

La representación en matemáticas: un pilar fundamental para el desarrollo de la competencia

Onofre Monzó del Olmo

Suma núm. 110
pp. 29-37

Artículo recibido y aceptado en *Suma* en enero de 2026

Este artículo tiene como objetivo demostrar la importancia indispensable de la representación en el desarrollo de una competencia matemática robusta, explorando sus fundamentos teóricos, los beneficios que aporta a la comprensión y resolución de problemas, ilustrando su aplicación a través de ejemplos prácticos en diversos dominios matemáticos, analizando los desafíos y errores comunes derivados de una representación inadecuada, y proponiendo estrategias didácticas basadas en la evidencia para fomentar una fluidez representacional efectiva.

Palabras clave: Representación, Procesos, Competencia matemática.

La representación no es meramente un complemento en la enseñanza de las matemáticas; es un catalizador esencial que impulsa la comprensión profunda y el desarrollo de una competencia matemática robusta. Las representaciones externas actúan como sustitutos tangibles de los conceptos abstractos, haciéndolos más concretos y accesibles al encarnar sus

Representation in mathematics: a fundamental pillar for the development of competence // This article aims to demonstrate the indispensable importance of representation in the development of robust mathematical competence, exploring its theoretical foundations, the benefits it brings to the understanding and resolution of problems, illustrating its application through practical examples in various mathematical domains, analyzing the common challenges and errors derived from inadequate representation, and proposing evidence-based teaching strategies to foster effective representational fluency.

Keywords: Representation, Processes, Mathematical competence.

propiedades clave. Permiten a los y las estudiantes visualizar y explorar las ideas matemáticas desde múltiples perspectivas, lo que solidifica su comprensión y les permite ver el significado de los conceptos más allá de los números o símbolos aislados. Un estudiante demuestra una comprensión sólida de una idea si puede reconocerla en una variedad de sistemas de

representación cualitativamente diferentes, manipularla flexiblemente dentro de un sistema dado y traducirla con precisión de un sistema a otro.

La competencia matemática, un constructo esencial en la educación matemática contemporánea, trasciende la mera capacidad de realizar cálculos. En el núcleo de esta competencia se encuentra la representación matemática, un puente indispensable que conecta el pensamiento abstracto con la comprensión tangible. Los objetos matemáticos, por su naturaleza, son construcciones mentales y no son directamente accesibles a través de la percepción sensorial. Por lo tanto, se requiere de representaciones para interactuar con ellos, haciéndolos visibles, manipulables y comprensibles.

Fundamentos teóricos de la representación en la educación matemática

NATURALEZA Y FUNCIÓN DE LA REPRESENTACIÓN

El término *representación* ha sido empleado con frecuencia en la Psicología y la Didáctica de la Matemática para describir tanto la actividad cognitiva subyacente como las diversas formas de expresión utilizadas por los individuos. Las representaciones son fundamentales para la comprensión de la matemática, dado que sus objetos de estudio son construcciones mentales. Consecuentemente, se necesitan representaciones para interactuar con ellos. Estas herramientas ayudan a evidenciar estructuras matemáticas y, mediante la reflexión, permiten a los individuos tomar conciencia de sus ideas y de las relaciones existentes entre ellas. La selección adecuada de símbolos puede ser de gran ayuda para evocar los conceptos correctos, mientras que una elección inadecuada puede convertirse en un obstáculo. De hecho, el nivel y tipo de matemáticas que pueden ser abordadas y comprendidas están fuertemente condicionados por los sistemas de símbolos y representaciones empleados.

MODELOS CLAVE DE REPRESENTACIÓN

Diversos modelos teóricos han articulado el papel de la representación en el aprendizaje matemático.

La teoría de Jerome Bruner postula que el aprendizaje de nuevos conceptos progresa a través de tres etapas de representación:

- Enactiva: basada en la acción y la manipulación de materiales concretos. En esta etapa, el estudiante necesita interactuar físicamente con los objetos para comprender un concepto, aprendiendo a través del «hacer».
- Icónica: basada en la visualización. El estudiante representa el mundo a través de dibujos, imágenes y esquemas, aprendiendo a través del «ver».
- Simbólica: basada en la abstracción, utilizando códigos o símbolos, como el lenguaje matemático (números, letras, fórmulas). Esta es la etapa más abstracta, donde el conocimiento se codifica en símbolos.

