suma+ 84
Artículos
Marzo 2017
pp. 37-49

El astrolabio: un instrumento del pasado para una educación de futuro fértil

Manuel García Piqueras

> ¿Pero quién habitará en esos mundos si están habitados?... ¿Somos nosotros o ellos los Señores del mundo?... ¿Y cómo es, entonces, que las cosas han sido creadas para el hombre?
>
> Kepler, *La anatomía de la melancolía*

Se muestran aspectos históricos, manejo, diseño y construcción de un astrolabio; en particular se presenta un modelo llamado *Astrolabio Universal GeoGebra,* este material fue el primero en GeoGebraTube con anverso y reverso totalmente operativos. Se recrea un instrumento que, a lo largo de su dilatada historia, le han sido dedicados tratados enteros de mecánica celeste y matemáticas. Se han aglutinado las distintas ramas del conocimiento implicadas y se ha escogido lo fundamental para poder aplicarlo en el último ciclo de secundaria y bachillerato.

Palabras clave: Astrolabio, GeoGebra, Geometría, Astronomía, Aprendizaje por proyectos.

The astrolabe: an instrument of the past for a future fertile education

It shows historical aspects, handling, design and construction of an astrolabe; in particular, it is presented a model called *Universal GeoGebra Astrolabe,* this material was the first in GeoGebraTube with front and back fully operative. He recreates an instrument that, throughout his long history, has been devoted to entire treatises of celestial mechanics and mathematics. The different branches of knowledge involved have been grouped and the fundamental has been chosen to be able to apply it for upper secondary education.

Keywords: Astrolabe, GeoGebra, Geometry, Astronomy, Project-Based Learning.

La enormidad del universo siempre ha supuesto una fuente inagotable de interrogantes y miedos ancestrales. *La Guerra de los Mundos* (Wells, 1898) explota todas estas emociones; ¿qué hay ahí?, es más, ¿hay alguien ahí?… Enrico Fermi (figura 1), premio nobel de Física en 1938, se preguntaba:

—¿Por qué no hay evidencia de vida extraterrestre a pesar de la alta probabilidad de su existencia?

—Ya están aquí entre nosotros; pero se hacen llamar a sí mismos húngaros —responde Leo Slizard (figura 2), húngaro de nacimiento y miembro destacado del grupo autodenominado *The Martians*.

Compuesto por científicos de primer orden, muchos eran de ascendencia judía y tuvieron que huir de Europa a raíz del holocausto: John von Neumann (figura 3), Edward Teller, George Pólya, Paul Erdős… La mayoría dominaban ramas enteras de las matemáticas y la física, podían mantener una conversación, por ejemplo, en griego clásico… y su inglés tenía un acento muy marcado. En conjunto, sus colegas norteamericanos les veían como extraterrestres. La broma proseguía cuando Newman afirmaba que, en realidad, los científicos húngaros eran descendientes de una expedición marciana que recaló en Budapest entre 1890 y 1900, huyendo de su planeta cuando se hizo inhabitable.

Artículo recibido en *Suma* en marzo de 2016 y aceptado en enero de 2017

Stanislaw Ulam (figura 4), reconocido matemático y amigo íntimo de Newman (ambos trabajaron en el proyecto Manhattan), plasmó en *Aventuras de un matemático* las reflexiones propias de un *marciano*. Habla de fórmulas anotadas en un trozo de papel que son capaces de cambiar el curso de la historia; de cómo el universo se expresa en el lenguaje de las matemáticas y, a la inversa, cómo el mundo de las ideas matemáticas tiene su reflejo en la realidad.

Esta fascinación ha sido compartida por casi todos los grandes sabios desde Tales, pero aparte de mencionar aspectos matemáticos, trata múltiples cuestiones; entre ellas, la innegable dimensión humana de las matemáticas. En Ulam (1991) reconocemos violencia, racismo, desesperación…, pero también resiliencia, sacrificio, generosidad…

Como docentes siempre queremos hacer llegar al alumnado estas impresiones, en palabras de Miguel de Guzmán, (1984):

> Existen constelaciones de hechos matemáticos que se prestan para hacer de ellos una novela bien interesante. Me pregunto si el tiempo malgastado en muchos de nuestros rollos magistrales en los que tanto abundamos los profesores de matemáticas de todos los niveles no podría invertirse con gran provecho en contar pausadamente alguna de estas historias apasionantes del pensamiento humano.

Así que escribimos *La SuperMATEsobrina y el enigma del gran astrolabio* (García Piqueras, 2016*a*), una novela de aventuras que trata dos historias: por una parte, la de Isaac, ambientada en los siglos XV y XVI, un esclavo procedente de Jenne abocado a una situación desesperada y, por otra parte, la de Julio, un profesor de literatura, y su

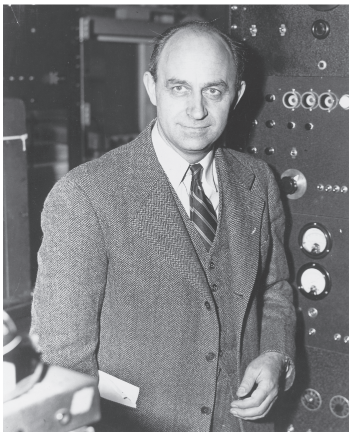

Figura 1. Enrico Fermi

Figura 3. John von Newmann

Figura 2. Leo Slizard

Figura 4. Stanislaw Ulam

sobrina Martina, gran aficionada a las matemáticas y los juegos lógicos, que se desarrolla en la actualidad. En principio, ambas historias parecen alejadas, pero se van entretejiendo a medida que avanza la trama. Un relato para que el alumnado se apasione con la belleza de la geometría, la música, el arte, la poesía…, y al mismo tiempo fuera una historia muy humana.

En la trama juegan un papel importante las máquinas y su relación con el sueño de Ramon Llull, Gottfried Leibniz, Charles Babbage, Alan Turing, Tomás Recio…, de crear un aparato capaz de decir cuándo una afirmación es correcta o no. El astrolabio, considerado como la *calculadora de la antigüedad*, ocupa un lugar central en la trama.

En la antigua Mesopotamia existían representaciones de la *esfera celeste* (los objetos del firmamento están tan alejados que situamos todos a la misma distancia) y se sabía que todo giraba en torno al Polo Norte celeste. Se seleccionaron estrellas importantes y se confeccionaron miles de registros en tablas astronómicas.

La geometría trató de ofrecer una solución para disponer en un plano la bóveda celeste; una búsqueda condenada al fracaso de antemano. La esfera no se puede *aplanar* sin deformar (un triángulo esférico cuyos ángulos sean rectos no puede existir tal cuál en el plano).

