

VERSIÓN INGLESA

Enseñar Matemáticas a través de la Resolución de Problemas

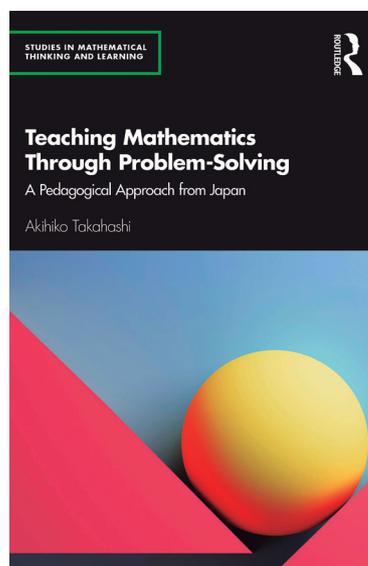
Maite Aranés Maza

SUMA núm. 107
pp. 83-89

Artículo solicitado por *Suma* en julio de 2024 y aceptado en septiembre de 2024

Cuando se habla de la enseñanza a través de la resolución de problemas es habitual que se mencione el ejemplo de Japón. Akihiko Takahashi, profesor emérito de la Facultad de Educación de la Universidad DePaul (Illinois), en Estados Unidos, nos explica de primera mano cómo funciona esta pedagogía en su libro *Teaching Mathematics Through Problem-Solving. A Pedagogical Approach from Japan*.

Actualmente en Japón las matemáticas en los grados elementales y el principio de la educación secundaria (hasta nuestro 3.º de ESO) se enseñan de forma mayoritaria utilizando una pedagogía basada en la resolución de problemas («Mondai Kaketsu Gakushuu»). A grandes rasgos esto consiste en que, para introducir nuevos conceptos o procedimientos, el docente plantea un problema, observa el trabajo de los estudiantes y posteriormente facilita una discusión en grupo de las estrategias y soluciones obtenidas (figura 1).



Teaching Mathematics Through Problem-Solving
(210 páginas)
Routledge, 2021
Akihiko Takahashi

Takahashi cuenta que comenzó su carrera como docente de matemáticas en educación primaria en Japón, su país natal. Nos comenta como trabajó de forma intensiva para aprender a enseñar matemáticas a través de la resolución de problemas, lo que le resultaba muy difícil al principio. Con el tiempo se trasladó a un colegio de primaria (Setagaya Elementary School) afiliado a la Universidad Tokyo Gakugei, en el que se llevan acabo investigaciones prácticas y se contribuye a la formación del profesorado de centros educativos locales. En Setagaya tuvo la oportunidad de trabajar en el diseño de materiales curriculares, además de actuar como mentor para futuros docentes. Alrededor del año 2000, con 20 años de experiencia tanto en el aula como en formación del profesorado, se trasladó a Estados Unidos. Desde entonces, y hasta su jubilación, ha centrado su trabajo desarrollar la docencia de matemáticas a través de la resolución de problemas fuera de Japón. El texto que nos ocupa se basa pues en sus experiencias y el trabajo desarrollado a lo largo de su carrera profesional.

El libro se divide en cuatro capítulos. En el primero Takahashi expone el desarrollo y conceptos más importantes de la enseñanza a través de la resolución de problemas en Japón. El segundo capítulo es el más extenso del libro, ya que contiene varios ejemplos de lecciones y secuencias de lecciones, explicados con muchísimo detalle. Los dos últimos capítulos están dedicados a estrategias que pueden ayudar a un docente interesado en desarrollar esta forma de enseñar las matemáticas.

