suma+ 86
Artículos
Noviembre 2017
pp. 19-27

El problema de las cien aves: de Alcuino a Fibonacci

Pablo Martín Prieto

El problema llamado «de las cien aves» constituye un clásico de la enseñanza de matemáticas a lo largo de toda la Edad Media. Procedente al parecer de China, tanto las matemáticas hindúes como arábigas le sirvieron de vía de acceso para penetrar en la esfera de la cultura occidental. Este artículo trata de algunos hitos en la transmisión del problema en las matemáticas medievales de Occidente, con especial atención a las obras de Alcuino y Fibonacci.

Palabras clave: Matemáticas, Edad Media, Cien aves, Problema, Alcuino, Fibonacci.

The problem of the hundred birds: from Alcuino to Fibonacci

The so-called “one-hundred-fowl” problem is a classic in the teaching of mathematics throughout the entire Middle Ages. Seemingly stemming from China, both Indian and Arabic mathematics serve as a gateway through which this particular problem penetrated into the sphere of Western culture. This paper is concerned with some developments of the problem’s transmission in medieval Latin mathematics, especially in the works of Alcuin and Fibonacci

.*Keywords:* Mathematics, Middle Ages, One-Hundred-Fowl, Problem, Alcuin, Fibonacci.

El valor de la historia de las matemáticas no se agota en sí mismo, como disciplina o área de especialidad con métodos, proyectos y objetivos propios, sino que también se extiende al interés que su cultivo tiene para suministrar enfoques y ejemplos de utilidad didáctica (Martín Prieto, 2015). En algunas ocasiones, resulta particularmente esclarecedor para el alumno, de cara a entender algún concepto matemático, informarse sobre la manera como dicho concepto vino históricamente a plantearse y definirse, pasando por distintos avatares de prueba y error, o promesas y descartes sucesivos, en un proceso de progresivo perfeccionamiento hasta alcanzar nuestra época en la forma —tantas veces definitiva— como hoy se aprenden y enseñan.

En este artículo nos proponemos ilustrar algunos momentos del recorrido histórico de un problema clásico de análisis indeterminado cuya transmisión desde las antiguas matemáticas chinas, atravesando el Oriente (India e Islam) hasta las del Occidente medieval, parece posible seguir con razonable seguridad. Al respecto nos interesa especialmente tratar de atisbar cómo se razonaba y qué método de resolución se seguía en la época medieval con este problema: empeño que choca con la total opacidad del tratamiento que se le da en la famosa colección de problemas de Al-

Artículo recibido en *Suma* en abril de 2017 y aceptado en septiembre de 2017

cuino, pero que en el caso de Fibonacci puede aventurarse un poco más allá.

El origen de un clásico del análisis indeterminado

Un famoso tipo de problema de análisis indeterminado que corrientemente se designa como «de las cien aves» (por los añadidos de ambientación de su prototipo más antiguo y divulgado) tiene su origen, según consenso de los investigadores, en las antiguas matemáticas chinas. Se recoge por primera vez —que sepamos— en la famosa compilación que se suele llamar de los *Nueve libros* o de los *Nueve tratados matemáticos* de Zhang Qiujian, obra cuyo lugar en la tradición de las matemáticas chinas se ha comparado con los *Elementos* de Euclides en las occidentales, tanto por ser un punto de llegada de un recorrido previo y también una referencia ineludible para lo sucesivo, como por tratarse en ambos casos, antes que de «obras de autor», de maduras elaboraciones, fruto de un largo esfuerzo colectivo[1]. Tal como aparece en dicha compilación, los datos del problema son los siguientes (Quian, 1963: t. II, 402-404):

> Se pide comprar un total de 100 aves por 100 monedas (qians), con la condición de comprar al menos una de cada uno de los grupos siguientes: gallos, gallinas y pollos, teniendo en cuenta que cada gallo cuesta 5 monedas, cada gallina 3, y se venden 3 pollos por una moneda.

El problema equivale, por lo tanto, a hallar alguna de las soluciones enteras positivas del sistema:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=100\\ 5x+3y+z/3&=100\end{aligned}\right\}$$

El cual es un caso particular del sistema cuya forma general sería:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=p\\ ax+by+cz&=p\end{aligned}\right\}$$

Donde a, b, c son racionales positivos y x, y, z, p son enteros positivos.

