suma+ 84
Secciones
Marzo 2017
pp. 77-82

Tareas ricas para practicar las restas

David Barba Uriach
Cecilia Calvo Pesce

En esta entrega nos proponemos analizar un conjunto de tareas ricas asociadas a la operación de la resta entre números naturales, cualquiera sea el algoritmo que se ha decidido trabajar en clase con relación a esta operación, y que permiten generar un ambiente de clase centrado en la comunicación y en la construcción del conocimiento a partir de la voz de los alumnos.

Al igual que Afzal Ahmed en su libro *Better Mathematics: A Curriculum Development Study*, entendemos por tareas ricas aquellas que en un inicio son accesibles a todos los alumnos, pero que permiten plantear nuevos retos a partir del enunciado inicial. Es decir, aquellas que invitan a los alumnos a tomar decisiones, a que especulen, que formulen hipótesis, que justifiquen, que expliquen, que reflexionen, que interpreten…, tareas que promueven el debate y la comunicación, alentando preguntas del tipo «¿qué pasaría si?».

Aprender a restar más allá de dominar un algoritmo

Aprender a restar no es sinónimo de dominar su algoritmo estándar. Aprender una operación consiste en reconocerla en diferentes contextos co-

Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2016 y aceptado en enero de 2017

tidianos y en situaciones como las que se plantean en los problemas aritméticos escolares y en tener alguna estrategia eficiente para encontrar el resultado.

Una vez sabemos qué resta necesitamos calcular podemos resolverla de diferentes formas. Por ejemplo, utilizando la llamada estrategia de saltos sobre la línea numérica, tal como comentamos en el artículo «Calcular saltando sobre la línea numérica vacía» (*Suma* 70) o bien utilizando la estrategia de descomposición comentada en el artículo «Calcular usando el contexto del dinero» (*Suma* 72). También debemos considerar como posibilidad para calcular la resta el uso del algoritmo. Sin embargo, la tendencia a priorizar el dominio del algoritmo de la resta como herramienta imprescindible para poder atacar los problemas y la realización de páginas de restas para consolidar estos cálculos nos aleja del objetivo principal: saber restar.

Un problema que no debemos descuidar es el hecho que la existencia de un algoritmo, por más eficiente que sea, provoque la desaparición de las discusiones sobre estrategias alternativas. Creemos que si se retrasa la presentación de los algoritmos estándar, los problemas se podrían resolver utilizando estrategias como las que promueve la línea numérica vacía o el contexto del dinero.

Un segundo problema lo encontramos al presentar el algoritmo, ya que normalmente se hace como si fuera una receta. En la entrega anterior de esta sección se habló sobre que los algoritmos se deben construir en el aula. Entonces presentamos la construcción de un algoritmo de la división distinto del utilizado en nuestro entorno habitualmente; un algoritmo transparente basado en números y no en cifras, flexible en el sentido de que puede realizarse en más o menos pasos permitiendo a los alumnos avanzar de manera segura. En el caso de la resta también existen algoritmos de este tipo como veremos en el siguiente apartado.

Pero antes de centrarnos en la construcción de algoritmos para la resta queremos mencionar el papel de los cuadernos o las fichas de cálculo para practicar a partir de la repetición y, una vez más, contraponer esta práctica reproductiva a la práctica productiva. En el apartado «actividades ricas para practicar restas» ejemplificaremos este aspecto.

Construcción de diferentes algoritmos para la resta

El algoritmo estándar de la resta consiste en colocar los números en columna de manera que coincidan los diferentes órdenes de magnitud e ir restando unidades con unidades, decenas con decenas, etc. Cuando una cifra del minuendo es superior a la correspondiente del sustraendo, tenemos una «resta con llevadas», para efectuarla necesitamos «pedir ayuda al de al lado». El problema está en cómo se devuelve el préstamo y la solución tiene dos versiones que generan dos algoritmos estándar distintos. Ejemplificaremos estas dos versiones con la resta 395 – 168.