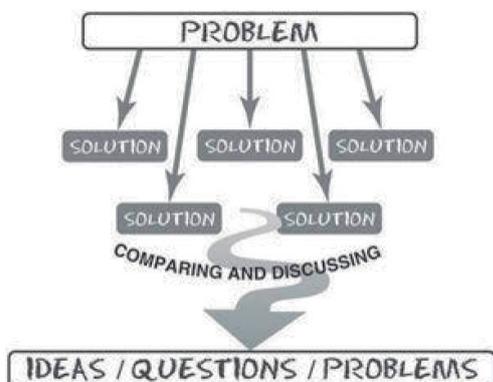


Figura 1. Esquema general de una lección basada en la resolución de problemas

Como siempre, voy a resumir brevemente los contenidos de cada capítulo. Dedicaré más palabras al primero, «Development and Major Concepts of Japanese 'Teaching Through Problem-Solving' (TTP)», que me parece el más interesante conceptualmente. Aclaro que a partir de ahora voy a imitar al autor, y escribiré TTP como abreviatura para «Teaching Through Problem-Solving» («enseñanza mediante la resolución de problemas»). En este primer capítulo encontramos una explicación más detallada de la TTP en Japón. En principio, cada clase (duran 45 minutos) se organiza a partir de la resolución por parte del alumnado de un solo problema. Por supuesto la elección del problema más adecuado para cada concepto o procedimiento que se quiere introducir es una cuestión no trivial. Pero el ingrediente esencial de todo el proceso nos dice Takahashi, es el «Neriage»: una discusión dinámica en gran grupo en la que se analizan las soluciones del alumnado, para ayudarles a derivar conocimientos, conceptos y procedimientos. Es decir, el objetivo de la lección no es resolver el problema, sino que a través del Neriage conseguir que el alumnado descubra y explore nuevos conceptos y procedimientos matemáticos (figura 2).

El autor nos aclara también que la TTP es un tipo de pedagogía complejo, que requiere de considerable aprendizaje y desarrollo profesional por parte de los docentes para poder implementar este tipo de enseñanza de forma efectiva. Por ejemplo, para introducir la multiplicación de dos números de dos cifras, la idea es diseñar una secuencia didáctica en la que el alumnado pueda descubrir cómo realizar este cálculo a partir de cuatro multiplicaciones de una cifra. Para ello el docente debe determinar un problema adecuado, y debe ser capaz de apoyar a los estudiantes que tengan dificultades sin explicarles directamente el razonamiento correcto. Es decir, antes de llegar al aula el docente debe dedicar mucho tiempo a planear la lección con todo detalle y anticipar las posibles respuestas del alumnado.

However, while the teacher may not talk much during the lesson itself, they must spend lots of time carefully planning the lesson and anticipating students' responses in order to successfully engage them during class.

Otra de las características fundamentales de la TTP en Japón es el énfasis en la escritura para desarrollar las habilidades del alumnado a la hora de representar sus ideas a través de diagramas, expresiones matemáticas, etc. Por una parte, el profesorado debe ejercer cuidado y atención a lo que escribe en la pizarra, ya que servirá a la vez de apoyo al proceso de discusión (Neriage) y de modelo para los apuntes del alumnado. Por otra parte, al final de la lección el alumnado escribe en su cuaderno reflexiones y notas sobre lo aprendido. Es decir, en lo que se refiere al docente, el escribir en la pizarra nuevamente requiere de preparación y formación para sacar el máximo partido a las anotaciones. Es preciso decidir cómo organizar la pizarra: cómo dibujar diagramas de manera que los estudiantes sentados al final de la clase los vean claramente, en qué orden y dónde anotar las ideas propuestas, cómo resumir las conclusiones obtenidas, etc.

One of the reasons why Japanese mathematics classrooms use a large writing board, rather than an overhead projector or a small poster board, is to help students visualize the whole class discussion [...]. Teachers work hard to make student thinking visible using pictures, diagrams, written words, mathematical expressions, and sometimes even cartoons, to help the class see what they are discussing.

Con respecto al alumnado, aparte de copiar en el cuaderno las conclusiones de la pizarra, deben escribir reflexiones acerca de lo explorado o aprendido en la lección. La lectura de estas reflexiones después de clase por parte del docente sirve como mecanismo de evaluación formativa. Además, en la sesión siguiente es habitual también compartir con la clase una selección de dichas reflexiones (realizada por el profesor). Esto permite, en primer lugar, asistir en la fase inicial de cada lección, que se dedica a recordar lo aprendido en sesiones anteriores para motivar la introducción del siguiente problema. Otra consecuencia de compartir estas reflexiones es que los estudiantes tienen ejemplos para ir mejorando sus apuntes y su habilidad para expresarse matemáticamente.

Japanese teachers will often invite their students to share their self-reflections from the previous lesson. This helps motivate the class to tackle the next challenge.