En la obra de Zhang Qiujian se facilitan todas las soluciones positivas del problema:

$$x=4,\ y=18,\ z=78$$
$$x=8,\ y=11,\ z=81$$
$$x=12,\ y=4,\ z=84$$

Pero la explicación del procedimiento por el que se llega a calcular dichas soluciones resulta muy parca y decepcionante:

> Para los gallos, cada [vez] suma 4; para las gallinas, cada [vez] resta 7; para los pollos, cada vez suma 3, y obtén [el resultado].

No se da, en todo caso, la fórmula general. Un algoritmo copiado en la transmisión posterior de la misma obra, cuya autoría es de intrincada atribución por los especialistas, intenta remediar la parquedad del original, pero no es correcto para el caso general (Van Hée, 1913: 442-447; Libbrecht, 1973: 276-282).

La transmisión del problema a las matemáticas occidentales

Es posible seguir la trayectoria de este tipo de problema que, con diversos datos, se difunde en el tiempo y en el espacio y que, a través de las matemáticas hindúes y árabes, llega hasta las del Occidente latino medieval. Al respecto, es interesante comprobar que los datos de la versión el mismo que da Abu Kamil (ca.850-ca.930) coinciden con una de las versiones recogidas en la compilación de problemas de matemáticas escolares recreativas atribuida a Alcuino de York (735-804), figura central del llamado renacimiento carolingio: es el problema n.º 39 de sus *Propositiones ad acuendos iuvenes*[2], donde los coeficientes y término independiente son:

$$a=5,\ b=1,\ c=1/20,\ p=100$$

Y la solución:

$$x=19,\ y=1,\ z=80$$

Sin embargo, como es evidente, Abu Kamil no puede haber sido la fuente, ni directa ni indirectamente, de la recopilación de Alcuino; menos aún es de creer que Alcuino hubiera podido influir sobre Abu Kamil, inserto en otra tradición cultural, y mucho más rica en ejemplos de problemas de este tipo, que la representada por la obra atribuida a Alcuino. A la posibilidad de que ambos puedan depender de alguna obra anterior, habría incluso que añadir como factor a tener en cuenta la mera coincidencia casual en la elección de los datos, nunca descartable tratándose de un problema matemático tan elemental.

Hay, además, otras cuantas *propositiones* de la recopilación escolar atribuida a Alcuino que ejemplifican el tipo general de este famoso problema, variando los detalles de ambientación y también los parámetros utilizados (y consiguientemente, las soluciones válidas). Son ocho en total, como se detalla en la siguiente tabla.

Problema	*Ambientación: cuál es la tarea*	*Coeficientes y término independiente*		*Solución dada*
5	Comprar 100 cerdos por 100 dineros	$a = 10$ $b = 5$ $c = 1/2$	$p = 100$	$x = 1$ $y = 9$ $z = 90$
32	Repartir 20 medidas de trigo entre 20 personas	$a = 3$ $b = 2$ $c = 1/2$	$p = 20$	$x = 1$ $y = 5$ $z = 14$
33	Repartir 30 medidas de trigo entre 30 personas	$a = 3$ $b = 2$ $c = 1/2$	$p = 20$	$x = 3$ $y = 5$ $z = 22$
33 bis	Repartir 90 medidas de trigo entre 90 personas	$a = 3$ $b = 2$ $c = 1/2$	$p = 90$	$x = 6$ $y = 20$ $z = 64$
34	Repartir 100 medidas de trigo entre 100 personas	$a = 3$ $b = 2$ $c = 1/2$	$p = 100$	$x = 11$ $y = 15$ $z = 74$
38	Comprar 100 animales por 100 sueldos	$a = 3$ $b = 1$ $c = 1/24$	$p = 100$	$x = 23$ $y = 29$ $z = 48$
39	Comprar 100 animales por 100 sueldos	$a = 5$ $b = 1$ $c = 1/20$	$p = 100$	$x = 19$ $y = 1$ $z = 80$
47	Repartir 12 panes entre 12 personas	$a = 2$ $b = 1/2$ $c = 1/4$	$p = 12$	$x = 5$ $y = 1$ $z = 6$

Tabla 1

El tratamiento que se da a esta clase de problemas en la obra atribuida a Alcuino renuncia a mostrar el procedimiento de resolución, pues característicamente se limita a escoger una solución (cuando hay más de una posible) y mostrar su corrección mediante la prueba más elemental de substituir los valores concretos comprobando que se ajustan a lo pedido en el enunciado. En vano buscará el lector pistas o indicaciones que permitan reconstruir el razonamiento seguido para hallar la solución. Así, por ejemplo, véase el tratamiento del problema n.º 33 bis[3]:

Cierto padre tenía 90 de familia, y quiso distribuir entre ellos 90 modios, ordenando que cada varón recibiera 3 modios, cada mujer 2 y cada niño medio. Diga, quien crea saberlo, cuántos varones, mujeres y niños había.