El modelo de Richard Lesh amplía las formas de representación, incluyendo:

- Concreta (manipulativos): implica el uso de objetos físicos o digitales, como bloques multibase o regletas, para manipular y expresar ideas matemáticas.
- Pictórica (visual): se refiere al uso de dibujos, diagramas, gráficos o imágenes, ya sean hechos a mano o generados por ordenador, para ilustrar conceptos.
- Situaciones reales (contextual): conecta las matemáticas con situaciones y objetos del mundo real, permitiendo a los estudiantes aplicar lo aprendido en contextos prácticos.
- Símbolos escritos: utiliza letras, dígitos y otros símbolos matemáticos para expresar relaciones numéricas, algebraicas o geométricas.
- Símbolos verbales: consiste en describir conceptos matemáticos en palabras, ya sean habladas o escritas.

Raymond Duval postula que los objetos matemáticos, al no ser accesibles directamente a la percepción, solo pueden ser aprehendidos a través de representaciones semióticas. Propone la existencia de diferentes «registros» de representación (textos, tablas, gráficas,

figuras, esquemas, expresiones algebraicas, símbolos. Duval distingue dos tipos de transformaciones esenciales para la actividad matemática y el aprendizaje:

- Tratamientos: transformaciones internas que ocurren dentro del mismo registro de representación, siguiendo sus reglas específicas.
- Conversiones: transformaciones que implican cambiar de un registro de representación a otro sin alterar el objeto matemático denotado.

El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) enfatiza que la enseñanza efectiva de las matemáticas involucra a los estudiantes en la creación de conexiones entre las representaciones matemáticas. Debido a la naturaleza abstracta de las matemáticas, las ideas matemáticas son accesibles solamente a través de sus representaciones. El NCTM identifica cinco tipos clave de representaciones en la enseñanza de las matemáticas: visual, simbólica, verbal, contextual y física. Para desarrollar la «competencia representacional», y propone tres estrategias específicas: fomentar la selección intencionada de representaciones, promover el diálogo explícito sobre las conexiones entre ellas y alternar la dirección de las conexiones realizadas entre representaciones.

En la matematización horizontal, el alumnado debe comenzar por matematizar un contenido o tema de la realidad para luego analizar su propia actividad matemática. El alumnado utiliza herramientas matemáticas para organizar y resolver problemas situados en situaciones de la vida real. Esto implica actividades que incluyan:

- Identificar las matemáticas que pueden ser relevantes respecto al problema.
- Traducir el problema a un modelo matemático.
- Representar el problema de modo diferente.
- Comprender la relación entre los lenguajes natural, simbólico y formal.
- Encontrar regularidades, relaciones y patrones en la situación que se considera.
- Reconocer isomorfismos o analogías con otros problemas ya conocidos.
- Utilizar herramientas y recursos adecuados.

La matematización vertical se refiere al proceso de reorganización dentro del sistema matemático que resulta en atajos mediante el uso de conexiones entre conceptos y estrategias. Se trata de moverse dentro del mundo abstracto de los símbolos. Esto implica actividades que incluyan:

- Utilizar diferentes representaciones y modelos.
- Usar los lenguajes simbólico, formal y técnico, y sus operaciones.
- Refinar y ajustar los modelos matemáticos; combinar e integrar modelos.
- Argumentar, inducir y generalizar.

Facilitación de la resolución de problemas

Las representaciones son elementos esenciales para apoyar la comunicación de ideas matemáticas, tanto a uno mismo como a los demás, y para reconocer conexiones entre conceptos matemáticos relacionados. La competencia matemática incluye la habilidad para interpretar y expresar con claridad y precisión informaciones, datos y argumentaciones.

La fluidez representacional, definida como la capacidad de usar y traducir con facilidad entre diversas representaciones, conduce a una comprensión más flexible y conectada de las matemáticas. La interconexión y la fluidez en el uso de múltiples representaciones no solo profundizan la comprensión de conceptos matemáticos individuales, sino que también cultivan una forma de pensamiento matemático más adaptable, flexible y abstracta. La flexibilidad en el uso de representaciones permite al alumnado seleccionar la más efectiva para un problema, lo que fortalece sus habilidades de resolución y fomenta una comprensión más completa de los conceptos. La habilidad de moverse fluidamente entre representaciones (por ejemplo, una descripción de una situación, una expresión algebraica, una tabla y un gráfico para una función) permite a los y las estudiantes construir un modelo mental más robusto y completo del objeto matemático.

