

Recursos visuales en relación con la función inversa

FÉLIX MARTÍNEZ DE LA ROSA

En este artículo se propone mejorar la enseñanza de la función inversa a través de la visualización.

Palabras clave: Función inversa, Visualización, Recursos, Derivada, Integral.

Visual resources in relation with the inverse function

The goal of this paper is to improve the teaching of the inverse function by using the visualization.

Keywords: Inverse function, Visualization, Resources, Derivative, Integral.

La escasez de tiempo es uno de los obstáculos a los que los profesores de matemáticas tenemos que enfrentarnos, y que debemos superar, para poder llevar a cabo nuestra tarea educativa y formativa. Esto ocurre en todos los niveles de la enseñanza, y provoca que los profesores no podamos detenernos a profundizar en algunos conceptos que, por su interés, merecerían ser tratados con mayor intensidad de lo que se hace.

En bachillerato, el problema se acrecienta debido a la gran cantidad de materia que se debe impartir. Además, los exámenes de ingreso en la universidad son un pensamiento permanente en la mente de los estudiantes. Para los profesores, el objetivo es ofrecer una preparación que permita superar estos exámenes. Es por esto que los temas que tienen especial incidencia en esas pruebas, son prioritarios. Esto debe ser así, y no puede ser de otra manera, por la responsabilidad que tenemos los profesores con nuestros alumnos. Como consecuencia, quedan relegados a un segundo plano los temas cuya aparición en esos exámenes es menos frecuente.

La función inversa es un ejemplo de lo anterior. Es muy raro que en los exámenes de acceso, aparezca alguna pregunta relacionada con ese concepto. Por eso, este tema no se explica con demasiada profundidad. En los textos de bachi-

lterato se expone de manera algo superficial, y los estudiantes tienen la percepción de que las fórmulas que se relacionan con él, no son demasiado importantes. Como consecuencia, entre los estudiantes de primer curso de Cálculo en la universidad es fácil detectar, además de una cierta desgana en relación a este tema, algunos errores de tipo conceptual. En realidad, ya la propia notación $()^{-1}$ resulta confusa porque se trata de un «símbolo matemático polisémico» (Mamolo, 2010), es decir puede tener distintos significados (puede interpretarse como un recíproco, o como la inversa de una función). En (Kontorovich, 2017) puede verse un estudio sobre la confusión que provoca esta notación en los estudiantes.

En este artículo se analiza la forma de introducir el tema de la función inversa en algunos libros de texto de bachillerato, y se exponen algunos de los errores de concepto detectados entre estudiantes universitarios. Pero el foco principal del trabajo, son las posibilidades visuales que ofrece este tema, y que permiten que muchos aspectos relacionados con él puedan explicarse de una forma atractiva y motivadora para los estudiantes. Se hace un recorrido por algunas de ellas: la relación entre las gráficas de una función y su inversa, las técnicas visuales para obtener fórmulas sobre sus derivadas e integrales, y un tipo de fórmulas con gran importancia en la historia de las matemáticas.

El concepto de función inversa en el bachillerato

En el bachillerato, la forma usual de motivar el concepto de función inversa (Cólera y Oliveira, 2009; González y otros, 2009), es la de mostrar dos funciones cuya composición da el valor x : cada una de ellas deshace lo que hace la otra. Se denominan f y f^{-1} , y se tiene que $f(a) = b$ si y sólo si $a = f^{-1}(b)$. Se aclara que f debe ser inyectiva para que pueda existir su inversa y se menciona la simetría de sus gráficas respecto de la recta $y = x$.

Para obtener la fórmula de la inversa de $y = f(x)$, se aplica el método que consiste en in-

tercambiar la variable x por y en la expresión de la función. Despejando y se obtiene $y = f^{-1}(x)$.

Suponiendo que $f'(a) \neq 0$, el valor de la derivada de f^{-1} en $b = f(a)$, $1/f'(a)$, se obtiene aplicando la regla de la cadena en la expresión $f(f^{-1}(x)) = x$ (Cólera y Oliveira, 2009; Escoredo y otros, 2009).

En la lista de derivadas, se dan las correspondientes a las funciones trigonométricas inversas. También, en el tema de la integración, la lista de integrales inmediatas incluye aquellas cuyas primitivas son el arcotangente y el arcoseno.

Esta exposición provoca la aparición de algunos errores de concepto entre los estudiantes, que se exponen a continuación.

- El hecho de no especificar si la función debe ser continua o no para que exista la inversa, contribuye a sembrar ideas confusas. Por ejemplo, los estudiantes de primer curso de Cálculo en la universidad no saben a qué atenerse cuando se les pregunta si la función de la figura 1 tiene inversa. Comprenden que la función es inyectiva, pero la discontinuidad de salto en b , y el hecho de que no sea ni creciente ni decreciente en el intervalo (a, c) , les hace inclinarse a pensar que no tiene inversa.
- También tienen cierta confusión en relación con las variables. Si se les dice que es $x = f^{-1}(y)$ la función inversa de $y = f(x)$, no entienden muy bien que en el proceso de calcularla se cambie x por y para obtener $y = f^{-1}(x)$.
- En cuanto a la simetría de las gráficas respecto de la recta $y = x$, es algo que los estudiantes parecen asumir sin estar demasiado convencidos de ello y de lo que significa.