Solución: Multiplica 6 por 3, hacen 18; multiplica 20 por 2, hacen 40; multiplica 64 por una mitad, y hacen 32. Esto es: 6 hombres recibieron 18 modios, 20 mujeres recibieron 40 modios y 64 niños recibieron 32 modios. Sumados 6 más 20 más 64, hacen 90 de familia. Sumados 18 más 40 más 32, hacen 90 modios. Y juntos hacen 90 de familia y 90 modios.

Además, teniendo en cuenta los parámetros fijados por los datos concretos de este problema n.º 33 bis, habría que añadir otras posibles soluciones positivas enteras que en la colección de Alcuino se ignoran:

$$x = 3, y = 25, z = 62$$
$$x = 9, y = 15, z = 66$$
$$x = 12, y = 10, z = 68$$
$$x = 15, y = 5, z = 70$$

La omisión de cualquier detalle sobre el método de resolución empleado (así como la de algunas soluciones posibles) sin duda le resta interés al tratamiento que se da a estos problemas en la famosa colección de Alcuino.

Los problemas de aves de Fibonacci

Para obtener una impresión que se acerque a los procedimientos de resolución de tales problemas hemos de esperar hasta la obra del más insigne y celebrado matemático medieval de Occidente, Leonardo Bigolli de Pisa, hoy más conocido como Fibonacci (ca.1170-ca.1250). Fibonacci, según su propio testimonio —coincidente con el parecer de los estudiosos de su obra[4]—, se hallaba familiarizado con las matemáticas árabes y contribuyó decisivamente a asentar y divulgar en Occidente muchos procedimientos y resultados de las mismas con obras tan fundamentales como su *Liber abaci* (*Libro de ábaco*). Cuando hacia 1225 el emperador Federico II celebró una reunión de su curia en Pisa, la ciudad de Fibonacci, este compareció ante el soberano como matemático famoso y tuvo ocasión de participar en una suerte de incruenta justa de problemas con intelectuales de la corte del monarca[5]: en particular, los problemas que allí le propuso el maestro Juan de Palermo fueron ocasión para escribir la recopilación titulada *Flos* (*Flor*) y el *Liber quadratorum* (*Libro de los cuadrados*), dos de sus obras más interesantes. Posteriormente, a petición de cierto maestro Teodoro, que también era, como Juan de Palermo, «filósofo del emperador», Fibonacci recogió, entre otros problemas, seis versiones del conocido problema de las aves, con indicaciones sobre su resolución, y se los incluyó en una carta hoy célebre como uno de sus opúsculos o escritos menores (Boncompagni, 1857-1862: t. II, 247-252).

Por su interés, vamos a reproducir y comentar a continuación el tratamiento que Fibonacci da a esas seis variaciones seguidas sobre el problema de las aves (traducción nuestra directa del latín, sobre la edición de Boncompagni).

Primer problema de aves

> Alguien compra gorriones a 3 por 1 dinero, tórtolas a 2 por 1 dinero y palomas a 1 por 2 dineros; y de estos tres tipos de aves obtuvo 30 aves por 30 dineros. Se pregunta cuántas aves compró de cada tipo. Supuse en primer lugar 30 gorriones, por 10 dineros, y guardé 20 dineros, que son la diferencia que queda de 10 dineros hasta 30.
>
> Cambié uno de los gorriones por una tórtola, y ese cambio supuso un aumento de 1/6 de dinero, porque cada gorrión valía 1/3 de dinero y cada tórtola 1/2 de dinero, esto es, 1/6 de dinero más que el precio de un gorrión.
>
> Cambié a continuación uno de los gorriones por una paloma, y ese cambio supuso un aumento de 1 + 2/3 dineros, esto es, la diferencia que va de 1/3 de dinero hasta 2 dineros.
>
> Multipliqué por 6 ese aumento de 1 + 2/3 dineros, y el resultado dio 10.
>
> Y según esto, me pareció oportuno cambiar gorriones en tórtolas y palomas, de manera que dicho cambio llegue a sumar hasta aquellos 20 dineros que antes reservé. Los cuales 20 dineros multipliqué por 6, obteniendo 120.
>
> Separé estos 120 en dos partes de manera que una de ellas se pudiera dividir enteramente por 10, y la otra por 1, y el total de cada división no ascendiera hasta 30. La primera parte me dio 110, y la otra 10.
>
> Y dividí la primera parte, esto es, 110, por 10, y la segunda por 1, y obtuve 11 palomas y 10 tórtolas: las cuales, restadas del total de 30 aves, dejan 9 como el número de los gorriones.
>
> Y ya que estos [9] gorriones valen 3 dineros, las 10 tórtolas valen 5 dineros y las 11 palomas valen 22 dineros, de esta forma entre los tres tipos de aves se tendrá un total de 30 aves por 30 dineros, como se pedía.