Ejemplos ilustrativos de la importancia de la representación en diversos dominios matemáticos

COMPRESIÓN DEL VALOR POSICIONAL

Para representar el número 325, se pueden usar bloques multibase: tres placas para centenas, dos barras para decenas y cinco cubos pequeños para unidades, o dibujar esquemas de los bloques multibase, escribir el número «325», o describir el número como «trescientos veinte y cinco» (figura 1).

FRACCIONES

Si tomamos una manzana y la cortamos por la mitad podemos mostrar que cada parte es «la mitad» o un «medio» (figura 2).

También podemos dibujar un círculo dividido en dos partes iguales, coloreando una de ellas para representar $\frac{1}{2}$. O dibujar una pizza y dividirla en dos porciones (figura 3).

Y ubicar el punto $\frac{1}{2}$ entre el 0 y el 1 en una recta. O escribir el número $\frac{1}{2}$ (figura 4).

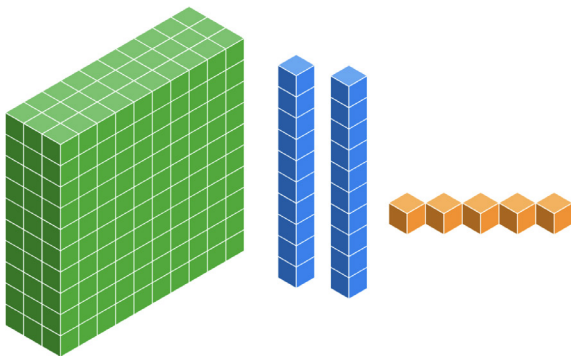


Figura 1. Bloques multibase



Figura 2. Manzana en dos partes

OPERACIONES CON FRACCIONES

Para comparar fracciones como $\frac{4}{6}$ y $\frac{3}{8}$, o resolver problemas de la vida diaria que involucren fracciones, como ajustar una receta o calcular el consumo de líquidos, podemos utilizar regletas o fichas de fracciones para representar $\frac{4}{6}$ y $\frac{3}{8}$ y compararlas físicamente, observando cual ocupa más espacio, también podemos dibujar fracciones como parte de un todo (por ejemplo, un círculo o rectángulo dividido en partes iguales y sombreadas) o usar diagramas de barras para visualizar las cantidades y sus proporciones. También podemos escribir las fracciones como $\frac{4}{6}$ y $\frac{3}{8}$ y comparar sus valores o usar la notación de fracciones para sumas y restas (figura 5).

MODELIZACIÓN DE RELACIONES Y PATRONES (FUNCIONES LINEALES)

Para describir la relación entre variables, como el costo de un servicio en función del uso (por ejemplo, un plan de telefonía) o el crecimiento/decrecimiento de una cantidad a lo largo del tiempo, podemos hacer una descripción de la situación problemática en lenguaje natural (por ejemplo, «Una compañía de telefonía cobra 6 céntimos de euro por establecimiento de llamada y 3 céntimos por minuto hablado»). U organizar pares de datos (por ejemplo, minutos hablados vs. costo total) en una tabla para mostrar la



Figura 3. Pizza en dos porciones



Figura 4. Representación de la fracción en la recta numérica



Figura 5. Regleta de fracciones

relación numérica entre las variables. Y trazar los puntos de la tabla en un plano cartesiano para visualizar la relación lineal como una línea recta, lo que permite identificar la pendiente y la intersección con los ejes. Por último, podemos escribir la función lineal en su forma $y = mx + b$ (ej., $y = 0.03x + 0.06$), donde m es la pendiente (tasa de cambio constante) y b es la ordenada al origen (valor cuando $x = 0$).