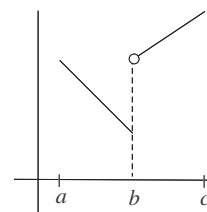


Figura 1

- La regla de la cadena no puede aplicarse en la composición $f \circ f^{-1}$, a no ser que se sepa ya que f^{-1} es derivable. Por tanto, aunque la fórmula de la derivada de la inversa es correcta, el método empleado para obtenerla no es una demostración válida.

Los estudiantes miran a las funciones inversas, y en especial a las de las funciones trigonométricas, con una mezcla de recelo, aprensión y fastidio. Estas últimas aparecen en la lista de derivadas que deben memorizar. A veces simplemente se incluyen a la manera de entes extraños y, aparentemente, solo para engrosarla (González y otros, 2009). En ocasiones la lista se da primero y después se da la fórmula para el cálculo de la derivada de la inversa (Escoredó y otros, 2009). Finalmente se incorporan en la lista de integrales inmediatas. En ambos casos el tratamiento que se les da no es nada motivador.

La visualización, es una de las mejores bazas de las que dispone un docente para motivar a los estudiantes y conseguir que el aprendizaje de los conceptos matemáticos sea eficaz y atractivo al mismo tiempo. El tema de las funciones inversas es especialmente proclive a ello, ya que sus aspectos visuales son muchos y variados.

Construcciones visuales de la gráfica de la función inversa

En una función $y=f(x)$, la x se denomina variable independiente. Si conseguimos despejar x entonces tendremos una expresión en la que la variable independiente es y . Esta expresión se conoce como inversa de f : $x=f^{-1}(y)$.

La primera forma de visualizar la gráfica de la inversa de una función inyectiva, es partir de cada punto (a, b) de la gráfica de f y obtener el correspondiente punto (b, a) de la gráfica de f^{-1} . Para ello, en (Ayoub, 1987) se propone observar que los puntos (a, b) y (b, a) son los vértices de una diagonal de un cuadrado de lado $a-b$, cuyos otros dos vértices (a, a) , y (b, b) , están sobre la recta $y=x$. Por eso las gráficas de f y de f^{-1} son simétricas respecto de esa recta (figura 2).

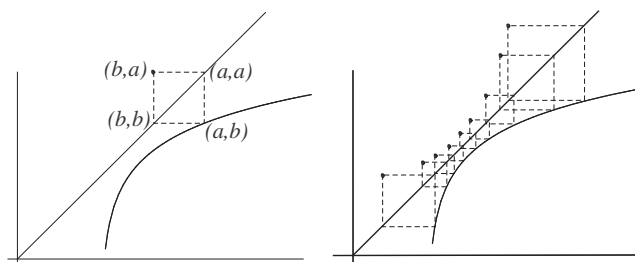


Figura 2

El proceso de obtención de la inversa consiste en intercambiar la variable x por y para obtener $y=f^{-1}(x)$, lo cual choca con la denominación inicial $x=f^{-1}(y)$. La visualización es una forma interesante de aclarar este baile de variables que fomenta cierta confusión. En la expresión $x=f^{-1}(y)$ la variable independiente es y , por tanto podemos visualizarla si miramos a la gráfica de la función $y=f(x)$ desde el eje y (figura 3, arriba). Si queremos que la variable independiente y esté en el eje horizontal basta girar ese dibujo 90° en

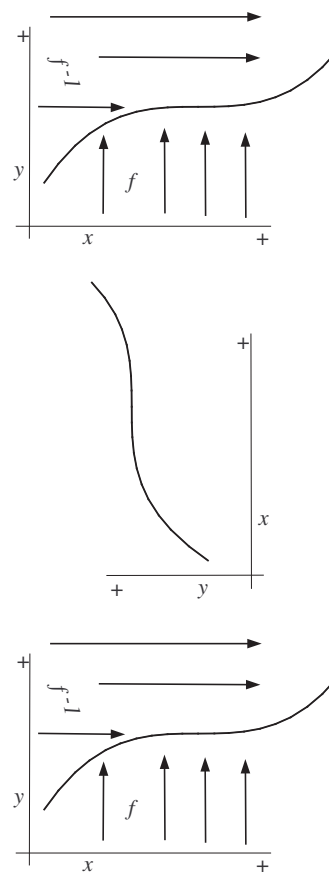


Figura 3

sentido positivo. Invertiendo el dibujo para que la parte derecha del eje horizontal sea la parte positiva (figura 3, abajo) se obtiene una visión directa de la gráfica de (Spivak, 1986).

En la sección dedicada a la integración, se utilizará la figura 3 (arriba) como herramienta para obtener primitivas de funciones inversas, y otras propiedades de las integrales, de una manera visual.

