DEL MMACA AL AULA

Ocho secciones del cubo. Un material[1] para trabajar en 2,5D

MMACA

SUMA+ núm. 109
pp. 51-58
Artículo solicitado por *Suma* en junio de 2025 y aceptado en septiembre de 2025

Cuando los docentes introducimos la geometría en 3 dimensiones en la Educación Secundaria, con frecuencia nos limitamos a hablar de volúmenes y áreas laterales de poliedros y figuras de revolución, dejando de lado otros temas tanto o más útiles, pero mucho más difíciles de visualizar y de llevar al aula, como los ángulos diédricos o la intersección de figuras.

El material que presentamos en este artículo está basado en una idea original de Josep Rey Nadal y pretende facilitar la introducción a la geometría tridimensional a través de objetos bidimensionales situados en el espacio en una configuración que resulta fácil de entender.

Se trata, pues, de un material a medio camino entre la geometría 2D y la geometría 3D… podríamos decir que es un material para trabajar la geometría 2,5D.

Ocho secciones del cubo

El material consiste, simplemente, en una caja cúbica transparente de 10 cm de arista, acompañada de ocho secciones de ese mismo cubo, recortadas en cartulina de colores. Las diferentes secciones encajan entre ellas mediante unas ranuras y forman una estructura estable, pero son más fáciles de manipular una vez introducidas en la caja (figura 1).

El resultado es un objeto formado por dos familias de planos paralelos que intersecan el cubo transparente, y que incluyen triángulos equiláteros, un hexágono regular y rectángulos de proporciones $1{:}\sqrt{2}$.

Las secciones están escogidas por ser figuras interesantes y fáciles de analizar con una maquinaria geométrica limitada, ampliando así el rango de edades en las que se puede trabajar este material.

Hemos dejado fuera el cuadrado de manera deliberada para fomentar una nueva mirada en un objeto tan conocido y trabajado como es el cubo.

A continuación, se presenta una serie de preguntas y actividades dirigidas al alumnado de secundaria obligatoria y bachillerato. Esta selección es solo una muestra y no pretende ser exhaustiva, por lo que animamos al profesorado a adaptarla y complementarla según sus intereses.

Preguntas y actividades

Para introducir el trabajo con el cubo, proponemos comenzar analizando sus características principales: el número de caras, aristas y vértices (verificando que se cumple la fórmula de Euler: $C - A + V = 2$), así como el cálculo de su área lateral y su volumen. Este último concepto puede ilustrarse con un ejemplo práctico, como calcular cuántos refrescos de 33 cl cabrían en el interior del cubo.

Figura 1. Versión comercial de las *Ocho secciones del cubo* del MMACA

A lo largo de toda la actividad es conveniente que el alumnado manipule directamente el cubo transparente y pueda usar rotuladores de pizarra blanca sobre él. Esto permite resolver problemas aparentemente complicados, simplemente, dibujando líneas adicionales (figura 2). También conviene proporcionar al alumnado plantillas del cubo con las aristas marcadas a intervalos de un cuarto (figura 3).