CÁLCULO DE ÁREAS Y PERÍMETROS CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Para determinar el área total de una figura geométrica compuesta o las dimensiones de un cuadrado cuando su lado aumenta y su área cambia. Podemos realizar una representación visual de la figura geométrica, a menudo dividida en sub-áreas más simples (por ejemplo, un terreno rectangular compuesto por cuadrados y rectángulos más pequeños). O escribir expresiones algebraicas para el área de cada parte y luego sumarlas para obtener el área total (por ejemplo, $x \cdot x + 4 \cdot (1 \cdot x) + 3 \cdot (1 \cdot 1)$ o $(x + 3)(x + 1)$ para un terreno). También, ecuaciones para el perímetro o el área de cuadrados (por ejemplo, x^2 para el área de un cuadrado de lado x) (figura 6).

INTERPRETACIÓN Y COMUNICACIÓN DE CONCEPTOS ESPACIALES (COORDENADAS Y DISTANCIAS)

Para ubicar puntos en un plano cartesiano, calcular distancias entre ellos, o determinar el área de un triángulo a partir de las coordenadas de sus vértices, podemos usar pares ordenados como $A(2,-3)$ para el centro de una circunferencia o $N(2,4)$ para un punto, que son representaciones abstractas de ubicaciones en el espacio. O trazar los puntos y figuras geométricas

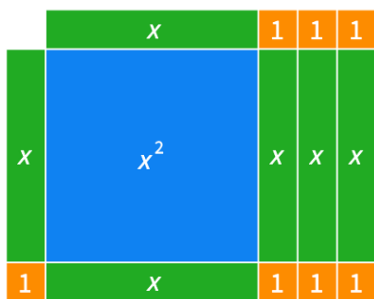


Figura 6. División del área en sub-áreas

(circunferencias, triángulos, regiones de pastoreo) en un sistema de referencia cartesiano, permitiendo una visualización de las relaciones espaciales. O describir la posición de objetos en el espacio (por ejemplo, «50 km al norte y 40 km al oeste») o las características de las figuras en lenguaje natural.

PROPIEDADES DE FIGURAS Y TRANSFORMACIONES

Si queremos calcular la medida de un ángulo exterior de un polígono regular (por ejemplo, un hexágono) o comprender las propiedades de figuras bajo transformaciones. Podemos utilizar un dibujo del hexágono regular con el lado prolongado para mostrar el ángulo exterior, permitiendo una observación directa de la relación. O usar de ecuaciones para determinar el valor del ángulo (por ejemplo, $360^\circ \div 6 = 60^\circ$ para el ángulo central de un hexágono regular, o la suma de ángulos interiores de un triángulo). También podemos explicar las características de un hexágono regular, la relación entre ángulos interiores y exteriores, o las propiedades de las figuras bajo transformaciones en lenguaje claro (figura 7).

ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE DATOS

Aquí aparecen las notas de los alumnos cuatro clases de primero de la ESO en matemáticas (tabla 1).

¿Determina la media un conocimiento de la situación de estas cuatro clases, respecto la nota en matemáticas? Si calculamos las medias de las cuatro clases, resulta que la media de las cuatro es 5. Con lo que la media no nos proporciona suficiente información de cómo se distribuyen las cuatro clases.

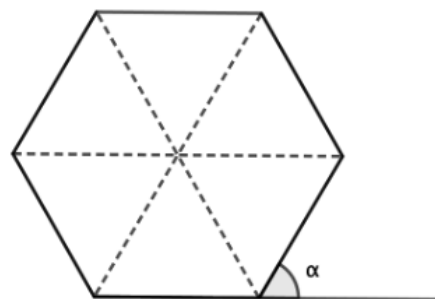


Figura 7. Medida del ángulo exterior

Si calculamos sus desviaciones típicas, obtenemos que: $\sigma_A = 1,21$; $\sigma_B = 1,75$; $\sigma_C = 3,06$ y $\sigma_A = 4,05$. Esto nos aporta un poco más de información, sobre todo en cuanto a la dispersión de las notas en cada clase. Pero no es hasta que tenemos una representación más adecuada, en este caso diagramas de barras, que no nos hacemos una idea de cómo se distribuyen las notas en cada clase (figura 8).