Entonces, los geómetras de la antigüedad trataron de mantener lo más útil: que los círculos siguieran siendo círculos y los ángulos se mantuvieran; así nació la *proyección estereográfica*, nombre acuñado por Franciscus Aguilonius (1567-1617) en *Seis Libros de Óptica, útiles para filósofos y matemáticos* publicado en 1613, a partir de στερεοζ (sólido). Así, estereográfica significaría *dibujar sólidos* (en un plano).

Génesis del instrumento: la proyección estereográfica

El origen del astrolabio está unido a la invención de la p. e. (proyección estereográfica) en la antigua Grecia donde ya se utilizaban distintos métodos proyectivos. Apolonio de Perga (sobre el 225 a. C.) en *Las Cónicas* incluye un resultado (Libro I, Proposición 5) sobre la preservación de los círculos que indica un conocimiento implícito de la p. e.

Sin embargo, Hiparco de Nicea (¿190?-120 a.C.) es el nombre propio más importante que aparece unido a la teoría de la p.e. Aunque no se conserva ninguna de sus obras, los comentarios históricos indican que redefinió, formalizó y aplicó con éxito dicha teoría en la realización de mapas celestes.

Veamos en qué consiste este método proyectivo. Nosotros ocupamos justo el centro de la esfera celeste, si proyectamos su contenido sobre el Polo Sur celeste (polo de proyección) e imaginamos que el ecuador celeste está contenido en un plano (plano de proyección), las *marcas* que dejen los rayos de proyección en dicho plano será la imagen del firmamento que buscamos (figura 5). Así, se puede concentrar en un mismo plano todo el universo conocido.

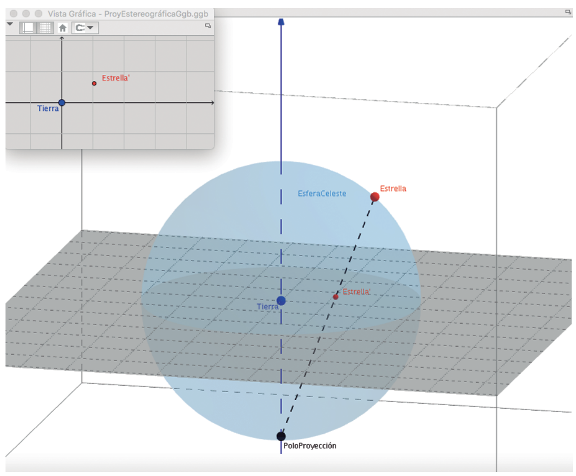

Figura 5. Proyección estereográfica de la esfera celeste

Propiedades

Para proyectar los elementos básicos de la esfera celeste (meridianos y paralelos) se tienen en cuenta las siguientes cuestiones teóricas:

Propiedad 1

La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.

Propiedad 2

Dos triángulos rectángulos semejantes guardan siempre la misma razón entre cateto opuesto y contiguo; esta depende, en exclusiva, del ángulo agudo que los relaciona, pudiendo nombrar dicha razón en función de dicho ángulo.

Llamamos *tangente del ángulo a*, *tan* a, a la razón del cateto opuesto respecto al cateto contiguo de un triángulo rectángulo.

Propiedad 3

Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.

Propiedad 4

Toda circunferencia sobre la esfera que pase por el polo de proyección, se proyecta como un segmento.

Propiedad 5. Ecuación fundamental del astrolabio

Si x es un punto de un círculo paralelo al ecuador, entonces todos los puntos de dicho círculo se proyectan a la misma distancia:

$$r = R \cdot \tan\left(\frac{90^\circ - \delta}{2}\right) = R \cdot \tan\left(\frac{\cos\delta}{1 + sen\ \delta}\right)$$

donde δ es la declinación de X y R (figura 6).

Nota: Dado un punto P sobre la esfera celeste, si el contexto de trabajo es el espacio denotaremos por P' a la p. e. de dicho punto.

Conviene conocer las características principales de la p. e. expuestas a continuación y cuya demostración puede encontrar el lector interesado en Morrison (2007).

Preservación de los círculos y los ángulos

Propiedad 6

La p. e. transforma circunferencias que no pasen por el polo de proyección en circunferencias (figura 7).

Propiedad 7

La p. e. es una aplicación *conforme*, es decir, conserva ángulos (figura 8).

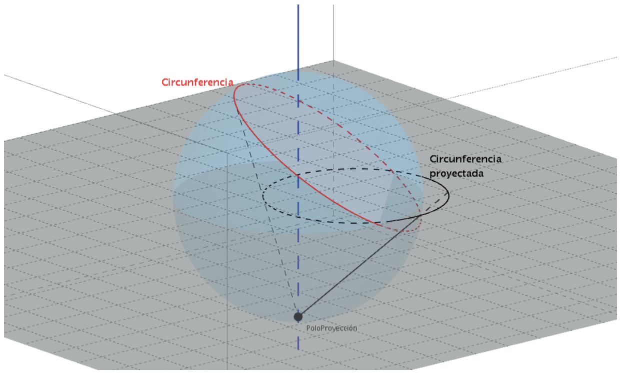

Figura 7. Conservación de las circunferencias

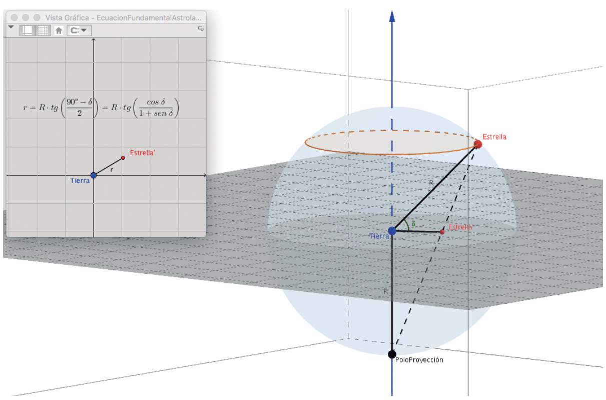

Figura 6. Ecuación fundamental del astrolabio

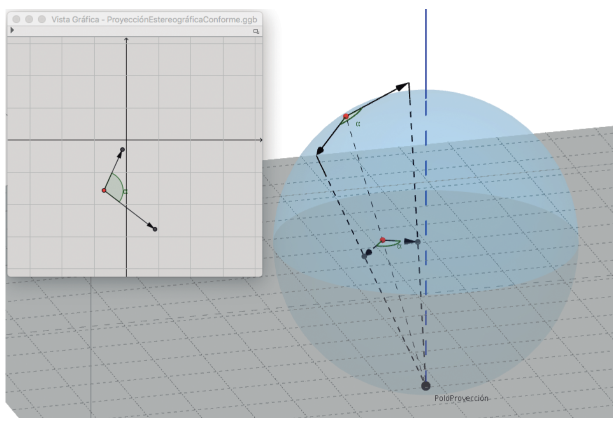

Figura 8. Conservación de los ángulos

Distorsión de los objetos alejados del eje de proyección

Cuando proyectamos círculos no máximos del mismo radio mediante p. e. estos se distorsionan; a mayor cercanía del eje de proyección más pequeño se hace el círculo.