Finalmente, intercambiar x por y permite que x sea la variable independiente de las dos funciones f y f^{-1} , lo que hace que la gráfica de ambas puedan observarse desde el mismo punto de vista (figura 4).

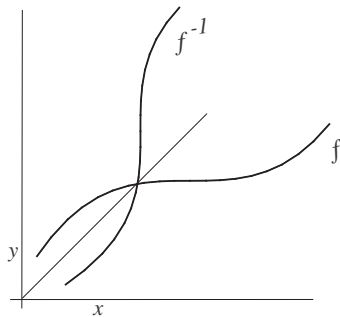


Figura 4

Gráficas de la función exponencial y logarítmica

Uno de los ejemplos más socorridos para ilustrar la gráfica de una función y la de su inversa, es el de la función exponencial $y = a^x$ y la logarítmica $y = \log_a x$, donde $a > 0$ (figura 5).

La figura 5 es válida para muchos valores de a como 2, 10, e , pero no para todos: se muestra solo una parte de la realidad sin decirlo, y al

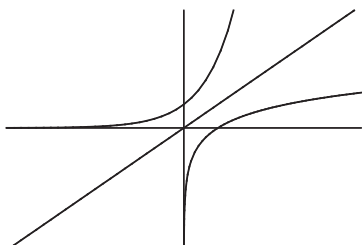


Figura 5

actuar de esta forma los profesores somos responsables de la formación de ideas erróneas en los estudiantes.

En Couch (2002) se analiza el caso $a > 1$. Si $a^t > t$ se verifica que $a^t > t > \log_a t$. Asimismo si $a^t < t$ entonces $a^t < t < \log_a t$. Por tanto si las gráficas de $y = a^x$ y de $y = \log_a x$ se cortan en t , entonces $a^t = t$. Por otro lado si $a^t = t$ entonces $\log_a t = t$, y las gráficas se cortan en t . Conclusión:

Para $a > 1$, las gráficas de $y = a^x$ y de $y = \log_a x$ se cortan en t si y sólo si $a^t = t^{1/t}$.

En la figura 6 están dibujadas la gráfica de $f(x) = x^{1/x}$ junto con la de la recta $y = a$.

Ambas se cortan en dos puntos si $1 < a < e^{1/e}$, en uno si $a = e^{1/e}$ y no se cortan si $a > e^{1/e}$ por tanto, para $a > 1$, el dibujo correcto de la función exponencial y logarítmica es el de la figura 7.

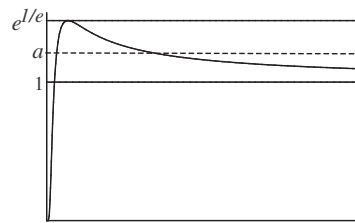


Figura 6

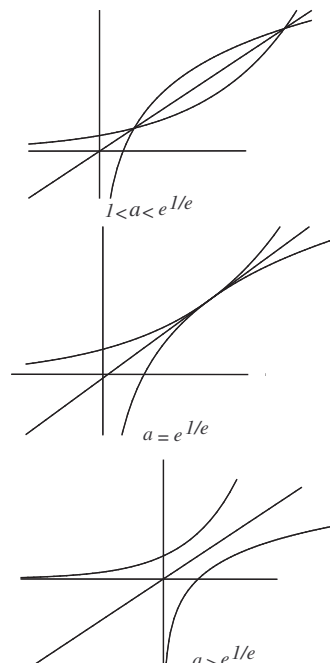


Figura 7

Si $0 < a < 1$ (Bilan y Jelic, 2014), existe un punto de corte si $1/e^e \leq a < 1$ y tres puntos de corte si $0 < a < 1/e^e$. La figura 8 corresponde al caso $a = 1/1000$.

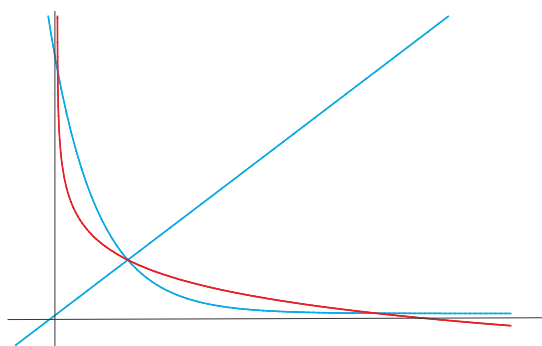


Figura 8

Sumas de arcotangentes

La visualización y la historia son dos excelentes recursos que pueden usarse para despertar el interés de los alumnos por las matemáticas. Ambos se aúnan perfectamente en la función arcotangente. Entre los siglos XVIII y XIX, los matemáticos se emplearon a fondo para obtener decimales del número π . Para ello disponían de la conocida como serie de Leibniz de 1674:

$$\arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots = \frac{\pi}{4}$$

Esta serie permite calcular decimales de π , el problema es que su obtención es muy lenta. Por eso optaron por emplear la fórmula de James Gregory de 1671:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Combinando esta fórmula con identidades relativas a la suma de arcotangentes se consiguió calcular una buena cantidad de esos decimales de una forma más rápida.