PREDICCIÓN Y MODELIZACIÓN (PROBABILIDAD)

Si consideramos el enunciado habitual del teorema de la probabilidad total:

Si A_1, A_2, \dots, A_n son un sistema completo de sucesos tal que $P(A_i) \neq 0, \forall i = 1 \dots n$, entonces la probabilidad de un suceso B cualquiera es:

$$P(B) = P(A_1)P(B | A_1) + P(A_2)P(B | A_2) + \dots + P(A_n)P(B | A_n)$$

Observamos que no aporta un conocimiento profundo de la relación entre los sucesos. Sin embargo, si, para el caso de dos sucesos, consideramos una representación en árbol (figura 9).

$$P(B) = P(A)P(B | A) + P(\text{NoA})P(B | \text{NoA})$$

La relación entre los sucesos se justifica de forma natural.

En el caso del teorema de Bayes:

Si A_1, A_2, \dots, A_n son un sistema completo de sucesos tal que $P(A_i) \neq 0, \forall i = 1 \dots n$, entonces para un suceso B cualquiera se verifica:

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i)P(B | A_i)}{P(A_1)P(B | A_1) + P(A_2)P(B | A_2) + \dots + P(A_n)P(B | A_n)}$$

NOTAS	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	0	0	0	4	6	10	6	4	0	0	0
B	0	0	2	5	5	6	7	2	2	1	0
C	2	3	3	3	3	2	3	3	3	3	2
D	6	4	3	1	1	0	1	1	3	4	6

Tabla 1. Notas de cuatro clases de primero de la ESO

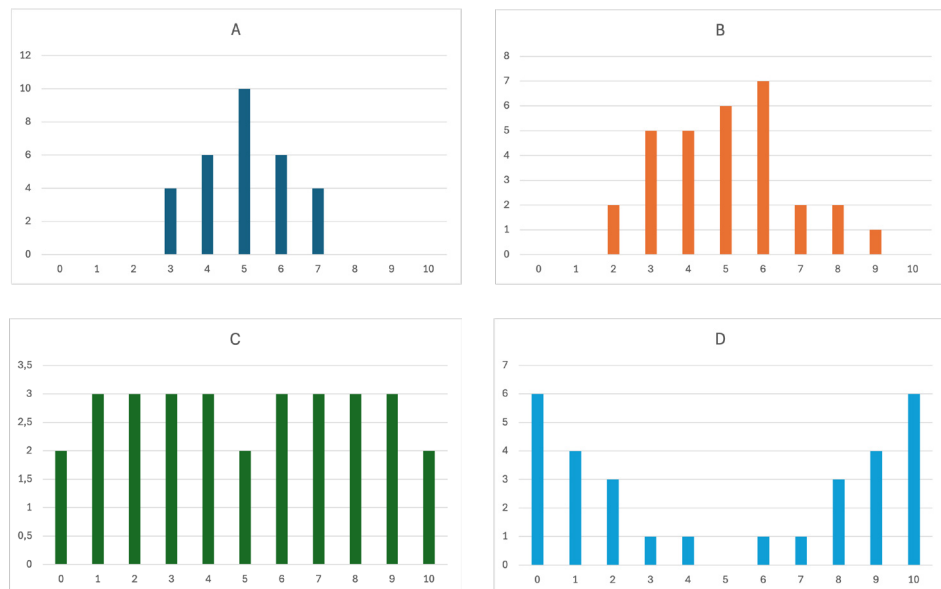


Figura 8. Diagramas de barras con la distribución de las notas de las cuatro clases

esto para cualquier $i = 1 \dots n$.

Y si consideramos los datos en una tabla de contingencia:

SUCESOS	B	No B	
A	$P(A \text{ y } B)$	$P(A \text{ y No } B)$	$P(A)$
No A	$P(\text{No } A \text{ y } B)$	$P(\text{No } A \text{ y No } B)$	$P(\text{No } A)$
	$P(B)$	$P(\text{No } B)$	1

$$P(A|B) = \frac{P(A \text{ y } B)}{P(B)} = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Desafíos y errores comunes por representación inadecuada

Una de las principales dificultades surge de la falta de comprensión del lenguaje matemático, que es preciso y riguroso, a diferencia del lenguaje natural. Esto puede llevar a la memorización de fórmulas sin un significado subyacente, dificultando la notación y la organización de datos para la resolución de problemas. Se observan errores específicos en diversas áreas:

- Decimales: confusión del valor posicional (décimas con centésimas) y falta de alineación de cifras en operaciones.
- Fracciones: falta de comprensión de una fracción como un solo número, operando numerador y denominador como entidades independientes. Esto lleva a errores mecánicos en la división, como invertir el dividendo en lugar del divisor.