En una de las versiones del algoritmo (el más clásico en nuestro país), el discurso que acompaña los cálculos que vemos en la figura 1 podría ser el siguiente:

$$\begin{array}{r} 395 \\ -\ 1\overset{1}{6}8 \\ \hline 227 \end{array}$$

Figura 1

No puedo quitar 8 de 5, convierto el 5 en un 15.

De 8 a 15 van 7, me llevo 1 que anoto junto al 6.

6 y 1 son 7, y de 7 a 9 van 2.

De 1 a 3 van 2, por lo que el resultado es 227.

En la otra versión del algoritmo, el discurso que acompaña los cálculos que vemos en la figura 2 podría ser el siguiente:

$$\begin{array}{r} 3\overset{8}{\cancel{9}}5 \\ -\ 168 \\ \hline 227 \end{array}$$

Figura 2

No puedo quitar 8 de 5, pido 10 al de al lado, convirtiendo al 5 en un 15 y al 9 de al lado en un 8.

De 8 a 15 van 7

De 6 a 8 van 2.

De 1 a 3 van 2, por lo que el resultado es 227.

En el fondo, ambos algoritmos siguen la misma idea: convertir la resta en otra equivalente.

En la primera versión convertimos la resta de «3 centenas, 9 decenas, 5 unidades menos 1 centenas, 6 decenas, 8 unidades» en la resta de «3 centenas, 9 decenas, 15 unidades menos 1 centena, 7 decenas, 5 unidades». Esta tiene el mismo resultado que la anterior porque sumamos 10 tanto al minuendo como al sustraendo.

En la segunda versión convertimos la resta de «3 centenas, 9 decenas, 5 unidades menos 168» en la resta de «3 centenas, 8 decenas, 15 unidades menos 168». Esta tiene el mismo resultado que la anterior porque los números involucrados en la resta no han variado.

La segunda opción es mucho más transparente que la primera, ¿por qué entonces muchos maestros prefieren la primera, aun cuando introducen anteriormente la segunda?

Creemos que el motivo de esta preferencia radica en las restas con ceros en el minuendo del tipo 3006 – 1278, ya que la tarea de pedir al de al lado, se complica. Pero hay una razón poderosa para no cambiar: delante de una resta como esta seguramente la decisión más aconsejable matemáticamente es no aplicar el algoritmo, sino investigar con los alumnos soluciones inteligentes.

Por ejemplo, para efectuar 3006 – 1278 podemos pensar que estamos calculado la distancia entre estos dos números y para hacerlo podemos dividir la tarea en dos etapas: primero, calculamos la distancia entre 2999 y 1278 (que involucra una resta sin llevadas); y luego, le agregamos los 7 que faltan para llegar desde 2999 a 3006.

$$\begin{array}{r} \overset{2}{\cancel{3}}\overset{9}{\cancel{0}}\overset{9}{\cancel{0}}6 \\ -\ 1278 \\ \hline 1728 \end{array}$$

Figura 3

Si de todas maneras se considera importante que los alumnos sepan hacer esta resta con el algoritmo, un pequeño cambio en el discurso permite sortear las dificultades que presentan los ceros en el minuendo. En el minuendo 3006, el 6 necesita «pedir una decena al de al lado» que podría pensarse que no tiene ya que 3006 son 3 unidades de millar y 6 unidades, pero vale la pena recordar que 3006 también es 300 decenas, 6 unidades, con lo cual, préstamo mediante, se quedaría en 299 decenas 16 unidades. Y, como se ve en la figura, la resta se puede ejecutar sin mayores dificultades.

Pero los algoritmos posibles para calcular una resta no son únicamente los dos anteriores. Veamos el algoritmo que presenta Van den Heuvel-Panhuizen (2001) en el cual, a diferencia de los anteriores, se trabaja con números y no con cifras: el algoritmo de la resta en columnas (figura 4). Es importante señalar que la presentación de este algoritmo se realiza como registro de una actividad efectuada en un contexto próximo, el dinero y, por lo tanto, el discurso que acompaña los cálculos hace referencia a él continuamente. Por ejemplo, consideremos que tengo 356€ y gasto 138€, ¿cuánto me queda?

