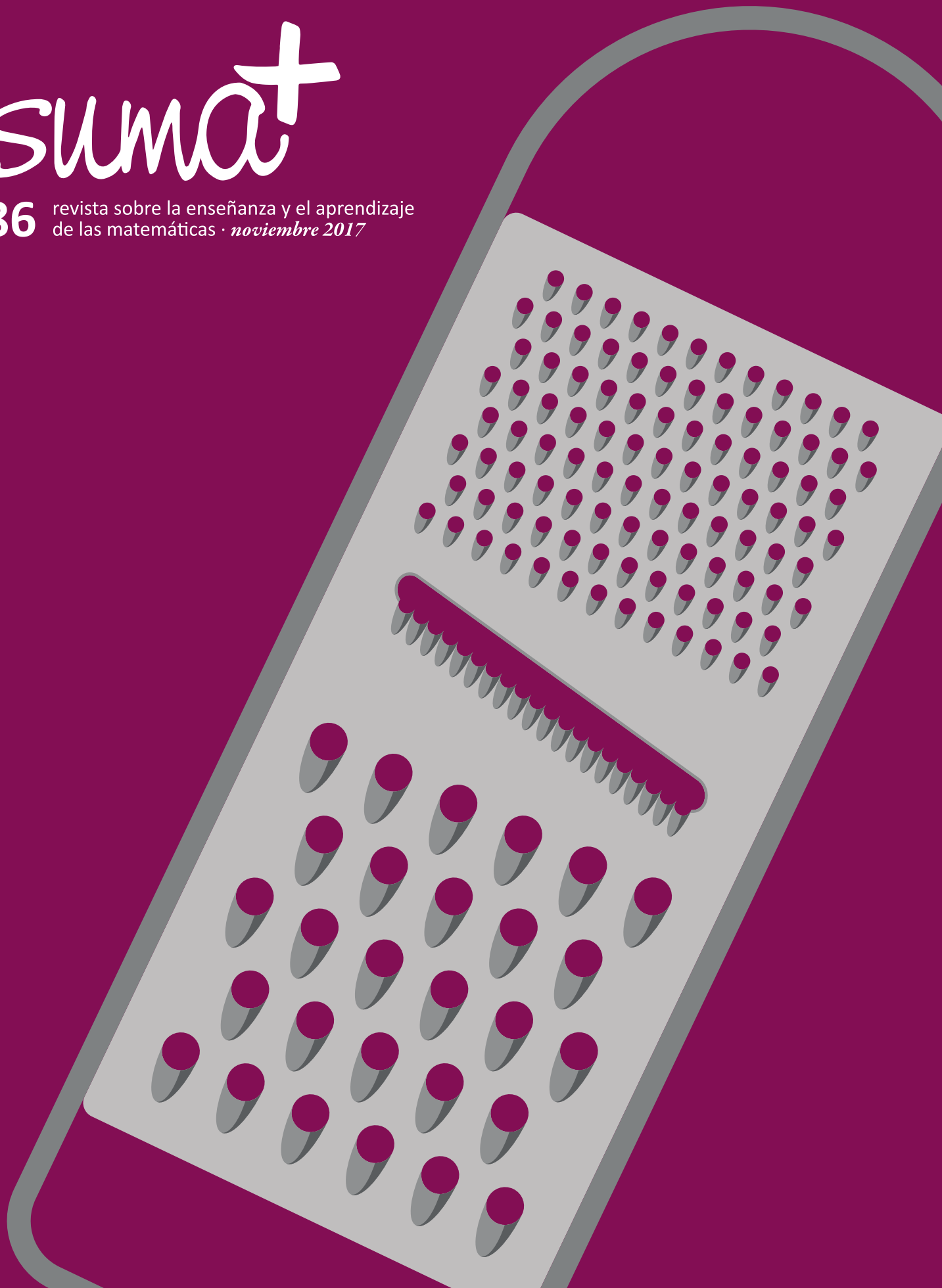
suma+

86 revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas · *noviembre 2017*



suma+
revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas
86
noviembre 2017

sumario

BCN y la probabilidad 3-7

artículos

Medir el autoconcepto en la resolución cooperativa de problemas
Marta Flores Coll, Marina Bravo Clavero y David Duran Gisbert 11-18

El problema de las cien aves: de Alcuino a Fibonacci
Pablo Martín Prieto 19-27

Trigonometría en la meridiana solar de Roma
Mariola Brines Pérez e Irene Ferrando Palomares 29-37

Aprendizaje del álgebra a través de problemas de patrones geométricos
Eva Arbona Picot, María José Beltrán Meneu, Adela Jaime Pastor y Ángel Gutiérrez Rodríguez 39-46

Ciclo de reflexión sobre el teorema de Pitágoras
María Dolores Torres González y Pablo Flores Martínez 47-55

El teorema de Bayes con nomogramas
Gabriel Ruiz-Garzón y Jaime Ruiz-Zapatero 57-67

Recursos visuales en relación con la función inversa
Félix Martínez de la Rosa 69-80

secciones

ELL@S TIENEN LA PALABRA
Tareas ricas para clasificar y describir figuras
David Barba Uriach y Cecilia Calvo Pesce 83-88

Vale la pena
Viva la Revolución. Jo Boaler
Carme Burgués Flamarich **89-92**

En puertas del tercer milenio
Grigori Perelman. El vencedor de la conjetura de Poincaré
Antonio Pérez Sanz **93-102**

CreoGebra
Matemáticas a todo color
José Luis Muñoz Casado **103-110**

Reseñas
Historia, novela y divulgación
Joan Jareño Ruiz **111-115**

FESPM & Cía

XXVIII Olimpiada Matemática Nacional
Ángel Álvarez Gutiérrez, Antonio Bermejo Fuertes, Isabel Negueruela Sánchez y María Encarnación Reyes Iglesias **119-126**

El calendario matemático de la SEMCV
Rafael Martínez Calafat **127-130**

XVII Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Matemáticas en tierra de cine
SAEM Thales **131-132**

XIV Jornada de Enseñanza de las Matemáticas: Redes para comunicar, compartir y cooperar en la educación matemática
Pep Bujosa Bravo **133-140**

A todas las referencias web que aparecen en este número de Suma *se puede acceder desde el siguiente enlace*

suma+ 86
pp. 3-7

BCN y la probabilidad

¿Quién no se ha preguntado alguna vez qué puede pasar? En los ámbitos curricular y académico, las respuestas a dicha pregunta son muy inocentes si las comparamos con las que pueden darse fuera. La realidad extra académica puede ser muy cruda.

La realidad extra académica del pasado 17 de agosto en Barcelona fue muy cruda. Ocurrió lo que podía ocurrir y que para mucha gente era seguro que sucedería si se daba una premisa hoy en día poco improbable: que se produjese un atentado. Los matemáticos lo llaman probabilidad condicionada. La probabilidad de que, dado un atentado en Barcelona, este tuviese lugar en cualesquiera de los lugares más transitados (*La Rambla*, *Sagrada Família*, *Estació de Sants*…) era equiprobable y casi 1; quizá 0,9. Prácticamente, un suceso seguro.

El condicionante, que se produjese el atentado, no era imposible, pues las fuerzas de seguridad estaban en el nivel de alerta 4. El máximo es 5. Por tanto, la probabilidad de que se produjese el atentado podía cuantificarse (de modo muy sencillo) en unos 4/5 (4 de 5), en un 80 % (80 de 100) o en 0,8 (sobre 1). Teniendo en cuenta lo dicho en el párrafo anterior, la probabilidad de que hubiese un atentado en La Rambla de Barcelona era, antes de producirse, del $0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}72$.

Ni la alerta 4 ni el conocimiento y la intuición populares lograron impedir que sucediese aquello que todo el mundo se temía y no quería. Tampoco parece que se supiese cómo impedirlo. La probabilidad aplicada a la realidad solo tiene un papel de diagnóstico: cuantifica el grado de ocurrencia de un suceso, mide su probabilidad, pero no ofrece herramientas para aumentarla o disminuirla. De eso se ocupan las fuerzas de seguridad. Tampoco resulta tan fácil reducir a cero una probabilidad de 0,72 como una de 0,14, por ejemplo. Las dificultades de la tarea se reflejan en la distancia que separa ambos números del 0.

Así que parece que no había nada que hacer para evitar lo que podía pasar y que acabó pasando. Todos los barceloneses dicen ahora no tener miedo. Pero lo dicen antes de digerir la catástrofe. Dolor y duelo van juntos, llevan su tiempo y suelen ser consecutivos. Mientras dura el dolor, el suceso ocurre una y otra vez, y muchas veces, cada instante, en nuestra mente. Revivimos el fenómeno. Al cabo de un tiempo, ese período de dolor da paso al intervalo del duelo.

Al final, no tendremos miedo, no. Pero tampoco seremos unos simples. Miraremos con ojos diferentes y menos inocentes la teoría de la probabilidad, no sea que lo que puede pasar vuelva a ocurrir otra vez. O peor todavía, que lo que ha sucedido una vez, ahora que ya se ha acomodado en nuestra realidad, vuelva a suceder en otro lugar.

Nosotros y las fuerzas de seguridad deberíamos tratar de aumentar el grado de no ocurrencia hasta la unidad para que no ocurra aquello que puede ocurrir (probable) y que nadie desea que ocurra.

Mossos d'esquadra, ciudadanos, médicos, enfermeras y enfermeros, taxistas, comerciantes… Todos ellos y otros ayudaron a las víctimas. Y los maestros y profesores, ¿qué haremos para ayudar? Ah, sí, hablaremos de los muertos. Aunque no de los muertos y heridos en La Rambla, sino de los muertos de hace siglos y milenios. A estos, sí que los resucitamos en las aulas. En el ámbito académico no hay sitio para los vivos. Nunca se habla de escritores, músicos, arquitectos, filósofos, científicos o artistas vivos; menos todavía, de matemáticos vivos. De todos ellos se habla a diario en otra realidad, la de los medios de comunicación, la de nuestros alumnos, la de sus familias. Una realidad que también es la nuestra al salir de la realidad académica. Los educadores matemáticos llevan aspectos de esa realidad a la realidad académica tratando de establecer nexos de continuidad entre ambas. Pero en ese trasvase no hay personas. El alumnado entra en el aula como un pajarito en la jaula: al principio, no quiere; pero, con tiempo, acaba por acomodarse y sentirse a gusto ahí dentro. Allí escuchará las voces de los muertos para saber qué hicieron, quienes fueron. Pero no sabrán quienes son ni qué hacen sus contemporáneos.

¿En qué podemos ayudar? Escuchemos a María Montessori:

> Todo el mundo habla de paz, pero nadie educa para la paz, la gente educa para la competencia y este es el principio de cualquier guerra. Cuando eduquemos para cooperar y ser solidarios unos con otros, ese día estaremos educando para la paz.

Quizá nunca como ahora fue tan necesario educar para la paz y la libertad. Y si se educa para la paz, ¿no deberíamos evaluar el aprendizaje para la paz? Comparando con la educación de hace unas décadas, las cosas han cambiado mucho y a mejor. Sin embargo, las perspectivas humana y solidaria de la realidad cotidiana que tanto nos esmeramos en introducir en el ámbito académico no acaba de entrar en el aula. Se realizan recogidas de alimentos para pueblos desfavorecidos y se guardan minutos de silencio. Pero quizá sean necesarios más minutos de sonido para hablar, escuchar, dialogar y razonar acerca de los fenómenos que suceden hoy fuera del aula.

¿Cómo educar para la paz en matemáticas? En 2007 la FESPM dedicó el Día Escolar de las Matemáticas precisamente a este tema, ese fue el título de su cuadernillo *Matemáticas y educación para la paz. Paz, tolerancia y solidaridad*. Su autor, Abelardo Jiménez Fenet, planteaba una serie de actividades que comenzaban precisamente con cuestiones de probabilidad y que derivaban luego hacia actividades más concretas y cercanas a la idea de Montessori. En la introducción, Abelardo tocaba de lleno la cuestión de la escasa relación que muy a menudo tiene nuestra materia con la realidad social y que tantas veces se ha ilustrado con el suceso de la muerte de Arquímedes:

> Este cuaderno quiere trabajar en estos valores yendo del análisis de situaciones reales al currículo de nuestra materia y de ahí a la reflexión, salvando de paso un problema que se le achaca a nuestra área: la desconexión con el mundo que le rodea. Dividimos las fichas de actividades en tres bloques la educación para la Paz y la defensa de los Derechos Humanos, la Coeducación y la Interculturalidad.



Si queremos educar para la paz, ahí tenemos un punto de partida. Entre la publicación de ese cuadernillo y el atentado de Barcelona han pasado diez años. En esa década la tecnología ha cambiado mucho y seguramente a mejor. No podemos decir lo mismo del desarrollo social. La mujer está donde estaba, continúa la violencia machista hacia ella, los inmigrantes también están donde estaban y algunos conflictos bélicos no solo no se han resuelto, sino que se han agravado y complicado.

La gestión de las emociones ante situaciones violentas y las implicaciones que esa gestión tiene en nuestras vidas y las de los demás forman parte de una educación y de un aprendizaje en libertad y para la paz. En un atentado podemos distinguir tres tipos de víctimas: las víctimas directas (fallecidos y heridos), las víctimas vicarias (familiares y amigos de las víctimas directas), y las víctimas indirectas que somos todos. La violencia viola la paz. Ayudar a las víctimas es ayudarnos a todos. También existen diferentes grados de ayuda con relación a las víctimas: la ayuda directa, como la prestada por las fuerzas de seguridad y los médicos y enfermeros de los hospitales; la ayuda vicaria que se prestan los amigos y familiares entre sí; y la ayuda indirecta, como la de los educadores y que se centra en la prevención.

Nosotros que tenemos acceso a las personas en su etapa de formación como personas podemos ayudar a todos, aunque sea después y lejos de la tragedia, aunque nuestra ayuda sea tácita y silenciosa, cada día y cada hora de clase con el objetivo de evitar que ocurran algunos de los sucesos que pueden ocurrir y que nadie quiere que ocurran. Queremos vivir en paz y que La Rambla sea viva, libre y de todos aquellos que deseen pasearla, una Rambla segura, de probabilidad 1.



En este número

Se despide la sección «En puertas del tercer milenio» que nos ha acompañado a lo largo de más de cuatro años, desde *Suma* 72 (marzo de 2013). Agradecemos a quienes han colaborado en ella, y especialmente a su coordinador, Antonio Pérez Sanz, los artículos que nos han remitido y que nos han mostrado desde un particular tono periodístico el carácter más humano de los grandes matemáticos del cambio de milenio, muchos de ellos vivos y en activo. En palabras del propio Antonio:

> Con este artículo sobre «grisha» Perelman ponemos punto y final a «En puertas del tercer milenio», sección que nació en marzo de 2013, con el número 72 de *Suma*, a propuesta de los directores de la revista, Miquel y Iolanda. A lo largo de estos cuatro años hemos intentado acercar a los lectores, de forma amena e informal, pero sobre todo humana, a algunos de los personajes que a lo largo del siglo XX y principios del XXI han puesto las piedras fundamentales del edificio matemático que disfrutamos en la actualidad.
>
> Gracias a los que han participado conmigo en esta aventura: José Luis Muñoz, Francisco Maíz, Fernando Blasco y Quino Collantes. Sin ellos esta travesía matemática no hubiese visto la luz.
>
> Por las páginas de la sección han desfilado Turing, Tao, Weil, Gardner, Gödel, Kolmogorov, Lorenz, Hardy, Mandelbrot, Klein, Grothendieck, Russell y, ahora, Perelman. No están todos los que son, pero a buen seguro, los que están sí son piedras angulares de las matemáticas del tercer milenio.
>
> Esperamos haber cumplido, al menos en parte, nuestro objetivo inicial: mostrar el rostro humano de las matemáticas más recientes, acercar a sus protagonistas del siglo XX a nuestro salón y crear lazos de simpatía y complicidad con ellos. Gracias por vuestra atención. No es un adiós, es un ¡hasta siempre!

Otro cambio a partir de este número es la desvinculación de Miquel Albertí Palmer como miembro del Consejo de Dirección, aunque no de la revista. Miquel continuará colaborando en la maquetación y con la redacción de una sección para la revista impresa («Crónica de una clase no anunciada») y otra de vídeos breves que solo aparecerá en la web de la revista («Sin palabras»). «Sin palabras» pretende aprovechar las posibilidades que ofrece la web de Suma.