Volviendo sobre las huellas históricas, el escrito más antiguo que se conserva sobre la p. e. es de Claudio Ptolomeo (¿100?-170) en su *Planisphaerium*; los antiguos griegos no le dieron un nombre y se referían a ella con la expresión *desplegando la esfera*. Ptolomeo no reclama su invención y la atribuye a Hiparco. Hay indicios justificados en los escritos ptolemaicos que sugieren el manejo de un precursor del astrolabio; la génesis de la proyección estereográfica fue el origen del astrolabio.

Breve historia del *astrolabio*

La evidencia escrita más antigua sobre una máquina astronómica se encuentra en *De architectura* de Marco Vitrubio (¿88-26? a.C.), donde describe una *clepsidra* (reloj de agua) realizado por Ctesibio (¿285-222? a.C.).

Un reloj algo más tardío, mencionado también por Vitrubio, es conocido como *reloj anafórico*, una máquina que utiliza agua como líquido motor; sirve para dar la hora tanto de día como de noche. El nombre *anaphora*, significa *amanecer*, en particular *amanecer de las estrellas*. Este tipo de reloj es precursor directo del astrolabio.

En la reproducción de un reloj anafórico (figura 9), se observa un disco rotatorio, la *araña*, que imita el giro del firmamento. La araña es uno de los primeros usos de la p. e.

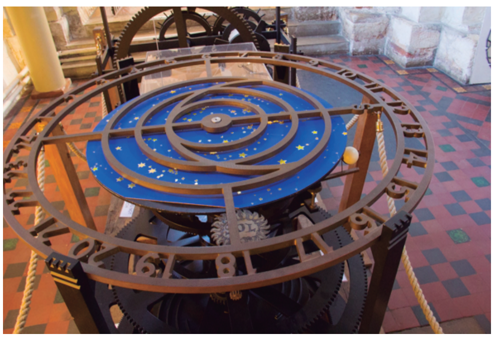

Figura 9. Reconstrucción de un reloj anafórico (siglo XIV)

Del período 143-144 contemporáneo de Ptolomeo ha sobrevivido un pequeño reloj de sol que utiliza la p. e. así como diferentes soportes para cada latitud, anticipando la forma del astrolabio.

Nadie conoce en qué momento exacto la p.e. dio lugar al astrolabio. Teón de Alejandría (335-405) escribió un tratado sobre *El Pequeño Astrolabio* del que solo ha sobrevivido su tabla de contenidos. Esta obra fue la base de la mayor parte de escritos sobre el tema en el primer tramo del medievo. Sinesio de Cirene (370-413 o 414), obispo de la Cirenaica y alumno de Hipatia (hija de Teón), podría haber tenido un instrumento similar a un astrolabio.

Las descripciones conservadas más antiguas están en *Uso y Construcción del Astrolabio* de Juan Filópono (490-566) del siglo VI y un siglo después por Severus Sebokht (¿575?-667) en su *Tratado sobre el Astrolabio*. En el siglo VII ya se tiene evidencia de la existencia de auténticos astrolabios.

La escuela árabe recoge el saber griego y hace sus propias aportaciones; el *buscador de estrellas* (traducción de ἀστρολάβιον) fue uno de los instrumentos perfeccionados. La p. e. era tratada de forma sintética, sin embargo, al-Farghani (805-880) propuso, por vez primera, la construcción mediante métodos analíticos. En *Sobre el Astrolabio*, al-Farghani da instrucciones detalladas del diseño pues sentía que este se realizaba de forma mecánica. Él fue el primero en publicar una demostración completa sobre la conservación de los círculos.

El astrolabio más antiguo que se conserva está en The School of Oriental and African Studies (Londres) y dataría del 927 o 928. En aquella época la Península Ibérica era el motor científico de Europa. El Museo Naval de Madrid posee una colección reconocida a nivel internacional. El instrumento más antiguo del catálogo (Ministerio de Defensa, 1998), fechado en torno al 1002, es hispanoárabe con inscripciones cúficas y latinas, denominado *Astrolabio de Alfonso El Sabio*; llamado así porque utiliza el modelo de *Los Libros del Saber* escritos bajo supervisión real directa (Ministerio de Defensa, 1998).

A partir del siglo X, el astrolabio toma su forma definitiva y se hace muy popular hasta el siglo XVII, momento en el que se extiende el uso de instrumentos más precisos como el telescopio. Además, Huygens inventa el *reloj de péndulo* que no hay que poner en hora con tanta frecuencia.

En la actualidad, el astrolabio experimenta un renacimiento. Es útil para historiadores, educadores… Las academias militares han retomado la enseñanza de la navegación celeste mediante astrolabios y cuadrantes. En un escenario de *guerra total*, los datos obtenidos mediante GPS pueden no ser fiables ¿recuerdan a Enigma? ¿se imaginan a la flota del Pacífico dirigida desde el Kremlin?

Veamos cuáles son las partes que conforman un astrolabio.

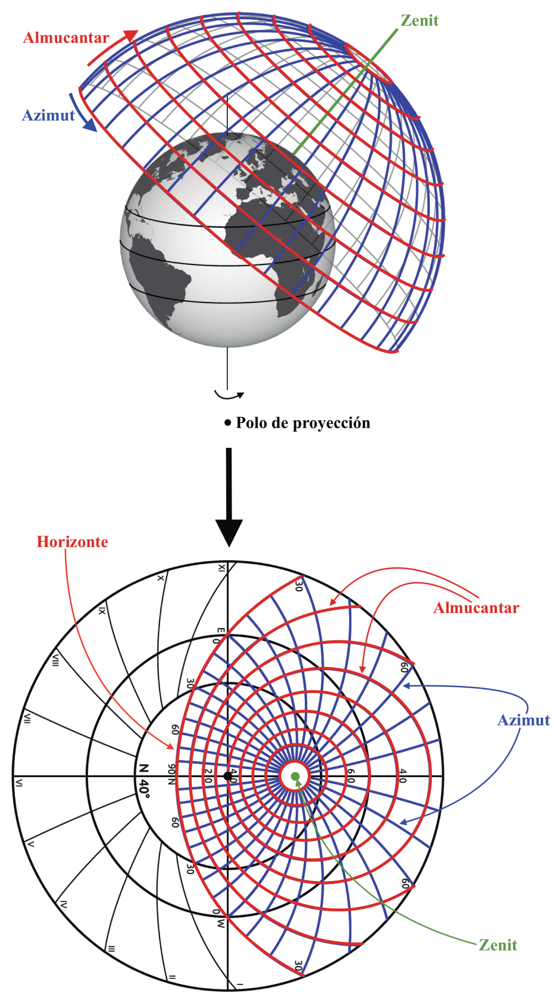

Figura 10. Tímpano del astrolabio a partir de la p.e.