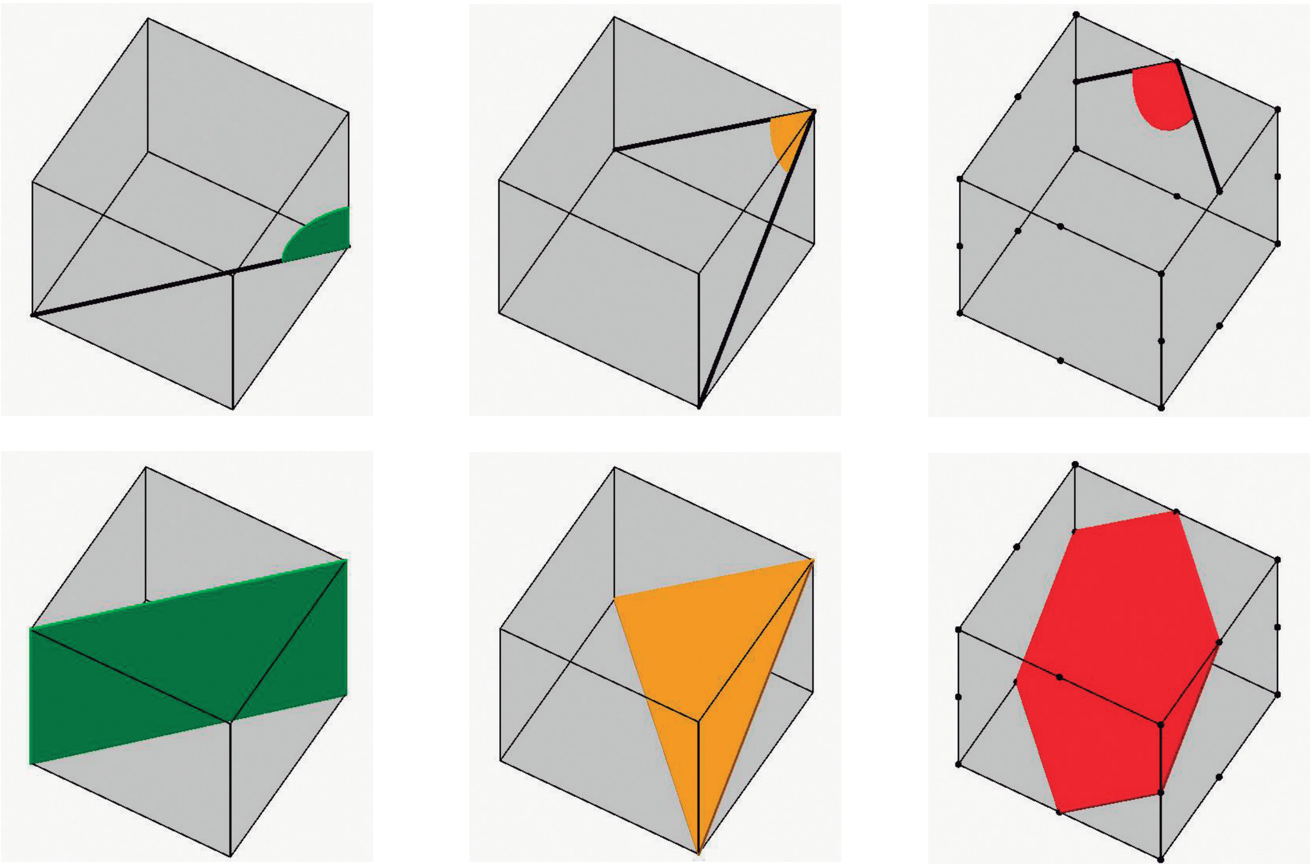

Figura 2. Tres ángulos fáciles de calcular con esta técnica

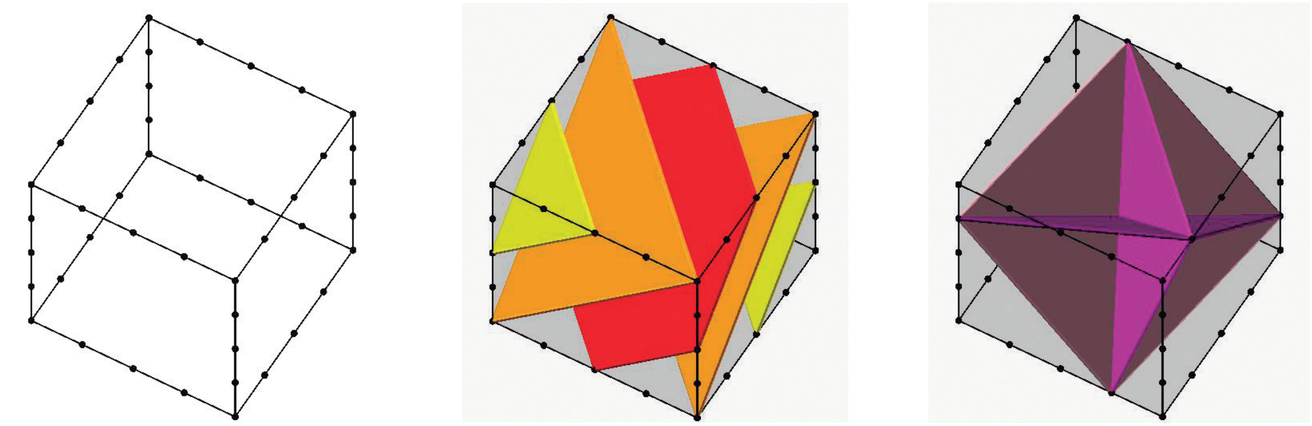

Figura 3. Plantilla y dos ejemplos

Una vez que el alumnado se familiarice con el cubo, se pueden plantear cuestiones de mayor profundidad.