Por ejemplo en 1737, Euler obtuvo la fórmula:

$$\arctan \frac{1}{x} = \arctan \frac{1}{x+y} + \arctan \frac{y}{x^2 + xy + 1}$$

Para $x=y=1$, se obtiene:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$$

Para $x=2, y=1$, se tiene que

$$\arctan \frac{1}{2} = \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7}$$

Sustituyendo en la primera expresión se obtiene:

$$\frac{\pi}{4} = 2\arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{7}$$

Esta fórmula la publicó Hutton en 1776. Fue utilizada en 1789 por Greg Von Vega para calcular 143 decimales de π , y por Clausen en 1847 para calcular 248 decimales de π .

Existen numerosas identidades como las anteriores, pero aquí nos interesamos solo en las que pueden demostrarse visualmente. Esto ocurre con la fórmula de Euler. Se parte de la figura 9.

En la figura 9 (arriba), las longitudes de los lados del triángulo grande son las del pequeño multiplicadas por $(x+y)$. Es decir:

$$(x+y), (x+y)x, (x+y)\sqrt{1+x^2}$$

En la figura 9 (abajo), se ha girado el pequeño en un ángulo recto, manteniendo el vértice común de los triángulos, y después se ha trasladado hacia arriba.

En la figura 10 (Wu, 2004), se ha completado el rectángulo y se observa que $a=b+c$. Finalmente, la fórmula de Euler se deduce de los siguientes valores de las tangentes:

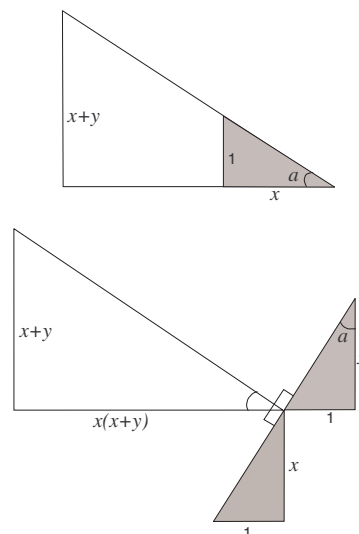


Figura 9

$$\tan a = \frac{1}{x}, \tan b = \frac{y}{x^2 + xy + 1} \text{ y}$$

$$\tan c = \frac{B}{A} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{(x+y)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{x+y}$$

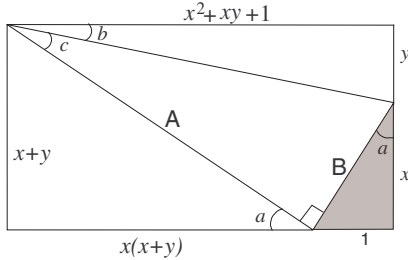


Figura 10

Otras sumas de arcotangentes se pueden visualizar con un solo dibujo (Wu, 2003). Para ello se parte de la figura 11.

En la figura 11 (arriba) se ha inscrito un cuadrado dentro de otro, por tanto el ángulo marcado es $\pi/4$. En la figura 11 (abajo) se ha tomado la parte de abajo del dibujo anterior, y se han resaltado dos triángulos. Es obvio que $\tan a = 1/3$ y que $\tan b = 1/2$. Por ser $\sin(\pi/4) = a + b$, se tiene que:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$$

Partiendo de la figura 11 (abajo), y poniendo el énfasis en los distintos ángulos que se señalan,

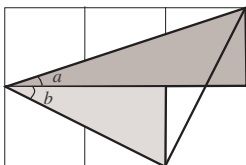
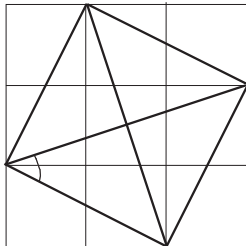


Figura 11

se obtienen otras identidades parecidas. Tomemos la figura 12.

En la figura 12 (arriba) vemos que $\tan a = 3$ y que $\tan b = 2$. Por ser $a + b + \pi/4 = \pi$, se tiene que $\pi = \arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3$. De forma similar, la figura 12 (abajo) permite deducir la fórmula:

$$\frac{\pi}{2} = \arctan 1 + \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$$

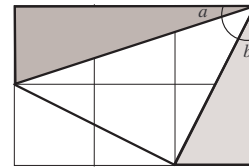
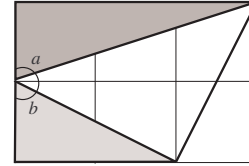


Figura 12

Tomemos la figura 13.

En la figura 13 (arriba) se aprecia que $\tan(a + \pi/4) = 3$ y que $\tan a = 1/2$. Por ser $a + \pi/4 = \arctan 3$, se obtiene $\pi/4 = \arctan 3 - \arctan(1/2)$. De forma similar la figura 13 (abajo) permite deducir la fórmula $\pi/4 = \arctan 2 - \arctan(1/3)$.

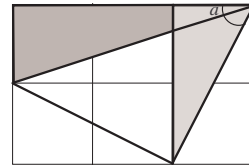
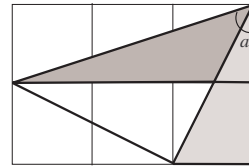


Figura 13

Otras dos identidades pueden visualizarse en las figuras 14 y 15 (Nelsen, 2013).