These self-reflections are usually written during the «summarizing» activity at the end of a lesson. Students often write what they have learned in these reflections, but also what they want to learn next. Teachers collect and read these on their own after class. They also provide a valuable opportunity to learn what the students who didn't speak during the

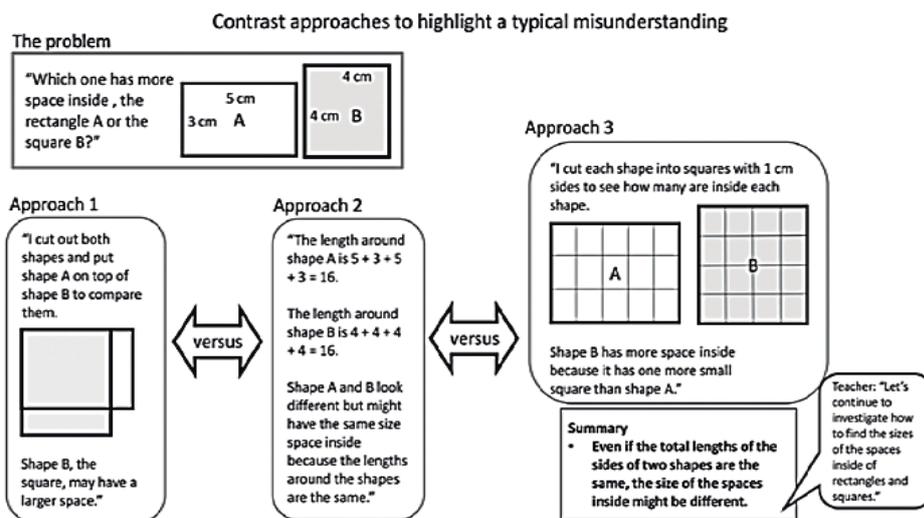


Figura 2. Ejemplo de plan detallado propuesto por Takahashi para una discusión en clase (Neriage). Incluye el problema, las posibles respuestas del alumnado y la conclusión a la que se desea llegar. El objetivo de esta lección es confrontar un error típico (confusión entre perímetro y área) a través del debate de las soluciones propuestas por el alumnado

lesson were thinking. Students' self-reflections can be a great source for formative assessment.

[...] Sharing selections with the class at the beginning of the next lesson will also encourage students to write more in their own reflections.

Creo que a estas alturas de la reseña está claro que esta forma de enseñar matemáticas no es algo que se lleve a la práctica así de buenas a primeras. ¿Cómo se ha conseguido que sea la forma habitual de trabajar en la mayoría de los colegios e institutos japoneses? Takahashi nos lo aclara explicando la historia de la TTP en Japón. Esta pedagogía es el fruto de un proceso de reforma y mejora del sistema educativo que ha llevado décadas de trabajo. El énfasis en la resolución de problemas y el pensamiento matemático aparecieron por primera vez como tema central en el currículo japonés en 1958, y siguió desarrollándose en las versiones posteriores hasta la actualidad.

In 1958, the Japanese national curriculum introduced a new term, «mathematical thinking», in order to highlight its importance. [...] The national curriculum, which has undergone a major revision about every ten years since World War II, reflected these new values. The 1989 national curriculum specifically stipulated that the purpose of teaching mathematics is to nurture students' mathematical thinking (Ministry of Education Japan, 1989a). [...] By the 1990s, TTP became the main pedagogical approach for teaching mathematics across Japan in most elementary schools as well as in some lower secondary schools.

Según Takahashi, esta pedagogía es el fruto de una práctica fundamental en el desarrollo profesional de los docentes japoneses, que se denomina «Lesson Study». Este proceso comienza con un grupo de docentes que colabora para elaborar un plan específico para una lección. A continuación, se lleva al aula (de manera pública, con otros profesionales observando), se analiza el impacto en el aprendizaje del alumnado, y finalmente se mejora y refina la propuesta original. La práctica del Lesson Study ha sido parte del sistema educativo japonés desde los inicios del siglo XX. Además, el Lesson Study va más allá de la formación profesional del profesorado, ya que resulta también un mecanismo de colaboración entre investigadores académicos, docentes, responsables del desarrollo del currículo y editoriales de libros de texto. Es decir,

en un principio fueron los mismos docentes quienes fueron desarrollando lecciones y secuencias de lecciones trabajando el TTP. Posteriormente estas ideas se fueron incorporando a los libros de texto oficiales, y, finalmente, se integraron en el currículo de matemáticas, al considerarse el método más efectivo de ayudar al alumnado a adquirir conocimientos y pensamiento matemáticos.

So while the development of Japanese TTP lessons historically began as isolated lessons, they are now an integral part of the curriculum. TTP lessons are recognized as the most effective way to help students acquire both mathematical knowledge and thinking skills.