Si tengo 356€ y gasto 138€	**356 –138**
Si tengo 300€ y tengo que pagar 100€, me quedan 200€	**356 –138 200**
Si tengo 50€ y tengo que pagar 30€, me quedan 20€	**356 –138 200 20**
Si tengo 6€ y tengo que pagar 8€, quedo debiendo 2€	**356 –138 200 20 –2**
Si me quedan 220€ y debo 2€, en total, me quedan 218€	**356 –138 200 20 –2 218**

Figura 4

Aunque uno de los objetivos de las matemáticas en primaria sea que los alumnos dominen los algoritmos estándar, debemos tener en cuenta que su presentación prematura puede producir pasividad cognitiva (Plunkett, 1979), o sea, puede provocar que a partir de tener un algoritmo el alumno suspenda su derecho a elegir otra estrategia de cálculo y además, mientras realiza el cálculo, deje de pensar por qué se hace de esa manera. En este sentido, creemos que un camino a seguir puede ser que los alumnos se inicien en el campo de los algoritmos utilizando algoritmos en columnas, no solo para la resta, como instrumento de cálculo más transparente, retrasando la presentación del algoritmo estándar y dejando la decisión de su uso durante la resolución de problemas en manos del alumno.

Esta decisión ayuda a encontrar soluciones en el campo del tratamiento de la diversidad, ya que los alumnos tendrán dos opciones cuando tengan que resolver una operación: utilizar el estándar ya que es más eficiente, o quedarse con el algoritmo en columnas por la seguridad que le da este proceso.

Actividades ricas para practicar las restas

A continuación, presentamos algunos ejemplos de actividades relacionadas con la resta en las que buscamos ir un poco más allá de practicar una mecánica. Se trata de actividades en las que pedimos que los alumnos realicen unas cuantas restas, pero estos cálculos los hacen con un objetivo de mayor valor matemático: detectar regularidades y plantear conjeturas.

Actividad 1: problema de las restas

Si en las celdas ponemos un 5, un 2, un 8 y un 7, ¿qué resultados diferentes se pueden obtener?

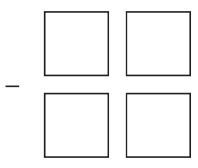

Figura 5

Respuesta: los resultados que se pueden obtener con estos cuatro números son 7, 13, 14, 25, 26, 29, 31, 35, 47, 53, 58 y 62.

Este problema lo conocimos a través del post *Two 2-digit subtraction* del blog Median[1]. Esta misma actividad puede plantearse en secundaria. Allí los alumnos que conocen los números negativos verán que los resultados pasan a ser 24.

Más allá de la realización de unas cuantas restas, otros objetivos que perseguimos con esta actividad son: el desarrollo de la competencia comunicativa en el ámbito de las matemáticas y el desarrollo de estrategias de trabajo sistemáticas para asegurar que se están valorando todas las posibilidades planteadas en el problema.

La consecución de estos objetivos depende de la gestión de aula con la cual se acompañe esta tarea. Por ejemplo, si después que los alumnos han trabajado con la actividad, únicamente valoramos su respuesta diciéndoles: «muy bien, has encontrado todos los resultados posibles» o «qué pena, te han faltado un par de resultados posibles», la tarea seguirá siendo una propuesta de práctica de restas sin más.

Pero estaremos dando valor a estos otros objetivos si al finalizar la tarea, por ejemplo, planteamos una discusión grupal sobre la estrategia que han seguido para ser exhaustivos. Una manera de generar esta discusión grupal es a partir del trabajo de uno de los alumnos como el que aparece en la figura 6 preguntando: ¿cómo podemos detectar qué resta le falta?

La idea es llegar a la conclusión de que como este alumno no ha sido sistemático en la presentación de las restas, para detectar la que falta hay que rehacer el proceso casi por completo.