¿Todos los cuadrados inscritos en el cubo miden 10 cm de arista? (figura 4).

En este punto, se puede destacar la existencia de un cuadrado inscrito en el cubo cuyo lado mide más de 10 cm, por lo que el cubo completo podría atravesarlo holgadamente. Este mismo cuadrado, orientado en las tres direcciones perpendiculares del espacio, define el octaedro regular de mayor tamaño que puede inscribirse en el cubo. Además, se da la afortunada coincidencia de que el papel de origami estándar (15 cm × 15 cm) coincide con estas dimensiones, lo que facilita su construcción de manera manipulativa.

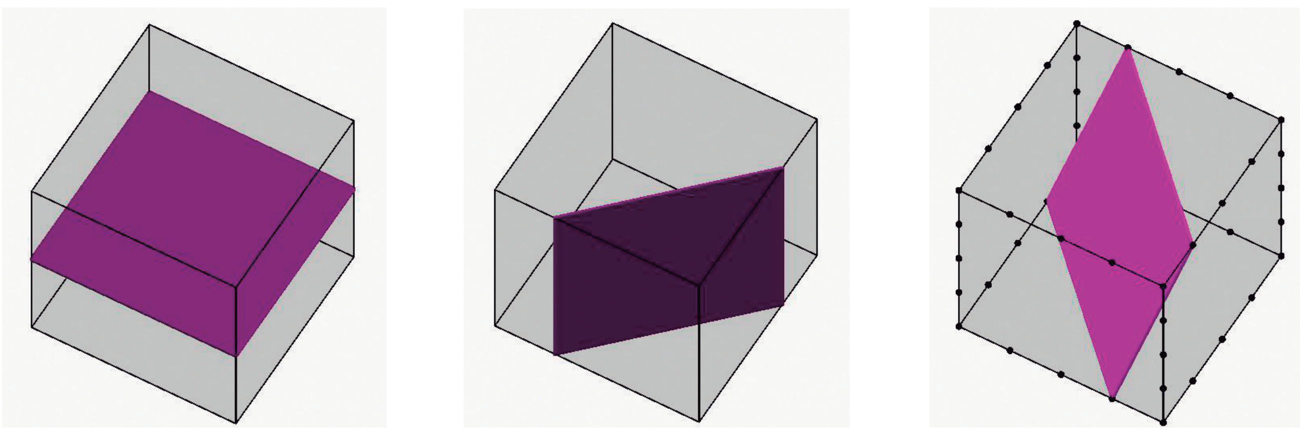

Figura 4. Dos cuadrados de 10 cm de arista y un tercero de $7,5\sqrt{2}$ cm de arista

