suma+ 84
Artículos
Marzo 2017
pp. 9-19

Aspectos matemáticos del triángulo armónico de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)[1]

M.ª Rosa Massa Esteve

Las matemáticas del siglo XVII florecieron debido a su algebrización y a la introducción del infinito. En este artículo presentamos una aproximación a una de sus figuras, Gottfried Wilhelm Leibniz (Leipzig, 1646-Hannover, 1716). Se analizan también algunos aspectos matemáticos del triángulo armónico, nuevo objeto creado por Leibniz a partir del triángulo aritmético de Pascal, que muestran que el infinito se convierte en un elemento más en los cálculos matemáticos de Leibniz. Cabe destacar la utilidad de estos textos de Leibniz sobre el triángulo aritmético y el triángulo armónico, para la enseñanza de las matemáticas.

Palabras clave: Gottfried Wilhelm Leibniz, Siglo XVII, Triángulo armónico, Triángulo aritmético, Enseñanza y aprendizaje.

Some mathematical aspects of Gottfried Wilhelm Leibniz's (1646-1716) harmonic triangle

Seventeenth-century mathematics flourished because of its algebraization and the introduction of infinity. In this article, we present an approach to one of its outstanding figures, Gottfried Wilhelm Leibniz (Leipzig, 1646-Hannover, 1716). We also analyze some mathematical aspects of the harmonic triangle, a new object created by Leibniz from Pascal's arithmetic triangle, which show how infinity became one more element in Leibniz's mathematical calculations. It should be mentioned that these texts on the arithmetical triangle and the harmonic triangle are useful for teaching mathematics.

Keywords: Gottfried Wilhelm Leibniz, Seventeenth-century mathematics, Harmonic triangle, Arithmetical triangle, Teaching and learning.

El 14 de noviembre de 2016 se cumplieron 300 años de la muerte de uno de los matemáticos más relevantes de la historia, Gottfried Wilhelm Leibniz (Leipzig, 1646 – Hannover, 1716). Este genio universal contribuyó al desarrollo de casi todas las disciplinas: la filosofía, las ciencias, el derecho, la tecnología, etc. Nos ha dejado unos 100 000 folios manuscritos que están conservados en la Biblioteca Leibniz de Hannover, 4 000 de estos ya han sido digitalizados y se pueden consultar en <http://ritter.bbaw.de>, y casi la mitad ya han sido publicados en <http://www.leibniz-edition.de>, de hecho solo se conoce una cuarta parte de su producción matemática[2].

Dado que la bibliografía sobre la figura de Leibniz es extensa y muy rica, y su vida fue muy intensa y agitada, en este artículo, primero, nos aproximamos a este científico considerando algunos datos biográficos, así como describiendo algunas de sus contribuciones como matemático, filósofo, ingeniero y físico.[3] En una segunda parte y con el propósito de mostrar cómo Leibniz trabajaba las matemáticas, se analizan las ideas subyacentes de un objeto inventado por él mismo, *el triángulo armónico*, que es una tabla triangular de números que se forma a partir del triángulo aritmético (hoy llamado también triángulo combi-

Artículo solicitado por *Suma* en septiembre de 2016 y aceptado en febrero de 2017

natorio). El triángulo armónico constituye una herramienta de cálculo muy potente para trabajar con las series infinitas, las integrales (llamadas cuadraturas en la época), y para aproximar la cuadratura del círculo.

Una aproximación a la figura de Leibniz

Leibniz nació el 1 de julio de 1646 en Leipzig (Electorado de Sajonia, Alemania). Su padre, Friedrich Leibniz era profesor de filosofía moral y trabajó en diversos puestos administrativos en la Universidad de Leipzig y su madre, Katherina Schmuck era hija de un jurista y profesor de Derecho (Antognazza, 2009). En su infancia, Leibniz estudió en la escuela de San Nicolás de Leipzig donde su precocidad despertó enseguida el interés de sus profesores. Cuando tenía seis años, murió su padre y por recomendación de un pariente se le dejó libre acceso a la biblioteca paterna. Allí leyó a los clásicos latinos, más tarde a los escolásticos y después a los *modernos*, como René Descartes (1596-1650), entre otros. Esta lectura multidisciplinar y asidua, junto a su inteligencia natural fueron los cimientos de su genialidad universal, de modo que cuando a los 15 años ingresó en la Universidad de Leipzig, ya disponía de una buena formación autodidacta.

En la Universidad de Leipzig, Leibniz fue instruido en la tradición aristotélica y estudió filosofía y jurisprudencia. Dos años más tarde fue estudiante en la Universidad de Jena, donde Erhard Weigel (1625-1699), profesor de matemáticas, le enseñó a comprender la geometría euclidiana, ideas sobre la filosofía de las matemáticas y también le introdujo en la aritmética binaria (Brancato, 2016).

En el año 1666, publicó la obra titulada *Dissertatio de arte combinatoria*, donde se muestran los conocimientos de Leibniz contenidos en las principales obras matemáticas ya publicadas. Así, al principio de esta obra cuando Leibniz explicaba los usos de los problemas combinatorios, ponía el emblema de la figura 1. En esta ilustración, el espíritu de Aristóteles está representado con los cuatro elementos: fuego, aire, agua y tierra y a partir de su combinación se obtiene calor, humedad, frío y sequedad. En su obra esta cuestión sirvió como un segundo ejemplo de las aplicaciones de los primeros dos problemas para encontrar combinaciones sin repetición.