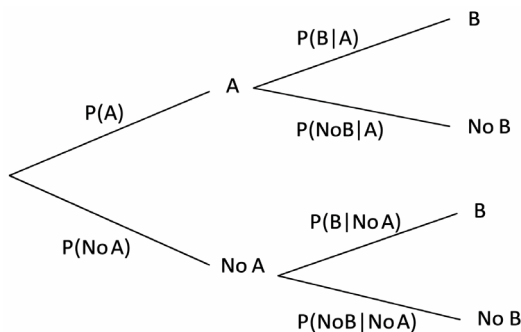


Figura 9

- Potencias y raíces: interpretación incorrecta del significado de las potencias (multiplicar base por exponente en lugar de multiplicación iterada) y de los exponentes negativos. En raíces, se puede confundir el cálculo con una división del subradical por el índice.
- Álgebra y geometría: errores algebraicos y el uso de definiciones o teoremas deformados son comunes. En geometría, la dificultad para obtener información espacial a partir de representaciones visuales inadecuadas es un problema recurrente. La representación gráfica de superficies cuadráticas, por ejemplo, es una fuente frecuente de errores, a menudo ligada a fallos algebraicos previos.

Los y las estudiantes pueden confundir la representación con el objeto matemático en sí, lo que limita su comprensión del concepto abstracto. A menudo, al analizar múltiples representaciones, tienden a centrarse en la más familiar y en sus características superficiales, en lugar de las que son conceptualmente relevantes. Las representaciones icónicas inadecuadas pueden llevar a errores en la interpretación de la información espacial. Además, el uso prematuro de conceptos o una base de conocimientos insuficiente pueden generar obstáculos didácticos. Las representaciones visuales desorganizadas también pueden obstaculizar la resolución precisa de problemas. Un error común es la falta de verificación de las soluciones, lo que indica una comprensión superficial del proceso.

Cuando la enseñanza de las matemáticas se centra excesivamente en lo abstracto sin el apoyo de representaciones concretas, surgen problemas de aprendizaje que se traducen en bloqueos y pérdida de motivación a medida que la complejidad aumenta. Las ideas matemáticas pueden permanecer abstractas e inaccesibles para algunas personas. Los y las estudiantes pueden llegar a saber *cómo* aplicar una fórmula, pero sin comprender *para qué* lo hacen o el significado de sus resultados, lo que hace que estos carezcan de sentido para ellos. Este enfoque promueve un aprendizaje pasivo, basado en la repetición y la memorización de asociaciones estímulo-respuesta, en lugar de una comprensión significativa.

Estrategias didácticas para fomentar la fluidez representacional

ENFOQUE CONCRETO-PICTÓRICO-ABSTRACTO (CPA)

Este enfoque sistemático desarrolla la comprensión matemática. Implica una progresión desde la manipulación de materiales concretos, pasando por la representación pictórica, hasta la comprensión de símbolos abstractos. Es crucial hacer conexiones explícitas entre estas modalidades, de modo que el alumnado comprenda cómo se relacionan. A medida que el alumnado avanza en su comprensión, se deben reducir progresivamente los apoyos concretos, animándole a construir una comprensión abstracta más completa.

FOMENTO DE LA TRADUCCIÓN Y CONEXIÓN ENTRE REGISTROS

La capacidad de traducir y conectar entre diferentes representaciones es un indicador clave de la fluidez representacional. Para ello, se deben fomentar las siguientes prácticas:

- Selección intencionada: animar al alumnado a elegir la representación más adecuada para un problema o situación específica.
- Diálogo explícito: promover discusiones donde el alumnado articule cómo diferentes representaciones se relacionan entre sí. Esto puede incluir pedirles que expliquen sus procesos utilizando distintos tipos de representaciones.
- Alternar la dirección de las conexiones: impulsar al alumnado a moverse en ambas direcciones entre representaciones (ej., de un gráfico a una ecuación y viceversa).
- Actividades de conversión: diseñar actividades que requieran explícitamente la conversión entre diferentes registros, como de representaciones gráficas a algebraicas.
- Uso múltiple: alentar al alumnado a utilizar múltiples formas de representación para dar sentido a los conceptos matemáticos.
- Juegos y práctica variada: incorporar juegos y ejercicios variados que permitan al alumnado practicar y consolidar la fluidez en la tra-

ducción entre representaciones, haciendo el aprendizaje más atractivo.