En la figura 14 se observa que $2a + b = \pi/4$, siendo $\tan a = 1/3$ y $\tan b = 1/7$, de donde se de-

duce la fórmula de Hutton. Finalmente en la figura 15, se ve que $a + b + c = \pi/4$, de donde se deduce la fórmula de Strassnitzky:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8}$$

con la cual Dahse en 1844 calculó 200 decimales de π .

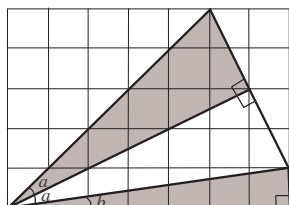


Figura 14

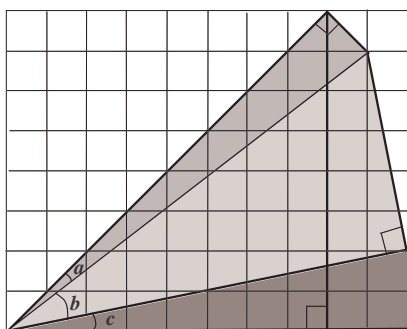


Figura 15

Derivación de funciones inversas

Ya se mencionó antes que no basta con que $f'(a) \neq 0$ para asegurar que f^{-1} sea derivable en $f(a)$. En Ionin (1993) esto se comprueba a través de la siguiente función.

Se define para $f(x) = x$ para $x \leq 0$. Para cada número natural n , se define $f(x) = (1 + 1/n)x$ si $1/(n+1) \leq x < 1/n$. Por ahora la función f está definida en $(-\infty, 1)$, es estrictamente creciente y su imagen está formada por $(-\infty, 0]$ junto con los intervalos $[1/n, 1/n + 1/n^2]$. Los huecos entre estos últimos se rellenan definiendo f en cada $[n, n+1)$ como la recta que aplica este intervalo sobre $[1/(n+1) + 1/(n+1)^2, 1/n]$, es decir $f(x) = x/n(n+1)^2 + 1/(n+1)$ si $x \in [n, n+1)$. La gráfica de la función se observa en la figura 16, y en la figura 17 se muestra un fragmento ampliado de esta gráfica.

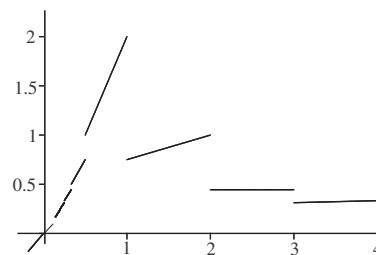


Figura 16

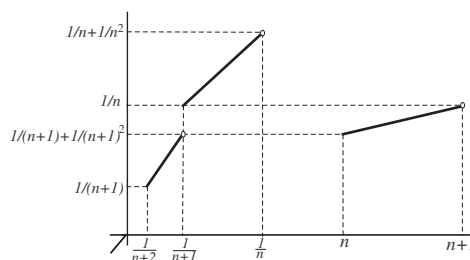


Figura 17

Su dominio es todo $\mathbb{R}$, su imagen es $(-\infty, 2)$ y tiene inversa. Además $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$ ya que $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x)/x) = 0$. Sin embargo, la función f^{-1} no puede ser derivable en el origen porque no es continua. Y esto ocurre porque no está acotada en ningún entorno del mismo. Invirtiendo la figura 17 se aprecia visualmente esta propiedad.

El problema es que para asegurar la derivabilidad de la inversa en 0 es necesario que f sea continua en un entorno abierto de 0, lo que no sucede porque f es discontinua en cada $1/n$.

En este ejemplo lo importante no son las demostraciones analíticas sino visualizar cómo se va construyendo la función para lograr las características deseadas. Legítimamente, a los profesores nos asalta una pregunta: ¿es necesario todo este esfuerzo para mostrar que las hipótesis de los teoremas deben ser las correctas?

Derivada de la función arcotangente

Las listas de derivadas incluyen las de las inversas de las funciones arcotangente, arcoseno y arco-coseno. Estas fórmulas a veces se deducen de la fórmula general y otras no. Pero los estudiantes siempre parecen tener la sensación de que se in-

cluyen solo para fastidiarlos. En cualquier caso, deberán memorizarlas y eso ya es una molestia.

Ya se mencionó antes la importancia histórica de la función arcotangente. Este hecho podría ser una motivación para obtener su derivada con un cierto cariño. En Schaumberger (1982) se propone hallarla mediante un proceso visual que incluye conceptos como la semejanza de triángulos y el área de un sector circular. Merece la pena conocer el proceso.

Como la función arcotangente es impar, al serlo la tangente, basta obtener su derivada para el caso $x > 0$. Se parte de una circunferencia de radio $\sqrt{1+x^2}$ y centro el origen, y se toma la figura 18.