Comentario

Con objeto de aproximarnos al método de resolución empleado por Fibonacci, resulta interesante comparar su tratamiento del problema con el que hoy le daríamos corrientemente.

En términos actuales, el problema se plantea como un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, donde x es el número de gorriones, y el de tórtolas y z el de palomas. Según los datos del problema, 30 en (*i*) es el número de aves requerido y 30 en (*ii*) el número de dineros por el que se pide cerrar la compra:

$$\left.\begin{array}{lr} (i) & x+y+z=30 \\ (ii) & x/3+y/2+2z=30 \end{array}\right\}$$

Para la resolución del sistema:

	x	y	z	término independiente
(*i*)	1	1	1	30
(*ii*)	1/3	1/2	2	30

multiplicamos (*i*) por 2 y se la restamos a (*ii*) multiplicada por 6:

$(ii\cdot 6)$	2	3	12	180
$(i\cdot 2)$	2	2	2	60
		1	10	120

tenemos:

$$y+10z=120$$

y operando:

$$y=120-10z$$
$$z=(120-y)/10$$

Se ve que y debe ser múltiplo de 10, como el otro término de la igualdad:

$$y=10(12-z)$$

Si $y=10$, entonces $z=(120-10)/10=11$

Substituyendo en (*i*):

$$x+10+11=30$$
$$x=9$$

Se ha alcanzado la solución dada por Fibonacci: $x=9$, $y=10$, $z=11$

Revisemos ahora cómo lo resuelve él.

Tantea primeramente cuánto se gastaría si todas las aves que se comprasen fueran del tipo más barato, esto es, gorriones: si el gorrión cuesta 1/3 de dinero, 30 gorriones ascienden a 10 dineros. Anota que esto le dejaría un remanente de 20 dineros. De momento, no se cumple ninguna de las condiciones del problema, porque se pide comprar al menos un ave de cada tipo, y gastar el total de 30 dineros.

Calcula ahora la diferencia de precio que hay que añadir para cambiar cada gorrión adquirido por una tórtola: es la diferencia entre 1/3 de dinero y 1/2 de dinero. Para calcular dicha diferencia, divide el dinero en sextos, y así, como un tercio son 2/6 y la mitad, 3/6, la diferencia entre un tercio y una mitad es 1/6.

Calcula a continuación, del mismo modo, la diferencia de precio entre un gorrión y una paloma. Supone pasar de 1/3 a (2 =) 6/3, esto es, sumar 5/6 (= 1 + 2/3) de dinero al precio del gorrión para poder adquirir una paloma.

Toma seguidamente la cantidad de 20 dineros, sobrante de la compra hipotética de 30 gorriones por 10 dineros, la multiplica por 6, y el resultado, 120, lo separa en dos partes, de forma que una sea divisible por 10 y la otra por 1; son 110 y 10. Hace dichas divisiones y le dan 110/10 = 11, el número de palomas, y 10/1 = 10, el número de tórtolas. Se impone como condición que la suma de estos resultados no llegue a 30, pues en ese caso no dejaría lugar a que hubiera gorriones. Sumando esos números y restando el resultado de 30, obtiene 9 como el número de gorriones, y comprueba finalmente que al precio establecido todas esas aves suman la cantidad deseada.

Más claramente:

$$30 \cdot 1/3 = 10 \text{ dineros,}$$

lo que costaría comprar todas las aves del tipo más barato.

$$30 - 10 = 20 \text{ dineros,}$$

la suma restante,

$$20 \cdot 6 = 120 = 110 + 10.$$

¿Por qué multiplica por 6?

Aunque no lo diga aquí, Fibonacci va anotando:

x	y	z	
$1/3$	$1/2$	2	(los precios de cada tipo de ave)
0	$1/6$	$10/6$	(la diferencia de estos con $1/3$)
0	1	10	(multiplica por 6 para que sean enteros)

(Así halla los valores 1, 10 por los que quiere dividir)

Prosigue Fibonacci:

$$110:10=11 \qquad \text{Ergo } z=11$$
$$10:1=10 \qquad \text{Ergo } y=10$$
$$30-11-10=9 \qquad \text{Ergo } x=11$$

Segundo problema de aves

Y si queremos comprar 29 aves por 29 dineros, podemos operar del mismo modo: esto es, extraemos de los 29 dineros el precio de 29 gorriones, que son las aves de menor precio; y lo que queda lo multiplicamos por 6, que da 116.