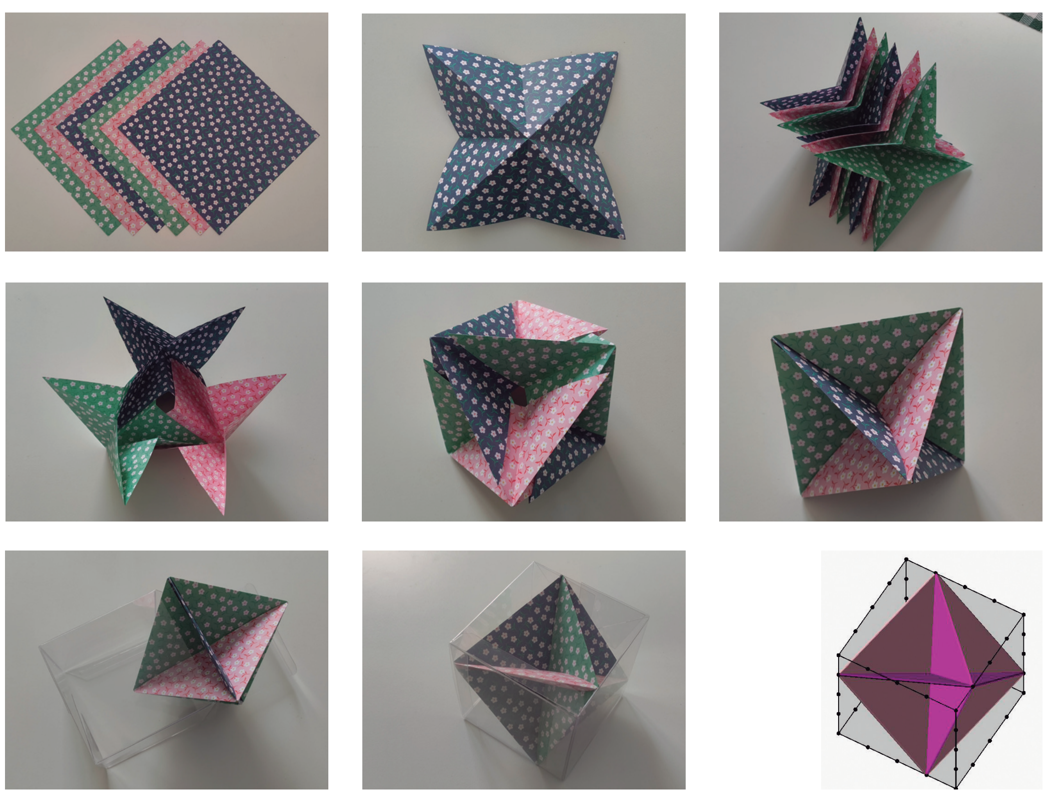

Figura 5. Pasos para crear esta figura de origami, por Robert Neale

251001 SUMA 109.indd 54 5/11/25 16:41

¿Qué tipo de polígonos se pueden formar cuando intersecamos un cubo con un plano? (figura 6).

Este es el momento idóneo para repartir las secciones de cartulina (o bien, que el alumnado las cree y recorte) y proceder a ensamblarlas. Si se dispone de varias copias, se podrán descubrir patrones interesantes al apilar los cubos resultantes (figura 7).

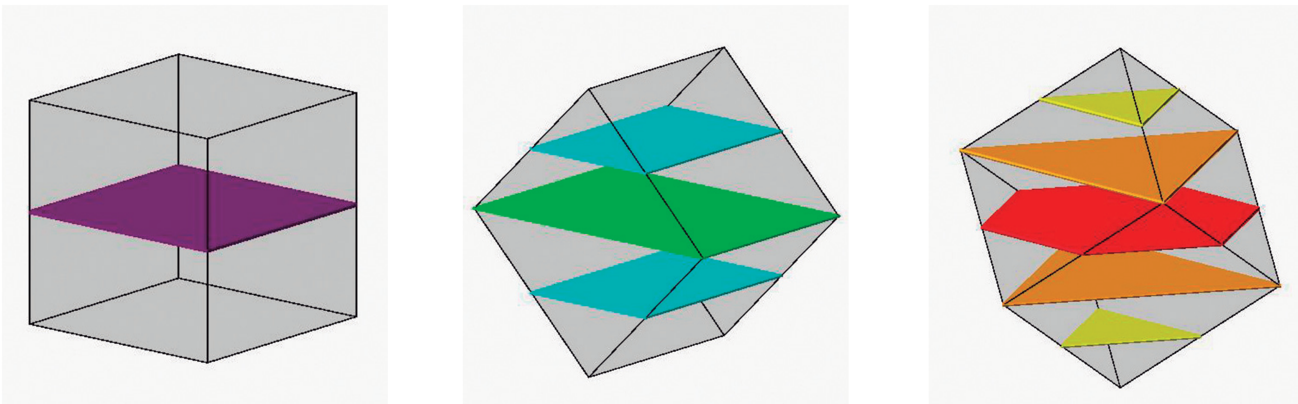

Figura 6. Cubos reposando sobre una cara, una arista o un vértice intersecados por planos horizontales