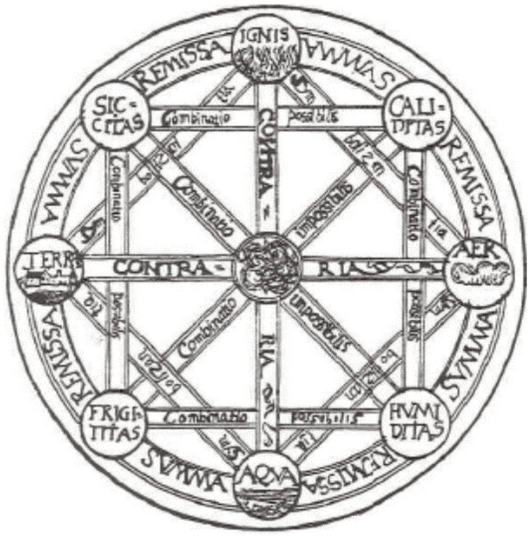

Figura 1. Esquema en el manuscrito de Leibniz (Leibniz, A VI, 1, 178)

Leibniz menciona el análisis especioso que perfeccionó Descartes,[4] así como a Johannes Buteo (1492-aprox 1572), a Niccolò Tartaglia (1500-1557) y la práctica aritmética de Girolamo Cardano (1501-76), y también las obras de Thomas Hobbes (1588-1679) y de Anastasius Kircher (1602-1680), entre otros. Cabe señalar que Leibniz dedica todo un apartado a Ramon Llull (1232-1316) y a sus obras *Kabbala* y *Ars Magna*, enumerando algunos autores que se inspiraron en sus ideas.

Leibniz continuó sus estudios en Altdorf donde se doctoró en 1667 con una tesis titulada: *Disputatio inauguralis de casibus perplexis in jure*. Fue invitado a quedarse como profesor en esta universidad, pero rechazó la invitación alegando que tenía otros propósitos (Antognazza, 2009). Primero trabajó en Nuremberg como secretario de una sociedad alquimista dedicada a experimentos secretos, incluida la búsqueda de la piedra filosofal. Más tarde en 1668, Leibniz fue a Mainz para trabajar con el elector y príncipe-arzobispo Johann Philip von Schönborn. Así empezó una amplia correspondencia, que ya en 1671 hizo que estuviera en contacto con los secretarios de la Royal Society de Londres y la Académie des Sciences de París, así como con Kircher en Italia y con Otto von Guericke (1602-86) en Magdeburg (Alemania) (Kreiling, 1970-91).

Durante los años 1672 al 1676 vivió en París, a donde fue en misión diplomática estando al servicio de la corte de Mainz. Se trataba de impedir los ataques franceses a las tierras del Rin por parte de Luis XIV (Hofmann, 1974). Allí la relación de Leibniz con Christian Huygens (1629-1695) fue determinante para su formación en matemáticas. Leyó, bajo su recomendación, algunas obras de James Gregory (1638-1675), Nicholas Mercator (1620-1687), John Wallis (1616-1703) y Pietro Mengoli (1626/27-1686) entre otros. En enero de 1673, Leibniz fue a Londres donde conoció e inició su gran amistad con Henry Oldenburg (1619-1677), secretario de la Royal Society de Londres. También estuvo en contacto con John Collins (1625-1683), John Pell (1611-1685), Robert Hooke (1635-1703) y Robert Boyle (1627-1691).

Leibniz escribió sus primeros textos sobre el cálculo diferencial e integral entre 1673 y 1676. El tratado principal, *De Quadratura Arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis* (1675-1676) tuvo que esperar 300 años para la primera publicación de su edición crítica, preparada por Knobloch en 1993, que el año 2016 se ha vuelto a editar (Knobloch, 2016). Leibniz basó sus cuadraturas en la idea de infinitesimal y en la suma de las diferencias de las series, y utilizó figuras geométricas (figura 2) para hallar las cuadraturas de superficies bajo una curva (Knobloch, 2006). De hecho, se ha de considerar a Leibniz junto con Newton, uno de los inventores del cálculo diferencial e integral, y que además, siguió un camino distinto al del método de las fluxiones de Newton.

También es en esta época de París, cuando Leibniz empezó a trabajar en su invento, la máquina de calcular, un artificio diseñado para sumar, restar, multiplicar y dividir por repetición mecánica (Mackensen, 2000). De hecho, Blaise Pascal (1623-63) ya había inventado una máquina de calcular, pero solamente con dos operaciones, sumar y restar. Leibniz justificaba la construcción de la máquina para ahorrar tiempo en hacer los cálculos.

Figura 3. La máquina aritmética
con las cuatro operaciones (1690)

Leibniz presentó en su obra sobre combinatoria una tabla de números que después usaría en su máquina de calcular. En una carta de 1671 al duque Johann Friedrich de Hannover Leibniz afirmaba que esta tabla era la base para su máquina de calcular. Aquí Leibniz ya hacía uso de su lema: *Theoria cum praxi* (Teoría con práctica) que desarrollaría a lo largo de su vida. El 20 de junio de 1671, Pierre de Carcavi (1600-1684), bibliotecario real en París, pidió a Leibniz que le enviara la máquina para enseñarla a Jean-Baptiste Colbert (1619-1683), primer ministro de Luis XIV (Leibniz, B II 1, 207-208). Aunque aún estaba en fase de diseño, un modelo fue construido en 1672, y en su visita a Londres la máquina fue mostrada