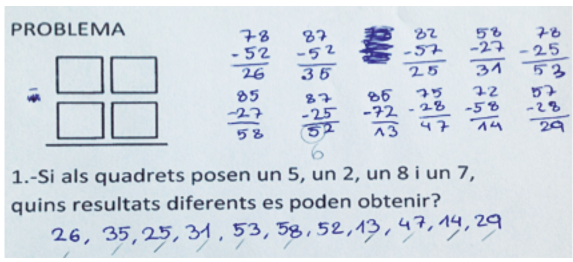

Figura 6

Creemos que actividades como la propuesta son ricas en el sentido que permiten un adecuado tratamiento de la diversidad que tenemos en el aula. Mientras que para un grupo de alumnos la práctica de 12 restas y el intento de sistematizar su trabajo para conseguir todos los resultados posibles es ya un logro que requiere un cierto tiempo de dedicación, para otros alumnos necesitamos tener disponibles otras tareas relacionadas con la misma actividad para que consigan explotar toda la riqueza que ella esconde. Incluimos a continuación algunas de esas preguntas que podemos ir proponiendo a los alumnos a medida que acaban la primera parte: si en lugar del 2 ponemos un 6 ¿se pueden obtener la misma cantidad de resultados diferentes?, ¿cambia la respuesta si los cuatro números disponibles son otros cuatro dígitos consecutivos?

Actividad 2: problema de los diagramas

Completa diferentes diagramas siguiendo las siguientes reglas:

—En todas las filas del diagrama hay 4 celdas.

—Elige 4 números para completar las celdas de la primera fila.

—En cada celda, a partir de la segunda fila, aparece la diferencia entre los dos números que aparecen en las celdas que están inmediatamente encima (en el caso de la última celda de cada fila la diferencia se hace entre el último y el primer número de la fila anterior).

—El diagrama termina cuando en toda la fila se obtienen ceros.

¿Cuál es el diagrama con mayor cantidad de filas que puedes encontrar?

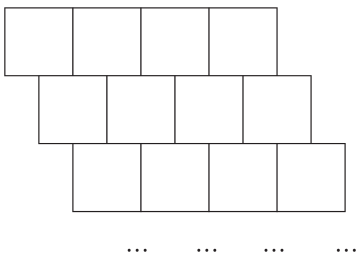

Figura 7

Veamos algunos ejemplos. Eligiendo los números 42, 17, 61 y 20 para la primera fila se obtiene un diagrama de 5 filas:

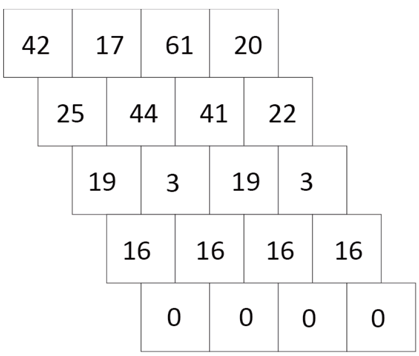

Figura 8

Eligiendo los números 1111, 111, 1 y 11 para la primera fila se obtiene un diagrama de 7 filas o eligiendo los números 1, 15, 30 y 60 el diagrama tiene 10 filas.

La respuesta a esta actividad es abierta, es posible encontrar diagramas con tantas filas como se quiera pero no es fácil encontrar diagramas con muchas filas pues la mayoría llega a la fila de ceros rápidamente.

Este problema está inspirado en el estudio del matemático E. Ducci, que en 1930 encontró que sin importar los números de inicio siempre se llega a cuatro ceros[2]. A aquellos alumnos que quieran ir más allá en el estudio de este problema les podremos proponer cuestiones muy diversas:

a) Podrán observar que el orden en que aparecen los números elegidos para la primera fila puede variar la longitud del diagrama.

b) Se podrán preguntar si es posible que aparezcan números impares en la cuarta o quinta fila, lo que les llevará a reflexionar sobre qué sucede al restar números pares e impares y a concluir que es imposible que en un diagrama lleguen a aparecer impares más allá de la cuarta fila.

Actividad 3: números de tres cifras

Elige diferentes números de tres cifras en los que la primera y la última cifra no sean el mismo número ni números consecutivos. Aplica a cada uno de ellos las siguientes transformaciones:

—Coge el número que has elegido, inviértelo (por ejemplo, invertir el 123 da 321) y efectúa la resta entre los dos números (el mayor menos el menor).