También deja el Consejo de Dirección Lluís Albarracín Gordo que ha realizado hasta este número la gestión de los artículos publicados en la revista, la recepción a través del correo <articulos@revistasuma.es>, la lectura y distribución al Consejo Asesor para su evaluación y la puesta a punto técnica antes de pasar los artículos evaluados favorablemente a maquetación. Muchas gracias Lluís y muchas gracias Miquel por vuestro tiempo y dedicación a la revista.

SUMA+
Recomendaciones a los autores

TÍTULO Deberá ser breve y evitar descripciones excesivas del contenido del artículo.

RESUMEN Presentará en no más de cinco líneas el contenido del artículo.

NIVELES No más de tres. Título aparte, tan solo apartado y sub apartado.

INICIO No es conveniente iniciar el texto con un título de apartado. Conviene hacerlo con una introducción que no es necesario titular como «introducción», pues se sobreentiende.

TEXTO Procurar que la redacción sea directa y concisa. Evitar el uso innecesario y/o excesivo de oraciones subordinadas y paréntesis que puedan entorpecer tanto la lectura fluida como la comprensión del texto, sobre todo en una misma frase. Evitar redundancias, dequeísmos, el uso excesivo de las preposiciones «de» y «en» y la reiteración del pronombre relativo «que». Mientras sea posible, observar el mismo tiempo verbal a lo largo de todo el texto.

ORTOGRAFÍA Y SINTAXIS Uso apropiado de los signos de puntuación. En frases largas conviene que el lector respire.

SENSIBILIDADES Evitar comentarios políticamente incorrectos acerca de la facilidad o dificultad de comprensión de ideas, conceptos y argumentos. Usar expresiones neutras de tipo genérico para referirse a grupos de ambos sexos como, por ejemplo, alumnado, estudiantes, escolares, profesorado, docentes…

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Observar las pautas referidas en las *Normas de publicación* teniendo especial cuidado en que se trate exclusivamente de referencias citadas en el texto y de incluir en cada una de ellas el año, la editorial y la localidad de publicación.

ILUSTRACIONES Todas las imágenes, figuras, dibujos, fotografías y tablas deben ir acompañadas de un pie explicativo y estar referenciadas en el texto. Además, deberán tener la resolución señalada en las normas de publicación.

LECTURA Una lectura final y de un tirón del texto completo es de gran ayuda para mejorar su expresión y su puntuación.

artículos



suma+
Artículos
Noviembre 2017
86
pp. 11-18

Medir el autoconcepto en la resolución cooperativa de problemas

Marta Flores Coll
Marina Bravo Clavero
David Duran Gisbert

El artículo revisa la importancia del autoconcepto (como componente de la autoestima) respecto a la disposición al aprendizaje, la necesidad de medirlo para poderlo mejorar, especialmente en el ámbito matemático, y en concreto en el campo de la resolución de problemas en formatos cooperativos. A continuación, describe la elaboración y validación de un cuestionario para medir el autoconcepto en resolución cooperativa de problemas. Tras conceptualizarlo, elaborarlo y validar su contenido a través de jueces expertos, se mide su fiabilidad y validez a través de una aplicación con 88 estudiantes de primaria y secundaria. Los ajustes oportunos y los resultados estadísticos permiten disponer de un primer instrumento.

Palabras clave: Autoconcepto, Matemáticas, Elaboración de cuestionarios, Resolución de problemas, Tutoría entre iguales.

Measuring the self-concept in cooperative solving problems

In this paper, it has been reviewed the importance of self-concept as a component of self-esteem. It has been done according to the need of measuring itself so it can be improved and the disposition of learning in mathematical area, especially in cooperative problem solving field. The objective of this paper is developing and validating a questionnaire. Once the content has been conceptualized, developed and validated by expert judges, reliability and validity have been measured through an application to 88 primary and secondary students. The adjustments and statistical tests allow to get a first instrument.

Keywords: Self-concept, Mathematics, Questionnaire design, Problem solving, Peer tutoring.

Conocida la importancia de la necesidad del éxito en el aprendizaje de las matemáticas, un conocimiento instrumental y básico en la formación de la ciudadanía, Gil, Guerrero y Blanco (2006) explican cómo los alumnos suelen valorar las matemáticas como una materia difícil, aburrida, poco práctica y abstracta que requiere una «capacidad especial», de la que no todos disponen. De esta manera, las matemáticas suponen para muchos alumnos una fuente de frustración, desánimo y angustia. Estas actitudes están directamente relacionadas con el autoconcepto matemático y la motivación del éxito.

González-Pienda y otros (1997) consideran el autoconcepto como una de las variables más relevantes dentro del ámbito de la personalidad, tanto desde una perspectiva afectiva como motivacional. Los autores definen el autoconcepto como la percepción que una persona tiene de sí misma. Este carácter descriptivo lo diferencia de la autoestima, que implica una valoración (Goñi, 2009).

Shavelson, Hubner y Stanton (1979) presentan un modelo general del autoconcepto, organizado de forma multidimensional —diferenciando entre autoconcepto académico y no académico— y jerárquica. Goñi (2009) define el autoconcepto académico como la representación que el alumno tiene de sí mismo como aprendiz, es decir, la

Artículo recibido en *Suma* en noviembre de 2016 y aceptado en septiembre de 2017

percepción de las propias habilidades para enfrentarse a los aprendizajes en un contexto institucional. Este modelo distingue dentro del autoconcepto académico las diferentes áreas escolares, de manera que cada persona tiene distintos autoconceptos en función de dichas áreas curriculares. Marsh (1990) diferencia entre autoconcepto matemático y lingüístico, dos dimensiones del autoconcepto académico que no se relacionan sustancialmente entre sí.

Ambos modelos señalan el carácter constructivo y evolutivo del autoconcepto. Por lo que se refiere a su construcción, González-Pienda y otros (1997) identifican cuatro categorías de fuentes a partir de las cuales se recibe la información que hace referencia a uno mismo: los otros significativos; los procesos de comparación social e interna; la observación de la propia conducta; y los estados afectivo-emocionales propios. En el caso de los niños, los contextos que más influyen en la construcción del autoconcepto son el familiar y el escolar, de manera que la información que reciben por parte de los padres, profesorado e iguales, representa una fuente de influencia muy relevante (Fantuzzo, Davis y Ginsburg, 1995; Scott y otros, 1996).

Si bien hay una fuerte relación entre autoconcepto y rendimiento académico y existen algunos modelos explicativos que así lo sostienen (Merrell y otros, 2001; Guay, Marsh y Bovin, 2003; Marsh, 2006; Fantuzzo, Tighe y Childs, 2000) no hay, sin embargo, acuerdo entre qué causa qué (Flores y Duran, 2016). Los distintos modelos coinciden en señalar la relación íntima entre los dos constructos, cosa que hace relevante ocuparse de la medida y mejora del autoconcepto desde una perspectiva educativa.

Pero, ¿cómo podemos medir el autoconcepto académico, para tener referencias de su mejora? Existen diferentes cuestionarios que evalúan aspectos relacionados con el autoconcepto matemático. A continuación, se exponen los más relevantes.

— Adelson y McCoach (2011) evalúan las actitudes hacia las matemáticas considerando aspectos relacionados con el autoconcepto matemático (la comprensión, la capacidad de resolver problemas matemáticos y la percepción de facilidad de las matemáticas) y el gusto por las matemáticas.
— Möller, Streblow y Pohlman (2006) miden el autoconcepto matemático a través de un cuestionario que considera ítems referentes al gusto por las matemáticas, la percepción de facilidad de las matemáticas y la capacidad de utilizar las matemáticas.
— Marsh y otros (2014) utilizan un cuestionario que permite medir el gusto por las matemáticas y el autoconcepto matemático, mediante ítems relacionados con la percepción de la propia capacidad para resolver ejercicios y para aprender matemáticas y con la percepción de facilidad de las matemáticas.
— Gil, Guerrero y Blanco (2006) consideran tres variables para la medida del autoconcepto matemático: nivel de confianza para desarrollarse con éxito en la materia (aspectos cognitivos); expectativas de éxito relacionadas con el placer y el gusto por aprender matemáticas, el deseo de dominar la materia y la valoración y reconocimiento de los otros (aspectos afectivos y emocionales), y procesos de atribución causal del éxito o fracaso en matemáticas.

Aunque ninguno de ellos hace referencia a la resolución cooperativa de problemas matemáticos, es evidente que ayudan a reconocer las dimensiones que un cuestionario con este objetivo tendría que tener en cuenta.

Resolución cooperativa de problemas

La competencia matemática —capacidad de utilizar las matemáticas en contextos reales—, incluye el razonamiento matemático, la resolución de problemas y el uso de herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir hechos.

La competencia en resolución de problemas —capacidad de utilizar procesos cognitivos para enfrentarse a situaciones reales e interdisciplinares donde la solución no se encuentra de forma inmediata (OECD, 2010)— puede desarrollarse trabajando con otros. Al enfrentarnos a un problema en equipo, los conocimientos y significados

de los miembros se comparten y se ponen en juego habilidades sociales, además de cognitivas para llegar a su solución. Esa es la definición que la OECD (2013) otorga a la competencia en resolución cooperativa de problemas. La resolución cooperativa de problemas se considera una habilidad necesaria en entornos educativos y laborales y tiene ventajas respecto a la resolución individual: efectividad de la división de las tareas, multiplicidad de fuentes de conocimiento, perspectivas y experiencias y mayor creatividad y calidad en las soluciones (OECD, 2013).

Conviene, pues, que los alumnos de enseñanza obligatoria tengan oportunidad de trabajar en equipo para resolver problemas matemáticos

Conviene, pues, que los alumnos de enseñanza obligatoria tengan oportunidad de trabajar en equipo para resolver problemas matemáticos. Capar y Tarim (2015) afirman que el aprendizaje cooperativo puede ser más efectivo que la enseñanza tradicional para la mejora del rendimiento académico en matemáticas y las actitudes hacia esta área. Si bien existen iniciativas de utilización del aprendizaje cooperativo en el área de matemáticas (Gavilán y Alario, 2010; Serrano, González-Herrero y Pons, 2008), un método cooperativo que puede resultar muy útil es la tutoría entre iguales: parejas de alumnos con una relación asimétrica, derivada del rol de tutor y tutorado, los cuales tienen un objetivo común y conocido que se logra a través de un marco de relación planificado (Duran y Vidal, 2004).

Esta metodología permite que ambos miembros de la pareja —tutorado y tutor— puedan aprender (Duran, 2015). El tutorado aprende gracias a las ayudas pedagógicas ajustadas a su «Zona de Desarrollo Próximo» que le ofrece el tutor y al clima de confianza que se genera. El tutor aprende enseñando (Duran, 2014).

A nivel internacional, existen diversos programas de tutoría entre iguales para el aprendizaje de matemáticas. *La Best Evidence Enciclopedia* de la John Hopkins University (Slavin y Lake, 2007) sitúa dos programas de tutoría entre iguales (*Peer Assisted Learning Strategies y Classwide Tutoring*) entre los cinco programas con mayores evidencias de efectividad en el ámbito de las matemáticas. Existen también varios proyectos basados en un formato de tutoría entre iguales con distintas edades, apoyados en el programa original *Paired Maths* (Topping y Bamford, 1998).

En nuestro contexto, se ha diseñado el programa *Razonar en pareja* cuyo objetivo principal es promover la mejora en la resolución de problemas matemáticos de la vida diaria a través de la colaboración entre alumnos (Flores, Duran y Albarracín, 2016; Flores y Duran, 2017). Además de la tutoría entre iguales y la competencia matemática en resolución cooperativa de problemas cotidianos, el programa se basa en la implicación familiar y el trabajo en red del profesorado.

Los alumnos organizados en parejas, trabajan en dos sesiones semanales de 30 minutos durante un trimestre. Un alumno hace de tutor y el otro de tutorado. El tutorado aprende porque recibe una ayuda directa y ajustada a sus necesidades y el tutor aprende porque debe preparar con antelación la hoja de actividades y buscar las estrategias que podrán ser de ayuda para que su compañero tutorado pueda enfrentar la situación y usar las estrategias adecuadas, de comprensión, análisis, planificación, ejecución, argumentación y comunicación de las decisiones tomadas. Así, apoyados por una *Hoja de actividades* (que presenta una situación de la vida cotidiana, auténtica, que requiere tomar decisiones y admite respuestas abiertas —con varias posibilidades—, y siempre debidamente justificadas y argumentadas para ser consideradas correctas), los estudiantes deben enfrentarse a su resolución ofreciéndose ayuda mutua y trabajando a partir de una estructura formal de interacción que se organiza en las cuatro fases que propone PISA 2012 (OECD, 2010): exploración y comprensión; representación y formulación; planificación y ejecución y, monitorización y reflexión.

Considerando que esta propuesta educativa puede desarrollar la competencia de los alumnos en la resolución de problemas y tener, pues, un efecto sobre su autoconcepto académico, el trabajo que exponemos plantea la elaboración de un cuestionario para la medida del autoconcepto académico matemático, en el ámbito de la resolución cooperativa de problemas.

Objetivo y procedimiento

El objetivo del trabajo expuesto es elaborar y validar un cuestionario capaz de medir el autoconcepto matemático en resolución de problemas, en el contexto del programa *Razonar en pareja*.

El diseño de tests pasa por cuatro fases generales: la conceptualización, la elaboración, la objetivación y la estandarización (Renom 1992). Siguiendo a Martín (2004), en la etapa de conceptualización se define el constructo y se concreta el propósito de la escala, considerando el contenido del cuestionario, la población a quien va dirigida, la metodología de administración y el formato del cuestionario.

En la etapa de elaboración se componen los ítems, codifican las respuestas y se definen las puntuaciones de los ítems. La validez de contenido se obtendrá a través de un juicio de expertos que valore la adecuación del instrumento para medir el autoconcepto matemático en resolución de problemas. En este caso, se decide seleccionar a expertos de las tres áreas de conocimiento implicadas: el autoconcepto, la tutoría entre iguales y la didáctica de las matemáticas.

En la etapa de objetivación, se debe asegurar que el instrumento sea válido y fiable. Para validar el constructo (el grado en que el instrumento refleja la teoría del fenómeno que mide), el instrumento se aplica en una muestra y se realiza un análisis factorial. Dicha muestra debe estar formada por un número de alumnos que sea igual o superior a cinco veces el número definitivo de ítems del instrumento a validar. Para determinar la fiabilidad del instrumento (el grado en que un instrumento mide con precisión) se comprobará la consistencia a través del coeficiente alfa de Cronbach. Se considera que existe una buena consistencia interna cuando el valor de alfa es superior a 0,7 (Martin, 2004).

Finalmente, en la etapa de estandarización, se establece una escala siguiendo el modelo de Norma de Grupo. Este modelo sitúa todas las puntuaciones respecto a la mediana obtenida utilizando la desviación típica del grupo normativo como unidad (Renom, 1992).

Resultados

Conceptualización del cuestionario

A partir de la revisión bibliográfica, siguiendo las definiciones de Goñi (2009) y la concepción de competencia en resolución de problemas según la OECD (2010), se entiende el autoconcepto matemático en resolución de problemas como el conjunto de percepciones que el alumnado tiene de sí mismo como persona capaz de enfrentarse a situaciones reales e interdisciplinares donde la solución no se encuentra de forma inmediata.

Según las características del constructo, el cuestionario se estructura en tres dimensiones: factores afectivos, cognitivos y procesos de atribución causal.

Es necesario considerar la población a quien va dirigida en la redacción de los ítems: alumnado de ciclo superior de Educación Primaria (10-12 años) y de primer ciclo de Educación Secundaria (12-14 años) que participan en el programa *Razonar en pareja*.

Elaboración del cuestionario

Primeramente, se redactan 11 ítems que se componen por una pregunta en primera persona y responden a los tres factores definidos: a) factores afectivos, ítems relacionados con el placer y gusto por las matemáticas así como con las expectativas de éxito; b) factores cognitivos, ítems referentes a la valoración de las estrategias cognitivas utilizadas durante la resolución del problema como estrategias que llevan al éxito; c) procesos de atribución causal, ítems referentes a la atribución causal de los propios éxitos y fracasos.