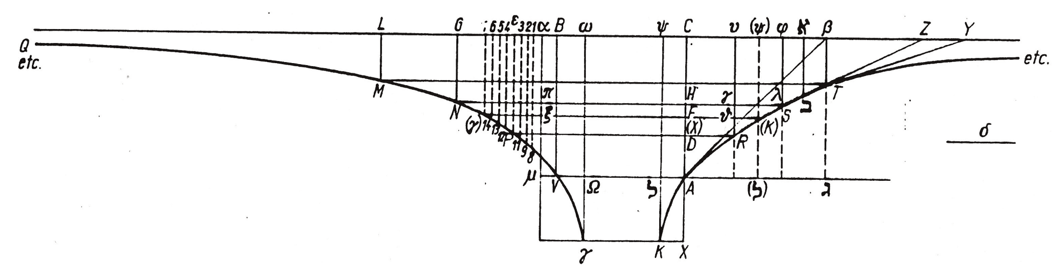

Figura 2. Cuadratura de la hipérbola (Leibniz VII 6 N. 51, 624)

> Esta máquina se perdió después de la muerte de Leibniz y se encontró en 1880 en el sótano de una iglesia de la universidad de Göttingen

en la Royal Society el 1 de febrero de 1673. Este modelo sirvió a Leibniz para que el 19 de abril de 1673, a la edad de 26 años, le nombraran miembro *(fellow)* de la Academia Inglesa (Antognazza, 2009). Leibniz siguió perfeccionando la máquina hasta que en 1690 creó el modelo de la figura 3.

Esta máquina se perdió después de la muerte de Leibniz y se encontró en 1880 en el sótano de una iglesia de la Universidad de Göttingen, devolviéndola a la Biblioteca de Hannover, donde permanece expuesta. En el período 1894-1896, la máquina fue estudiada y reparada.

Durante su estancia en París, en julio de 1673, Edme Mariotte (1620-1684) le presentó a Leibniz el problema del péndulo que este solucionó casi el mismo día (Popp y Stein, 2000). La cuestión que le planteó Mariotte no se conserva, pero en cambio sí la respuesta de Leibniz, que comenta: «utilizando el método de los indivisibles, así como los principios de mecánica he llegado a la conclusión de la solución, como usted entenderá de golpe». (Leibniz, A III, 1, 105). Y le adjunta un dibujo de un péndulo. Aquí se vuelve a manifestar la idea de Leibniz: *Theoria cum praxi*.

El 4 de octubre de 1676 retornó a Hannover después de haber intentado en vano quedarse en París (Hofmann, 1974). En ruta a Hannover visitó Holanda, donde contactó con Jan Hudde (1628-1704) y con Antonie van Leeuwenhoeck (1632-1723) y en La Haya tuvo también una serie de conversaciones con Baruch Spinoza (1632-1677).

Desde 1676 hasta su muerte sirvió en la casa de Hannover como consejero y bibliotecario. Primero, desde diciembre de 1676 hasta el final de 1679, con el Duque Johann Friedrich de Braunschweig-Lüneburg (1625-1679), a continuación, desde el año 1679 hasta el año 1698, sirvió a su sucesor el Duque Ernesto Augusto (1629-1698), más tarde príncipe elector, y también hasta su muerte, sirvió a Georg Ludwig, más tarde rey Jorge I de Gran Bretaña.

En octubre de 1684, continuó investigando sobre el cálculo diferencial e integral. En la revista *Acta Eruditorum*, que había creado junto con Otto Mencke el año 1682, publicó su artículo sobre el cálculo diferencial, titulado *Nova Methodus pro Maximis et Minimis* y un poco más tarde, otro artículo centrado en el cálculo integral, titulado *Geometria Recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* (1686).

Leibniz estuvo ocupado desde 1682 a 1686 con problemas de ingeniería en las minas de las montañas de Harz, situadas al sudeste de Hannover, entre Wolfenbüttel y Göttingen. Leibniz propuso un molino de viento para elevar el agua de las minas más profundas y trabajó intensamente en la elaboración de este artefacto. También presentó un proyecto de circulación del agua estableciendo donde debían ponerse los molinos. Además de trabajar presencialmente en las minas, Leibniz recopiló los términos del vocabulario de las minas en una lista con esquemas y explicaciones para que así los mineros pudieran solucionar las dificultades al realizar los experimentos. Aquí otra vez aparece la idea de Leibniz, *Theoria cum praxis*, aunque en este caso no obtuvo el éxito esperado (Gottschalk, 2000).

En junio de 1685, le encargaron a Leibniz un libro sobre la historia de la casa de los Güelfos o de Braunschweig (conocida también como Brunswick). Así, en 1687, comenzó a viajar por Alemania y Austria yendo a los archivos y buscando fuentes. Más tarde, desde marzo de 1689 a marzo de 1690, Leibniz visitó Italia también buscando fuentes para su trabajo sobre la casa de Braunschweig (Robinet, 1988). Primero realizó varias estancias cortas en Venecia, Roma y Nápoles, para volver otra vez a Roma donde su estancia duró desde mayo a noviembre de 1689. Allí se interesó por la China a través de los jesuitas y misioneros. En diciembre de 1689 visitó Bolonia donde contactó con Domenico Guglielmini (1665-1710) y Marcello Malpighi (1628-1694). Robinet (1988) explica que la visita de Leibniz era muy esperada y que todos los científicos de la época querían entrevistarse y trabajar con él. Del 30 de diciembre de 1689 a febrero de 1690 visitó Módena y finalmente, volvió a Venecia donde permaneció hasta marzo de 1690.

En el año 1691 Leibniz fue nombrado además director de la Biblioteca en Wolfenbüttel, en la corte del Duque Antonio Ulrich de Braunschweig-Wolfenbüttel. También este mismo año escribió el texto *Essay de dynamique*, que fue leído en la Académie des Sciences y en el año 1695 fue publicado en la revista *Acta Eruditorum* con el nombre de *Specimen dynamicum*. El artículo contiene una clara exposición de la Dinámica de Leibniz.