En este primer capítulo Takahashi ofrece muchos más detalles sobre la evolución de la TTP en Japón y sus componentes esenciales. Por ejemplo, incluye un análisis de los cuatro tipos principales de Neriage (discusión/diálogo en clase) según el objetivo de la lección (en la figura 3 vemos como esta parte de la lección ha terminado dominando al resto de componentes). También expone un ejemplo concreto de la evolución de los libros de texto en Japón, mostrando cómo ha ido variando el capítulo de introducción al área de un rectángulo en una editorial específica.

En el capítulo 2, «TTP Lessons You Can Use», Takahashi nos ofrece varios ejemplos de «lecciones»

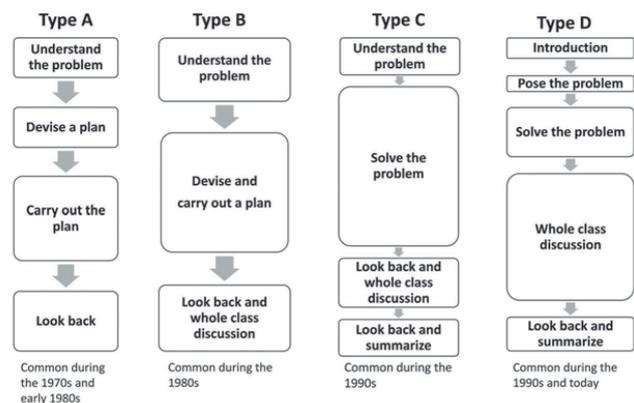


Figura 3. Evolución de la estructura de una lección típica en Japón a lo largo de los años, donde se observa que la discusión en gran grupo se ha convertido en una prioridad

basadas en la resolución de problemas. Este es con diferencia el capítulo más extenso del libro. En principio la intención del autor es que los lectores puedan utilizar este material en su aula. En consecuencia, nos ofrece descripciones en profundidad sobre cómo comenzar la clase, qué preguntas hacer para plantear el problema del día, posibles respuestas del alumnado, sugerencias detalladas para conducir la discusión en grupo (Neriage), etc. Por supuesto Takahashi aclara que antes de utilizar las ideas que propone puede ser necesario adaptarlas para atender a las necesidades de nuestro alumnado, pero por su parte no escatima detalles para facilitarnos dicho trabajo (figuras 4 y 5).

Con respecto a la temática de los ejemplos incluidos, en una primera parte del capítulo encontramos cinco secuencias de lecciones, cuyo objetivo es en cada caso introducir y/o desarrollar la comprensión conceptual de algún contenido matemático. Se abarcan niveles desde el inicio de primaria (sumar dos números de una cifra utilizando la estrategia de descomponer uno de los sumandos para completar una decena) hasta el inicio de secundaria (por ejemplo, las lecciones

de las figuras 4 y 5). La segunda y tercera partes del capítulo se dedican a propuestas de una sola sesión. En la segunda parte encontramos ideas para extender y profundizar la comprensión de conceptos y procedimientos específicos, y en la tercera Takahashi nos muestra cómo trabajar con problemas más abiertos. Resulta imposible resumir estas propuestas y hacerles justicia, así que lamentablemente los lectores curiosos tendréis que conseguir una copia del libro.

Después del capítulo 2 la pregunta natural es: ¿y si queremos utilizar la TTP pero para un concepto/idea/procedimiento que no aparece en los ejemplos de Takahashi? Al final y al cabo no tenemos acceso

| UNIT FLOW | | |
|-----------|--|--------|
| Lesson | Lesson title and main learning objectives | Time |
| 1 | <p>“How can we find out which room is the most crowded?”</p> <p>Students will realize that in order to compare the crowdedness of three rooms they need to know the number of people in each room as well as the size. They will then devise and discuss ways to quantify crowdedness in order to find out which room is the most crowded.</p> | 60 min |
| 2 | <p>“Population density”</p> <p>Students will understand why people use population density, the number of people divided by the area, to quantify crowdedness.</p> | 60 min |
| 3 | <p>“How can we compare speeds?”</p> <p>Students will realize that time and distance are needed to compare speeds. Students will understand why we use kilometers/miles per hour to quantify the speed of vehicles.</p> | 60 min |
| 4 | <p>“Let’s use the ideas that we learned to solve more problem!”</p> <p>Students will become comfortable using idea of per unit quantities to solve various problems.</p> | 60 min |