Se decide estructurar el cuestionario según: a) ítems generales; b) ítems relacionados con las cuatro fases de resolución de problemas (exploración, representación, planificación y revisión); c) ítems concretos referentes al programa y relacionados con las atribuciones causales; d) ítems referentes a la competencia matemática.

La codificación de las respuestas se realiza mediante una escala de tipo *Likert* que valora la fre-

cuencia o el grado de acuerdo. Se utiliza un sistema de puntuación simple.

Una vez diseñado el cuestionario inicial, la validación del contenido es llevada a cabo mediante la valoración de un grupo de expertos de los diferentes ámbitos implicados. Considerando las indicaciones de los expertos, se modifican algunos aspectos relacionados con la estructura y la redacción del cuestionario.

Objetivación

Para validar el constructo y la fiabilidad del instrumento, se aplicó a una muestra de 88 alumnos: 52 alumnos de 6.º de Primaria que han finalizado el programa *Razonar en pareja* (22 tutorados y 30 tutores), 12 alumnos de 1.º de Secundaria que han finalizado el programa (7 tutorados y 5 tutores) y 24 alumnos de 5.º de Primaria que no han desarrollado exactamente el programa, pero que llevan a cabo una metodología de resolución cooperativa de problemas por parejas similar a la descrita. Se considera interesante pasar el cuestionario a alumnado que no conoce el programa para poder valorar la comprensión de los ítems en la prueba inicial.

La validación del constructo se realiza mediante un análisis factorial que reduce los datos para generar grupos homogéneos (factores), según las variables que se relacionan procurando interdependencia. Los resultados de un primer análisis factorial exploratorio (AFE) son adecuados para validar el constructo (KMO = 0,83), pero la estructura propuesta en tres factores no es una buena caracterización. Son dos los factores a extraer. Mediante un análisis factorial confirmatorio (AFC), se extraen dos dimensiones y se observa que una está relacionada con los factores afectivos (donde se incluyen los ítems relacionados con los procesos de atribución causal) y la segunda con los factores cognitivos (ver tabla 1). En este proceso se suprimen dos de los ítems por no aportar suficientemente a los factores que hacían referencia. Los resultados de la AFC son adecuados para validar el constructo (KMO = =0,845).

Ítems	*Factor 1 (Factores afectivos)*	*Factor 2 (Factores cognitivos)*
1	0,835	
2	0,759	
3	0,447	
5		0,752
6		0,479
7		0,306
9		0,730
10		0,479
11	0,457	
12	0,594	
13	0,856	

Método de extracción: Análisis de componentes principales
Método de rotación: Normalización Varimax con Kaiser

Tabla 1. Resultados AFC

Para determinar la fiabilidad se mide la consistencia interna de cada factor y del conjunto de los ítems, mediante el coeficiente de alfa de Cronbach. En los tres casos, el coeficiente es mayor a 0,7, por tanto, se puede considerar que el cuestionario es fiable (ver tabla 2).

	Factor 1 (Factores afectivos)	*Factor 2 (Factores cognitivos)*
α de Cronbach por factor	0,817	0,776
α de Cronbach total	0,867	

Tabla 2. Resultados coeficiente alfa de Cronbach

De esta manera se obtiene el cuestionario de Autoconcepto Matemático en Resolución de Problemas (cuestionario AMRP) (ver anexo).

Estandarización

Siguiendo el modelo de Norma de Grupo, se toman los valores de tendencia central (M = 32,80; SD = 5,90), para establecer una escala de referencia que define tres niveles de autoconcepto matemático en resolución de problemas: bajo, medio y elevado (ver tabla 3).

Bajo	*Medio*	*Elevado*
0-26	27-38	39-44
0% - 59,09%	61,36%-86,36%	88,63%-100%

Tabla 3. Escala orientativa de autoconcepto matemático en resolución de problemas

Conclusiones

Los resultados permiten disponer de un primer cuestionario válido y fiable capaz de medir el autoconcepto matemático en resolución de problemas en el contexto del programa *Razonar en pareja*. Sin embargo, sería interesante poder realizar una prueba Test-Retest aplicando el instrumento dos veces sobre una misma muestra en un intervalo de tiempo que oscile entre dos semanas y seis meses para comprobar la fiabilidad a partir de la estabilidad (Renom, 1992).

Se considera que el cuestionario AMRP puede ser un instrumento muy útil para los maestros que realicen el programa *Razonar en pareja* en sus aulas. Se propone aplicarlo en formato pre y postest, de manera que permita detectar el punto de partida de los alumnos, observar la evolución y saber si el programa y las interacciones que se derivan ayudan a un desarrollo positivo del autoconcepto matemático.

El programa *Razonar en pareja* supone una metodología que contextualiza las matemáticas en situaciones reales y en la que, a través de la tutoría entre iguales, los alumnos pasan a ser protagonistas del proceso de enseñanza-aprendizaje y son continuamente estimulados con retos adaptados a sus capacidades. Por eso, se considera que puede ser útil para acercar las matemáticas a los alumnos, conseguir que se enfrenten a la resolución de problemas con mayor seguridad y propiciar un desarrollo positivo de su autoconcepto matemático. Pero hay que tener presente que las personas significativas y las valoraciones juegan un papel crucial en la construcción del autoconcepto. Por ello, el papel del profesorado es fundamental para poder complementar los efectos positivos de la metodología para el buen desarrollo del autoconcepto del alumnado.

El programa Razonar en pareja supone una metodología que contextualiza las matemáticas en situaciones reales y en la que, a través de la tutoría entre iguales, los alumnos pasan a ser protagonistas del proceso de enseñanza-aprendizaje y son continuamente estimulados con retos adaptados a sus capacidades.

En ese sentido, además, entendemos que el trabajo de la resolución de problemas matemáticos con otras formas de trabajo en equipo —ya sea en grupos cooperativos o en proyectos de trabajo—, podrían tener un efecto en el autoconcepto matemático y merecería la pena explorar sus posibles cambios. La utilización del cuestionario que hemos presentado parece relativamente sencilla, con ligeros ajustes (en la pregunta 9 y 10).

El cuestionario AMRP admite diferentes usos, como ya se ha constatado a lo largo del texto. La administración puntual permite saber en qué punto se encuentra cada alumno y emprender acciones concretas para mejorar las expectativas de logro. La identificación de alumnos con un bajo autoconcepto matemático nos indica alumnos que parten de una predisposición negativa hacia el aprendizaje de las matemáticas, en muchos casos no por desinterés, sino por verse poco aptos para ellas. Esta autovaloración los deja mal situados para el aprendizaje. La detección de estos alumnos debería significar el reconocimiento de una realidad modificable, puesto que, como se ha explicado, el autoconcepto si bien es estable no es estático. Y deberían diseñarse acciones para ayudar a estos alumnos a concebirse como capaces de aprender matemáticas, si utilizan su esfuerzo y las ayudas pedagógicas de sus profesores e iguales.

La administración pre-postest, prevista por los autores, encierra un mayor potencial. Así, los resultados obtenidos sobre la evolución del autoconcepto pueden dar pistas al profesorado sobre el aprendizaje y el desarrollo adecuado de la competencia matemática en resolución de problemas. Por ello, si entre la aplicación pre y postest se observa una evolución positiva y estadísticamente significativa, se confirmará la conveniencia de seguir promoviendo la mejora del autoconcepto a partir de la utilización de formatos cooperativos de aprendizaje entre iguales en el ámbito de la resolución de problemas, atendiendo siempre a las particularidades de la metodología usada y a sus limitaciones.

Por el contrario, si la comparativa entre pre y postest no es significativa habrá que seguir trabajando en la percepción del autoconcepto del alumnado a partir de la toma de conciencia de

los propios logros y avances teniendo en cuenta aspectos como la revisión y ajuste adecuado de la complejidad de las demandas realizadas a cada pareja, o equipo (según sea el contexto de trabajo); así como reforzar el aprendizaje a partir de la interacción de las parejas, atendiendo específicamente al uso de las estrategias de resolución, justificación y comunicación de resultados; así como promover la revisión de las actuaciones y potenciando la búsqueda de posibles soluciones a través del pensamiento divergente y creativo.

A un nivel práctico, y como guía para la creación de estas situaciones instructivas, potencialmente eficaces para mejorar el autoconcepto en resolución de problemas, sugerimos que la organización del equipo contemple la interdependencia positiva (conciencia de que todos los miembros del equipo son necesarios), la participación individual (organizando el trabajo con roles o informaciones distintas, de manera que la contribución de cada alumno sea imprescindible para la resolución del problema) y valorando la aportación, especialmente de aquellos alumnos con un nivel menor de autoconcepto matemático.

Referencias bibliográficas

Adelson, J. L., y D. B. McCoach (2011), «Development and Psychometric Properties of the Math and Me Survey: Measuring Third Through Sixth Graders' Attitudes Toward Mathematics», *Measurement and Evaluation in Counseling and Development*, nº 44, vol. 4, 225-247.

Decret 119/2015, d'ordenació dels ensenyaments de l'educació primària, [en línia], recuperado el 20 de octubre de 2016 en: <http://dogc.gencat.cat/ca/pdogc_canals_interns/pdogc_resultats_fitxa/?action=fitxa&documentId =696985&language=ca_ES>.

Duran, D. (2014), *Aprenseñar: Evidencias e implicaciones educativas de aprender enseñando*, Narcea, Madrid.

— (2015), «Tutoría entre iguales: compartir la capacidad de enseñar con los alumnos», en R. M. Mayordomo y J. Onrubia (eds.), *El aprendizaje cooperativo*, UOC, Barcelona, 198-228.

Duran, D., y V. Vidal (2004), *Tutoría entre iguales. De la teoría a la práctica*, Graó, Barcelona.

Fantuzzo, J. W., G. Davis y M. D. Ginsburg (1995), «Effects of parental involvement in isolation or in combination with peer tutoring on student self-concept and mathematics achievement», *Journal of Educational Psychology*, nº 87, 272-281.

Fantuzzo, J. W., E. Tighe y S. Childs (2000), «Family involvement questionnaire: A multivariate assessment of family participation in early childhood education», *Journal of Educational Psychology*, nº 92, 367-376.

Flores, M., y D. Duran (2016), «Influence of a Catalan peer tutoring programme on reading comprehension and self-concept as a reader», *Journal of Research in Reading*, nº 39, vol. 3, 330–346.

— (2017). «Razonar en pareja», *Cuadernos de pedagogía*, nº 476, 78-81.

Flores, M., D. Duran y L. Albarracín (2016), *Razonar en pareja. Tutoría entre iguales para la resolución cooperativa de problemas cotidianos*, Horsori, Barcelona.

Gavilán, P., y R. Alario (2010), *Aprendizaje cooperativo, Una metodología con futuro. Principios y aplicaciones*, CCS, Madrid.

Gil, N., E. Guerrero y L. Blanco (2006), «El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas», *Revista electrónica de investigación psicoeducativa*, nº 8, vol. 4, 47-72.

González-Pienda, J. A., J. C. Núñez, S. González-Pumariega y M. S. García (1997), «Autoconcepto, autoestima y aprendizaje escolar», *Psicothema*, nº 9, vol. 1, 271-289.

Goñi, E. (2009), *El autoconcepto personal: estructura interna, medida y variabilidad*, Tesis doctoral, recuperado el 20 de octubre de 2016 en <http://www.tdx.cat/handle/10803/133902>.

Guay, F., H. W. Marsh y M. Boivin (2003), «Academic self-concept and academic achievement: Developmental perspectives on their causal ordering». *Journal of Educational Psychology*, nº 95, vol. 1, 124-136.

Marsh, H. (1990), «The structure of academic self-concept: The Marsh/Shavelson model», *Journal of Educational Psychology*, nº 82, 623-636.

Marsh, H. W. (2006), *Self-concept theory, measurement and research into practice: The role of self-concept in educational psychology,* British Psychological Society, Londres.

Marsh, H. W., A. S. Abduljabbar, P. D. Parker, A. J. S. Morin, F. Abdelfattah y B. Nagengast (2014), «The Big-Fish-Little-Pond Effect in Mathematics: A cross cultural comparison of U.S. and Saudi Arabian TIMSS Responses», *Journal of Cross-Cultural Psychology*, nº 45, vol. 5, 777-804.

Martín Arribas, M. C. (2004), «Diseño y validación de cuestionarios», *Matronas Profesión*, nº 5 vol. 17, 23-29.

Merrel, K. W., A. L. Streeter, E. W. Boelter, P. Caldarella y A. Gentry (2001). «Validity of the Home and Community Social Behaviour Scales: Comparisons with five behaviour-rating scales». *Psychology in the Schools*, nº 38, vol. 4, 313-325.

Möller, J., L. Streblow y B. Pohlmann (2006), «The belief in a negative interdependence of maths and verbal abilities as determinant of academic self-concepts», *The British Psychological Society,* nº 76, 57-70.

OECD (2010), *PISA 2012, Field Trial Problem Solving Framework*, recuperado el 20 de octubre de 2016 en <http://www.oecd.org/dataoecd/8/42/46962005.pdf>.

— (2013), *PISA 2015*, *Draft Collaborative Problem Solving Framework,* recuperado el 20 de octubre de 2016 en <https://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/Draft%20PISA%202015%20Collaborative%20Problem%20Solving%20Framework%20.pdf>.

Renom, J. (1992), *Diseño de tests,* Idea Investigación y Desarrollo, Barcelona.

Scott, C. G., G. C. Murray, C. Mertens y E. R. Dustin (1996), «Student self-esteem and school system: Perceptions and implications», *The Journal of Educational Research*, nº 89, vol. 5, 286-293.

Serrano, J. M, M. E. González-Herrero y R. M. Pons (2008), *Aprendizaje cooperativo en matemáticas,* Editum, Murcia.

Slavin, R. E., y C. Lake (2007), «Effective programs in elementary mathematics: A best evidence synthesis», *Review of Educational Research*, nº 78, vol. 3, 427-515.

Topping, K. y J. Bamford (1998), *The Paired Maths Handbook: Parental involvement and tutoring in mathematics,* Fulton, Londres.

Marta Flores Coll
Universitat Autònoma de Barcelona
<Marta.flores@uab.cat>

Marina Bravo Clavero
Universitat Autònoma de Barcelona
<marina.bravoclavero@gmail.com>

David Duran Gisbert
Universitat Autònoma de Barcelona
<david.duran@uab.cat>

Anexo

Cuestionario Autoconcepto Matemático en la Resolución de Problemas

Nombre y apellidos: _____
Centro: _____Curso: _____

Rol en el programa *Razonar en pareja*: Tutor ☐ Tutorado ☐
Prueba inicial ☐ Prueba final ☐

Las matemáticas están muy presentes en nuestra vida. Muchas actividades del día a día nos plantean problemas matemáticos a los que tenemos que dar respuestas reflexionadas para poder tomar la mejor decisión en cada situación. Piensa en los momentos en que tú te enfrentas a problemas matemáticos y responde. Hazlo con libertad y sinceridad; ninguna respuesta es equivocada.

1. ¿Me gustan las matemáticas?
   En absoluto Poco Bastante Mucho
2. ¿Me gusta resolver problemas matemáticos?
   En absoluto Poco Bastante Mucho
3. ¿Es fácil para mí resolver problemas matemáticos?
   En absoluto Poco Bastante Mucho

Cuando leo un problema matemático…

4. ¿Entiendo qué me pregunta?
   Nunca Raramente A menudo Siempre

Cuando pienso sobre el problema matemático…

5 ¿Es fácil para mí ver qué datos son necesarios para resolverlo?
   Nunca Raramente A menudo Siempre

Cuando planifico los pasos que seguiré para resolver el problema matemático…

6. ¿Las estrategias que planteo sirven para encontrar una solución?
   Nunca Raramente A menudo Siempre

Cuando ya tengo una solución del problema matemático…

7. ¿Comprendo todos los pasos que he seguido?
   Nunca Raramente A menudo Siempre
8. ¿Puedo argumentar por qué he seguido estos pasos?
   Nunca Raramente A menudo Siempre

En las sesiones del programa Razonar en pareja…

9. ¿Mis conocimientos son útiles para resolver los problemas en pareja?
   En absoluto Poco Bastante Mucho
10. ¿Mi compañero/a puede aprender gracias a mi ayuda?
    En absoluto Poco Bastante Mucho

Cuando estoy fuera de la escuela y de una situación surge un problema al que no puedo dar una respuesta inmediata…

11. ¿Me gusta utilizar las matemáticas para buscar una solución?
    En absoluto Poco Bastante Mucho

¿En qué situaciones externas a la escuela puedo aplicar con éxito mis conocimientos matemáticos?