Se observa la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} \text{Área triángulo } OED &< \\ &< \text{Área sector circular } OBD < \\ &< \text{Área triángulo } OBC \end{aligned} \quad [1]$$

Ahora sigue el cálculo de cada área.

1. Área triángulo $OBC = \text{Área triángulo } OAC - \text{Área triángulo } OAB =$

$$\frac{x + \Delta x}{2} - \frac{x}{2} = \frac{\Delta x}{2}$$

2. Para calcular el área del triángulo OED , observamos la figura 19.

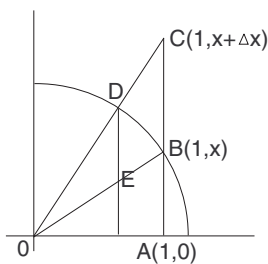


Figura 18

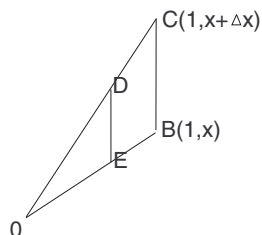


Figura 19

Se aprecia que los triángulos OED y OBC son semejantes, por lo que el cociente entre sus áreas es el cuadrado de la razón de semejanza, es decir:

$$\frac{\text{Área de } OED}{\text{Área de } OBC} = \left(\frac{OD}{OC} \right)^2 = \frac{1+x^2}{1+(x+\Delta x)^2}$$

Por tanto

$$\text{Área de } OED = \frac{1+x^2}{1+(x+\Delta x)^2} \cdot \frac{\Delta x}{2}$$

3. Para calcular el área del sector circular OBD , observamos la figura 20.

Como el radio de la circunferencia del principio es $\sqrt{1+x^2}$, entonces el área del sector circular OBD vale

$$\begin{aligned} &\frac{(\sqrt{1+x^2})^2}{2} a - \frac{(\sqrt{1+x^2})^2}{2} b = \\ &= \frac{1+x^2}{2} (\arctan(x+\Delta x) - \arctan x) \end{aligned}$$

Por último sustituyendo en [1] el valor de cada área se obtiene:

$$\begin{aligned} &\frac{1+x^2}{1+(x+\Delta x)^2} \cdot \frac{\Delta x}{2} < \\ &< \frac{1+x^2}{2} (\arctan(x+\Delta x) - \arctan x) < \frac{\Delta x}{2} \end{aligned}$$

por tanto:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1+(x+\Delta x)^2} < \\ &< \frac{\arctan(x+\Delta x) - \arctan x}{\Delta x} < \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Haciendo tender a cero el incremento de x se obtiene la derivada de la función arcotangente.

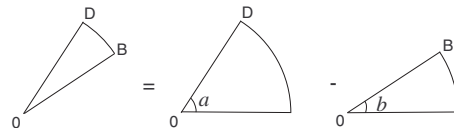


Figura 20

Derivada del arcsen y del arccos

La derivada de la función arcoseno también puede obtenerse con un proceso geométrico si-

milar al anterior (Schaumberger, 1986). Pero para esta función hay otras dos formas visuales de obtener su derivada, y en ambas se utiliza como herramienta la integración. Se basan en la figura 21 (Spiegel, 1956) y en la figura 22 (Johnson, 1998).

El dominio de la función inversa del seno es el intervalo $[-1, 1]$. Como la función seno es impar entonces también lo es su inversa, y basta hallar la fórmula de la derivada en $[0, 1]$. En la figura 21, el área de la región sombreada se puede obtener de dos formas. Aplicando la fórmula del área de un sector circular, su valor es $(1/2)\arcsen x$, mientras que a través de la integración, su valor es:

$$\int_0^x \sqrt{1-t^2} dt - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$$

Por tanto:

$$\arcsen x = 2 \int_0^x \sqrt{1-t^2} dt - x\sqrt{1-x^2}$$

Finalmente, del teorema fundamental de cálculo se deduce que:

$$\begin{aligned} (\arcsen x)' &= 2\sqrt{1-x^2} - \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

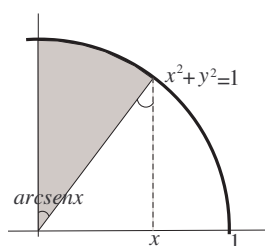


Figura 21

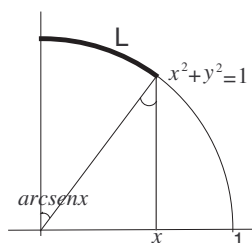


Figura 22

En la figura 22 observamos que la longitud del arco de circunferencia L es $\arcsen x$. Por tanto tomando la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, la derivada buscada sale de la igualdad:

$$\begin{aligned} \arcsen x = L &= \int_0^x \sqrt{1+(f'(t))^2} dt = \\ &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \end{aligned}$$

Finalmente, la derivada de la función arcocoseno se puede obtener de una forma visual a partir de la del arcoseno utilizando la figura 23 (Moran, 1991).

El dibujo de la figura 23 (arriba) representa la gráfica de la función $y = \arcsen x$. El dibujo del centro es la gráfica de $y = -\arcsen x$. Trasladándolo unidades hacia arriba se obtiene la gráfica de $y = \arccos x$, y se visualiza la relación:

$$\arccos x = \pi/2 - \arcsen x$$

En conclusión, $(\arccos x)' = -(\arcsen x)'$.