Diseño constructivo de un astrolabio común

Distinguiremos anverso y reverso, también llamados faz y dorso respectivamente.

Anverso

Es la p. e. de ciertas partes de la bóveda celeste sobre un plano, de modo que meridianos y paralelos celestes (también llamados *azimut* y *almucantar* respectivamente), cenit, horizonte…, van a parar a una base rígida denominada *tímpano* (figura 10).

Los tímpanos se realizan para una latitud determinada que marca la línea del horizonte (figura 10), todo lo que se sitúe por encima de esa línea será visible. Se realizaban varios tímpanos que luego se intercambiaban dependiendo de la latitud del observador. Una variante del astrolabio utilizable en cualquier latitud con un solo tímpano fue la *azafea* de Azarquiel (1028-1087) desarrollada en Toledo en el siglo XI.

El cenit es el punto de la esfera celeste situado justo encima del observador y es el centro de todas las circunferencias almucantar.

Las estrellas se proyectan en una pieza distinta, la araña, situada encima del tímpano. Puede girarse respecto al centro del instrumento. También contiene la proyección de la *eclíptica*, el camino que sigue el Sol en la esfera celeste a lo largo del año (Rigutti, 2010).

En la actualidad las arañas se realizan utilizando materiales transparentes como el plástico, pero en la antigüedad eran piezas de delicada filigrana.

La rotación de la araña simula el giro de la Tierra, de manera que, aunque seamos nosotros los que nos movemos, son las estrellas quienes rotan en torno al Polo Norte celeste.

En el borde externo, *limbo*, se marcan 24 franjas horarias. Para finalizar, se coloca una manecilla denominada *regla* (figura 11).

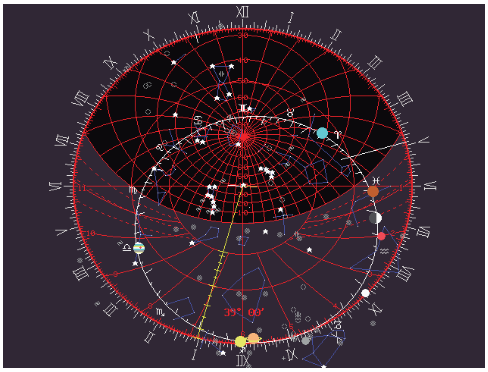

Figura 11. Astrolabio electrónico

Reverso

Existen dos modelos diferentes: excéntrico y concéntrico. Mostraremos el primero, pues era el más habitual.

El dorso dispone dos circunferencias, una externa y otra interna. La exterior, cuyo centro coincide con el del instrumento, se divide en 12 franjas denominadas *signos zodiacales*, mientras que la interior muestra los 365 días del año (366 si es bisiesto). El centro del calendario está ligeramente desplazado con respecto al del instrumento (figura 12). La *alidada* es una manecilla que, entre otros usos, relaciona un día del calendario con un valor de la eclíptica. En la figura 12 se asocia Sagitario con el 16 de diciembre.

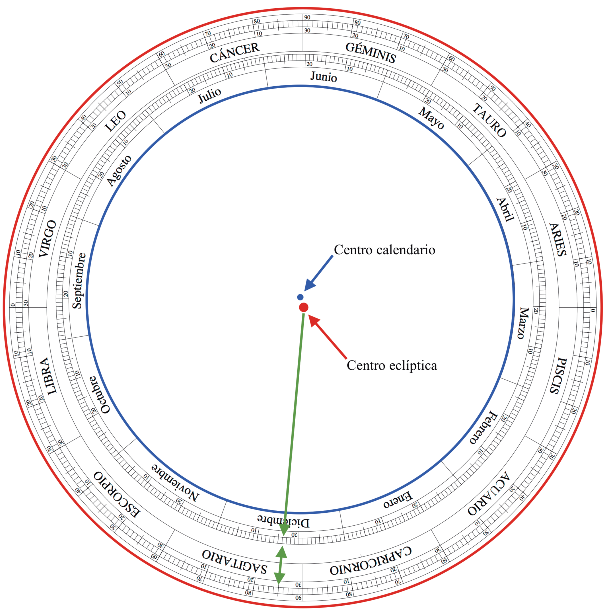

Figura 12. Reverso Calendario Excéntrico

Caso práctico: cómo calcular la hora con el Astrolabio Universal GeoGebra

El instrumento que presentamos en esta sección puede adaptarse a cualquier latitud y está realizado en su totalidad mediante GeoGebra, de ahí su nombre: *Astrolabio Universal GeoGebra*.

Calcularemos la hora civil a partir de la altura de una estrella, información que procesaremos mediante los archivos disponibles en García Piqueras (2016), apartado quinto (figuras 13 y 14).

Vamos a calcular la hora en Madrid, con latitud 40,4165° Norte y longitud 3° 42' 9" Oeste, veamos:

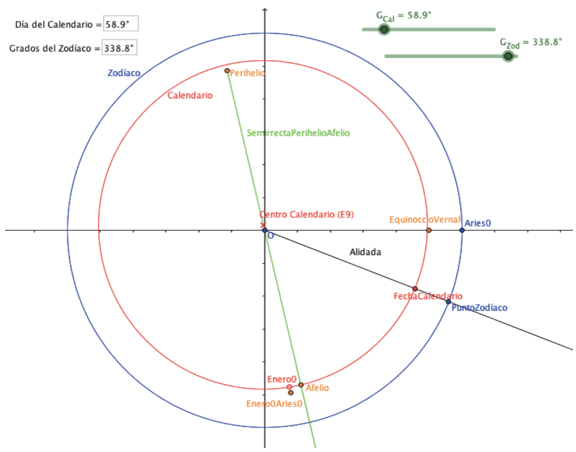

Figura 13. Astrolabio reverso (Madrid)

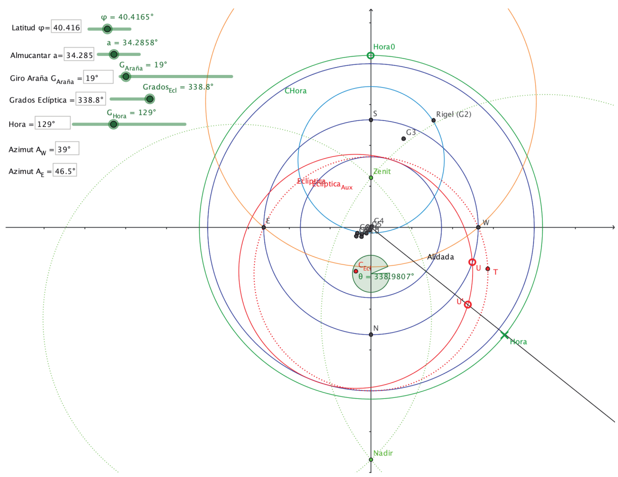

Figura 14. Astrolabio anverso (Madrid)

La noche del 27 de febrero de 2016, Rigel se sitúa en el cielo del Suroeste, dejando Sirio a su izquierda, con una altura de unos 34,28575°.