_____
_____
_____
_____

suma+
Artículos
Noviembre 2017
86
pp. 19-27

El problema de las cien aves: de Alcuino a Fibonacci

Pablo Martín Prieto

El problema llamado «de las cien aves» constituye un clásico de la enseñanza de matemáticas a lo largo de toda la Edad Media. Procedente al parecer de China, tanto las matemáticas hindúes como arábigas le sirvieron de vía de acceso para penetrar en la esfera de la cultura occidental. Este artículo trata de algunos hitos en la transmisión del problema en las matemáticas medievales de Occidente, con especial atención a las obras de Alcuino y Fibonacci.

Palabras clave: Matemáticas, Edad Media, Cien aves, Problema, Alcuino, Fibonacci.

The problem of the hundred birds: from Alcuino to Fibonacci

The so-called “one-hundred-fowl” problem is a classic in the teaching of mathematics throughout the entire Middle Ages. Seemingly stemming from China, both Indian and Arabic mathematics serve as a gateway through which this particular problem penetrated into the sphere of Western culture. This paper is concerned with some developments of the problem’s transmission in medieval Latin mathematics, especially in the works of Alcuin and Fibonacci

.*Keywords:* Mathematics, Middle Ages, One-Hundred-Fowl, Problem, Alcuin, Fibonacci.

El valor de la historia de las matemáticas no se agota en sí mismo, como disciplina o área de especialidad con métodos, proyectos y objetivos propios, sino que también se extiende al interés que su cultivo tiene para suministrar enfoques y ejemplos de utilidad didáctica (Martín Prieto, 2015). En algunas ocasiones, resulta particularmente esclarecedor para el alumno, de cara a entender algún concepto matemático, informarse sobre la manera como dicho concepto vino históricamente a plantearse y definirse, pasando por distintos avatares de prueba y error, o promesas y descartes sucesivos, en un proceso de progresivo perfeccionamiento hasta alcanzar nuestra época en la forma —tantas veces definitiva— como hoy se aprenden y enseñan.

En este artículo nos proponemos ilustrar algunos momentos del recorrido histórico de un problema clásico de análisis indeterminado cuya transmisión desde las antiguas matemáticas chinas, atravesando el Oriente (India e Islam) hasta las del Occidente medieval, parece posible seguir con razonable seguridad. Al respecto nos interesa especialmente tratar de atisbar cómo se razonaba y qué método de resolución se seguía en la época medieval con este problema: empeño que choca con la total opacidad del tratamiento que se le da en la famosa colección de problemas de Al-

Artículo recibido en *Suma* en abril de 2017 y aceptado en septiembre de 2017

cuino, pero que en el caso de Fibonacci puede aventurarse un poco más allá.

El origen de un clásico del análisis indeterminado

Un famoso tipo de problema de análisis indeterminado que corrientemente se designa como «de las cien aves» (por los añadidos de ambientación de su prototipo más antiguo y divulgado) tiene su origen, según consenso de los investigadores, en las antiguas matemáticas chinas. Se recoge por primera vez —que sepamos— en la famosa compilación que se suele llamar de los *Nueve libros* o de los *Nueve tratados matemáticos* de Zhang Qiujian, obra cuyo lugar en la tradición de las matemáticas chinas se ha comparado con los *Elementos* de Euclides en las occidentales, tanto por ser un punto de llegada de un recorrido previo y también una referencia ineludible para lo sucesivo, como por tratarse en ambos casos, antes que de «obras de autor», de maduras elaboraciones, fruto de un largo esfuerzo colectivo[1]. Tal como aparece en dicha compilación, los datos del problema son los siguientes (Quian, 1963: t. II, 402-404):

> Se pide comprar un total de 100 aves por 100 monedas (qians), con la condición de comprar al menos una de cada uno de los grupos siguientes: gallos, gallinas y pollos, teniendo en cuenta que cada gallo cuesta 5 monedas, cada gallina 3, y se venden 3 pollos por una moneda.

El problema equivale, por lo tanto, a hallar alguna de las soluciones enteras positivas del sistema:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=100\\ 5x+3y+z/3&=100\end{aligned}\right\}$$

El cual es un caso particular del sistema cuya forma general sería:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=p\\ ax+by+cz&=p\end{aligned}\right\}$$

Donde a, b, c son racionales positivos y x, y, z, p son enteros positivos.

En la obra de Zhang Qiujian se facilitan todas las soluciones positivas del problema:

$$x=4, y=18, z=78$$
$$x=8, y=11, z=81$$
$$x=12, y=4, z=84$$

Pero la explicación del procedimiento por el que se llega a calcular dichas soluciones resulta muy parca y decepcionante:

> Para los gallos, cada [vez] suma 4; para las gallinas, cada [vez] resta 7; para los pollos, cada vez suma 3, y obtén [el resultado].

No se da, en todo caso, la fórmula general. Un algoritmo copiado en la transmisión posterior de la misma obra, cuya autoría es de intrincada atribución por los especialistas, intenta remediar la parquedad del original, pero no es correcto para el caso general (Van Hée, 1913: 442-447; Libbrecht, 1973: 276-282).

La transmisión del problema a las matemáticas occidentales

Es posible seguir la trayectoria de este tipo de problema que, con diversos datos, se difunde en el tiempo y en el espacio y que, a través de las matemáticas hindúes y árabes, llega hasta las del Occidente latino medieval. Al respecto, es interesante comprobar que los datos de la versión el mismo que da Abu Kamil (ca.850-ca.930) coinciden con una de las versiones recogidas en la compilación de problemas de matemáticas escolares recreativas atribuida a Alcuino de York (735-804), figura central del llamado renacimiento carolingio: es el problema n.º 39 de sus *Propositiones ad acuendos iuvenes*[2], donde los coeficientes y término independiente son:

$$a=5, b=1, c=1/20, p=100$$

Y la solución:

$$x=19, y=1, z=80$$

Sin embargo, como es evidente, Abu Kamil no puede haber sido la fuente, ni directa ni indirectamente, de la recopilación de Alcuino; menos aún es de creer que Alcuino hubiera podido influir sobre Abu Kamil, inserto en otra tradición cultural, y mucho más rica en ejemplos de problemas de este tipo, que la representada por la obra atribuida a Alcuino. A la posibilidad de que ambos puedan depender de alguna obra anterior,

habría incluso que añadir como factor a tener en cuenta la mera coincidencia casual en la elección de los datos, nunca descartable tratándose de un problema matemático tan elemental.

Hay, además, otras cuantas *propositiones* de la recopilación escolar atribuida a Alcuino que ejemplifican el tipo general de este famoso problema, variando los detalles de ambientación y también los parámetros utilizados (y consiguientemente, las soluciones válidas). Son ocho en total, como se detalla en la siguiente tabla.

Problema	*Ambientación: cuál es la tarea*	*Coeficientes y término independiente*		*Solución dada*
5	Comprar 100 cerdos por 100 dineros	$a = 10$ $b = 5$ $c = 1/2$	$p = 100$	$x = 1$ $y = 9$ $z = 90$
32	Repartir 20 medidas de trigo entre 20 personas	$a = 3$ $b = 2$ $c = 1/2$	$p = 20$	$x = 1$ $y = 5$ $z = 14$
33	Repartir 30 medidas de trigo entre 30 personas	$a = 3$ $b = 2$ $c = 1/2$	$p = 20$	$x = 3$ $y = 5$ $z = 22$
33 bis	Repartir 90 medidas de trigo entre 90 personas	$a = 3$ $b = 2$ $c = 1/2$	$p = 90$	$x = 6$ $y = 20$ $z = 64$
34	Repartir 100 medidas de trigo entre 100 personas	$a = 3$ $b = 2$ $c = 1/2$	$p = 100$	$x = 11$ $y = 15$ $z = 74$
38	Comprar 100 animales por 100 sueldos	$a = 3$ $b = 1$ $c = 1/24$	$p = 100$	$x = 23$ $y = 29$ $z = 48$
39	Comprar 100 animales por 100 sueldos	$a = 5$ $b = 1$ $c = 1/20$	$p = 100$	$x = 19$ $y = 1$ $z = 80$
47	Repartir 12 panes entre 12 personas	$a = 2$ $b = 1/2$ $c = 1/4$	$p = 12$	$x = 5$ $y = 1$ $z = 6$

Tabla 1

El tratamiento que se da a esta clase de problemas en la obra atribuida a Alcuino renuncia a mostrar el procedimiento de resolución, pues característicamente se limita a escoger una solución (cuando hay más de una posible) y mostrar su corrección mediante la prueba más elemental de substituir los valores concretos comprobando que se ajustan a lo pedido en el enunciado. En vano buscará el lector pistas o indicaciones que permitan reconstruir el razonamiento seguido para hallar la solución. Así, por ejemplo, véase el tratamiento del problema n.º 33 bis [3]:

> Cierto padre tenía 90 de familia, y quiso distribuir entre ellos 90 modios, ordenando que cada varón recibiera 3 modios, cada mujer 2 y cada niño medio. Diga, quien crea saberlo, cuántos varones, mujeres y niños había.
>
> **Solución:** Multiplica 6 por 3, hacen 18; multiplica 20 por 2, hacen 40; multiplica 64 por una mitad, y hacen 32. Esto es: 6 hombres recibieron 18 modios, 20 mujeres recibieron 40 modios y 64 niños recibieron 32 modios. Sumados 6 más 20 más 64, hacen 90 de familia. Sumados 18 más 40 más 32, hacen 90 modios. Y juntos hacen 90 de familia y 90 modios.

Además, teniendo en cuenta los parámetros fijados por los datos concretos de este problema n.º 33 bis, habría que añadir otras posibles soluciones positivas enteras que en la colección de Alcuino se ignoran:

$$x = 3, y = 25, z = 62$$
$$x = 9, y = 15, z = 66$$
$$x = 12, y = 10, z = 68$$
$$x = 15, y = 5, z = 70$$

La omisión de cualquier detalle sobre el método de resolución empleado (así como la de algunas soluciones posibles) sin duda le resta interés al tratamiento que se da a estos problemas en la famosa colección de Alcuino.

Los problemas de aves de Fibonacci

Para obtener una impresión que se acerque a los procedimientos de resolución de tales problemas hemos de esperar hasta la obra del más insigne y celebrado matemático medieval de Occidente, Leonardo Bigolli de Pisa, hoy más conocido como Fibonacci (ca.1170-ca.1250). Fibonacci, según su propio testimonio —coincidente con el parecer de los estudiosos de su obra [4]—, se hallaba familiarizado con las matemáticas árabes y contribuyó decisivamente a asentar y divulgar en Occidente muchos procedimientos y resultados de las mismas con obras tan fundamentales como su *Liber abaci* (*Libro de ábaco*). Cuando hacia 1225 el emperador Federico II celebró una reunión de su curia en Pisa, la ciudad de Fibonacci, este compareció ante el soberano como matemático famoso y tuvo ocasión de participar en una suerte de incruenta justa de problemas con intelectuales de la corte

del monarca[5]: en particular, los problemas que allí le propuso el maestro Juan de Palermo fueron ocasión para escribir la recopilación titulada *Flos* (*Flor*) y el *Liber quadratorum* (*Libro de los cuadrados*), dos de sus obras más interesantes. Posteriormente, a petición de cierto maestro Teodoro, que también era, como Juan de Palermo, «filósofo del emperador», Fibonacci recogió, entre otros problemas, seis versiones del conocido problema de las aves, con indicaciones sobre su resolución, y se los incluyó en una carta hoy célebre como uno de sus opúsculos o escritos menores (Boncompagni, 1857-1862: t. II, 247-252).

Por su interés, vamos a reproducir y comentar a continuación el tratamiento que Fibonacci da a esas seis variaciones seguidas sobre el problema de las aves (traducción nuestra directa del latín, sobre la edición de Boncompagni).

Primer problema de aves

> Alguien compra gorriones a 3 por 1 dinero, tórtolas a 2 por 1 dinero y palomas a 1 por 2 dineros; y de estos tres tipos de aves obtuvo 30 aves por 30 dineros. Se pregunta cuántas aves compró de cada tipo. Supuse en primer lugar 30 gorriones, por 10 dineros, y guardé 20 dineros, que son la diferencia que queda de 10 dineros hasta 30.
>
> Cambié uno de los gorriones por una tórtola, y ese cambio supuso un aumento de 1/6 de dinero, porque cada gorrión valía 1/3 de dinero y cada tórtola 1/2 de dinero, esto es, 1/6 de dinero más que el precio de un gorrión.
>
> Cambié a continuación uno de los gorriones por una paloma, y ese cambio supuso un aumento de 1 + 2/3 dineros, esto es, la diferencia que va de 1/3 de dinero hasta 2 dineros.
>
> Multipliqué por 6 ese aumento de 1 + 2/3 dineros, y el resultado dio 10.
>
> Y según esto, me pareció oportuno cambiar gorriones en tórtolas y palomas, de manera que dicho cambio llegue a sumar hasta aquellos 20 dineros que antes reservé. Los cuales 20 dineros multipliqué por 6, obteniendo 120.
>
> Separé estos 120 en dos partes de manera que una de ellas se pudiera dividir enteramente por 10, y la otra por 1, y el total de cada división no ascendiera hasta 30. La primera parte me dio 110, y la otra 10.
>
> Y dividí la primera parte, esto es, 110, por 10, y la segunda por 1, y obtuve 11 palomas y 10 tórtolas: las cuales, restadas del total de 30 aves, dejan 9 como el número de los gorriones.
>
> Y ya que estos [9] gorriones valen 3 dineros, las 10 tórtolas valen 5 dineros y las 11 palomas valen 22 dineros, de esta forma entre los tres tipos de aves se tendrá un total de 30 aves por 30 dineros, como se pedía.

Comentario

Con objeto de aproximarnos al método de resolución empleado por Fibonacci, resulta interesante comparar su tratamiento del problema con el que hoy le daríamos corrientemente.

En términos actuales, el problema se plantea como un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, donde x es el número de gorriones, y el de tórtolas y z el de palomas. Según los datos del problema, 30 en (*i*) es el número de aves requerido y 30 en (*ii*) el número de dineros por el que se pide cerrar la compra:

$$\left.\begin{array}{ll} (i) & x+y+z=30 \\ (ii) & x/3+y/2+2z=30 \end{array}\right\}$$

Para la resolución del sistema:

	x	y	z	término independiente
(*i*)	1	1	1	30
(*ii*)	1/3	1/2	2	30

multiplicamos (*i*) por 2 y se la restamos a (*ii*) multiplicada por 6:

$(ii\cdot 6)$	2	3	12	180
$(i\cdot 2)$	2	2	2	60
		1	10	120

tenemos:

$$y + 10z = 120$$

y operando:

$$y = 120 - 10z$$
$$z = (120 - y)/10$$

Se ve que y debe ser múltiplo de 10, como el otro término de la igualdad:

$$y = 10(12 - z)$$

Si $y = 10$, entonces $z = (120 - 10)/10 = 11$
Substituyendo en (*i*):

$$x + 10 + 11 = 30$$
$$x = 9$$

Se ha alcanzado la solución dada por Fibonacci: $x = 9$, $y = 10$, $z = 11$

Revisemos ahora cómo lo resuelve él.

Tantea primeramente cuánto se gastaría si todas las aves que se comprasen fueran del tipo

más barato, esto es, gorriones: si el gorrión cuesta 1/3 de dinero, 30 gorriones ascienden a 10 dineros. Anota que esto le dejaría un remanente de 20 dineros. De momento, no se cumple ninguna de las condiciones del problema, porque se pide comprar al menos un ave de cada tipo, y gastar el total de 30 dineros.