La tecnología ofrece oportunidades valiosas para enriquecer el uso de representaciones. La integración de aplicaciones interactivas y software que proporcionan «imágenes en movimiento» o manipulativos dinámicos puede mejorar la comprensión de conceptos numéricos complejos. Los errores deben ser vistos como oportunidades de aprendizaje. Es fundamental abordarlos de forma constructiva, proporcionando retroalimentación específica y detallada sobre los métodos y procesos utilizados por los estudiantes.

Conectar los conceptos matemáticos con experiencias reales y contextos cotidianos ayuda a los estudiantes a internalizar y aplicar los conocimientos de manera más efectiva. Mostrar la utilidad real del tema impartido puede incrementar el entusiasmo y la motivación de los estudiantes. Planificar didácticamente procesos que permitan al alumnado interactuar con objetos reales de su entorno (personas, juguetes, etc.) facilita la construcción reflexiva del conocimiento matemático.

Conclusiones

La representación matemática emerge como un pilar insustituible en el desarrollo de la competencia matemática. Como se ha demostrado, los objetos matemáticos son inherentemente abstractos y solo se hacen accesibles a la mente humana a través de diversas formas de representación. Estas no son meras ayudas didácticas, sino el medio fundamental por el cual se construyen, se comprenden y se comunican las ideas matemáticas. Sin embargo, la falta de una representación adecuada o una fluidez limitada en su uso conduce a errores conceptuales y procedimentales significativos, obstáculos cognitivos y una enseñanza abstracta que puede generar bloqueos y desmotivación. Estos desafíos resaltan la necesidad crítica de una instrucción intencionada en el uso de representaciones.

En suma, para fomentar una competencia matemática robusta, es imperativo que la práctica didáctica

se centre en un enfoque que promueva activamente la traducción y conexión entre registros, integre estratégicamente la tecnología, aborde los errores de manera constructiva y contextualice los conceptos matemáticos en situaciones relevantes. Al hacerlo, la educación matemática puede trascender la memorización mecánica, transformándose en una experiencia significativa, accesible y poderosa para todo el alumnado, equipándolo con las herramientas necesarias para comprender y transformar el mundo que le rodea.

Referencias bibliográficas

- BELL, A., y JANVIER, C. (1981), *The interpretation of graphs representing situations for the learning of mathematics*, 2(1), 34-42.
- BRUNER, J. (1966), (1974), *Toward a Theory of Instruction*, Harvard University Press.
- (1966), (1969), *Hacia una teoría de la instrucción*, Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana, México.
- DUVAL, R. (1988), «Graphiques et équations: l'Articulation de deux registres», *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, 235-253, en Sánchez, E. (Ed.), *Antología en Educación Matemática*, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.
- (1993), «Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée». *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, 5, 37-65, en Hitt, E. (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa*, Grupo Editorial Iberoamérica, México.
- (1995), *Semiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels*, Peter Lang, Berna.
- FREUDENTHAL, H. (2002), *Didactical phenomenology of mathematical structures*, Springer Netherlands, Dordrecht.
- (2012), *Mathematics as an educational task*, Springer, Luxemburgo.
- JANVIER, C. (1978), *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations. Studies and teaching experiments*, Tesis Doctoral, Universidad de Nottingham.
- (1987), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Symposium organized by CI-RADE (Centre Interdisciplinaire de Recherche sur l'Apprentissage et le Développement en Education), of Université du Quebec, Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Université du Quebec, Montréal.
- LESH, R. (1981), «Applied mathematical problem solving», *Educational studies in mathematics*, 12(2), 235-264.
- LESH, R., T. R. POST Y M. BEHER (1987), «Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving», *In Problems of representations in the teaching and learning of mathematics*, 33-40, Lawrence Erlbaum, Mahwah, Nueva Jersey.
- NCTM (2000), *Principios y estándares para la educación matemática*, traducción y edición (2003), SAEM «Thales», Sevilla.
- (2014), *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All*, <https://www.nctm.org/uploaded/Files/Standards_and_Positions/Principles_to_Actions/Principles%20to%20Actions%20overview.pdf>.