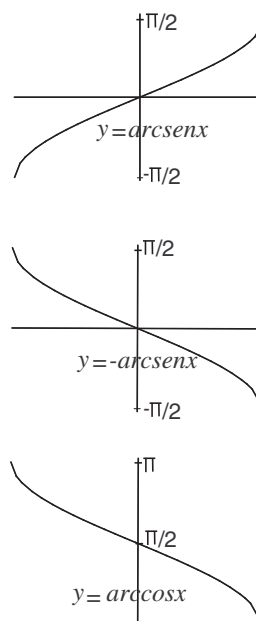


Figura 23

Integración de funciones inversas

La relación entre las gráficas de una función y la de su inversa, da lugar a una técnica que es útil para visualizar propiedades relativas a la integración de una función inversa. Al observar la gráfica

$y=f(x)$ desde el eje x , y la de $x=f^{-1}(y)$ desde el eje y , se obtienen rectángulos que pueden dividirse en zonas cuyas áreas son fáciles de calcular. Tomemos las figuras 24 y 25.

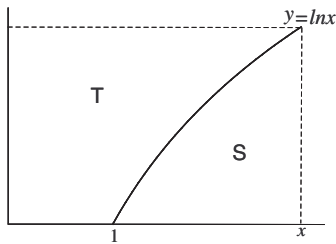


Figura 24

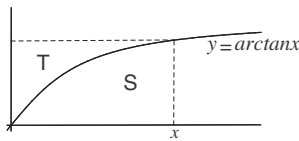


Figura 25

En la figura 24 se observa que $x \ln x = S + T$. Ya que S se calcula integrando la función $y=f(x) = \ln x$, y que T se calcula integrando $x=f^{-1}(y) = e^y$, se verifica:

$$\begin{aligned} x \ln x &= \int_1^x \ln t \, dt + \int_1^{\ln x} e^y \, dy = \\ &= \int_1^x \ln t \, dt + x - 1 \end{aligned}$$

Por tanto, las primitivas de $y = \ln x$ son: $F(x) = x \ln x - x + C$.

En la figura 25 se observa que $x \arctan x = S + T$, y la misma técnica anterior da lugar a:

$$x \arctan x = \int_0^x \arctan t \, dt + \int_0^{\arctan x} \tan y \, dy$$

Con ayuda de la identidad $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$, se calcula la segunda integral:

$$\begin{aligned} \int_0^{\arctan x} \tan y \, dy &= -\ln(\cos(\arctan x)) = \\ &= \ln(\sec(\arctan x)) = \ln(\sqrt{1 + \tan^2(\arctan x)}) = \\ &= \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\int_0^x \arctan t \, dt = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$$

y las primitivas de $y = \arctan x$ son .

$$F(x) = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C$$

Esta técnica (Holley, 1981) que se ha utilizado en los dos ejemplos anteriores para el cálculo de primitivas, también se emplea para visualizar relaciones entre una función y su inversa. Tomemos la figura 26.

La figura 26 (arriba) corresponde a una función continua y creciente. Se verifica que $A + B = x f(x) - a f(a)$, por tanto:

$$\int_a^x f(t) \, dt = x f(x) - a f(a) - \int_{f(a)}^{f(x)} f^{-1}(y) \, dy$$

Derivando respecto de x se obtiene:

$$\frac{d}{dx} \left(x f(x) - a f(a) - \int_{f(a)}^{f(x)} f^{-1}(y) \, dy \right) = f(x)$$

Es decir, si $x = G(y)$ es una primitiva de $x = f^{-1}(y)$ se verifica:

$$\int f(x) \, dx = x f(x) - G(f(x)) + C$$

La figura 26 (abajo) corresponde a una función decreciente. Se verifica que $A + B = x(f(a) - f(x))$, por tanto:

$$\begin{aligned} - \int_{f(a)}^{f(x)} f^{-1}(y) \, dy + (x - a) f(a) - \int_a^x f(t) \, dt &= \\ &= x(f(a) - f(x)) \end{aligned}$$

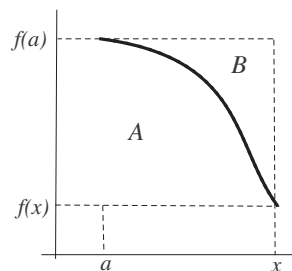
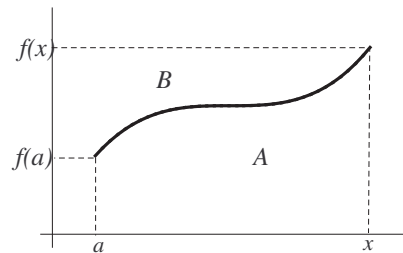


Figura 26

Simplificando y derivando respecto de x se obtiene el mismo resultado que en el caso anterior.