Calcula ahora la diferencia de precio que hay que añadir para cambiar cada gorrión adquirido por una tórtola: es la diferencia entre 1/3 de dinero y 1/2 de dinero. Para calcular dicha diferencia, divide el dinero en sextos, y así, como un tercio son 2/6 y la mitad, 3/6, la diferencia entre un tercio y una mitad es 1/6.

Calcula a continuación, del mismo modo, la diferencia de precio entre un gorrión y una paloma. Supone pasar de 1/3 a (2 =) 6/3, esto es, sumar 5/6 (= 1 + 2/3) de dinero al precio del gorrión para poder adquirir una paloma.

Toma seguidamente la cantidad de 20 dineros, sobrante de la compra hipotética de 30 gorriones por 10 dineros, la multiplica por 6, y el resultado, 120, lo separa en dos partes, de forma que una sea divisible por 10 y la otra por 1; son 110 y 10. Hace dichas divisiones y le dan 110/10 = 11, el número de palomas, y 10/1 = 10, el número de tórtolas. Se impone como condición que la suma de estos resultados no llegue a 30, pues en ese caso no dejaría lugar a que hubiera gorriones. Sumando esos números y restando el resultado de 30, obtiene 9 como el número de gorriones, y comprueba finalmente que al precio establecido todas esas aves suman la cantidad deseada.

Más claramente:

$$30 \cdot 1/3 = 10 \text{ dineros},$$

lo que costaría comprar todas las aves del tipo más barato.

$$30 - 10 = 20 \text{ dineros},$$

la suma restante,

$$20 \cdot 6 = 120 = 110 + 10.$$

¿Por qué multiplica por 6?

Aunque no lo diga aquí, Fibonacci va anotando:

x	y	z	
1/3	1/2	2	(los precios de cada tipo de ave)
0	1/6	10/6	(la diferencia de estos con 1/3)
0	1	10	(multiplica por 6 para que sean enteros)

(Así halla los valores 1, 10 por los que quiere dividir)

Prosigue Fibonacci:

$$110 : 10 = 11 \qquad \text{Ergo } z = 11$$
$$10 : 1 = 10 \qquad \text{Ergo } y = 10$$
$$30 - 11 - 10 = 9 \qquad \text{Ergo } x = 11$$

Segundo problema de aves

> Y si queremos comprar 29 aves por 29 dineros, podemos operar del mismo modo: esto es, extraemos de los 29 dineros el precio de 29 gorriones, que son las aves de menor precio; y lo que queda lo multiplicamos por 6, que da 116.
>
> Cantidad que separamos a continuación en dos partes, de manera que una se pueda dividir enteramente por 10, y la otra por 1, no ascendiendo la suma de ambas a 29. Estas partes se pueden hacer de dos maneras:
>
> Primero, que la primera parte sea 110 y la segunda 6: al dividir 110 por 10 da 11 palomas, y al dividir 6 por 1, se tiene 6 tórtolas; restadas unas y otras de 29, queda 12 para el número de gorriones.
>
> O bien, separamos 116 en 100 y 16; y dividimos 100 por 10, y 16 por 1, y tendremos 10 palomas y 16 tórtolas, siendo las que restan hasta 29, esto es, 3, los gorriones. Y así queda resuelta esta cuestión de dos maneras.

Comentario

Aquí se trata del sistema:

$$\left.\begin{array}{ll} (i) & x + y + z = 29 \\ (ii) & x/3 + y/2 + 2z = 29 \end{array}\right\}$$

donde se llega a:

$$y + 10z = 116$$

que resuelve de dos maneras:

$$y = 116 - 10z$$

si $y = 6$, entonces $z = 11$ y $x = 29 - 6 - 11 = 12$

o bien,

si $y = 16$, entonces $z = 10$ y $x = 29 - 16 - 10 = 3$

Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso anterior, calcula primeramente cuánto se gastaría si todas las aves se compraran del tipo más barato, esto es: $29 \cdot 1/3 = 9 + 2/3$; a continuación, resta esa cantidad del total de 29: $29 - (9 + 2/3) = 19 + 1/3$; como antes y por la misma razón, multiplica ahora por 6: $(19 + 1/3) \cdot 6 = 116 = 110 + 6$ (opción a) $= 100 + 16$ (opción b).

Opción a:

$$110:10=11 \quad \text{Ergo } \aleph=11$$
$$6:1=6 \quad \text{Ergo } y=6$$
$$29-11-6=12 \quad \text{Ergo } x=12$$

Opción b:

$$100:10=10 \quad \text{Ergo } \aleph=10$$
$$16:1=16 \quad \text{Ergo } y=16$$
$$29-11-16=3 \quad \text{Ergo } x=3$$

Tercer problema de aves

Y si queremos comprar 15 aves por 15 dineros, demostraré que esto no puede ser sin fraccionar las aves.

Pues, en efecto, si extraigo el precio de 15 gorriones del total de 15 dineros y multiplico lo que resta por 6, lo que hace 60, no se podrá separar en dos partes, de la que una se pueda dividir por 10 y la otra por 1, teniendo un número entero por resultado de cada una de estas divisiones, que sea menor de 15.

Por ejemplo, si separo 60 en 50 y 10, y divido 50 por 10 y 10 por 1, de ambas divisiones resultan 5 y 10, los cuales sumados hacen 15, esto es, la suma del total de aves: y así no podría entrar gorrión alguno en esta compra, porque 5 palomas valen 10 dineros y 10 tórtolas valen 5 dineros, y de esta forma solamente con estos dos tipos de aves ya se llega a sumar 15 aves por 15 dineros.

Y hasta 60 no hay otro número mayor que 50 que se pueda dividir enteramente por 10; y menor [que 50] no ha lugar aquí, porque si ponemos en una parte 40 queda 20 para la otra, y si 40 se divide por 10 y 20 por 1, saldrían de estas divisiones 24 aves, lo que no procede, porque deben ser 15.

Pero si queremos fraccionar aves, entonces separamos 60 en 55 y 5, y dividimos 55 por 10, que da 5 + 1/2 palomas, y 5 por 1, que da 5 tórtolas. Restadas, así pues, 5 + 1/2 palomas y 5 tórtolas del total de 15 aves, quedan 4 +1/2 gorriones, cuyo precio asciende a 1 dinero y medio, siendo el precio de 5 tórtolas 2 + 1/2 dineros y el precio de 5 + 1/2 palomas, 11 dineros. Y así se tendrían, de los tres tipos, 15 aves por 15 dineros.

Comentario

Mismo procedimiento:

$$15 \cdot 1/3 = 5$$
$$15 - 5 = 10$$
$$10 \cdot 6 = 60 = 50+10 \text{ (opción a)} = 55+5 \text{ (opción b)}$$

Opción a:

$$50:10=5 \quad \text{Ergo } \aleph=5$$
$$10:1=10 \quad \text{Ergo } y=10$$

Ya suman el total, no queda espacio para x.

Opción b:

$$55:10=5+1/2 \quad \text{Ergo } \aleph=5+1/2$$
$$5:1=5 \quad \text{Ergo } y=5$$
$$15-(5+1/2)-5=4+1/2 \quad \text{Ergo } x=4+1/2$$

Fibonacci descarta este resultado porque no es entero (sin duda se trata de aves vivas).

Cuarto problema de aves

Y si queremos comprar 15 aves por 16 dineros, esto sí se puede hacer sin fracciones: porque, extraídos 5 dineros, esto es, el precio de 15 gorriones, de 16 dineros, quedan 11 dineros, que, multiplicados por 6 da 66, lo que se separa en 60 y 6, dividiéndose 60 enteramente por 10, y 6 por 1, y de estas divisiones resultan 6 palomas y 6 tórtolas, siendo las aves que quedan hasta 15, esto es, 3, los gorriones. Y así podemos operar en todos los problemas similares.

Comentario

Mínima variación sobre el anterior, para obtener resultados enteros:

$$15 \cdot 1/3 = 5$$
$$16 - 5 = 11$$
$$11 \cdot 6 = 66 = 60 + 6$$

$$60:10=6 \quad \text{Ergo } \aleph=6$$
$$6:1=6 \quad \text{Ergo } y=6$$
$$15-6-6=3 \quad \text{Ergo } x=3$$

Quinto problema de aves

Pero para que vuestra inteligencia comprenda mejor esto que dije, propondré otra cuestión de este modo:

A saber, que se compren 3 gorriones por 1 dinero, una paloma valga 2 dineros y una perdiz, 3 dineros. Y de estos tres tipos quiero comprar 30 aves por 30 dineros.

Extraigo, en efecto, del modo arriba indicado, del total de 30 dineros el precio de 30 gorriones, que es 10; quedan 20 dineros, que reservo. Y cambio uno de los gorriones por una paloma, ascendiendo el au-

mento a 1 + 2/3 dineros, esto es, 5 tercios de dinero; y cambio entonces otro gorrión por una perdiz, ascendiendo el aumento a 2 + 2/3 de dinero, esto es, 8 tercios de dinero, lo que equivale a la diferencia entre el precio de un gorrión y el de una perdiz. Multiplico por 3 los 20 dineros guardados, dando 60, que separo en dos partes, de las que una se divide enteramente por 8 y la otra por 5, de manera que lo que resulte de una y otra división no llegue a 30. Una de esas partes será 40 y la otra 20; divido 40 por 8, lo que da 5 perdices, y divido 20 por 5, dando 4 palomas: las aves que quedan hasta 30, esto es, 21, son los gorriones.

Comentario

Al cambiar los coeficientes, cambian algunos valores del proceso de resolución.

Se trata en este caso del sistema:

$$\left.\begin{array}{ll}(i) & x+y+z=30\\ (ii) & x/3+2y+3z=30\end{array}\right\}$$

Si, para obtener valores enteros, multiplicamos (*ii*) por 3, y le restamos (*i*):

$$\begin{array}{lcccc}(ii\cdot 3) & 1 & 6 & 9 & 90\\ (i) & 1 & 1 & 1 & 30\\ \hline & & 5 & 8 & 60\end{array}\quad -$$

tenemos:

$$5y + 8z = 60$$

Hemos obtenido los valores 5, 8, que Fibonacci emplea esta vez, en vez de 1, 10, como en los ejemplos anteriores. Su resolución sigue los mismos pasos:

$$30\cdot 1/3 = 10$$
$$30 - 10 = 20$$
$$20\cdot 3 = 60 = 40 + 20$$

$$40:8=5 \qquad \text{Ergo } z=5$$
$$20:5=4 \qquad \text{Ergo } y=4$$
$$30-5-4=21 \qquad \text{Ergo } x=21$$

Sexto problema de aves

Otro: 5 gorriones valen 1 dinero, se venden 3 tórtolas por un dinero, una paloma vale 2 dineros y una perdiz, 3 dineros. Y de estos cuatro tipos quiero comprar 24 aves por 24 dineros.

Anoto los precios de cada género de ave en orden, a saber: 1/5, 1/3, 2 y 3, como figura en el margen, y sustraigo el precio de un gorrión del de cada una de las restantes tres especies, esto es: 1/5 de 1/3, y de 2, y de 3. Anoto los restos sobre cada uno de dichos precios, por orden, y así tendré: 2/15 sobre 1/5; 1 + 4/5, esto es, 27/15, sobre 2; 2 + 4/5, esto es, 42/15, sobre 3.

A continuación, resto el precio de 24 gorriones de 24 dineros, y quedan 19 + 1/5 dineros; éstos los multiplico por 15, para hacer de ellos partes quinceavas, en que están expresadas las diferencias sobrescritas, y da 288; esto lo separo en tres partes, de las que una tenga división entera por 42, otra por 27, y la tercera por 2: ya que el aumento del cambio de un gorrión por una perdiz es 12/15, el aumento de cambiar un gorrión por una paloma es 27/15, y el aumento de cambiar un gorrión por una tórtola es 2/15; y así, ha de separarse en tres partes, de la que una se pueda dividir enteramente por 42, la segunda por 27 y la tercera por 2. Y lo que salga de cada una de estas tres divisiones, será el número de aves compradas de cada tipo, esto es, si no llega a 24. Esto puede hacerse de dos maneras:

Primero, a 288 resto el cuádruplo de 42 y de 27, esto es, respectivamente 168 y 108, que sumados dan 276; queda, para la tercera parte, 12. Divido entonces 168 por 42, 108 por 27 y 12 por 2, y se obtiene 4 perdices, 4 palomas y 6 tórtolas, que sumadas son 14 aves; las que quedan hasta 24, esto es, 10, serán gorriones.

O de otro modo: pongo para la primera parte el quíntuplo de 42, por lo que saldrán 5 perdices; para la segunda parte pongo el doble de 27, por lo que saldrán 2 palomas; de los mismos 288 quedarán 24, que son el duodécuplo de 2, por el cual duodécuplo se tendrá 12 tórtolas; quedan en verdad las que faltan hasta 24 aves, esto es, 5, que serán gorriones.

Comentario

Equivale al sistema:

$$\left.\begin{array}{ll}(i) & x+y+z+p=24\\ (ii) & x/5+y/3+2z+3p=24\end{array}\right\}$$

Si multiplicamos (*ii*) por 5 y le restamos (*i*):

$$\begin{array}{lccccc}(ii\cdot 5) & 1 & 5/3 & 10 & 15 & 120\\ (i) & 1 & 1 & 1 & 1 & 24\\ \hline & & 2/3 & 9 & 14 & 96\end{array}\quad -$$

Ahora, si deseamos reducir a valores enteros, multiplicamos por 3 y queda

$$2 \quad 27 \quad 42 \quad 288$$

2, 27, 42 y 288 son los valores empleados por Fibonacci.

Este ejemplo es el que mejor esclarece el procedimiento seguido por él, porque indica la tabla, antes implícita, que va anotando:

x	y	z	p	
1/5	1/3	2	3	(precios de cada tipo de ave)
0	2/15	27/15	42/15	(diferencia con 1/5)
0	2	27	42	(multiplica lo anterior por 15)

y así halla los tres valores, 2, 27 y 42, que son la diferencia de precio de y, z y p respecto de x, multiplicada por 15 para manejar valores enteros.

Y separa 288 en tres partes, que quiere divisibles por cada uno de estos tres valores.

Es decir:

$$24 \cdot 1/5 = 4 + 4/5$$
$$24 - (4 + 4/5) = 19 + 1/5$$
$$(19 + 1/5) \cdot 15 = 288$$

Opción a:

$$288 = 168 + 108 + 12$$

Véase que: $168 = 42 \cdot 4$; $108 = 27 \cdot 4$; 12 es lo que resta hasta 288.

$$162 : 42 = 4 \quad \text{Ergo } p = 4$$
$$108 : 27 = 4 \quad \text{Ergo } z = 4$$
$$12 : 2 = 6 \quad \text{Ergo } y = 6$$
$$24 - 4 - 4 - 6 = 10 \quad \text{Ergo } x = 10$$

Opción b:

$$288 = 210 + 54 + 24$$

Véase que: $210 = 42 \cdot 5$; $54 = 27 \cdot 2$; 24 es lo que resta hasta 288.

$$210 : 42 = 5 \quad \text{Ergo } p = 5$$
$$54 : 27 = 2 \quad \text{Ergo } z = 2$$
$$24 : 2 = 12 \quad \text{Ergo } y = 12$$
$$24 - 5 - 2 - 12 = 5 \quad \text{Ergo } x = 5$$

Conclusión

En definitiva, la lectura de Fibonacci resulta más esclarecedora del procedimiento seguido para resolver este tipo de problemas si se compara con la total ausencia de pistas al respecto en la colección de Alcuino. Con todo, no se puede evitar la impresión de que el arte de Fibonacci, como el de otros calculistas profesionales de su tiempo que presentaban sus resultados ante las cortes de grandes señores aficionados a las matemáticas y a los problemas de ingenio, tenía algo de espectáculo (con «secretos del oficio» como los del prestidigitador) y otro poco de tanteo. Tal vez si Fibonacci no llega a exponer con total claridad su método de resolución, ello se debe a que no alcanza la generalidad, limpieza y comprensión completa del problema que algunos siglos antes habían logrado varios matemáticos hindúes (Caianiello, 2008). Pero esa es otra historia y, como diría Kipling, deberá ser contada en otra ocasión.