El 11 de julio de 1700 se fundó la Academia de Ciencias de Berlín según su proyecto, de la cual fue nombrado presidente (figura 4).

En las memorias que Leibniz preparó para el rey Friedrich I, señalaba el propósito y los objetivos de la Academia y ofrecía una guía de las líneas a seguir para su establecimiento. Leibniz destacaba que la Academia de Berlín debe distinguirse de las de París, Londres y Florencia con la idea de la teoría para la práctica (*Theoria cum praxis*) (Antognazza, 2009, 387). Leibniz, además tenía la idea de que el conocimiento debía ser accesible a todos y que se había de crear una red de academias y centros científicos en Europa que coordinaran todo el saber. Así también propuso una academia en Viena que, debido a una serie de circunstancias, entre ellas la peste, en aquel momento no se llegó a crear, y otra en San Petersburgo, que sí se creó, aunque Leibniz no llegó a verlo.

Desde 1698 a 1705, Leibniz pasó diversos períodos en Berlín donde estableció una excepcional relación con su primero discípula y después amiga, Sophie Charlotte de Hannover (1668-1705), reina de Prusia, que murió muy joven de una pulmonía. En sus conversaciones sobre filosofía ella le insistía en que publicara sus escritos. Finalmente, Leibniz se decidió a publicar su extensa obra de filosofía con el título *Essais de Theodicée sur la Bonté de Dieu, la liberté de l'Homme et l'origine du mal* (1710). En la obra justificaba la existencia del mal, sin embargo de una manera optimista afirmaba que vivimos en el mejor de todos los mundos posibles. También más tarde escribió sobre las mónadas que publicó más tarde bajo el nombre de *Monadologie* (1714).

Desde el año 1712 al año 1714 estuvo en la corte de Viena donde fue nombrado consejero del Emperador Carlos VI y continuó su amistad con el zar de Rusia Pedro I el Grande. Hay que destacar los encuentros de Pedro I con Leibniz en 1711, en Torgau (Sajonia), en 1712, en Carlsbad (Bohemia) y en 1716, en Bad-Pyrmont (Baja Sajonia), de los cuales tenemos constancia en su correspondencia. De hecho, Leibniz y Pedro I se admiraban mutuamente, y Leibniz le ayudó en el diseño del proyecto de la creación de una academia científica en San Petersburgo. También le aconsejó para hacer realidad el sueño de Pedro I, que Rusia fuera un país con el mismo nivel académico y científico que Inglaterra, Francia o Alemania. No obstante, Leibniz murió en 1716 y la academia no fue creada hasta 1725. Fue su discípulo y corresponsal, Christian Wolff (1679-1754), quien ayudó al zar a escoger los científicos extranjeros que debían enseñar en la nueva academia de San Petersburgo.

Figura 4. Entrada de la antigua Academia de Ciencias de Berlín

El 14 de septiembre de 1714, Leibniz retornó a Hannover, padecía de gota y estuvo los dos últimos años de su vida en cama. Intentó hasta el último día acabar el libro sobre la historia de la casa de Braunschweig que le había sido encargado, cosa que no consiguió. Abandonado por los nobles a los que había servido,

Leibniz, además tenía la idea de que el conocimiento debía ser accesible a todos y que se había de crear una red de academias y centros científicos en Europa que coordinaran todo el saber murió el 14 de noviembre de 1716 en su casa de Hannover. Respecto a los manuscritos de Leibniz, se explica que debido a sus contactos con el príncipe elector de Hannover (desde 1714, rey de Gran Bretaña), el duque de Wolfenbüttel, el zar de San Petersburgo y otros, a su muerte la corte de Hannover selló de inmediato el acceso a su obra, ya que no querían que saliese a la luz ningún documento comprometedor. Sin embargo, hay que destacar que, después de su muerte, se publicó en la revista *Historie de l'Académie Royale*, el brillante y extenso elogio que le dedica Fontenelle, donde reconocía sus grandes contribuciones y su influyente figura (Fontenelle, 1716).

El triángulo armónico inventado por Leibniz

La matemática del siglo XVII se desarrolla por la conjunción de tres fuerzas fundamentales:

- La herencia matemática clásica ejemplificada en las obras de Euclides y Arquimedes.
- La emergencia del álgebra y su utilización en la geometría conducentes a una algebrización de la geometría, como por ejemplo en *La Géométrie* de Descartes.
- La revolución infinitista, es decir, la extensión del dominio propio de la matemática al uso de algoritmos infinitos y al estudio de los objetos geométricos de dimensión infinita.

En las matemáticas de Leibniz desde el principio destacó su preocupación y su investigación con el infinito y las dificultades que presentaba, así se puede apreciar en su tratado sobre la cuadratura aritmética del círculo, la elipse y la hipérbola que elaboró durante su estancia en París y en sus escritos sobre series. Por recomendación de Huygens, Leibniz desde 1672 trabajó en la demostración de la divergencia de la serie armónica (Knobloch, 2017):

$$1, 1/2, 1/3, 1/4\ldots$$

y en la de la suma de las series infinitas que tienen por denominador números figurados:

$$1, 1/3, 1/6, 1/10\ldots$$

En su camino para sumar estas series, Leibniz construyó el triángulo armónico a partir del triángulo aritmético de Pascal.[5]

El triángulo aritmético es un conjunto de números naturales dispuestos en forma de tabla triangular (Edwards, 2002). La regla de formación de esta tabla triangular de números es sencilla: cada fila empieza y acaba con un 1 y los otros números se obtienen sumando los dos números más cercanos de la fila inmediatamente superior (figura 5).