Cantidad que separamos a continuación en dos partes, de manera que una se pueda dividir enteramente por 10, y la otra por 1, no ascendiendo la suma de ambas a 29. Estas partes se pueden hacer de dos maneras:

Primero, que la primera parte sea 110 y la segunda 6: al dividir 110 por 10 da 11 palomas, y al dividir 6 por 1, se tiene 6 tórtolas; restadas unas y otras de 29, queda 12 para el número de gorriones.

O bien, separamos 116 en 100 y 16; y dividimos 100 por 10, y 16 por 1, y tendremos 10 palomas y 16 tórtolas, siendo las que restan hasta 29, esto es, 3, los gorriones. Y así queda resuelta esta cuestión de dos maneras.

Comentario

Aquí se trata del sistema:

$$\left.\begin{array}{ll} (i) & x+y+z=29 \\ (ii) & x/3+y/2+2z=29 \end{array}\right\}$$

donde se llega a:

$$y + 10z = 116$$

que resuelve de dos maneras:

$$y = 116 - 10z$$

si $y = 6$, entonces $z = 11$ y $x = 29 - 6 - 11 = 12$
o bien,
si $y = 16$, entonces $z = 10$ y $x = 29 - 16 - 10 = 3$

Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso anterior, calcula primeramente cuánto se gastaría si todas las aves se compraran del tipo más barato, esto es: $29 \cdot 1/3 = 9 + 2/3$; a continuación, resta esa cantidad del total de 29: $29 - (9 + 2/3) = 19 + 1/3$; como antes y por la misma razón, multiplica ahora por 6: $(19 + 1/3) \cdot 6 = 116 = 110 + 6$ (opción a) $= 100 + 16$ (opción b).

Opción a:

$$110:10=11 \qquad \text{Ergo } z=11$$
$$6:1=6 \qquad \text{Ergo } y=6$$
$$29-11-6=12 \qquad \text{Ergo } x=12$$

Opción b:

$$100:10=10 \qquad \text{Ergo } z=10$$
$$16:1=16 \qquad \text{Ergo } y=16$$
$$29-11-16=3 \qquad \text{Ergo } x=3$$

Tercer problema de aves

Y si queremos comprar 15 aves por 15 dineros, demostraré que esto no puede ser sin fraccionar las aves.

Pues, en efecto, si extraigo el precio de 15 gorriones del total de 15 dineros y multiplico lo que resta por 6, lo que hace 60, no se podrá separar en dos partes, de la que una se pueda dividir por 10 y la otra por 1, teniendo un número entero por resultado de cada una de estas divisiones, que sea menor de 15.

Por ejemplo, si separo 60 en 50 y 10, y divido 50 por 10 y 10 por 1, de ambas divisiones resultan 5 y 10, los cuales sumados hacen 15, esto es, la suma del total de aves: y así no podría entrar gorrión alguno en esta compra, porque 5 palomas valen 10 dineros y 10 tórtolas valen 5 dineros, y de esta forma solamente con estos dos tipos de aves ya se llega a sumar 15 aves por 15 dineros.

Y hasta 60 no hay otro número mayor que 50 que se pueda dividir enteramente por 10; y menor [que 50] no ha lugar aquí, porque si ponemos en una parte 40 queda 20 para la otra, y si 40 se divide por 10 y 20 por 1, saldrían de estas divisiones 24 aves, lo que no procede, porque deben ser 15.

Pero si queremos fraccionar aves, entonces separamos 60 en 55 y 5, y dividimos 55 por 10, que da 5 + 1/2 palomas, y 5 por 1, que da 5 tórtolas. Restadas, así pues, 5 + 1/2 palomas y 5 tórtolas del total de 15 aves, quedan 4 +1/2 gorriones, cuyo precio asciende a 1 dinero y medio, siendo el precio de 5 tórtolas 2 + 1/2 dineros y el precio de 5 + 1/2 palomas, 11 dineros. Y así se tendrían, de los tres tipos, 15 aves por 15 dineros.

Comentario

Mismo procedimiento:

$$15 \cdot 1/3 = 5$$
$$15 - 5 = 10$$
$$10 \cdot 6 = 60 = 50+10 \text{ (opción a)} = 55+5 \text{ (opción b)}$$

Opción a:

$$50:10=5 \qquad \text{Ergo } z=5$$
$$10:1=10 \qquad \text{Ergo } y=10$$

Ya suman el total, no queda espacio para x.