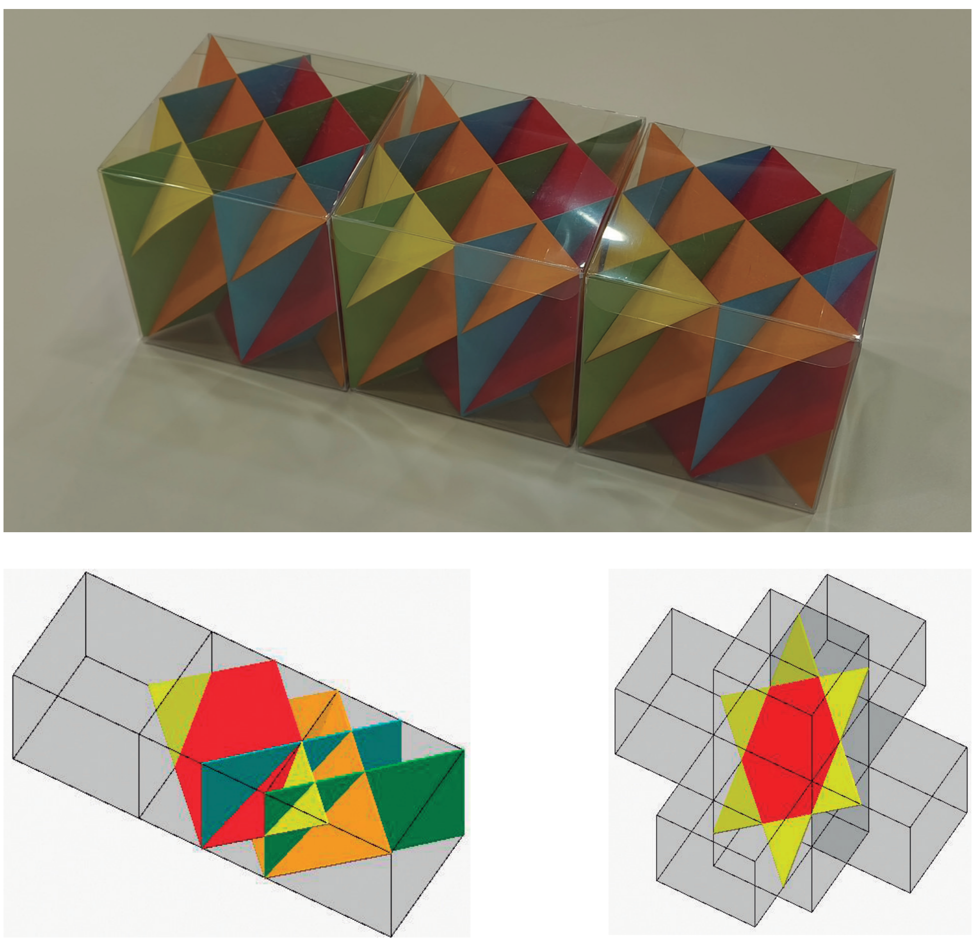

Figura 7. Varias copias del material, formando patrones interesantes

A partir de aquí, el abanico de posibilidades se amplía considerablemente. Por ejemplo, se puede trabajar la geometría analítica estableciendo un vértice del cubo como origen de coordenadas y calcular la posición de los vértices de cada sección (figura 8).

Una vez obtenidas las coordenadas de los vértices de cada polígono, el cálculo de longitudes y de áreas se simplifica notablemente. Cabe señalar que, si bien es posible trabajar en un espacio tridimensional, estos cálculos también pueden realizarse de forma más directa proyectando las figuras sobre las caras del cubo.

Además, resulta interesante analizar las relaciones entre los distintos polígonos de manera sintética mediante razones de semejanza y descomposiciones geométricas. Este enfoque permite deducir, por ejemplo, que el área del triángulo naranja es 4 veces mayor que el área del triángulo amarillo, o que los rectángulos comparten la propiedad del formato A4: al ser cortados por la mitad, generan dos figuras semejantes a la original.