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&1&&&&& \\
&&&&1&&2&&1&&&& \\
&&&1&&3&&3&&1&&& \\
&&1&&4&&6&&4&&1&& \\
&1&&5&&10&&10&&5&&1& \\
1&&6&&15&&20&&15&&6&&1
\end{array}$$

Figura 5. Triángulo aritmético

Los números del triángulo aritmético se pueden interpretar como números figurados (triangulares, tetraédricos, pentagonales, etc.), o como coeficientes del desarrollo binomial o bien como números combinatorios (Massa y Romero, 2009).[6]

El triángulo armónico surge a partir del triángulo aritmético y permite trabajar con series infinitas e incluso puede ser utilizado para calcular áreas. Veámos su construcción, sea el triángulo aritmético y considerando el vértice aparte, se multiplica cada fila por el número de términos que contiene, es decir, la primera fila por dos, la segunda por tres, o sea la fila m por $m+1$. A continuación, se hacen los inversos de estos números y se colocan en forma de tabla triangular obteniendo el triángulo armónico o de Leibniz, cuyos lados lo forman la serie armónica (figura 6):

$$\begin{array}{ccccccccccc}
&&&&&1&&&&& \\
&&&&\frac{1}{2}&&\frac{1}{2}&&&& \\
&&&\frac{1}{3}&&\frac{1}{6}&&\frac{1}{3}&&& \\
&&\frac{1}{4}&&\frac{1}{12}&&\frac{1}{12}&&\frac{1}{4}&& \\
&\frac{1}{5}&&\frac{1}{20}&&\frac{1}{30}&&\frac{1}{20}&&\frac{1}{5}& \\
\frac{1}{6}&&\frac{1}{30}&&\frac{1}{60}&&\frac{1}{60}&&\frac{1}{30}&&\frac{1}{6}
\end{array}$$

Figura 6. Triángulo armónico

N. 53_2 DIFFERENZEN, FOLGEN, REIHEN 1672–1676 709

Triang. arithmet. Pascalii	Triang. harmon. meum
servit ad inveniendas summas integrorum finitorum figuratorum, et quadraturas parabolarum rationalium, omnium graduum, quae sunt figurae carentes asymptotis.	servit ad inveniendas summas fractorum figuratorum, finitorum et infinitorum summam finitam habentium et quadraturas hyperbolarum rationalium, omnium graduum, quae spatia habent finitae magnitudinis, at ob asymptotos, infinitae longitudinis.

Figura 8. Triángulo aritmético de Pascal y triángulo armónico (Leibniz, 1675, VII, 3C, No 53_2, 2003, 709)

Leibniz empezó a trabajar con el triángulo armónico en un texto de 1672 (Probst, 2015) y en diciembre de 1675, en un texto titulado *De triangulo harmonico*, empieza con la definición de la progresión armónica y diserta sobre el triángulo armónico (Serfati, 2014). El triángulo armónico que creó Leibniz lo formó a partir de las diferencias sucesivas de la serie armónica. Dada la serie armónica (lado del triángulo):

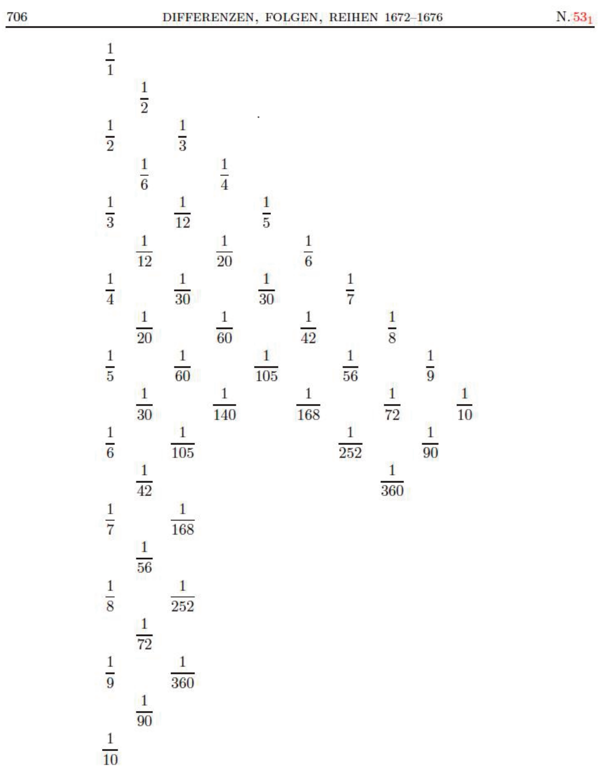

Figura 7. Triángulo armónico en Leibniz
(Leibniz, 1675, VII, 3C, No 53_1, 2003, 706)

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}\ldots$$

calcula sus diferencias:

$$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6};\ \frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}\ldots$$

y obtiene la primera diagonal:

$$\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{12},\frac{1}{20}\ldots$$

Y haciendo las diferencias de estos términos obtiene la segunda diagonal:

$$\frac{1}{3},\frac{1}{12},\frac{1}{30},\frac{1}{60}\ldots \qquad \text{(figura 7)}$$

Más adelante, en este mismo texto, Leibniz comparaba el triángulo armónico suyo y el aritmético de Pascal y describía sus usos, tanto para las sumas de series finitas en el aritmético e infinitas en el armónico, como para las cuadraturas de parábolas y de hipérbolas, afirmando (figura 8):

> El triángulo aritmético de Pascal sirve para el descubrimiento de las sumas finitas de los números enteros y para las cuadraturas de parábolas, en todos los grados, en los que las figuras carecen de asíntotas.