Opción b:

$$55:10=5+1/2 \qquad \text{Ergo } z=5+1/2$$
$$5:1=5 \qquad \text{Ergo } y=5$$
$$15-\left(5+1/2\right)-5=4+1/2 \qquad \text{Ergo } x=4+1/2$$

Fibonacci descarta este resultado porque no es entero (sin duda se trata de aves vivas).

Cuarto problema de aves

Y si queremos comprar 15 aves por 16 dineros, esto sí se puede hacer sin fracciones: porque, extraídos 5 dineros, esto es, el precio de 15 gorriones, de 16 dineros, quedan 11 dineros, que, multiplicados por 6 da 66, lo que se separa en 60 y 6, dividiéndose 60 enteramente por 10, y 6 por 1, y de estas divisiones resultan 6 palomas y 6 tórtolas, siendo las aves que quedan hasta 15, esto es, 3, los gorriones. Y así podemos operar en todos los problemas similares.

Comentario

Mínima variación sobre el anterior, para obtener resultados enteros:

$$15 \cdot 1/3 = 5$$
$$16 - 5 = 11$$
$$11 \cdot 6 = 66 = 60 + 6$$

$$60:10=6 \qquad \text{Ergo } z=6$$
$$6:1=6 \qquad \text{Ergo } y=6$$
$$15-6-6=3 \qquad \text{Ergo } x=3$$

Quinto problema de aves

Pero para que vuestra inteligencia comprenda mejor esto que dije, propondré otra cuestión de este modo:

A saber, que se compren 3 gorriones por 1 dinero, una paloma valga 2 dineros y una perdiz, 3 dineros. Y de estos tres tipos quiero comprar 30 aves por 30 dineros.

Extraigo, en efecto, del modo arriba indicado, del total de 30 dineros el precio de 30 gorriones, que es 10; quedan 20 dineros, que reservo. Y cambio uno de los gorriones por una paloma, ascendiendo el aumento a 1 + 2/3 dineros, esto es, 5 tercios de dinero; y cambio entonces otro gorrión por una perdiz, ascendiendo el aumento a 2 + 2/3 de dinero, esto es, 8 tercios de dinero, lo que equivale a la diferencia entre el precio de un gorrión y el de una perdiz. Multiplico por 3 los 20 dineros guardados, dando 60, que separo en dos partes, de las que una se divide enteramente por 8 y la otra por 5, de manera que lo que resulte de una y otra división no llegue a 30. Una de esas partes será 40 y la otra 20; divido 40 por 8, lo que da 5 perdices, y divido 20 por 5, dando 4 palomas: las aves que quedan hasta 30, esto es, 21, son los gorriones.

Comentario

Al cambiar los coeficientes, cambian algunos valores del proceso de resolución.

Se trata en este caso del sistema:

$$\left.\begin{array}{ll} (i) & x+y+z=30 \\ (ii) & x/3+2y+3z=30 \end{array}\right\}$$

Si, para obtener valores enteros, multiplicamos (*ii*) por 3, y le restamos (*i*):

$$\begin{array}{lrrrr} (ii\cdot 3) & 1 & 6 & 9 & 90 \\ (i) & 1 & 1 & 1 & 30 \\ \hline & & 5 & 8 & 60 \end{array} \quad -$$

tenemos:

$$5y + 8z = 60$$

Hemos obtenido los valores 5, 8, que Fibonacci emplea esta vez, en vez de 1, 10, como en los ejemplos anteriores. Su resolución sigue los mismos pasos:

$$30 \cdot 1/3 = 10$$
$$30 - 10 = 20$$
$$20 \cdot 3 = 60 = 40 + 20$$

$$\begin{array}{ll} 40:8=5 & \text{Ergo } z=5 \\ 20:5=4 & \text{Ergo } y=4 \\ 30-5-4=21 & \text{Ergo } x=21 \end{array}$$

Sexto problema de aves

Otro: 5 gorriones valen 1 dinero, se venden 3 tórtolas por un dinero, una paloma vale 2 dineros y una perdiz, 3 dineros. Y de estos cuatro tipos quiero comprar 24 aves por 24 dineros.