Apuntamos un almucantar $a = 34{,}2858°$, es decir, el paralelo sobre la esfera celeste de altura a.

En el dorso del astrolabio movemos la alidada de manera que el Día del Calendario sea 58 (días transcurridos), es decir, 27 de febrero; como estamos muy próximos al día 28 optamos por escoger 58,9°. Esto marca, por prolongación, un ángulo de 338,8° en el Zodíaco (Piscis 8,8°).

Ahora, en la faz del astrolabio, localizamos Rigel y giramos la araña hasta que Rigel se sitúe en el almucantar $a = 34{,}2858°$ (en el Suroeste). La araña marca un giro de 19°.

Una vez fijada la araña, marcamos los 338,8° en la Eclíptica y alineamos la Hora, que da unos 129°. Si tenemos en cuenta la equivalencia 1 hora = 15°, se tiene 129° : 15° = 8,6, es decir, las 8 h 36' de la noche *hora local*.

Para ajustarla con la *hora civil* necesitamos la latitud de nuestra localidad: 3° 42' 9,22" Oeste (Madrid).

La equivalencia 60' = 15° nos da una *Corrección Horaria*:

$$\mathrm{CH} = 3{,}7025° \cdot \left(\frac{60'}{15°}\right) = 14{,}81' = 14'48''$$

Por tanto, la hora ajustada es 8 h 36' – – (–14' 48") = 8 h 50' 48" y, como nuestra franja horaria es +01:00 horas UTC, serían las 9 h 50' 48".

Tomando los datos del programa *Stellarium* serían las 22 h 0' 0", es decir, 9' 12" por debajo, que supone un error del orden:

$$\left(\frac{552}{60^3}\right) \cdot 100\,\% = 0{,}002555\ldots \cdot 100\,\% =$$
$$= 0{,}2555\ldots\,\% < 0{,}26\,\%$$

Si no necesitamos poner en órbita ningún satélite ni otro ingenio espacial, parece más que asumible.

Un simple vistazo a nuestro reloj bastaría para saber la hora, pero el anverso del astrolabio nos da una instantánea del universo, además, así podemos conocer cuándo se pondrán ciertas estrellas o saldrán otras… En resumen, un astrolabio clásico permite sostener el universo en la palma de la mano. Hoy en día necesitaríamos programas informáticos especiales para conseguir el mismo efecto.

Construcción del Astrolabio Universal GeoGebra

En este apartado procedemos a describir las distintas etapas constructivas del instrumento presentado. Sin embargo, no entraremos en profundidad para no perder la visión general; en García Piqueras (2016*b*) pueden consultarse instrucciones paso a paso con todo lujo de detalles para cada uno de los siguientes apartados.

Ecuador y Trópicos

La *eclíptica* está comprendida entre los trópicos de Cáncer y Capricornio celestes como límites superior e inferior respectivamente (figura 15). El plano que contiene a la eclíptica forma un ángulo, denominado *oblicuidad de la eclíptica*, con el plano que contiene al ecuador celeste. La oblicuidad cambia muy despacio con el paso del tiempo. Nosotros fijaremos con una casilla de entrada el valor para 2016 de 23,4372 (23° 26' 14").

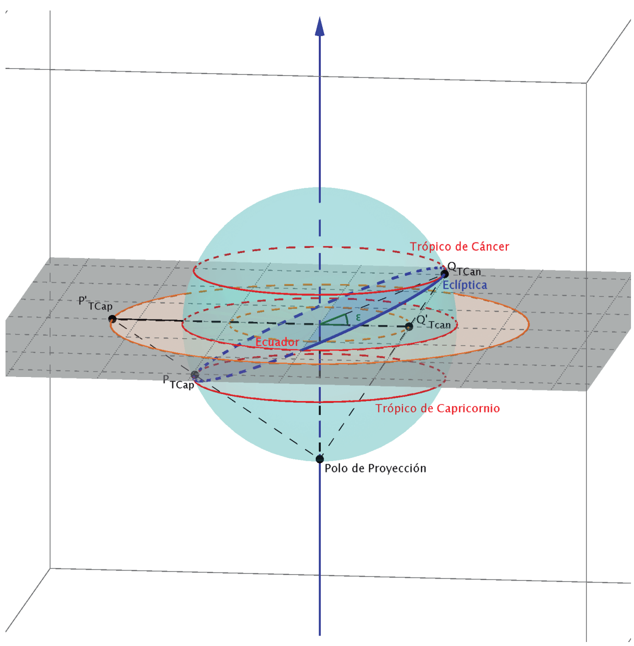

Figura 15. Ecuador y trópicos celestes

A partir de la figura 16 es posible deducir las fórmulas [1] y [2]:

$$R_{Ecuador} = R_{Capricornio} \cdot \tan\left(\frac{90° - \varepsilon}{2}\right) \text{ [1]}$$

$$R_{Cáncer} = R_{Ecuador} \cdot \tan\left(\frac{90° - \varepsilon}{2}\right) \text{ [2]}$$

siendo $R_{Ecuador}$, $R_{Capricornio}$ y $R_{Cáncer}$ los radios del ecuador, trópico de Capricornio y de Cáncer respectivamente.

El dibujo del plano de proyección (en gris figura 15) resulta al aplicar la proyección estereográfica sobre la esfera celeste. Para reproducirla (figura 16), tendremos que trazar un dibujo que mantenga las condiciones geométricas que intervienen, es decir, las ecuaciones [1] y [2] anteriores (García Piqueras, 2016*b*).

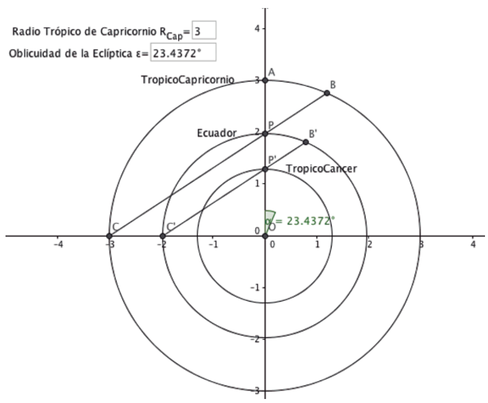

Figura 16. Construcción ecuador y trópicos

Horizonte

La figura 17 (3D) genera las relaciones [3] y [4]:

$$LH_1{}' = -R_{Ecuador} \cdot \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \text{ [3]}$$

$$LH_2{}' = R_{Ecuador} \cdot \tan\left(90° - \frac{\varphi}{2}\right) \text{ [4]}$$

Así obtenemos las proyecciones de los límites del horizonte.