Y al lado escribía las características del triángulo armónico:

> El triángulo armónico mío sirve para el descubrimiento de las sumas finitas de las fracciones con números figurados, e infinitas que tengan suma finita y para las cuadraturas de hipérbolas, en todos los grados, que tengan un espacio de magnitud finita, y asíntotas de longitud infinita.

Veamos, por ejemplo, la utilización del triángulo aritmético para hallar las sumas de enteros y de sus potencias a partir de las propiedades de formación del triángulo y de los números figurados. Consideramos las propiedades de los números triangulares: 1, 3, 6, 10, 15…, obtenidos como semiproductos de dos enteros, 1·2, 2·3, 3·4, 4·5… , y que además son suma de los enteros anteriores, que se expresan de la manera siguiente:

$$\begin{array}{ll} 1=1 & 1=\frac{1}{2}\cdot(1\cdot 2) \\ 3=1+2 & 3=\frac{1}{2}\cdot(2\cdot 3) \\ 6=1+2+3 & 6=\frac{1}{2}\cdot(3\cdot 4) \\ 10=1+2+3+4 & 10=\frac{1}{2}\cdot(4\cdot 5) \end{array}$$

De estas igualdades se puede obtener la suma de los n primeros enteros:

$$\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1)$$

Igualmente, los números tetraédricos: 1, 4, 10, 20, …, que se obtienen como la sexta parte de los productos de tres enteros, 1·2·3, 2·3·4, 3·4·5, 4·5·6…, a la vez son la suma de los números triangulares anteriores: $1=1$; $1+3=4$; $1+3+6=10$; $1+3+6+10=20$… De estas dos propiedades y del resultado anterior se puede deducir que la suma de los cuadrados de los n primeros enteros y la suma de los n primeros enteros, expresada en notación actual, será:

$$\sum_{a=1}^{n}\frac{a^2+a}{2}=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{6}$$

De esta expresión, aislando la suma de los cuadrados, multiplicando por 2 el segundo miembro y substituyendo por el valor de la suma de los primeros enteros hallada anteriormente, hallamos la suma de los cuadrados de los primeros enteros:

$$\sum_{a=1}^{n}a^2=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$$

Así con las propiedades de los números pentagonales deduciríamos la suma de los cubos de los primeros enteros y podríamos ir deduciendo las otras sumas de potencias de los primeros enteros. Leibniz remarcaba esta cuestión de las propiedades de las sumas de los números figurados en el triángulo aritmético, en una carta a Guillaume de l'Hospital (1661–1704), el 27 de diciembre de 1694 (Leibniz, 1694, AIII, 6, N 84, 256):

> Triángulo Aritmético de M. Pascal, en el cual M. Pascal había mostrado como se pueden dar las sumas de los números figurados, que provienen buscando las sumas y las sumas de las sumas, etc. de la progresión aritmética natural.

Leibniz explicaba también que el triángulo armónico servía para hallar la suma infinita de las fracciones con números triangulares en el denominador:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\dots$$

Así, Leibniz utilizaba su principio de las sumas de la diferencias, es decir, dada una serie siempre que se puede expresar a través de la suma de las diferencias de los términos dos a dos, la suma de las serie formada por las diferencias consecutivas es igual al primer término menos el último.

Leibniz calculaba la suma infinita de esta serie:

$$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\dots$$

ya que doblada es la suma de las fracciones con números triangulares que busca. Para ello expresa S con las diferencias de la serie armónica:

$$\begin{gathered} S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\dots= \\ =\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\dots= \\ =\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1} \end{gathered}$$

Leibniz explica que esta suma en el infinito vale 1, y que, por lo tanto, la suma infinita de las fracciones con números triangulares que es su doble vale 2.

Igualmente calcula la segunda diagonal:

$$T=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}+\dots$$

ya que triplicada es la suma de las fracciones con números tetraédricos (en el denominador):

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\dots$$

Para ello expresa T con las diferencias de la diagonal primera:

$$T_m = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} + \ldots =$$
$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{20}\right) + \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{30}\right) + \ldots =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{m+1}$$

En el infinito vale 1/2 y, por lo tanto, la suma infinita de las fracciones con números tetraédricos que es su triple vale 3/2.

En su explicación, Leibniz no habla de límite pero se sobreentiende en esta carta a l'Hospital de 1694, cuando dice que la serie decreciente al infinito la suma vale el primer término:

> Yo había disfrutado hace mucho tiempo buscando las sumas de series de números, y me serví para esto de las diferencias en un teorema bastante conocido que una serie decreciente al infinito su primer término es igual a la suma de todas las diferencias. Esto me había dado lo que yo llamé el Triángulo Armónico, opuesto al Triángulo Aritmético de M. Pascal,...;y yo encontré que las fracciones de los números figurados son las diferencias y las diferencias de las diferencias, etc. de la progresión harmónica natural (es decir unas fracciones 1/1, 1/2, 1/3, 1/4 etc.) y que así se puede dar las sumas de series de las fracciones figuradas, como 1/1 + 1/3 + 1/6 + 1/10 etc y 1/1 + 1/4 + 1/10 + 1/20 etc.

En relación al uso del triángulo armónico para cuadraturas, hay que citar a Mengoli, que en su *Circolo* (1672), queriendo hallar áreas (cuadraturas en el siglo diecisiete), partió del triángulo combinatorio y construyó una nueva tabla triangular, que es la tabla de valores de las cuadraturas o triángulo armónico, pero que para Mengoli era una tabla triangular más. Mengoli identificaba los valores de las cuadraturas con las áreas de las figuras correspondientes llamándoles términos *homólogos* (Massa y Delshams, 2009) (En notación actual, véase la figura 9).