Referencias bibliográficas

Boncompagni, B. (1857-1862), *Scritti di Leonardo Pisano, matematico del secolo decimoterzo*, Tipografia delle Scienze Matematiche e Fisiche, Roma (2 vols.).

Caianiello, E. (2008), «Le problème d'oiseaux: procédés de resolution dans l'histoire des mathematiques», en E. Barbin y otros (eds.), *History and Epistemology in Mathematics Education*. Proceedings of the 5th European Summer University (Prague, July 19-24, 2007), Vydavatelský, Pilsen, 327-342.

Folkerts, M. (1978), *Die älteste mathematischen Aufgabensammlung in lateinischer Sprache: die Alkuin zugeschriebenen Propositiones ad acuendos iuvenes. Überlieferung, Inhalt, Kritische Edition*, Springer, Viena.

Hughes, B. (2008), *Fibonacci's De Practica Geometrie*, Springer, Nueva York.

Libbrecht, U. J. (1973), *Chinese Mathematics in the Thirteenth Century. The Shu-shu chiu-chang of Ch'in Chiu-shao*, MIT Press, Cambridge (Mass.).

Martín Prieto, P. (2015), *Las matemáticas en la Edad Media. Una historia de las matemáticas en la Edad Media occidental*, La Ergástula, Madrid.

Moreno, R. (2016), *Alcuino de York. Problemas para la instrucción de los jóvenes*, Nivola, Madrid.

Quian, B. (1963), *Suanjing shishu*, Zhonghua shuju, Pekín (2 vols.).

Sesiano, J. (1999), *Une introduction à l'histoire de l'algèbre. Résolution des équations des Mésopotamiens à la Renaissance*, Presses Polythechniques et Universitaires Romandes, Lausana.

Suter, H. (1910-1911), «Das Buch der Seltenheiten der Rechenkunst von Abu Kamil el Misri», *Bibliotheca Mathematica*, n.º 11, 100-120.

Toubert, P., y A. Paravicini (1994), *Federico II e le scienze*, Sellerio, Palermo.

Van Hée, L. (1913), «Les cent volailles, ou l'analyse indéterminée en Chine», *T'oung Pao*, n.º 14, 435-450.

Vogel, K. (1968), *Chiu chang suan shu. Neun Bücher arithmetischen Technik. Ein chinesisches Rechenbuch für den praktischen Gebrauch aus der frühen Hanzeit (202 v. Chr. bis 9 n. Chr.)*, Vieweg, Braunschweig.

Youschkevitch, A. P. (1964), *Geschichte der Mathematik im Mittelalter*, Teubner, Leipzig.

Pablo Martín Prieto
Universidad Complutense de Madrid
<pablomartinprieto@ghis.ucm.es>

1 Como se trata de un comentario del siglo V d. C. sobre un texto anterior, que supuestamente data de los comienzos de la era Han (ca. 190 d. C.), cabe la posibilidad de que el problema se remonte al primer siglo de nuestra era, como sostiene Youschkevitch (1964: 74); la mayoría de autores se deciden, en cambio, por el s. V d. C.: en cualquier caso, nos hallamos ante la más antigua aparición conocida del problema que nos ocupa. La edición de referencia de esta obra: Quian (1963); una buena traducción (alemana): Vogel (1968).

2 Sobre Abu Kamil, véase Sesiano (1999: 79-83). De la obra de Alcuino la edición de referencia es: Folkerts (1978); una reciente traducción española: Moreno Castillo (2016).

3 Traducción nuestra del latín, sobre el texto de la edición de Folkerts (1978: 64).

4 Sobre la educación y fuentes arábigas de Fibonacci: Hughes (2008: xviii-xxvi).

5 Sobre Federico II como mecenas de la ciencia: Toubert-Paravicini (1994).



COLABORAN:

GOBIERNO DE ESPAÑA
MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE

XUNTA DE GALICIA
CONSELLERÍA DE CULTURA, EDUCACIÓN E ORDENACIÓN UNIVERSITARIA

Deputación DA CORUÑA

Ayuntamiento de A Coruña
Concello da Coruña

suma+
Artículos
Noviembre 2017
86
pp. 29-37

Trigonometría en la meridiana solar de Roma

Mariola Brines Pérez
Irene Ferrando Palomares

Este artículo describe una propuesta didáctica dirigida a alumnos de 4.° de la ESO en adelante donde se trabajan principalmente los conceptos de trigonometría ligados a la meridiana solar de Roma. La propuesta está enfocada a comprender el funcionamiento de la meridiana relacionando conceptos astronómicos y trigonométricos, mediante una serie de actividades que incluyen el uso de herramientas digitales.

Palabras clave: Matemáticas, Trigonometría, Astronomía, Meridiana Solar, Coordenadas geográficas.

Trigonometry on the solar meridian Rome

This paper shows a teaching proposal addressed to high school students that focuses on the trigonometry concepts behind the meridian line of Rome. The aim is to learn about the functioning of the meridian line by connecting astronomy and trigonometry concepts. With this in mind, teaching material, activities and digital tools were developed and employed.

Keywords: Mathematics, Trigonometry, Astronomy, Meridian Line, Geographical coordinates.

Existen numerosos trabajos que profundizan en el interés didáctico de introducir los conceptos de la matemática escolar en contextos arquitectónicos (véanse, por ejemplo los trabajos de Reyes, 2006, Ferrando y Segura, 2013, Ferrando y Donat, 2016 o las Rutas Matemáticas diseñadas por Queralt, Puig y Monzó, 2014, 2007, 2009a, 2009b). Por otra parte, desde distintos organismos educativos (Agencia de Educación de la Comunidad Europea, 2012 y Jefatura del Estado Español, 2014) se incide en la necesidad de trabajar de forma relacionada conceptos de diferentes disciplinas, integrándolas en un único ámbito denominado comúnmente STEM por su acrónimo en inglés (Science, Technology, Engineering and Mathematics). En este trabajo describimos una propuesta didáctica dirigida a alumnos de cuarto curso de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) en adelante, que se inscribe en las dos perspectivas previamente descritas ya que, en un contexto arquitectónico, los alumnos se enfrentan a actividades que permiten introducir conceptos de astronomía básica mediante el uso de la trigonometría.

La propuesta que presentamos fue diseñada a partir de una cuestión planteada por unos estudiantes tras un viaje a Roma; los alumnos habían visitado la basílica de Santa Maria degli Angeli en

Artículo solictado por *Suma* en mayo de 2017 y aceptado en septiembre de 2017

la que se encuentra una meridiana solar y se preguntaban cómo funcionaba. Así, la propuesta pretendía, de alguna forma, dar respuesta a una cuestión planteada por un grupo de alumnos de primer curso de Bachillerato.

los alumnos se enfrentan a actividades que permiten introducir conceptos de astronomía básica mediante el uso de la trigonometría.

Durante el diseño de la propuesta didáctica, nos basamos en el artículo de González Martí (2015), de forma que nuestro trabajo pretende complementar la propuesta planteada por este. A continuación, presentaremos someramente algunos aspectos relativos al diseño de la propuesta y pasaremos a describir en detalle, sesión por sesión, las actividades que la componen. Dado que estas actividades han sido implementadas en un aula, explicaremos cuáles han sido los resultados de la experiencia llevada a cabo porque consideramos que estos pueden resultar de utilidad para el profesor que quiera llevar a cabo una serie de tareas de esta índole.

Objetivos

Para que la enseñanza de las matemáticas no resulte en una repetición de ejercicios descontextualizados es importante «hacer énfasis en la funcionalidad de los aprendizajes y su utilidad para comprender el mundo que nos rodea […]» (Diario Oficial de la Generalitat Valenciana, 2015, p. 17668). En este caso se propone al alumnado explorar la relación entre en la construcción de un objeto con un uso astronómico, la meridiana solar y un concepto de trigonometría, la tangente. Para enfrentarse a esta propuesta, es necesario que los estudiantes tengan conocimientos previos de las razones trigonométricas, por lo que esta propuesta está dirigida a alumnado de 4.º de ESO en adelante. Además, requiere de la comprensión de conceptos básicos de astronomía que implican una cierta capacidad de visión espacial, que se espera ya tengan suficientemente desarrollada a esta edad. Para facilitar este último objetivo, se hará uso de herramientas digitales interactivas tales como simuladores astronómicos que facilitan la compresión de conceptos de geometría espacial.

Esta propuesta didáctica incluye actividades enfocadas a practicar la resolución de problemas contextualizados que incluyen las razones trigonométricas que complementan a las planteadas por González Martí (2015), adentrándose en la estrecha relación entre astronomía y trigonometría en el contexto de la meridiana solar. Mediante el aprendizaje de estas razones en un contexto atractivo se fomenta que este sea significativo, y que mantenga activa la curiosidad de los estudiantes por el mundo que les rodea y su relación con las matemáticas.

Metodología

En primer lugar, se introducen algunos conceptos básicos de astronomía mediante diapositivas, dado que no están incluidos actualmente en el currículo académico. El libro *Astronomía fundamental* (Martínez y otros, 2005) es una buena herramienta para familiarizarse con la astronomía y cuenta con ilustraciones que ayudan a su comprensión. Resulta de gran utilidad mostrar un vídeo disponible en la plataforma *YouTube* que describe brevemente la historia y funcionamiento de la meridiana de Santa Maria degli Angeli[1]. Dado que su funcionamiento está directamente ligado al movimiento del Sol sobre el horizonte a lo largo del año, una manera muy interesante de visualizarlo es mediante el simulador *online*[2] desarrollado por la Universidad de Nebraska-Lincoln de los Estados Unidos, que permite ver el movimiento aparente del Sol sobre la esfera celeste durante todo el año en cualquier lugar del mundo. Conforme se avanza en la explicación se propone al alumnado que responda a las actividades que se le han proporcionado como dossier. Estas pueden ser resueltas de forma individual o en pequeños grupos y se corrigen progresivamente en el aula. De esta forma el profesor puede resolver dudas y volver a incidir en aquellos conceptos que no hayan quedado del todo claros.

La propuesta requiere un mínimo de 4 sesiones para ser implementada. A continuación detallamos cada una de las actividades planteadas para cada sesión.

Propuesta didáctica

Los contenidos que se incluyen son principalmente matemáticos y de astronomía básica, relacionados con la trigonometría y las coordenadas geográficas y celestes. Aunque las coordenadas geográficas sí que forman parte del temario de Ciencias Sociales, y los alumnos deben conocerlas, no está de más repasarlas brevemente. Por el contrario, no es habitual que estén familiarizados con las celestes y, por tanto, se debe dedicar un poco más de tiempo a explicarlas. A continuación detallaremos el contenido a tratar.

Contenido matemático:

— Ángulos alternos, complementarios y opuestos por el vértice.
— Conocimientos geométricos que permiten la medida y cálculo de longitudes.
— Razones trigonométricas, especialmente la tangente.
— Teorema de Pitágoras.
— Interpretación de dibujos geométricos.
— Resolución de ecuaciones de primer grado.
— Traducción del lenguaje verbal al algebraico.
— Generalización de un caso particular.

Contenido de astronomía:

— Coordenadas geográficas: latitud y longitud.
— Coordenadas horizontales: altura.
— Coordenadas ecuatoriales: declinación.
— Plano del ecuador.
— Plano de la eclíptica.
— Esfera celeste.
— Plano del horizonte.
— Cénit y nadir.
— Meridiano de un lugar.
— Constelación celeste.
— Signos del zodíaco.

Actividades

Las actividades que se proponen están distribuidas en cuatro sesiones, aunque dependiendo de las circunstancias del profesor y del grupo de alumnos se pueden ampliar o reducir. A continuación se muestra una descripción detallada de la propuesta.

Sesión 1

Esta primera sesión está dedicada a que los alumnos tomen contacto con el problema del establecimiento de un calendario civil lo más ajustado posible al calendario solar, ya que este es el motivo por el cual se construyó la meridiana que va a servirnos como contexto en nuestra propuesta. Aunque el objetivo es dar a conocer la construcción y funcionamiento de la meridiana solar desde un punto de vista matemático, será necesario introducir previamente ciertos conceptos astronómicos.

1. ¿Por qué tenemos años bisiestos? ¿Cuánto tiempo tarda la Tierra en completar una órbita alrededor del Sol?

Este primer ejercicio permite recordar a los alumnos por qué existen diferencias entre el calendario civil y el año trópico, y de ahí la importancia de la medida lo más exacta posible de este último para ajustar el primero.

2. Identifica los ángulos interiores del triángulo de la figura 1 sin realizar ningún cálculo teniendo en cuenta que las dos rectas horizontales son paralelas. Razona tu respuesta.

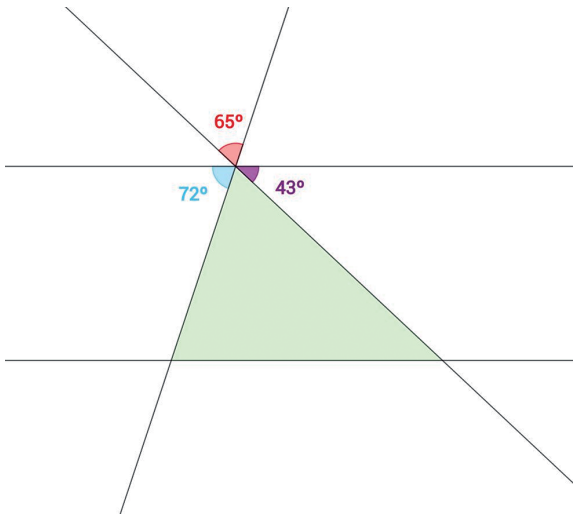


Figura 1. Identifica los ángulos del triángulo

Con este ejercicio se busca preparar a los alumnos para que puedan identificar los ángulos opuestos por el vértice y los alternos, que son fundamentales para entender los cálculos de la meridiana.

3. ¿A qué época del año corresponden cada una de estas dos posiciones del Sol mostradas en la figura 2, si representan la altura máxima y mínima del Sol sobre el horizonte de Roma?

Adentrarnos en la variación de la altura del Sol sobre el horizonte permite sentar las bases del fenómeno astronómico del que se sirve la meridiana para su funcionamiento. Una vez comprendido, nos centraremos en los cálculos de la posición de la proyección del Sol sobre la línea meridiana tanto durante los solsticios como en cualquier día del año.

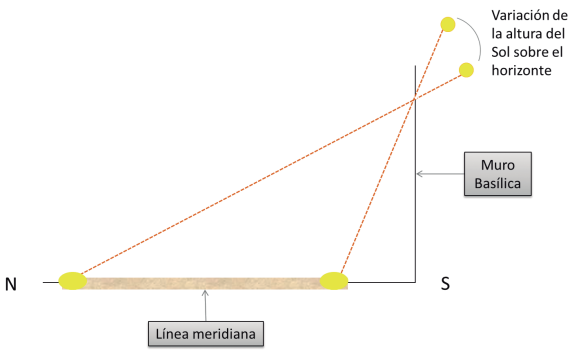


Figura 2. Esquema de la variación de la altura del Sol sobre el horizonte

4. Sabiendo que la altura del agujero estenopeico, por el cual se filtra la luz solar al mediodía, es de 20,344 m, calcula la distancia al muro de la proyección del Sol sobre la meridiana para el solsticio de invierno y de verano. Da la fórmula general. ¿Por qué has elegido esta?

Datos: altura del Sol sobre el horizonte en el solsticio de invierno es de 24° 41' y en el de verano de 71° 32'.