Figura 4. Secuencia de las sesiones de una unidad de trabajo sobre razonamiento proporcional, «Ideas for Quantifying Crowdedness and Speed», considerando las ideas de densidad de población y velocidad. El objetivo a largo plazo es sentar las bases para facilitar futuro trabajo con razones, tasas de cambio y relaciones de proporcionalidad

| LESSON FLOW | | |
|---|--|--|
| Steps, questions from the teacher, activities, and anticipated student responses | Support from the teacher | Check understanding |
| <p>1. Introduction</p> <p>Show the illustration of cabin rooms at summer camp and ask the following question:</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>Which one of the three rooms is the most crowded?</p> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; text-align: center;"> <div style="margin: 5px;"> <p>Cabin Room A</p>  </div> <div style="margin: 5px;"> <p>Cabin Room B</p>  </div> <div style="margin: 5px;"> <p>Cabin Room C</p>  </div> </div> | <p>Encourage students to share their opinions.</p> <p>Encourage them to share what they think “crowdedness” means.</p> | <p>Is each student comfortable using the term “crowdedness”?</p> |

Figure 2.1.3.01

Lead a class discussion on how to find out which room is the most crowded:

- Room A is more crowded than Room B because Room A has more people in the same size room.
- Room B and Room C have the same number of people but we can’t tell which room is more crowded. If Room B is larger than Room C, then Room C is more crowded. We need to know the size (area) of each room in order to compare the crowdedness of the rooms.

Help students realize that the information given in the problem may not be enough to decide which room is the most crowded. Knowing the size (area) of each room is essential to determine which room is the most crowded.

Figura 5. Explicación pormenorizada de los primeros minutos de introducción en la primera sesión de la secuencia de la figura 4. El primer día se introduce la idea de densidad de población

ni a los libros de texto de Japón ni a su programa de desarrollo profesional. En ese caso, deberemos diseñar nuestra propia lección e intentar recrear el proceso de Lesson Study en nuestro centro. Para apoyarnos en este cometido tenemos los capítulos 3 y 4 del libro.

En «Designing Your Own TTP Lessons» Takahashi explica sus estrategias para diseñar una lección en la que trabajar con esta pedagogía. De forma muy realista su primer consejo es que antes de tirarnos a la piscina y empezar de cero, adaptemos algunas de sus propuestas y tratemos de llevarlas a nuestra aula. Una vez que tengamos algo de práctica podemos intentar diseñar una propuesta nueva. Para hacerlo, el primer paso es una investigación a fondo de materiales curriculares sobre el tema que queremos trabajar. A la vez hemos de tener en cuenta también los conocimientos previos de nuestro alumnado y lo que queremos que aprendan. Os recuerdo que en la TTP cada clase se basa en la resolución de un problema, por lo tanto, la elección del problema adecuado es un componente crítico para diseñar nuestra lección. Takahashi indica que no se trata de inventarnos algo nuevo, sino que durante nuestra investigación habremos encontrado ejercicios y problemas que podemos intentar adaptar.

Una vez que hemos decidido cuál será nuestro problema base, el siguiente paso es escribir un plan detallado para la lección. Takahashi sugiere que para empezar utilicemos su método de crear un esquema como los que nos ha enseñado ya en previos ejemplos (ver figura 2), y que él llama un «plan para la discusión en clase» («Neriage map»). Para completar este esquema es preciso en primer lugar resolver el problema, intentando buscar múltiples formas de hacerlo, y relacionar las distintas respuestas que encontremos. Por otra parte, también es necesario decidir cómo plantearemos el problema, qué apoyo daremos al alumnado si encuentra dificultades, y además es conveniente establecer de antemano cuánto tiempo dedicaremos a cada etapa de la clase. En la figura 5 vemos como Takahashi distribuye estas observaciones en tres columnas dentro de sus planes detallados para una lección.

La última parte del proceso de preparación consiste en realizar un simulacro, con otros docentes que actúan como estudiantes y nos ofrecen *feedback* para pulir y mejorar nuestro plan. Takahashi reconoce que este último paso puede resultar complicado por falta de tiempo. Esto le lleva a proponer que se intente trabajar en equipo, dentro de un programa de Lesson Study como el que esboza en el capítulo 4, «How TTP and Collaborative Lesson Research Can Change Your School».