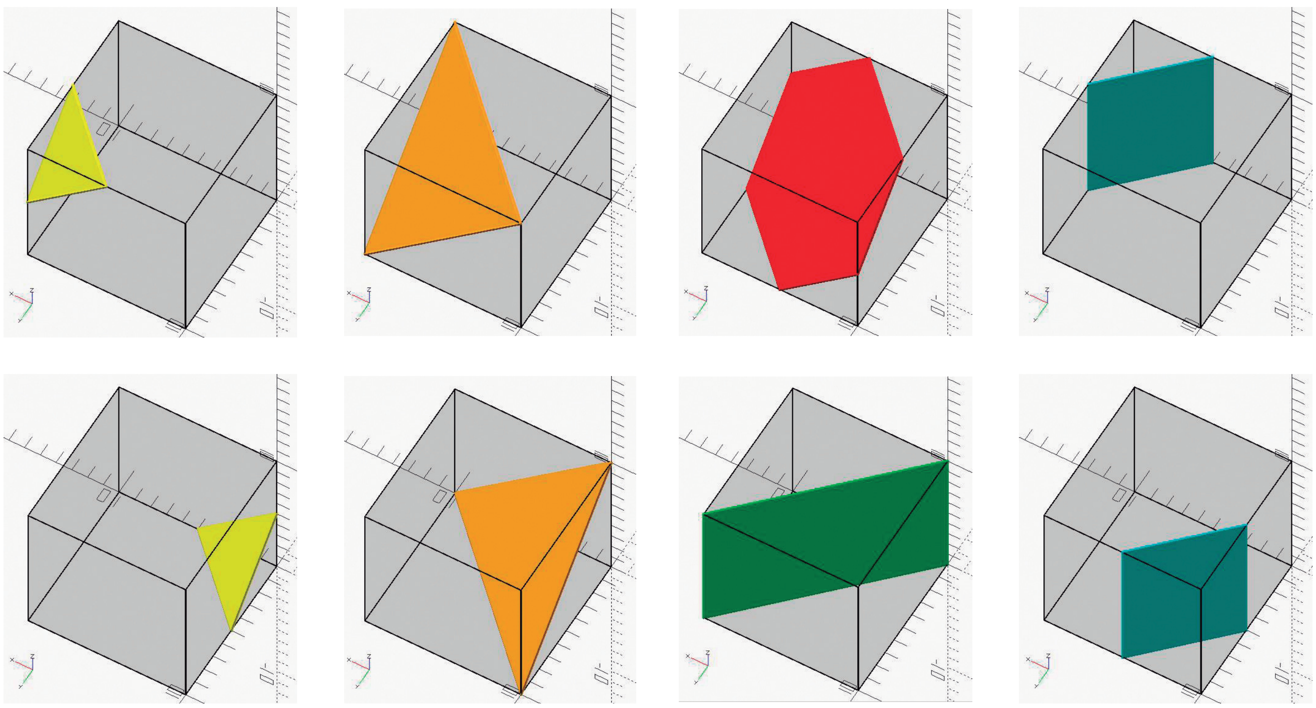

Figura 8. Las 8 secciones del cubo con un mismo sistema de coordenadas

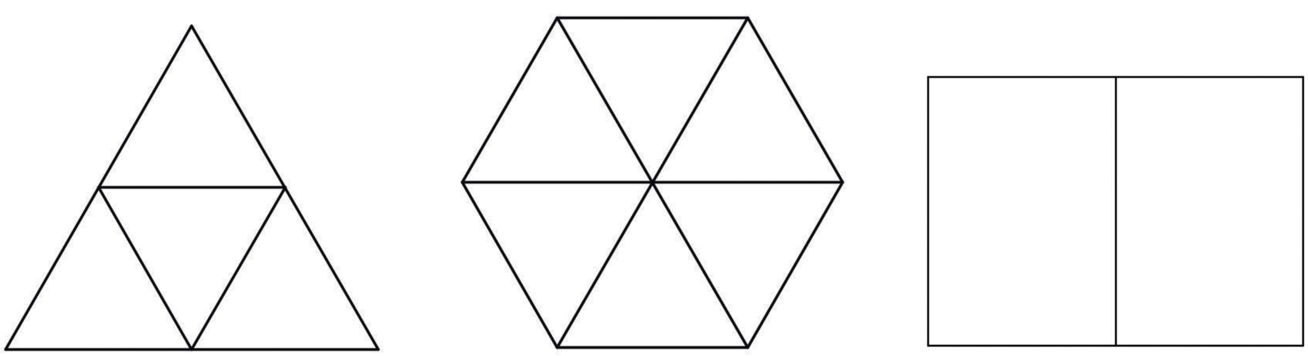

Figura 9. Ilustración mostrando las relaciones que hay entre algunas de las secciones

251001 SUMA 109.indd 56 5/11/25 16:41

Otra actividad de gran interés consiste en determinar qué fracción del volumen total del cubo queda a cada lado de sus distintas secciones. Nuevamente, se trata de una actividad mucho más rica si se aborda desde un enfoque sintético, evitando el cálculo directo mediante coordenadas (figura 10).

La manipulación física del cubo y su observación desde distintos ángulos simplifica notablemente un problema en apariencia complejo: determinar las medidas de los rectángulos que aparecen al cortar todas las secciones con el plano $x + y = 2z$ (figura 11).

Volviendo al trabajo en coordenadas, es relativamente fácil encontrar las ecuaciones de cada uno de los planos o las de sus intersecciones (figura 12).