Esta tarea requiere que los estudiantes estén familiarizados con las razones trigonométricas para que puedan identificar la tangente como la razón adecuada en este caso. En los datos se sugiere que hagan cálculos para dos fechas señaladas con la intención de que, a partir de estos, sean capaces de obtener la fórmula general. Si se toma el ángulo complementario de la altura del Sol sobre el horizonte (que correspondería al ángulo que subtiende el rayo de sol con el muro sur y que es el opuesto por el vértice del ángulo cenital, ver figura 3), y se calcula la tangente, la altura del agujero será siempre constante y corresponderá al coseno del nuevo ángulo, mientras que el seno, que es la distancia al muro será la incógnita, pudiéndose así aislar de la ecuación para obtener la fórmula general:

$$\tan(90° - h) = \frac{\text{sen}(90° - h)}{\cos(90° - h)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan(90° - h) = \frac{d}{r} \Rightarrow d = r \cdot \tan(90° - h)$$

$$d = 20{,}344 \cdot \tan(90° - h) \qquad [1]$$

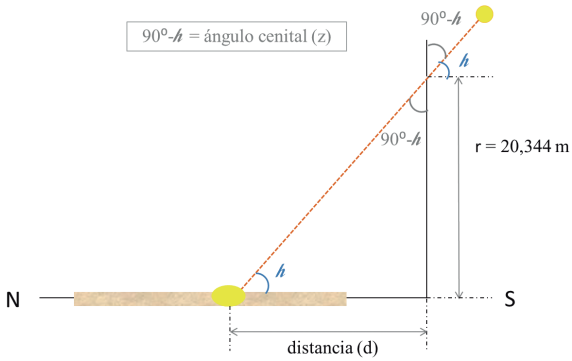


Figura 3. Cálculo de la distancia al muro de la proyección sobre la meridiana

Sesión 2

En esta segunda sesión se persigue asentar los conocimientos adquiridos y hacer reflexionar sobre la influencia de la latitud del lugar en la longitud de la línea meridiana. Además, se profundiza en la no linealidad de la función tangente. La pregunta 7 es particularmente compleja ya que requiere de una mayor abstracción y puede ser necesario guiar a los alumnos hacia la respuesta correcta.

5. ¿Qué longitud tiene la meridiana?

La resolución de esta primera tarea es sencilla pero, de alguna forma, permite asentar los con-

ceptos que se trabajaron en la sesión anterior y detectar posibles obstáculos en la comprensión del contexto del concepto de tangente.

6. ¿Por qué no se prolonga la línea meridiana hasta el muro sur? ¿En qué caso sí que tendría sentido?

La primera pregunta de esta tarea corresponde a la actividad 3 de González Martí (2015) y requiere de una reflexión por parte de los alumnos, que sirve para comprobar que están entendiendo la construcción de la meridiana. La segunda pretende hacerles pensar sobre la variación de la longitud de la meridiana si esta estuviera situada en otra latitud diferente a la de Roma.

7. ¿Por qué no son equidistantes las graduaciones de los signos del zodíaco en la meridiana?

Esta pregunta es una reformulación de una pregunta planteada por González Martí (2015) en la actividad 4, centrada en las dos graduaciones de la meridiana y que puede resultar más adecuada si se visita la basílica. En nuestro caso, su planteamiento debe venir precedido de la explicación de que las constelaciones zodiacales están situadas en una franja alrededor de la eclíptica, equidistantes 30° entre ellas. Con esto se pretende que los estudiantes razonen cuál es la fórmula que nos permite conocer la posición del Sol sobre la meridiana, y por tanto, respecto a los signos del zodíaco, que como han deducido antes viene dado por la tangente, que no es una función lineal. Aquí se requiere de un razonamiento más complejo al incluir astronomía, trigonometría y análisis, y por tanto, la resolución de esta tarea puede suponer un reto para muchos alumnos.

8. Tal como se puede ver en la figura 4, la forma de la proyección del Sol varia en tamaño e intensidad a lo largo del año. ¿A qué crees que se debe la atenuación de la luz en el solsticio de invierno en comparación con el de verano?

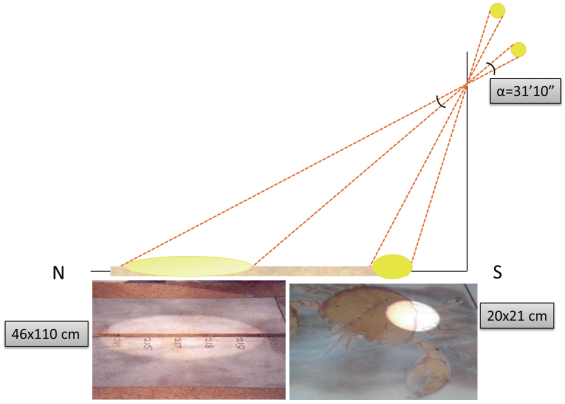


Figura 4. Esquema de la variación de tamaño e intensidad lumínica de la proyección sobre la meridiana a lo largo del año

En este punto se puede abrir un debate con los alumnos, en el que previsiblemente se mencione que, dado que los rayos van más inclinados al entrar en la basílica la luz se dispersa más y disminuye su intensidad. Deberíamos hacerles notar que la dispersión de la luz depende de la mayor inclinación de los rayos del Sol durante los meses de invierno cuando atraviesan la atmósfera, ya que recorren más del doble de masa de aire que en verano, cuando el ángulo cenital es menor (Sigismondi, 2011).

Sesiones 3 y 4

Estas sesiones incluyen solo un ejercicio, pero que requiere de una explicación detallada de conceptos astronómicos, algunos de los cuales deberían conocer, como es la ocurrencia de las estaciones. Sin embargo la explicación de las coordenadas ecuatoriales y el razonamiento a desarrollar aumentan la complejidad de la actividad. Por este motivo, el grado de implicación del profesorado en la guía hacia la solución dependerá de las capacidades del alumnado.

9. Cálculo de las dimensiones de la proyección del Sol para cada día del año.

Para calcular las dimensiones de la proyección del Sol sobre la meridiana para cada día del año,

es necesario ampliar antes algunos conceptos de astronomía y poner a prueba la capacidad visual del alumnado. Así, para abordar esta tarea haremos, en primer lugar, unas consideraciones sobre la latitud ayudándonos de imágenes y esquemas. Tal como podemos ver en la figura 5, el ángulo que subtiende el ecuador celeste con el cenit del lugar es el mismo que la latitud del lugar Φ.

Por otra parte, sabemos que el eje de rotación de la Tierra está inclinado con respecto al plano de la eclíptica, formando un ángulo de 23° 27', esto permite entender la razón por la que distinguimos cuatro estaciones a lo largo de un año. En efecto, si observamos el movimiento de traslación de la Tierra alrededor del Sol (figura 6),

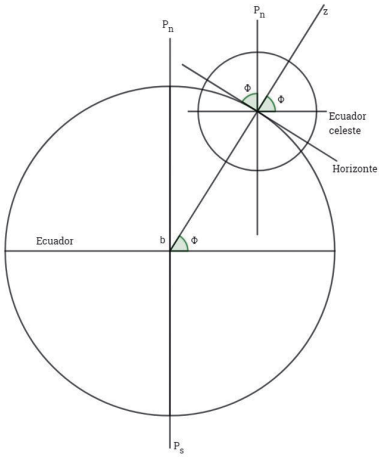


Figura 5. Esfera celeste de un observador situado a una latitud Φ

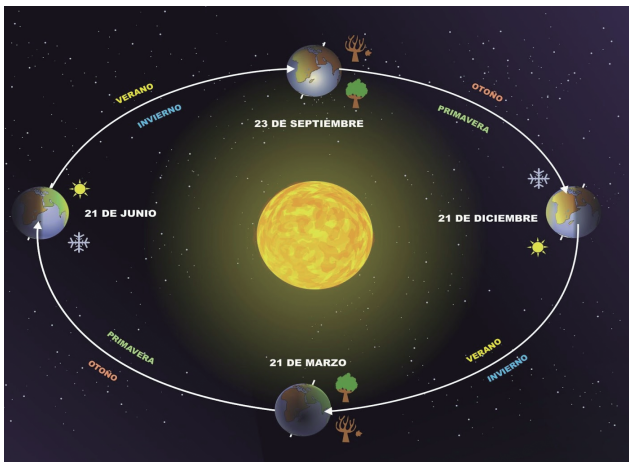


Figura 6. Movimiento de translación de la Tierra[3]

podemos ver cómo, durante los equinoccios, los rayos de luz inciden perpendicularmente sobre el ecuador, mientras que en el solsticio de invierno y verano (en el hemisferio norte) lo hace a las latitudes –23° 27' (trópico de Capricornio) y +23° 27' (trópico de Cáncer), respectivamente.

Así pues, durante los equinoccios, la altura máxima del Sol sobre el horizonte en cualquier lugar coincidirá con la proyección del ecuador celeste del lugar, y por tanto con el ángulo complementario de la latitud (90° – Φ).

Llegados a este punto, es útil introducir una de las coordenadas ecuatoriales: la declinación (δ). Esta coordenada representa el ángulo entre la proyección del ecuador y la posición de un astro, medido sobre el meridiano celeste que pase por el astro. En el caso del Sol, este ángulo varía entre +23° 27' y –23° 27', dado que 23° 27' es el ángulo entre el plano ecuatorial y el de la eclíptica.

Teniendo en cuenta todo lo explicado hasta ahora, conviene detenerse y describir con detalle la variación de la altura del Sol en Roma (ver figura 7). En el equinoccio de primavera, la altura máxima del Sol coincidirá con la altura del plano ecuatorial sobre el horizonte, que como hemos visto antes es igual al ángulo complementario de la latitud (90° – Φ). Durante la primavera, la altura máxima del Sol sobre el horizonte irá aumentando progresivamente hasta alcanzar el valor máximo en el solsticio de verano (90° – Φ) + 23° 27'. Durante el verano, la declinación irá disminuyendo su valor hasta ser igual a cero, y por tanto en el equinoccio de otoño, la altura máxima del Sol volverá a ser igual a 90° – Φ. Durante el otoño, la declinación (δ) tomará valores negativos hasta al-

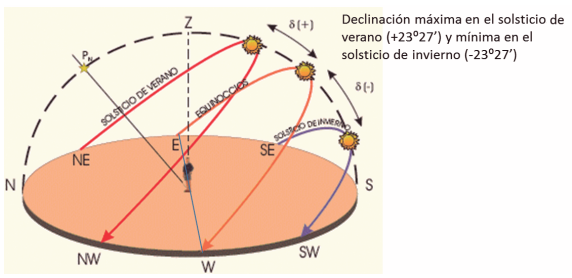


Figura 7. Movimiento aparente del Sol en los solsticios y equinoccios para una latitud como la de Roma.[4]

canzar –23° 27' el día del solsticio de invierno, donde la altura máxima será (90° – Φ) – 23° 27'. Así pues, conforme avance el invierno, el valor de la declinación irá aumentando hasta que en el equinoccio de primavera será igual a cero de nuevo y por lo tanto la altura máxima del Sol será igual al ángulo complementario de la latitud Φ.

Podemos deducir, por tanto, que la altura máxima del Sol sobre el horizonte vendrá dada por la fórmula:

$$\text{altura máxima: } h = (90° - \Phi) + \delta \qquad [2]$$

donde $\delta \in [-23° 27', +23° 27']$

Así pues, conocida la latitud de Roma, solo necesitamos conocer la declinación del Sol para cada día del año. Para su cálculo se utilizará la ecuación aproximada de Cooper (1969):

$$\delta(n) = 23{,}45 \cdot \operatorname{sen}\left(360 \cdot \frac{284 + n}{365}\right) \qquad [3]$$

donde n es cada día del año, $n \in [1, 365]$.

Si ahora recordamos cómo hemos calculado la distancia de la proyección del Sol sobre la meridiana en la pared sur de la basílica, es fácil deducir que el ángulo que buscamos es el ángulo cenital, que es el complementario de la altura sobre el horizonte.

Así pues, considerando [1] y [2]:

$$d = 20{,}344 \cdot \tan[90° - ((90° - \Phi) + \delta)]$$
$$d = 20{,}344 \cdot \tan[\Phi - \delta] \qquad [4]$$

Esta es la distancia a la que se encuentra el centro de la proyección del Sol sobre la meridiana. Como hemos dicho, su forma varía de una casi circular (20 × 21 cm) a una elipsoidal (46 × 110 cm). Esta diferencia se debe a la variación de la altura del Sol sobre el horizonte a lo largo del año, como ya hemos descrito anteriormente. Sin embargo, el tamaño de los semiejes de la elipse, es decir, la distancia de la proyección superior e inferior de estas en el centro de la figura viene dada porque el tamaño del Sol visto desde la Tierra no es despreciable. Aunque Bianchini[5] fijó el valor del diámetro angular en 31' 10", hoy se utiliza como media 32,15°. El radio angular del Sol será, aproximadamente 0,268° (α). Así pues, para calcular la distancia del extremo más alejado de la elipse al muro, tendremos que sumar al ángulo cenital el radio angular del Sol.

Una vez obtenida la distancia, tendremos que calcular la diferencia entre esta y la del centro de la elipse que habíamos encontrado anteriormente y multiplicar el resultado por dos. Finalmente, habremos obtenido el tamaño del semieje mayor de la elipse. En el caso del semieje menor, debemos calcular primero el valor de la hipotenusa del triángulo rectángulo que forman la altura del agujero, el rayo de luz central y la distancia del centro de la proyección en la pared sur (hip_1), tal como se muestra en la figura 8. Si nos fijamos, la hipotenusa (hip_1) forma al mismo tiempo un triángulo rectángulo hacia el este (y otro hacia el oeste) con la distancia del centro de la proyección en el extremo este de la elipse y de este punto en el agujero (ver figura 8). El ángulo agudo de este nuevo triángulo (α) corresponde al radio angular, y por tanto utilizando la tangente de este ángulo podremos averiguar el valor del semieje menor de la elipse.

$$\text{semieje menor} = hip_1 \cdot \tan(\alpha) \qquad [5]$$

Conocidas las longitudes de los semiejes (a el semieje mayor, b el semieje menor) de las elipses para cada día, podemos encontrar su excentricidad (ε) y la ecuación cartesiana de la elipse:

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}};\ \text{donde } 0 < \varepsilon < 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Este ejercicio se les puede plantear a los alumnos para que lo realicen en una hoja de cálculo individualmente, por grupos o todos conjuntamente con la ayuda del profesor. Una vez obtenida la ecuación de la elipse se puede hacer un modelo de variación de la misma con el pro-

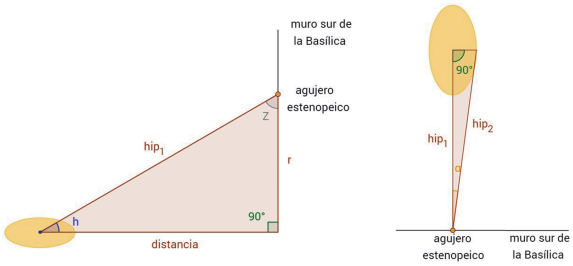


Figura 8. Esquema para el cálculo del semieje menor: vista lateral (izq) y vista superior (dcha)

grama Geogebra utilizando un deslizador para el día del año. De esta manera, el alumnado podrá comprobar de una forma más gráfica que la variación del tamaño de la elipse no es constante a lo largo del tiempo. La visión espacial necesaria para comprender el problema y los cálculos que implica puede suponer un desafío para algunos alumnos.

Descripción de la experiencia en el aula

Las actividades de la 1 a la 7 se implementaron en una clase de primero de Bachillerato de un instituto de Manises (Valencia) a alumnos del itinerario científico durante dos sesiones. El tiempo del que se dispuso fue insuficiente, pero no se contaba con más por diferentes limitaciones ajenas.

Por lo que respecta a las respuestas de los estudiantes a las primeras cuestiones, todos conocían que la Tierra no tarda un número exacto de días en dar una vuelta alrededor del Sol, sino que lo hace en 365 días y 6 horas (ningún alumno respondió con la cifra decimal 365,25). En el caso de la segunda actividad, la mayoría necesitaron realizar cálculos para hallar los ángulos del triángulo, sobre todo los alternos y pocos los obtuvieron directamente.

Sin embargo, las mayores dificultades surgieron con la comprensión del movimiento aparente del Sol a lo largo del año y la consiguiente variación en su altura sobre el horizonte. Para ayudar a los alumnos a visualizar este fenómeno, resultó de gran ayuda el uso de un simulador en línea[6]. A la hora de realizar los cálculos planteados en el ejercicio 4, se detectaron errores en la identificación de las distancias a la pared en cada uno de los solsticios así como en la utilización de grados y minutos, pero aquellos que resolvieron correctamente esta actividad no tuvieron mayores problemas con la actividad 5. En el caso de la actividad 6, las respuestas se fundamentaron de dos maneras: por un lado se justificó que el Sol nunca alcanza el cénit dada la latitud de Roma, y por otro por la misma construcción de la meridiana, ya que «los puntos máximo y mínimo no incluyen el muro». La actividad 7 presentó mayores dificultades por lo que fue necesaria la guía del profesor para que se hicieran las preguntas correctas, las siguientes cuestiones resultaron claves para orientar a los estudiantes: ¿Qué fórmula me proporciona la distancia al muro de la proyección y por lo tanto la posición respecto a los signos del zodíaco? ¿Qué función está contenida en esa fórmula, y cuáles son sus características? ¿Es una función lineal? ¿Cómo puedes comprobarlo? Tras estas reflexiones varios alumnos respondieron de forma correcta.