La proyección del zenit, el punto sobre la cabeza del observador en la esfera celeste, vendría establecida por [5]:

$$Zenit' = R_{Ecuador} \cdot \tan\left(\frac{90° - \varphi}{2}\right) \text{ [5]}$$

Para proyectar el horizonte y el zenit imponemos las condiciones geométricas necesarias que satisfagan las relaciones [3], [4] y [5] anteriores (García Piqueras, 2016*b*).

Nota: En un astrolabio común solo se vería la parte del horizonte interior al trópico de Capricornio.

Almucantar (Altura)

Los *almucantar* definen aquellos puntos de la esfera celeste que están a una misma altura sobre el plano del horizonte, es decir, son paralelos celestes.

La figura 18 establece las relaciones [6] y [7] siguientes:

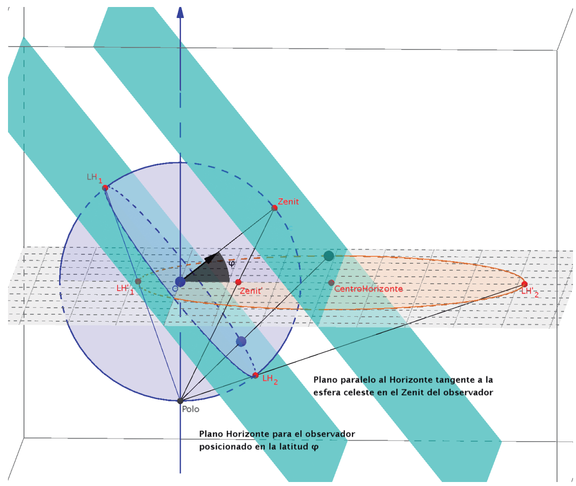

Figura 17. Horizonte

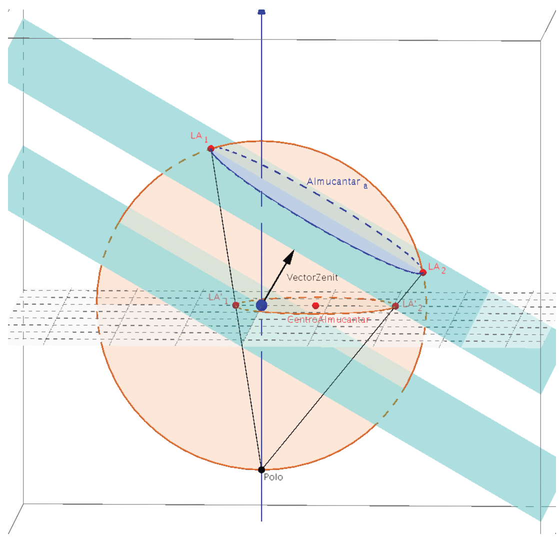

Figura 18. Almucantar

$$LA_1{}' = -R_{Ecuador} \cdot \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \text{ [6]}$$

$$LA_2{}' = R_{Ecuador} \cdot \tan\left(90° - \left(\frac{\varphi - a}{2}\right)\right) \text{ [7]}$$

El almucantar se traza a partir de las relaciones [6] y [7] imponiendo las condiciones geométricas asociadas (García Piqueras, 2016*b*).

Nadir

El punto de la esfera celeste opuesto al zenit con respecto al centro es el nadir. Mientras aquel está encima de nuestras cabezas, este se localiza debajo de nosotros.

La construcción del nadir es muy similar a la construcción del zenit. A partir de la figura 19 puede deducirse la relación [8]:

$$Nadir' = -R_{Ecuador} \cdot \tan\left(\frac{90° + \varphi}{2}\right) \text{ [8]}$$

Las fórmulas [5] y [8] nos indican las condiciones geométricas que deben cumplir zenit y nadir; veamos cómo obtener el nadir (figura 20):

1. Trazamos una semirrecta con origen en O a partir del eje $\overline{OY}$ negativo con un ángulo φ en sentido horario. Se obtiene el triángulo isósceles OEN' (figura 21) cuyo ángulo en el vértice desigual es de $90° - \varphi$ y los ángulos iguales son de $(90° - \varphi)/2$.

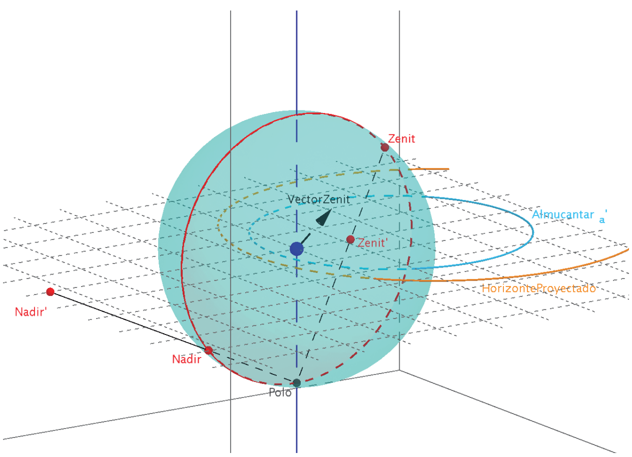

Figura 19. Zenit y nadir

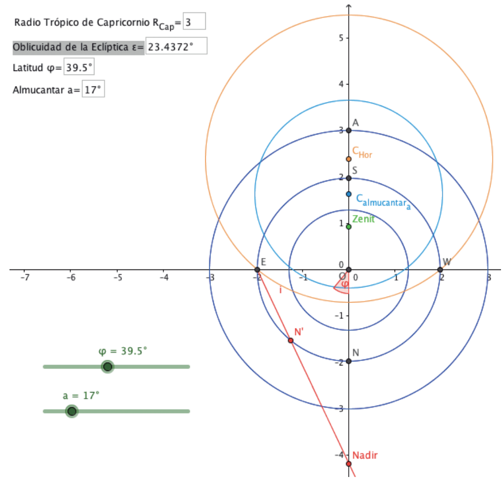

Figura 20. Construcción nadir

2. Dibujamos una semirrecta a partir del punto E que pase por N'. La prolongación de esta recta corta al meridiano en el nadir.

Azimut

Los azimuts son círculos sobre la esfera celeste que pasan por el cenit y el nadir, es decir, son meridianos celestes. El azimut Norte-Sur equivale al meridiano de Greenwich sobre la Tierra, es el que tomamos como referencia. La p. e. de este azimut es un segmento (propiedad 4), que está contenido en el eje $\overline{OY}$. Como la p. e. es conforme (propiedad 7), los azimuts proyectados se identifican por su relación angular respecto $\overline{OY}$.