Anoto los precios de cada género de ave en orden, a saber: 1/5, 1/3, 2 y 3, como figura en el margen, y sustraigo el precio de un gorrión del de cada una de las restantes tres especies, esto es: 1/5 de 1/3, y de 2, y de 3. Anoto los restos sobre cada uno de dichos precios, por orden, y así tendré: 2/15 sobre 1/5; 1 + 4/5, esto es, 27/15, sobre 2; 2 + 4/5, esto es, 42/15, sobre 3.

A continuación, resto el precio de 24 gorriones de 24 dineros, y quedan 19 + 1/5 dineros; éstos los multiplico por 15, para hacer de ellos partes quinceavas, en que están expresadas las diferencias sobrescritas, y da 288; esto lo separo en tres partes, de las que una tenga división entera por 42, otra por 27, y la tercera por 2: ya que el aumento del cambio de un gorrión por una perdiz es 12/15, el aumento de cambiar un gorrión por una paloma es 27/15, y el aumento de cambiar un gorrión por una tórtola es 2/15; y así, ha de separarse en tres partes, de la que una se pueda dividir enteramente por 42, la segunda por 27 y la tercera por 2. Y lo que salga de cada una de estas tres divisiones, será el número de aves compradas de cada tipo, esto es, si no llega a 24. Esto puede hacerse de dos maneras:

Primero, a 288 resto el cuádruplo de 42 y de 27, esto es, respectivamente 168 y 108, que sumados dan 276; queda, para la tercera parte, 12. Divido entonces 168 por 42, 108 por 27 y 12 por 2, y se obtiene 4 perdices, 4 palomas y 6 tórtolas, que sumadas son 14 aves; las que quedan hasta 24, esto es, 10, serán gorriones.

O de otro modo: pongo para la primera parte el quíntuplo de 42, por lo que saldrán 5 perdices; para la segunda parte pongo el doble de 27, por lo que saldrán 2 palomas; de los mismos 288 quedarán 24, que son el duodécuplo de 2, por el cual duodécuplo se tendrá 12 tórtolas; quedan en verdad las que faltan hasta 24 aves, esto es, 5, que serán gorriones.

Comentario

Equivale al sistema:

$$\left.\begin{array}{ll} (i) & x+y+z+p=24 \\ (ii) & x/5+y/3+2z+3p=24 \end{array}\right\}$$

Si multiplicamos (*ii*) por 5 y le restamos (*i*):

$$\begin{array}{lrrrrr} (ii\cdot 5) & 1 & 5/3 & 10 & 15 & 120 \\ (i) & 1 & 1 & 1 & 1 & 24 \\ \hline & & 2/3 & 9 & 14 & 96 \end{array} \quad -$$

Ahora, si deseamos reducir a valores enteros, multiplicamos por 3 y queda

$$2 \qquad 27 \quad 42 \quad 288$$

2, 27, 42 y 288 son los valores empleados por Fibonacci.

Este ejemplo es el que mejor esclarece el procedimiento seguido por él, porque indica la tabla, antes implícita, que va anotando:

x	y	z	p	
$1/5$	$1/3$	2	3	(precios de cada tipo de ave)
0	$2/15$	$27/15$	$42/15$	(diferencia con $1/5$)
0	2	27	42	(multiplica lo anterior por 15)

y así halla los tres valores, 2, 27 y 42, que son la diferencia de precio de y, z y p respecto de x, multiplicada por 15 para manejar valores enteros.

Y separa 288 en tres partes, que quiere divisibles por cada uno de estos tres valores.

Es decir:

$$24 \cdot 1/5 = 4 + 4/5$$
$$24 - (4 + 4/5) = 19 + 1/5$$
$$(19 + 1/5) \cdot 15 = 288$$

Opción a:

$$288 = 168 + 108 + 12$$

Véase que: $168 = 42 \cdot 4$; $108 = 27 \cdot 4$; 12 es lo que resta hasta 288.

$162 : 42 = 4$	Ergo $p = 4$
$108 : 27 = 4$	Ergo $z = 4$
$12 : 2 = 6$	Ergo $y = 6$
$24 - 4 - 4 - 6 = 10$	Ergo $x = 10$

Opción b:

$$288 = 210 + 54 + 24$$

Véase que: $210 = 42 \cdot 5$; $54 = 27 \cdot 2$; 24 es lo que resta hasta 288.