Mengoli proporcionaba el algoritmo de definición de las integrales en función de sus exponentes, hoy le llamaríamos función Beta de sus exponentes. En notación actual se expresaría:

$$\int_0^1 x^n (1-x)^{m-n}\, dx = \frac{1}{(m+1)\binom{m}{n}} = B(n+1, m-n+1)$$

Aunque Mengoli pretendía obtener una cuadratura nueva: la cuadratura del semicírculo de radio 1, que corresponde a la integral:

$$\int_0^1 x^{1/2} (1-x)^{1/2}\, dx$$

Así, calculó una tabla interpolada de valores de las cuadraturas, que de hecho no es más que el triángulo armónico interpolado e interpoló también la tabla de figuras y por homología identificó los valores de ambas tablas, excepto para un número desconocido a que está estrechamente relacionado con la cuadratura del círculo $(1/2a = \pi/8)$, obteniendo una aproximación del número pi con once decimales exactos.

La carta de Leibniz a l'Hospital explicaba también la relación de las sumas de las ordenadas con las cuadraturas:

> Reconociendo pues esta gran utilidad de las diferencias y viendo que por el cálculo de M. des Cartes la ordenada de la curva puede ser expresada, vi que encontrar las cuadraturas o las sumas de las ordenadas no es otra cosa que encontrar una ordenada (de la cuadratriz) de tal manera que la diferencia sea proporcional a la ordenada dada.

Leibniz conoció los algoritmos de Mengoli más tarde y publicó sus comentarios en 1676 (figura 10), relacionando su triángulo armónico con el triángulo de las ordenadas de las figuras que quiere cuadrar (Massa-Esteve, 2017).

$$\int_0^1 1\, dx$$
$$\int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2} \qquad \int_0^1 (1-x)\, dx = \frac{1}{2}$$
$$\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3} \qquad \int_0^1 x(1-x)\, dx = \frac{1}{6} \qquad \int_0^1 (1-x)^2\, dx = \frac{1}{3}$$
$$\int_0^1 x^3\, dx = \frac{1}{4} \qquad \int_0^1 x^2(1-x)\, dx = \frac{1}{12} \qquad \int_0^1 x(1-x)^2\, dx = \frac{1}{12} \qquad \int_0^1 (1-x)^3\, dx = \frac{1}{4}$$

Figura 9. Identificación del triángulo armónico y las cuadraturas en Mengoli (1672)

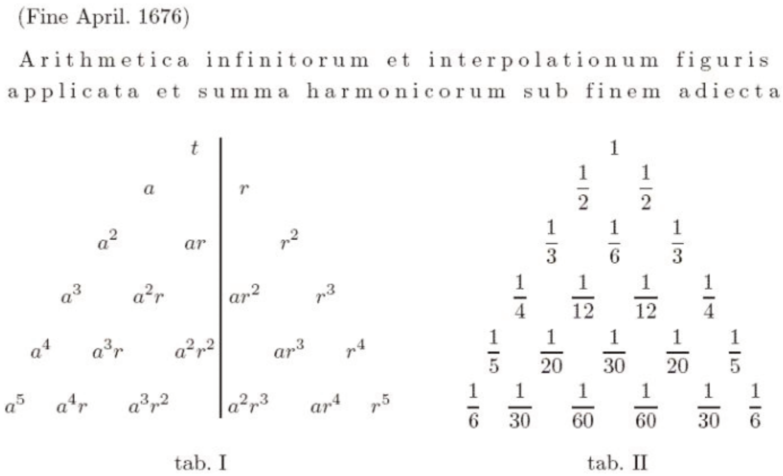

Figura 10. Tabla de las ordenadas y triángulo armónico de Leibniz (Leibniz, 1676, AVII 3, No 57_2, 2003, 736)

Algunas reflexiones

Del breve recorrido por la vida de Leibniz destaca su *Theoria cum praxis*, la teoría con la práctica, o aún más, la teoría útil para la práctica que desarrolló a lo largo de su vida y que además distinguió a la Academia de Ciencias de Berlín de las otras. También hay que señalar la universalidad del conocimiento de Leibniz y su interés por todo tipo de saberes y su difusión, que lo presentan como un sabio singular, merecedor del título de genio universal.

Respecto a su matemática, esta breve presentación del triángulo aritmético y del triángulo armónico con las demostraciones de las sumas finitas e infinitas, nos muestra una matemática armónica de Leibniz debido a la simetría de los triángulos y a la regularidad de las filas. Los triángulos además tienen una estructura visual abierta, en la cual el número de términos, dispuestos de esta manera, puede hacerse infinito. El infinito se convierte en un elemento más en los cálculos matemáticos de Leibniz, que abrió un mundo de posibilidades en las series y en sus relaciones con el cálculo infinitesimal.

Referencias bibliográficas

Aiton, E. J.(1985), *Leibniz: A Biography*, Adam Hilger, Bristol y Boston.

Antognazza, M. R. (2009), *Leibniz: An Intellectual Biography*, Cambridge University Press, Nueva York.

Brancato, M., (2016), «Leibniz, Weigel and the birth of binary arithmetic», *Lexicon Philosophicum*, nº 4, 151-172.

De Mora, M. (ed.) (2015), *G. W. Leibniz. Obras Filosóficas y científicas. Vol. 7B, Escritos Matemáticos*, Editorial Comares, Granada.

Edwards, A. W. F. (2002), *Pascal's Arithmetical Triangle. The story of a Mathematical Idea,* The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London.

Fontenelle, B. Le B. (1716), «Éloge de Godefroy Guillaume Leibnitz», *Histoire de l'Académie Royale des Sciences, Avec les Memoires de Mathematique & de Phisique pour la même Année*, 94-128.