—Coge el resultado obtenido, inviértelo y suma estos dos números.

¿Qué tienen de particular los números a los que llegas tras este proceso?

Veamos algunos ejemplos:

472 – 274 = 198 y 198 + 891 = 1089

461 – 164 = 297 y 297 + 792 = 1089

992 – 299 = 693 y 693 + 396 = 1089

850 – 58 = 792 y 792 + 297 = 1089

Tal como se intuye a partir de los ejemplos, la respuesta es que siempre se llega al número 1089.

Independientemente de los números elegidos, como la cifra de las decenas de ambos números es la misma, los resultados de la resta solo pueden ser 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792 u 891 y por tanto las sumas que se hacen en el segundo paso solo pueden ser cuatro diferentes (todas ellas con el mismo resultado):

198 + 891, 297 + 792, 396 + 693 o 495 + 594.

Se puede plantear como reto a los alumnos que piensen qué pasaría si la primera y última cifra fueran números consecutivos. Por ejemplo:

352 – 253 = 99 y 99 + 99 = 198 y no 1089.

O si la primera y última cifra fueran iguales:

353 – 353 = 0 y 0 + 0 = 0 y no 1089.

Una tarea análoga a la propuesta es la siguiente:

Elige un número de cuatro cifras (no pueden ser las cuatro iguales).

— Ordena los dígitos, primero en orden descendente y luego ascendente, y haz la resta entre los números resultantes.

— Reitera el paso anterior con el resultado de la resta (añadiendo ceros a la derecha siempre que sea necesario para completar los cuatro dígitos) unas cuantas veces.

— ¿Qué observas?

Por ejemplo, si se elige para comenzar el número 1211, se realizarán las siguientes restas:

2111 – 1112 = 0999
9990 – 0999 = 8991 (no hacemos 999 – 999)
9981 – 1899 = 8082
8820 – 0288 = 8532
8532 – 2358 = 6174
7641 – 1467 = 6174

Lo cierto es que independientemente del número con el que se inicie en un máximo de 7 restas se llega siempre[3] al número 6174.

Un último ejemplo de tareas ricas para practicar las restas lo podemos encontrar en una de las actividades que aparece en la entrega «Tareas ricas para practicar las tablas» de esta misma sección (*Suma* 82). Aunque en las propuestas que allí aparecen resaltábamos la relación de la tarea «Tablas sobre una cuadrícula II» con las tablas de multiplicar, también podemos ver que en esta tarea la ejecución de restas entre números de dos cifras tiene un papel fundamental.

Reflexión final

Nos hemos centrado en la resta, en las estrategias que podemos trabajar con nuestros alumnos para que encuentren su resultado y en diferentes algoritmos que podemos poner a su disposición para esta finalidad. También hemos presentado ejemplos de actividades que podemos proponerles para practicar estos procedimientos, pero sin quedarnos en su práctica reproductiva, sino buscando que hagan matemáticas mientras practican.

Referencias bibliográficas

Barba, D. y C. Calvo (2011), «Sentido numérico, aritmética mental y algoritmos», en J. E. García, (coord.), *Elementos y razonamientos en la competencia matemática* (recurso electrónico), Ministerio de Educación, Subdirección General de Documentación y Publicaciones, 47-78.

Plunkett, S. (1979), *Decomposition and all that rot. Mathematics in school*, 8(3), 2-5.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (ed), (2001), *Children learn mathematics*, Utrecht: Freudenthal Institute, Utrecht University.

David Barba Uriach
Universitat Autònoma de Barcelona

Cecilia Calvo Pesce
Escola Sadako (Barcelona)

<tienenlapalabra@revistasuma.es>

1 http://donsteward.blogspot.com.es/2011/02/two-2-digit-subtraction.html

2 http://www.cut-the-knot.org/SimpleGames/IntIter.shtml

3 https://fr.wikipedia.org/wiki/Algorithme_de_Kaprekar