Los azimuts que no pasen por el polo de proyección se proyectan como circunferencias. Por simetría, todos los centros de los azimuts proyectados deben equidistar de *zenit'* y *nadir'*, debiendo localizarse en la *recta de los centros de azimut*, recta perpendicular a $\overline{OY}$ y equidistante de *zenit'* y *nadir'*.

Por otra parte, el ángulo $\widehat{AE}$ que forma la recta tangente al $Azimut_{AE}$ en el zenit respecto del $Azimut_{Norte\text{-}Sur}$, se conservará al realizar la proyección (propiedad 7). Además, el radio de la circunferencia proyectada por el $Azimut_{AE}$ que une su centro con *zenit'*, formará un ángulo recto con la proyección de la recta tangente al $Azimut_{AE}$ en el zenit (propiedad 7, figura 22).

Así pues, para hallar el centro del $Azimut_{AE}$ proyectado, se traza una semirrecta a partir de *zenit'* que forme un ángulo de $90° - \widehat{AE}$ respecto $\overline{OY}$ (figuras 21 y 22); el centro buscado estará en la intersección de dicha semirrecta con la recta de los centros de azimut (García Piqueras, 2016*b*).

Nota: La construcción del azimut es errónea en algunos manuales, ya que asignan el ángulo $\widehat{AE}$ (en vez del correcto $90° - \widehat{AE}$); GeoGebra 3D permite comprobarlo.

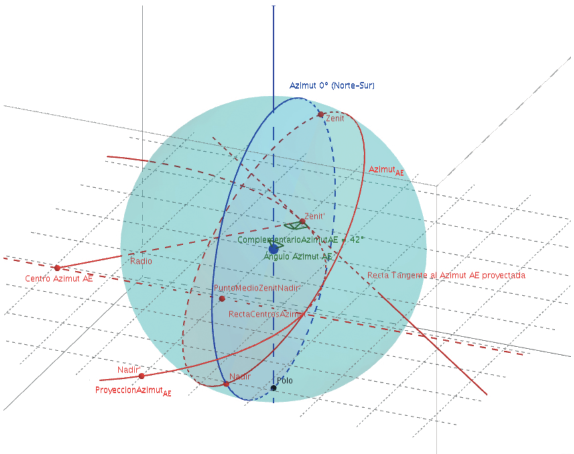

Figura 21. Azimut

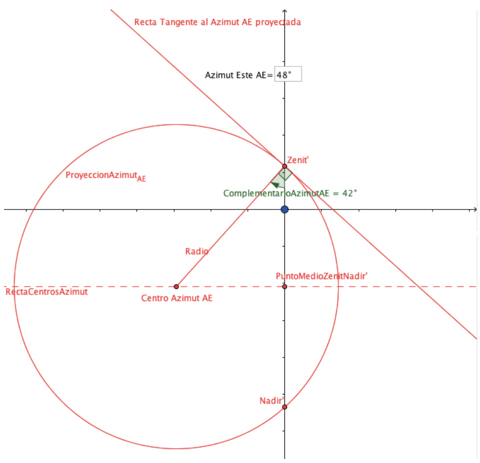

Figura 22. Proyección azimut

Eclíptica

La eclíptica cumple que su radio, R_{Ecl}, es la semisuma de los radios de los trópicos (sus límites superior e inferior). En cuanto al centro de la eclíptica, R_{Ecl}, basta con realizar la semidiferencia de los radios de los trópicos.

Necesitaremos hallar la proyección del *Polo de la eclíptica*, es decir, el punto del eje perpendicular a la eclíptica sobre la esfera celeste.

A partir de la figura 24 se deduce que

$$dist\left(O,\ PoloEcl_1{}'\right) = R_{Ecuador} \cdot \tan\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Por otra parte, como la eclíptica gira en torno al eje de rotación de la Tierra, la construcción tendrá que permitir dicha rotación (García Piqueras, 2016*b*).

Nota: El punto *U* marca Aries 0°, es decir, el inicio del Zodíaco. Cada 30° hay un signo nuevo: Tauro, Géminis, Cáncer…, hasta Piscis 360°. Todas son constelaciones que atravesaba la eclíptica, aunque olvidaron incluir Ofiuco, de manera que los horóscopos siempre se han diseñado obviando esta constelación.

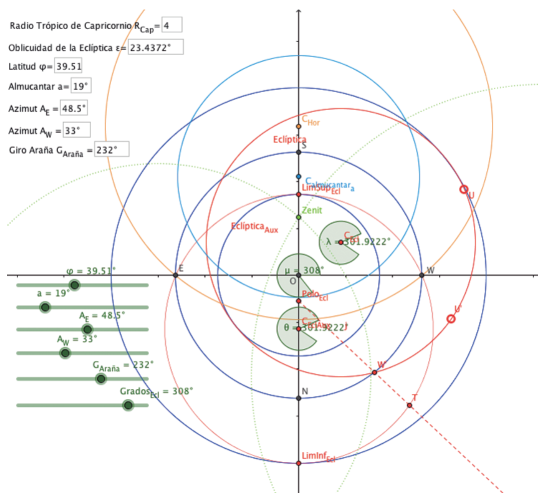

Figura 23. Eclíptica

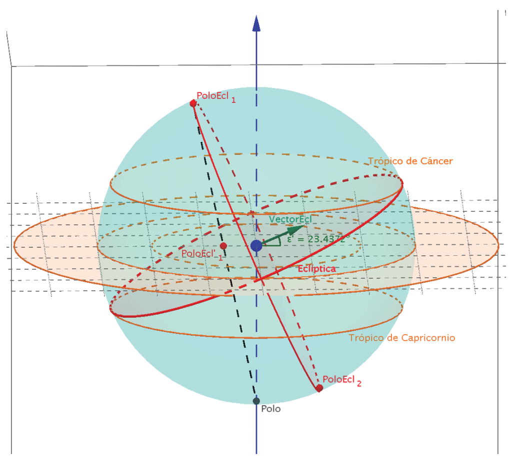

Figura 24. Polos eclíptica

Estrellas y constelaciones

La rotación de la araña simula el giro de la esfera celeste y permite colocar las posiciones de las estrellas en cualquier instante. El conjunto de estrellas rota por completo en un *día sideral* (23 h 56' 4,1" aprox.).

Las coordenadas de una estrella son los arcos de azimut y almucantar que ocupa en la esfera celeste. Cuando la araña se coloca en una determinada hora sideral nos muestra una instantánea del cielo en dicho momento.

Las estrellas de la araña suelen agruparse en *constelaciones*, estos agrupamientos se preservan al ser proyectados, sin embargo, los tamaños de las constelaciones cerca del Polo Sur y del trópico de Capricornio son más pequeños que aquellas situadas cerca del ecuador.