Por último, para funciones no negativas y estrictamente crecientes que pasen por el origen, la técnica anterior permite visualizar (figura 27) la conocida desigualdad (Young, 1912):

$$\int_0^a f(x) dx + \int_0^b f^{-1}(y) dy \geq ab$$

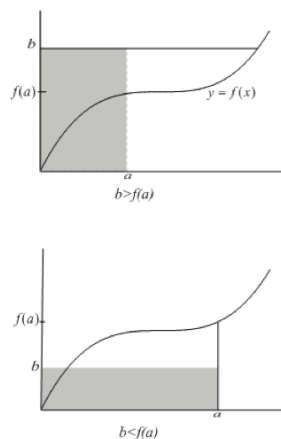


Figura 27

Resumen final

La función inversa es un concepto al que se le dedica poco tiempo en bachillerato y poco espacio en los libros de texto. Esto da lugar a que los alumnos que ingresan en la universidad tengan carencias y una cierta confusión sobre el mismo.

En este artículo se propone aprovechar las posibilidades visuales que tiene para hacer más atractiva su enseñanza. Estas permiten establecer, de una manera atractiva y sencilla, la relación entre la gráfica de una función y la de su inversa. Como consecuencia directa de ello, se pueden visualizar fácilmente algunos resultados relativos a la integración de ambas funciones.

La función arcotangente tiene una gran importancia histórica en la búsqueda de los deci-

males del número π . La visualización de algunas de las fórmulas utilizadas para ello, junto con la referencia a la historia de las matemáticas, es un recurso que hace que el proceso enseñanza-aprendizaje sea más fluido y motivador.

Las visualizaciones, en relación con la derivación de las funciones inversas, no son tan directas como en otros aspectos que se han mencionado. Sin embargo se basan en conceptos sencillos y atractivos, como la semejanza de triángulos o el área de un sector circular, que se salen del camino estrictamente analítico que se emplea habitualmente.

Referencias bibliográficas

- AYOUB, A. B. (1987), «Behold! The Graphs of f and f^{-1} are Reflections About the Line $y=x$ », *The College Mathematics Journal*, n.º 18(1), 52.
- BILAN, N. K., e I. JELIC (2014), «On intersections of the exponential and logarithmic curves», *Annales Mathematicae et Informaticae*, n.º 43, 159-170.
- COLERA, J., y M. J. OLIVEIRA (2009), *Bachillerato 2. Matemáticas II*, Anaya, Madrid.
- COUCH, E. (2002), «An Overlooked Calculus Question», *The College Mathematics Journal*, n.º 33(5), 399-400.
- ESCOREDO, A., M. D. GÓMEZ, J. LORENZO, P. MACHÍN, C. PÉREZ, J. DEL RÍO y D. SÁNCHEZ (2009), *Matemáticas II. Bachillerato 2*, Santillana, Barcelona.
- GONZÁLEZ, C., J. LLORENTE y M. J. RUIZ (2009), *Matemáticas, 2.º bachillerato*, Editex, Madrid.
- HOLLEY, A. (1981), «Integration by Geometric Insight-A Student's approach», *The two-year College Mathematics Journal*, n.º 12(4), 268-270.
- IONIN, Y. (1993), «On the derivative of the inverse function», *International J. of Mathematical Education in Science and Technology*, n.º 24(1), 163-166.
- JOHNSON, C. (1998), «The Derivative of the Inverse Sine», *The College Mathematics Journal*, n.º 29(4), 313.
- KONTOROVICH, I. (2017), «Students confusions with reciprocal and inverse functions», *International J. of Math. Education in Science and Technology*, n.º 48(2), 278-284.
- MAMOLO A. (2010), «Polysemy of symbols: signs of ambiguity», *The Mathematics Enthusiast*, n.º 7(2-3), 247-262.
- MORAN, D. (1991), «Graphs and derivatives of the inverse trig functions», *The College Mathematics Journal*, n.º 22(5), 417.

- NELSEN, R. B. (2013), «Proof without words: the formulas of Hutton and Strassnitzky», *Mathematics Magazine* 86(5), 350.
- SCHAUMBERGER, N. (1982), «The derivative of $\text{Arctan}x$ », *The College Mathematics Journal*, n.º 13(4), 274-276.
- (1986), «The derivative of $\text{arsec}x$, $\text{arctan}x$ and $\text{tan}x$ », *The College Mathematics Journal*, n.º 17(3), 244-246.
- SPIEGEL, M. R. (1956), «On the derivatives of trigonometric functions», *American Mathematical Monthly* 63(2), pp. 118-120.
- SPIVAK, M. (1986), *Calculus. Cálculo infinitesimal*, Reverté, Barcelona.
- YOUNG, W. H. (1912), «On classes of summable functions and their Fourier series», *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, n.º 87, 225-229.
- WU, R. (2003), «Arctangent Identities», *The College Mathematics Journal*, n.º 34(2), 115.
- (2004), «Proof without words: Euler's Arctangent Identity», *Mathematics Magazine*, n.º 77(3), 189.

FÉLIX MARTÍNEZ DE LA ROSA
Universidad de Cádiz
<felix.martinez@uca.es>