$210 : 42 = 5$	Ergo $p = 5$
$54 : 27 = 2$	Ergo $z = 2$
$24 : 2 = 12$	Ergo $y = 12$
$24 - 5 - 2 - 12 = 5$	Ergo $x = 5$

Conclusión

En definitiva, la lectura de Fibonacci resulta más esclarecedora del procedimiento seguido para resolver este tipo de problemas si se compara con la total ausencia de pistas al respecto en la colección de Alcuino. Con todo, no se puede evitar la impresión de que el arte de Fibonacci, como el de otros calculistas profesionales de su tiempo que presentaban sus resultados ante las cortes de grandes señores aficionados a las matemáticas y a los problemas de ingenio, tenía algo de espectáculo (con «secretos del oficio» como los del prestidigitador) y otro poco de tanteo. Tal vez si Fibonacci no llega a exponer con total claridad su método de resolución, ello se debe a que no alcanza la generalidad, limpieza y comprensión completa del problema que algunos siglos antes habían logrado varios matemáticos hindúes (Caianiello, 2008). Pero esa es otra historia y, como diría Kipling, deberá ser contada en otra ocasión.

Referencias bibliográficas

Boncompagni, B. (1857-1862), *Scritti di Leonardo Pisano, matematico del secolo decimoterzo*, Tipografia delle Scienze Matematiche e Fisiche, Roma (2 vols.).

Caianiello, E. (2008), «Le problème d'oiseaux: procédés de resolution dans l'histoire des mathematiques», en E. Barbin y otros (eds.), *History and Epistemology in Mathematics Education*. Proceedings of the 5th European Summer University (Prague, July 19-24, 2007), Vydavatelský, Pilsen, 327-342.

Folkerts, M. (1978), *Die älteste mathematischen Aufgabensammlung in lateinischer Sprache: die Alkuin zugeschriebenen Propositiones ad acuendos iuvenes. Überlieferung, Inhalt, Kritische Edition*, Springer, Viena.

Hughes, B. (2008), *Fibonacci's De Practica Geometrie*, Springer, Nueva York.

Libbrecht, U. J. (1973), *Chinese Mathematics in the Thirteenth Century. The Shu-shu chiu-chang of Ch'in Chiu-shao*, MIT Press, Cambridge (Mass.).

Martín Prieto, P. (2015), *Las matemáticas en la Edad Media. Una historia de las matemáticas en la Edad Media occidental*, La Ergástula, Madrid.

Moreno, R. (2016), *Alcuino de York. Problemas para la instrucción de los jóvenes*, Nivola, Madrid.

Quian, B. (1963), *Suanjing shishu*, Zhonghua shuju, Pekín (2 vols.).

SESIANO, J. (1999), *Une introduction à l'histoire de l'algèbre. Résolution des équations des Mésopotamiens à la Renaissance*, Presses Polythechniques et Universitaires Romandes, Lausana.

SUTER, H. (1910-1911), «Das Buch der Seltenheiten der Rechenkunst von Abu Kamil el Misri», *Bibliotheca Mathematica*, n.º 11, 100-120.

TOUBERT, P., y A. PARAVICINI (1994), *Federico II e le scienze*, Sellerio, Palermo.

VAN HÉE, L. (1913), «Les cent volailles, ou l'analyse indéterminée en Chine», *T'oung Pao*, n.º 14, 435-450.

VOGEL, K. (1968), *Chiu chang suan shu. Neun Bücher arithmetischen Technik. Ein chinesisches Rechenbuch für den praktischen Gebrauch aus der frühen Hanzeit (202 v. Chr. bis 9 n. Chr.)*, Vieweg, Braunschweig.

YOUSCHKEVITCH, A. P. (1964), *Geschichte der Mathematik im Mittelalter*, Teubner, Leipzig.

PABLO MARTÍN PRIETO
Universidad Complutense de Madrid
<pablomartinprieto@ghis.ucm.es>

1 Como se trata de un comentario del siglo V d. C. sobre un texto anterior, que supuestamente data de los comienzos de la era Han (ca. 190 d. C.), cabe la posibilidad de que el problema se remonte al primer siglo de nuestra era, como sostiene Youschkevitch (1964: 74); la mayoría de autores se deciden, en cambio, por el s. V d. C.: en cualquier caso, nos hallamos ante la más antigua aparición conocida del problema que nos ocupa. La edición de referencia de esta obra: Quian (1963); una buena traducción (alemana): Vogel (1968).

2 Sobre Abu Kamil, véase Sesiano (1999: 79-83). De la obra de Alcuino la edición de referencia es: Folkerts (1978); una reciente traducción española: Moreno Castillo (2016).

3 Traducción nuestra del latín, sobre el texto de la edición de Folkerts (1978: 64).

4 Sobre la educación y fuentes arábigas de Fibonacci: Hughes (2008: xviii-xxvi).

5 Sobre Federico II como mecenas de la ciencia: Toubert-Paravicini (1994).