Las cartas estelares se realizan para mantenerlas sobre nuestras cabezas, imitando la imagen que nosotros vemos del cielo. Sin embargo, el astrolabio es una representación de la esfera celeste vista desde fuera, no desde dentro. Esta orientación altera, por ejemplo, la imagen de la Osa Mayor, cuyos arcos están en la posición opuesta a como la vemos en el cielo.

Escoger las estrellas a incluir en la araña no es un ejercicio trivial. Estrellas brillantes como Regulus, Sirius, Rigel…, se incluyen casi siempre.

Se puede obtener un listado de estrellas con sus coordenadas de la época J2000.0 mediante el programa Stellarium.

Nota: La *precesión de los equinoccios* hace que las estrellas cambien de posición, aunque sea perceptible solo con el paso de varias décadas.

Mediante una hoja de cálculo GeoGebra (figura 25) y siguiendo los pasos marcados en García Piqueras (2016*b*) podemos incluir un listado de estrellas en nuestra araña (figura 14).

Calendario

Según el modelo excéntrico, hay dos circunferencias, una interior para el calendario y otra exterior para la longitud solar (valor del Zodíaco). La alidada relaciona una fecha del calendario con un punto del Zodíaco en su prolongación (figura 14).

Constelación	Estrella	Declinación (J2000.0)	Ascensión Recta (J2000.0)	Distancia	Ángulo	Punto (polares)
Orión	Rigel	−8.2017	5.2423	3.0312	78.6345	(3.0312; 94.6345°)
Orión	Betelgeuse	7.407	5.9195	2.3064	88.7925	(2.3064; 104.7925°)
Osa Menor	Polaris	89.2803	2.5983	0.0165	38.9745	(0.0165; 54.9745°)
Osa Menor	Yildun	86.5864	17.5369	0.0782	263.0535	(0.0782; 279.0535°)
Osa Menor	ε UMi	82.0372	16.7661	0.1827	251.4915	(0.1827; 267.4915°)
Osa Menor	ζ UMi	77.7945	15.7343	0.2807	236.0145	(0.2807; 252.0145°)
Osa Menor	Kochab	74.1556	14.845	0.3654	222.675	(0.3654; 238.675°)
Osa Menor	Pherkad	71.834	15.3455	0.4198	230.1825	(0.4198; 246.1825°)
Osa Menor	η UMi	75.7553	16.2918	0.3281	244.377	(0.3281; 260.377°)

Figura 25. Hoja de cálculo para las estrellas de la araña

En este caso tenemos dos centros fundamentales (figura 12), el *centro del calendario* y el *centro del instrumento* (donde se cortan los ejes coordenados). Ambos centros pertenecen a la recta que une afelio y perihelio, el primero es el punto más alejado del centro del instrumento, mientras que el segundo es el más cercano.

La distancia entre ambos centros viene dada por $\Delta = 2 \cdot e \cdot r_c$, donde e es la excentricidad de la órbita elíptica del Sol, mientras que r_c es el radio del calendario (García Piqueras, 2016*b*).

El calendario excéntrico modeliza el movimiento del Sol, según la astronomía Ptolemaica, suficiente para las necesidades medievales (hasta que Copérnico, Galileo y, fundamentalmente Kepler, realizaron sus descubrimientos). En este modelo, el Sol se mueve a velocidad constante en el círculo del Zodíaco y es observado desde la Tierra situada en el centro del instrumento. La correspondencia entre una fecha y la longitud solar se muestra cuando la alidada relaciona un punto del calendario con otro del Zodíaco.

Conclusión

Conocer cómo funciona el astrolabio proporciona un conocimiento básico de astronomía y, por otra parte, puede ser diseñado a partir de propiedades matemáticas fundamentales. Como docentes nos preguntamos cómo encajar la construcción del Astrolabio Universal GeoGebra en nuestro currículo; no vamos a entrar en detalles, pero aprenderíamos trigonometría básica, resolución de triángulos, coordenadas polares, evaluación de polinomios mediante una hoja de cálculo…, cosas que, en muchos casos, cuando se aprenden *por necesidad* entran a formar parte de nuestro arsenal matemático, en otro caso, se suelen memorizar sin comprender muy bien en qué consisten y luego se olvidan de forma casi instantánea.

Desearíamos que este artículo sea el catalizador de nuevas experiencias didácticas relacionadas con la astronomía, el manejo de un astrolabio, su construcción… El aprendizaje por proyectos sería la metodología ideal; es cierto que las últimas etapas del diseño son muy elaboradas, pero es aquí donde el profesor, como director del proyecto, debería asignar tareas para cada grupo de trabajo y orientarlo adecuadamente.

Así, desempeñaríamos el papel de *Oppenheimer* en Los Álamos al dirigir nuestro particular grupo de *marcianos*; crearíamos una especie de *bomba* que, sin causar bajas, despertaría la fascinación por el universo y el lenguaje en el que se expresa: las matemáticas.

Referencias bibliográficas

Rigutti (2010) es un texto introductorio de astronomía directo y conciso. Las especificaciones del Astrolabio Universal GeoGebra se encuentran en García Piqueras (2016*b*). Morrison (2016) es *la biblia del astrolabio*, en él se encuentran la mayor parte de los datos históricos citados, así como sus especificaciones, tipos… Desde aquí ofrecemos nuestro más sincero homenaje y cálido recuerdo al autor fallecido en 2016.

García, M. (2016), *El Astrolabio Universal GeoGebra*, GeoGebra Book, <http://www.geogebra.org/b/2471627>.

— (2016*a*), *La SuperMATEsobrina y el enigma del gran astrolabio*, Nivola, Tres Cantos.

— (2016*b*), *Universal GeoGebra Astrolabe*. Sociedad de la Información, <http://www.sociedadelainformacion.com/57/ManuelGPiqueras.pdf>, Albacete (España).

Guzmán, M. de (1984), *Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*, Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas. Santa Cruz de Tenerife.

Ministerio de defensa (1998), *Catálogo de la sección de instrumentos náuticos y científicos del Museo Naval de Madrid*, Servicio de Publicaciones de la Armada, Madrid (España).

Morrison, J. E. (2007), *The astrolabe*, Janus, Rehoboth Beach.

Rigutti, A. (2010), *Observar el cielo. Un viaje entre estrellas y planetas para conocer el Universo*. Enciclopedia Universal. Editorial Tikal, Madrid (España).

Ulam, S. (1991), *Adventures of a Mathematician*. University of California. [2002, Edición en español, Nivola.]

Wells, H. G. (1898), *The war of the worlds*, Harper & Brothers. [2010, Reedición en español, Debolsillo.]

Manuel García Piqueras
IES Tomás Navarro Tomás, Albacete
Universidad de Castilla-La Mancha
<mgpiqueras@gmail.com>