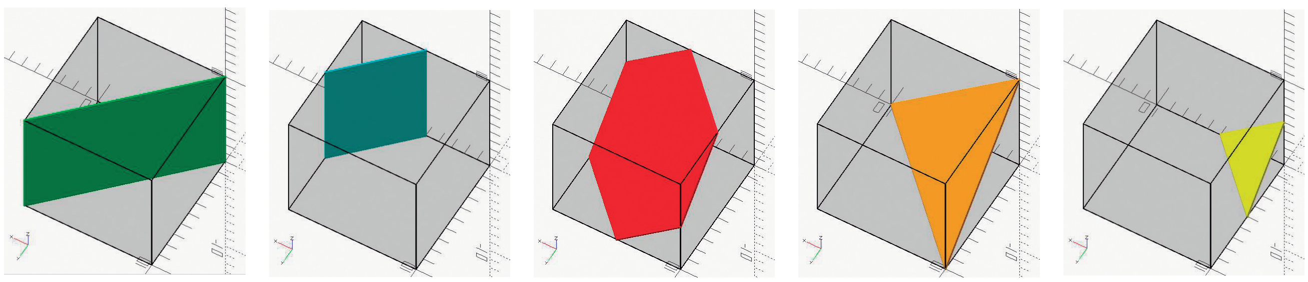

Figura 10. Cinco secciones diferentes. Cada una divide el cubo en dos volúmenes

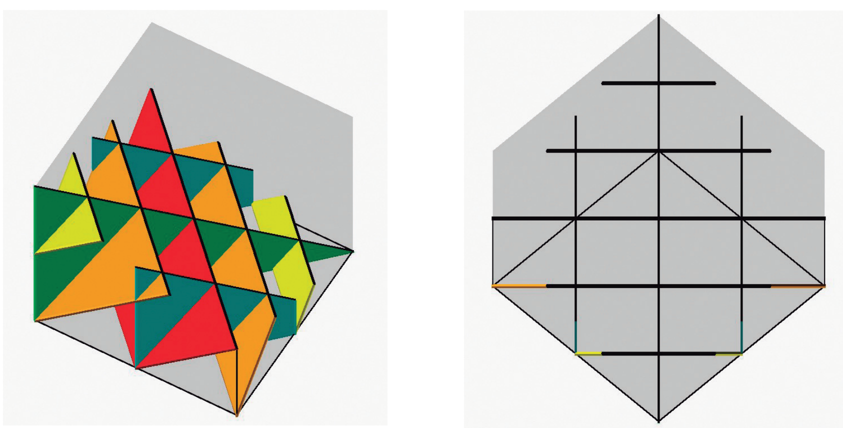

Figura 11. Rectángulos de 1/4 de la diagonal del cuadrado por 1/6 de la diagonal del cubo