Al inicio de este último capítulo Takahashi comenta que los intentos de implantar prácticas de Lesson Study («Jyugyou Kenkyuu») fuera de Japón no han sido completamente exitosas, y opina que en parte es porque no se respetan sus componentes esenciales. En Japón este proceso es habitualmente una iniciativa de centro, cuyo objetivo es mejorar el currículo y los métodos de instrucción. Los docentes diseñan lecciones, y cuando las llevan a la práctica en el aula invitan a otros profesores a observar la clase y analizar lo sucedido.

In Japan, Jyugyou Kenkyuu is typically a school-wide professional development practice across all subjects. It is how Japanese mathematics teachers hone their TTP expertise. Teachers design and host live research lessons taught to their regular students in their own classroom, to which they invite their colleagues to come observe and discuss.

Japanese schools and teachers use Jyugyou Kenkyuu to plan, examine, and improve curriculum and instruction.

Para asegurarnos de que no nos dejamos ningún elemento crucial del «Jyugyou Kenkyuu», Takahashi propone un marco de trabajo denominado «Collaborative Lesson Research (CLR)» (algo así como «Investigación colaborativa en el aula»). De hecho, parte del trabajo de Takahashi se ha centrado en apoyar la implantación de este tipo de programas en centros escolares estadounidenses. Lo ideal es organizar CLR con el apoyo del centro educativo, puesto que requiere de bastantes horas de dedicación. En cualquier caso, Takahashi explica como organizarlo de forma independiente si no hay más remedio, y recomienda comenzar con un grupo de 3 a 5 docentes

«entusiastas». No voy a entrar en muchos detalles ya que podemos encontrar bastante de esta información en las páginas web de varias organizaciones dedicadas a dar apoyo a centros que quieren trabajar con Lesson Study. Una vez concretado un tema u objetivo de investigación se reproduce más o menos la estructura del trabajo individual delineada en el capítulo 3, aunque trabajando en equipo y de manera más formal (figura 6).

El capítulo concluye con una sección en la que Takahashi comenta los éxitos conseguidos por su equipo en diversos centros donde han implementado un programa de CLR. Como reflexión final, incide en las ventajas de trabajar de forma colaborativa para la formación profesional docente. Los programas de CLR aplican los principios del aprendizaje basado en problemas: permiten que los docentes trabajen juntos para mejorar su comprensión del aprendizaje de los estudiantes, y así mejorar su práctica docente y la educación de su alumnado.

Teaching Through Problem-solving is built on the premise that students can make new discoveries and change the way they think and see the world by working together. In the same way, through Collaborative Lesson Research, you and your fellow teachers can work together to better understand how your students think and what they need. You can change your school.

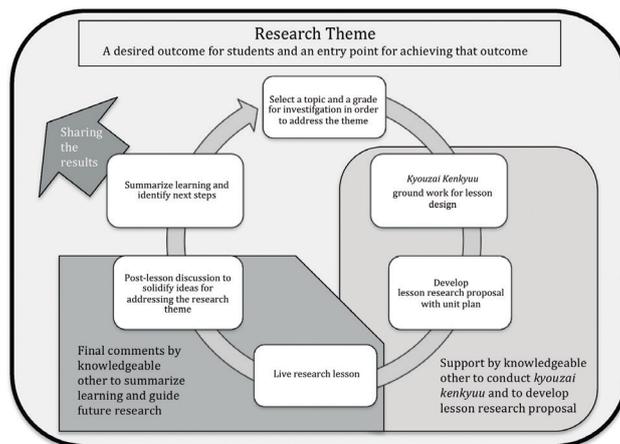


Figura 6. Esquema del funcionamiento del programa de Collaborative Lesson Research (Takahashi)

Con esta última reflexión del autor concluyo la reseña. Creo que ha quedado claro que, si sentimos curiosidad o interés por el afamado «método japonés» para enseñar matemáticas a través de la resolución de problemas, este libro es un excelente lugar donde comenzar. El estilo de Takahashi es claro y ameno, y se lee con facilidad. Destaco los ejemplos del capítulo 2, explicados con un nivel de detalle que pocas veces se encuentra. El aspecto más negativo del libro es que al ser una edición de tipo académico el coste es algo elevado para un volumen de unas 200 páginas. Por lo demás, como digo siempre, una lectura muy interesante.

Maite Aranés Maza

IES Villanueva de Gállego,
Villanueva de Gállego (Zaragoza)
<maite.aranes@gmail.com>