Gottschalk, J. (2000), «Proposals for engineering improvements in mining in the Harz mountains», en Popp, K. & Stein, E. (ed.), *Gottfried Wilhelm Leibniz. Philosopher, Mathematician, Physicist, Engineer*, Universität Hannover, Hannover.

Hofmann, J. (1974), *Leibniz in Paris. 1672–1676. His growth to mathematical maturity*, Cambridge University Press, Cambridge.

Knobloch, E. (2006), «Beyond Cartesian limits: Leibniz's passage from algebraic to "transcedental" mathematics», *Historia Mathematica* 33, 113-131.

— (2016), *G. W. Leibniz De Quadratura Arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis* (1676), Springer- Verlag, Berlin.

— (2017), «Leibniz and the infinite», *Quaderns d'Història de l'Enginyeria*, en prensa.

Kreiling, F. (1970-91), «Leibniz», en C. C. Gillispie (ed.), *Dictionnary of scientific biography* (vol. 10), Scribner's , Nova York, 149-150.

Leibniz, G. W. (2015), S*ämtliche Schriften und Briefe,* series VI: vol. 1*,* 1663–1672: *Philosophische Schriften.*

— (2003), series VII: *Mathematische Schriften,* vol. 3, 1672–1676*:* D*ifferenzen – Folgen – Reihen.*

— (2012), series VII: *Mathematische Schriften*, vol. 6, 1673-1676: *Arithmetische Kreisquadratur*, Akademie-Verlag.

Mackensen, L. V. (2000), «Calculating machines», en Popp, K. & Stein, E. (ed.), *Gottfried Wilhelm Leibniz. Philosopher, Mathematician, Physicist, Engineer*, Universität Hannover, Hannover, 84-107.

Massa-Esteve, M. R. (2017), «Mengoli's Mathematical Ideas in Leibniz's Excerpts», *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics*, 32(1), 40-60.

Massa-Esteve, M.ª R., y A. Delshams, (2009), «Euler's beta integral in Pietro Mengoli's works», *Archive for History of Exact Sciences*, nº 63, 325-356.

Massa-Esteve, M. R., y F. Romero (2009), «El triangle aritmètic de Blaise Pascal (1623–1662)», *Biaix*, nº 29, 6-17.

Popp, K., y E. Stein (2000), *Gottfried Wilhelm Leibniz. Philosopher, Mathematician, Physicist, Engineer,* Universität Hannover, Hannover.

Probst, S. (2015), «Leibniz as Reader and Second inventor: The Cases of Barrow and Mengoli», en N. B. Goethe et al. (eds), *G.W. Leibniz, Interrelations between Mathematics and Philosophy, Archimedes* 41, Springer, Netherlands.

Robinet, A. (1988), *G. W. Leibniz Iter Italicum (Mars 1689- Mars 1690). La dynamique de la République des Lettres. Nombreux textes inédits*, Olschki, Florencia.

Serfati, M. (2014),«On the "Sum of all Differences" and the Origin of Mathematics According to Leibniz: Mathematical and Philosophical Aspects», en Riesenfeld, D. & Scarafile, G. (eds.), *Perspectives on theory of controversies and the ethics of communication, Logic, Argumentation & Reasoning*, Springer, 68-80.

M.ª Rosa Massa Esteve
Departament de Matemàtiques. Universitat Politècnica de Catalunya.
<m.rosa.massa@upc.edu>

1 Este artículo es una versión ampliada de las conferencias pronunciadas en Barcelona el pasado mes de noviembre, en el Institut d'Estudis Catalans y en la jornada didáctica de ABEAM, con motivo de los 300 años de la muerte de Leibniz. Con esta contribución se quiere conmemorar este centenario adhiriéndose así a todas las celebraciones que la comunidad científica le dedicará en todo el mundo.

2 También desde 2015 se puede disfrutar de una estupenda selección de escritos matemáticos de Leibniz traducidos al español y publicados en dos volúmenes bajo la dirección de Mary Sol de Mora Charles (De Mora, 2015), dentro de la colección G. W. Leibniz. Obras filosóficas y científicas.

3 Ver entre otros: Aiton, 1985; Kreiling, 1970-1991; Popp & Stein, 2000; Antognazza, 2009.

4 El análisis especioso explicado en *In artem analyticem isagoge* (1591) de François Viète (1540-1603) señaló la importancia de utilizar símbolos en la matemática no solamente para representar la incógnita sino también para las cantidades conocidas y de esta manera se podía trabajar con ecuaciones en forma general. Viète introdujo una álgebra *nueva*, utilizando lo que llamó *logística especiosa*, o sea, cálculos con *especies*, además de la *logística numerosa*, usada en las álgebras renacentistas anteriores. Las *especies* del álgebra de Viète eran todo tipo de magnitudes, numéricas como los números naturales y racionales, pero también geométricas como las longitudes, las áreas, los volúmenes o los ángulos. Otro punto importante es el método analítico de resolución de una ecuación, que introduce Viète y difunden Fermat y Descartes.

5 El triángulo aritmético recibe los nombres de triángulo de Newton, de Tartaglia, pero se considera más apropiado llamarlo triángulo de Pascal, como hacía Leibniz, ya que Pascal reconocía este triángulo aritmético como un objeto matemático, analizaba sus propiedades y además escribió otros tratados donde mostraba los diferentes usos de los números que lo forman.

6 Hay que señalar también que los textos sobre el triángulo aritmético y el triángulo armónico son adecuados para utilizar en la enseñanza de las matemáticas ya que permiten trabajar con las sumas de potencias de los números enteros y con las sumas infinitas.