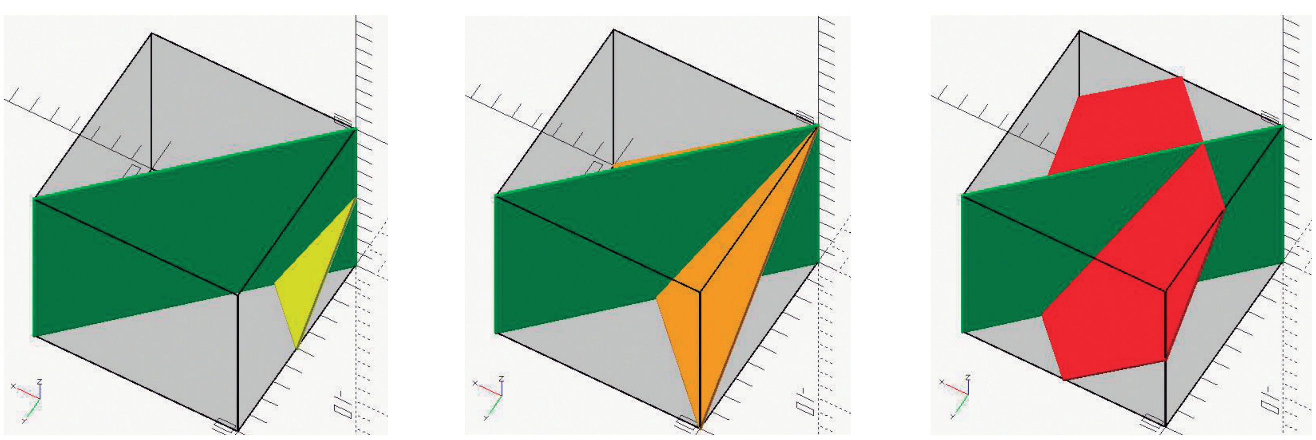

Figura 12. Tres intersecciones fáciles de calcular

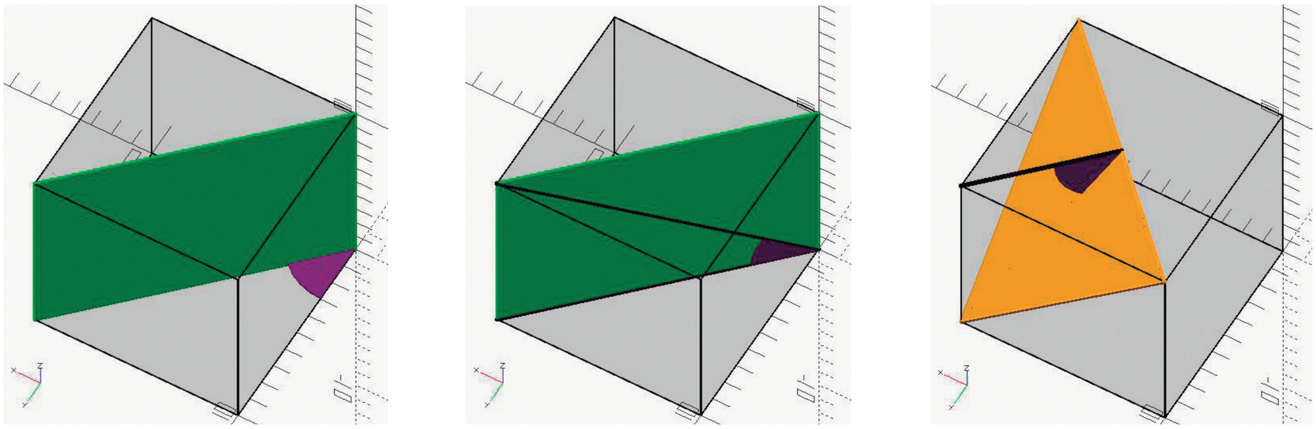

Figura 13. Tres ángulos fáciles de calcular

Finalmente, podemos calcular estos ángulos si estamos trabajando trigonometría, por ejemplo (figura 13).

Y, a partir del último de ellos, deducir los ángulos diédricos del tetraedro y la pirámide cuadrada (o, juntando dos de ellas, el octaedro) (figura 14).

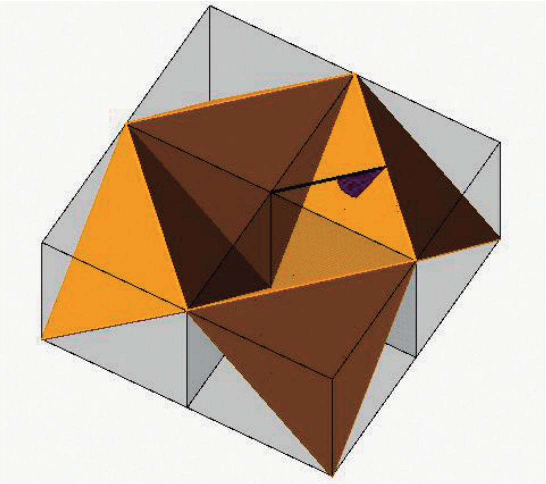

Figura 14. Cuatro tetraedros formados por triángulos naranjas, dejando una pirámide cuadrada invertida en medio

Conclusiones

Ocho secciones del cubo es un material versátil que permite trabajar diferentes temas de geometría 2D y 3D de manera manipulativa, ayudando, especialmente, al alumnado que tiene problemas para visualizar configuraciones espaciales.

Se trata, además, de un material económico y fácil de reproducir de manera casera. Pudiendo, incluso, ser la base de un proyecto STEAM en aquellos institutos que consten de herramientas de creación digital como cortadoras láser o impresoras 3D.

Animamos a todo el profesorado a crear su propia versión, llevarlo al aula y diseñar nuevas actividades basadas en él. ¡Y no dejéis de contarnos cómo os ha ido la experiencia!

MMACA
Museu de Matemàtiques de Catalunya
Cornellà de Llobregat (Barcelona)
<contacte@mmaca.cat>

251001 SUMA 109.indd 58 5/11/25 16:41