralelo el artículo «Inclinando la botella de Piaget con GeoGebra Discovery», véase Losada-Liste y Recio (2023).