Conclusiones

Aunque la motivación de la construcción de la meridiana clementina fuera religiosa, los conocimientos científicos, en especial los matemáticos y astronómicos de la época fueron fundamentales. Así pues, esta propuesta pretende acercar la construcción y los conocimientos asociados a esta a los alumnos, mediante una serie de actividades contextualizadas en el funcionamiento de la meridiana y que, a la vez, permiten trabajar conceptos matemáticos tales como las relaciones entre ángulos y las funciones trigonométricas, especialmente la tangente. Con esta idea, las actividades desarrolladas por los estudiantes han sido corregidas y evaluadas, mostrando variedad en el método de resolución utilizado así como en los errores detectados, tanto de concepto como de cálculo. A nivel conceptual, entender la variación de la altura del Sol en el horizonte a lo largo del año les supuso un reto a una parte de los estudiantes debido a la dificultad para formarse una imagen visual correcta de la trayectoria. Este hecho demuestra la gran importancia de esta concepción en los procesos de aprendizaje (Van Hiele, 1986).

La falta de práctica a la hora de relacionar conceptos entre sí y establecer inferencias entre el mundo real y las fórmulas o conceptos matemáticos hace que sea necesario implementar actividades que permitan trabajarlo más a menudo en las aulas. Esto permitiría que la enseñanza

de las matemáticas fuese más rica y se percibiera mejor su relación con el mundo que nos rodea. En nuestra opinión, la propuesta descrita en este trabajo integra, de forma justificada, contenidos de disciplinas diferentes, ajustándose por tanto a los estándares de trabajo de ámbito STEM.

Referencias Bibliográficas

Agencia de Educación de la Comunidad Europea (2012), *Developing Key Competences at School in Europe: Challenges and Opportunities for Policy – 2011/12. Eurydice Report,* Publications Office of the European Union, Luxembourg.

Cooper, P. I. (1969), «The absorption of radiation in solar stills», *Solar Energy*, n.º 12, 333-346.

Ferrando, I., y P. Donat (2016), «La proporción áurea en la Lonja de Valencia a través de Hambidge», *Suma*, n.º 83, 55-67.

Ferrando, I., y C. Segura (2013), «Una propuesta para trabajar la proporción desde el arte», *Modelling in Science, Education and Learning,* n.º 6 (1), 61-71.

González, C. (2015), «Matemáticas en Roma: la línea meridiana de santa Maria degli angeli», *Suma*, n.º 78, 47-52.

Heilbron, J. L. (2005), *Il Sole nella Chiese, Le grandi Chiese come Osservatori Astronomici,* Compositori, Bologna.

LOMCE (2015), Diario Oficial de la Comunitat Valenciana, disponible en: <http://www.gva.es/downloads/publicados/2015_5410.pdf>.

Martínez, V. J., J. A. Miralles, E. Marco y D. Galadí-Enríquez, (2005), *Astronomía fundamental,* Universitat de València, Valencia.

Monzó, O., L. Puig y T. Queralt (2007), *Rutas matemáticas por Valencia. I. De las Torres de los Serranos al Jardín Botánico*, Universitat de València, Valencia.

— (2009*a*), *Rutas matemáticas por Valencia. III. De la Ciudad de la Justicia al Oceanográfico*, Universitat de València, Valencia.

— (2009*b*), *Rutas matemáticas por Valencia. IV. Del Mercado de Colón a La Nau*, Universitat de València, Valencia.

— (2014), «Mirar el mundo con ojos matemáticos. Rutas matemáticas por Valencia, España», *Novedades Educativas,* n.º 280, 67-74.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, *Boletín Oficial del Estado* (3 de enero de 2015), n.º 3, 169-546.

Reyes, M. E. (2006), «Cuando la geometría se hace arte. Enfoques actuales en la didáctica de las matemáticas», Ministerio de Educación y Ciencia, 9-30.

Sigismondi, C. (2011), «Lo Gnomone Clementino: Astronomia Meridiana in Chiesa dal '700 ad oggi», *Astronomia*, n.º 3, 56-62, disponible en: <https://arxiv.org/pdf/1106.2498>.

— (2014), «Lo Gnomone Clementino. Astronomia Meridiana in Basilica», *Gerbertvs*, n.º 7, 3-80, disponible en: <https://arxiv.org/pdf/1607.06601>.

Van Hiele, P. M. (1986), *Structure and insight. A theory of mathematics education*, Academic Press, Londres.

Mariola Brines Pérez
INS Pere Ribot, Vilassar de Mar (Barcelona)
<mabripe@alumni.uv.es>

Irene Ferrando Palomares
Universitat de València
<irene.ferrando@uv.es>

1 Vídeo disponible en: <https://youtu.be/kpl_b_kYX9w>.

2 Aplicación online disponible en: <http://astro.unl.edu/naap/motion3/animations/sunmotions.html>.

3 <http://asxlab.blogspot.com.es/2013/03/sesion-cta-movimientos-de-la-tierra.html>.

4 Imagen extraída de: <http://iniciacionalaastronomia.weebly.com/ud2-coordenadas-celestes.html>.

5 <http://www.santamariadegliangeliroma.it/paginamastersing.html?codice_url=metodologia_di_bianchini&ramo_home=La_Meridiana&lingua=ITALIANO>.

6 Aplicación online disponible en: <http://astro.unl.edu/naap/motion3/animations/sunmotions.html>.

Sociedad Castellano Manchega de Profesores de Matemáticas.

III Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Castilla la Mancha

S.C.M.P.M.

III CEAM-CM

ORGANIZAN: SCMPM Y CRFP

Centro Regional de Formación del Profesorado
Consejería de Educación, Cultura y Deportes
Castilla-La Mancha

LUGAR DE CELEBRACIÓN: CUENCA ESCUELA POLITÉCNICA

FECHAS: 26 ENERO DE 2018 DE 9:00 A 19:.00H

COLABORAN: UCLM

UCLM
UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA

Sociedad Castellano Manchega de Profesores de Matemáticas
IES Universidad Laboral Avda de la Mancha sn 02006 - Albacete
Email: scmpm_secretario@yahoo.es Tel 617970545
http://scmpm.blogspot.com.es/ http://scmpm.centros.castillalamancha.es/

suma+
Artículos
Noviembre 2017
86
pp. 39-46

Aprendizaje del álgebra a través de problemas de patrones geométricos[1]

Eva Arbona Picot
María José Beltrán Meneu
Adela Jaime Pastor
Ángel Gutiérrez Rodríguez

Presentamos una unidad de enseñanza para introducir el álgebra a estudiantes de Educación Primaria mediante problemas de patrones geométricos. La unidad está dividida en tres partes, cada una relacionada con un objetivo didáctico diferente: iniciación a la generalización, para aprender a generalizar relaciones empíricas; introducción de conceptos y símbolos algebraicos, para aprender la representación simbólica algebraica, plantear y resolver ecuaciones lineales; y aplicación de los contenidos estudiados a otros contextos, para aprender a resolver problemas algebraicos de enunciado verbal.

Palabras clave: Álgebra, Patrones geométricos, Altas capacidades matemáticas, Educación Primaria.

Learning of Algebra through geometric pattern problems

In this article, we present a teaching sequence designed to introduce algebra to Primary School students through geometric pattern problems. The sequence is divided into three parts, each one related to a different didactic objective: initiation to generalization, to learn to generalize empirical relationships; introduction of algebraic concepts and symbols, to learn manipulate algebraic symbols, formulate and solve equations; and application of the contents learned to other algebraic contexts, to learn solve verbal algebraic problems.

Keywords: Algebra, Geometric patterns, Mathematical giftedness, Primary Education.

El álgebra es uno de los contenidos clave del currículum de matemáticas de la ESO. En España, el estudio del álgebra se inicia en el primer curso de la Educación Secundaria, con la introducción de las letras como símbolos que representan números indeterminados o pertenecientes a conjuntos numéricos con una propiedad común, la realización de operaciones con expresiones algebraicas y la resolución de ecuaciones lineales. En Educación Primaria, el currículo no hace referencia alguna al aprendizaje del álgebra.

Muchos estudiantes presentan dificultades en el aprendizaje del álgebra (Banerjee y Subramaniam, 2012; Jupri, Drijvers y Van den Heuvel-Panhuizen, 2015), a pesar, incluso, de haber obtenido buenas calificaciones en las matemáticas de Educación Primaria (Fritzlar y Karpinski-Siebold, 2012). En algunos países, por ejemplo, Inglaterra (Department of Education, 2014), se realiza una introducción a las ideas algebraicas (pre-álgebra) en los últimos cursos de Educación Primaria, lo cual facilita la transición hacia su uso en Educación Secundaria.

Adoptando esta postura como nuestra, en este artículo presentamos una unidad de enseñanza-aprendizaje que permite iniciar y desarrollar el pensamiento algebraico en los estudiantes de Educación Primaria a través de la

Artículo recibido en *Suma* en junio de 2017 y aceptado en septiembre de 2017

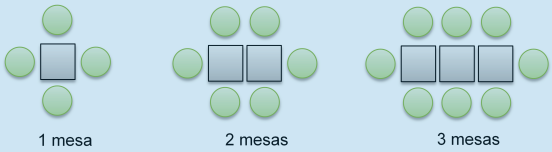
resolución de problemas de *patrones geométricos*. Un patrón geométrico es una representación gráfica de los términos de una secuencia creciente de números naturales, representación formada por objetos cuya cantidad corresponde al valor del término de la secuencia representado (en las páginas siguientes se pueden ver algunos ejemplos). El uso de los patrones se contempla en el Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria (MECD, 2014), a través del siguiente objetivo: «conseguir que todo el alumnado, al acabar la Educación Primaria, sea capaz de describir y analizar situaciones de cambio, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones» (19387).

Los problemas de patrones geométricos presentan en su enunciado los primeros términos de una secuencia de figuras cuya forma y número de objetos que las componen crecen siguiendo un patrón y piden a los estudiantes calcular los valores de otros términos de la secuencia, es decir la cantidad de objetos que forman su representación gráfica. Estos problemas (figura 1), generalmente,

> piden calcular, por este orden, el término *inmediato* (el que sigue a los dados), un término *próximo* a los conocidos (de manera que se puedan utilizar tanto la representación geométrica como la aritmética para el cálculo de valores), un término *lejano* tal que, aunque esté asociado a un valor numérico, su representación gráfica sea costosa de llevar a cabo y sea más conveniente poner en marcha un proceso de generalización y, finalmente, formular una expresión (que se espera sea algebraica) para el término *general* de la secuencia (Benedicto, Jaime y Gutiérrez, 2015: 154).

Estas preguntas son conocidas como cuestiones de *relación directa*. Además, los problemas de patrones geométricos también pueden plantear cuestiones de *relación inversa*, en las cuales se proporciona el número de elementos de un término y se pide calcular la posición de ese término en la secuencia, favoreciendo, de este modo, la inversión de las operaciones y sirviendo como punto de partida para la introducción al planteamiento y resolución de ecuaciones.

Este sábado, María va a realizar una comida con sus amigos y familiares para celebrar que ha cumplido 12 años. Para ello, quiere calcular cuántas mesas y sillas le harán falta. Quiere sentarlos del siguiente modo:



a) ¿Cuántos invitados cabrán con 6 mesas? ¿Cómo lo sabes?
b) ¿Cuántos invitados cabrán con 15 mesas? ¿Cómo lo sabes?
c) ¿Sabrías algún modo de calcular cuántos invitados cabrán con 50 mesas? ¿Cómo lo sabes?
d) ¿Cómo le explicarías a un amigo como puede calcular cuántos invitados cabrán según el número de mesas que utilice?
e) Si hay 22 invitados, ¿cuántas mesas habrá? ¿Cómo lo sabes?

Figura 1. Ejemplo de problema de patrones geométricos

Los estudiantes con altas capacidades son aquellos que, según Torrego (2011: 13-14), «presentan un nivel de rendimiento intelectual superior en una amplia gama de capacidades y aprenden con facilidad cualquier área o materia». En particular, los estudiantes con altas capacidades matemáticas son los que destacan en el área de matemáticas y muestran una habilidad claramente superior a la media para aprender contenidos matemáticos y resolver problemas.

Los problemas de patrones geométricos se pueden situar en el contexto de las *actividades matemáticas ricas*, caracterizadas por emplear una metodología de resolución de problemas y por permitir graduar su dificultad para poder adaptarse a las distintas capacidades y niveles de conocimiento matemático que pueden presentar los estudiantes (Jaime y Gutiérrez, 2014). Por este motivo, la unidad de enseñanza que presentamos está enfocada hacia una intervención educativa curricular para estudiantes de los últimos cursos de la Educación Primaria, siendo especialmente adecuada para aquellos estudiantes que poseen altas capacidades matemáticas, ya que permiten que cada estudiante avance más o menos en la resolución en función de su capacidad matemática (Arbona, 2016).

La unidad de enseñanza

Nuestra propuesta de enseñanza tiene dos objetivos principales: introducir a los estudiantes de los últimos cursos de Educación Primaria en el lenguaje algebraico y la resolución de ecuaciones lineales y proporcionar una línea de trabajo que permita que los estudiantes de altas capacidades matemáticas desarrollen su potencial matemático. Concretamente, la unidad de enseñanza está diseñada para ser implementada en grupos de clase de 5.º y 6.º de Educación Primaria (10-12 años).

La unidad de enseñanza está distribuida en tres etapas diferenciadas, cada una de las cuales corresponde a un objetivo de aprendizaje, facilitando la secuenciación y graduación de la dificultad de los contenidos y los problemas, así como el establecimiento de metas parciales que nos permitirán valorar el aprendizaje de los estudiantes. Los objetivos didácticos que proponemos son:

— Aprender a realizar generalizaciones prealgebraicas y a resolver relaciones inversas en un entorno de resolución de problemas de patrones geométricos.
— Adquirir y asimilar diversos conceptos algebraicos elementales y componentes básicos del sistema algebraico de signos, como el significado de las letras y del signo =, el uso de paréntesis y la jerarquía de las operaciones e iniciar al estudiante en la formulación y resolución de ecuaciones lineales.
— Profundizar en el aprendizaje de la resolución de ecuaciones lineales y aplicarlas a diversos contextos mediante la resolución de problemas de enunciado verbal.

En cuanto a la metodología de trabajo en el aula, esta unidad de enseñanza puede implementarse como trabajo individual o en parejas, si se quiere fomentar que los estudiantes puedan verbalizar su razonamiento y debatir qué respuesta es más adecuada. Asimismo, puede llevarse a cabo con distintas distribuciones temporales. Nuestra propuesta es implementar la unidad a lo largo del curso, abordando cada una de las etapas propuestas en un trimestre escolar (figura 2).

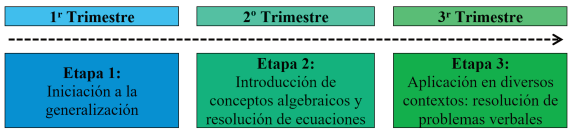


Figura 2. Propuesta de temporalización para la unidad de enseñanza

Etapa 1. Iniciación a la generalización

Esta etapa se basa en plantear problemas de patrones geométricos para que los estudiantes aprendan a realizar generalizaciones, mediante las preguntas de relaciones directas, así como a invertir operaciones mediante las preguntas de relaciones inversas. Para ello, en cada problema, proponemos cuatro cuestiones (figura 3), con las que se pretende que los estudiantes alcancen poco a poco los objetivos propuestos.

Dos amigas están haciendo edificios con palillos de esta forma:



a) ¿Cuántos palillos necesitarán para hacer un edificio de 6 plantas? ¿Cómo lo sabes?
b) ¿Cuántos palillos necesitarán para hacer un edificio de 12 plantas? ¿Cómo lo sabes?
c) ¿Puedes explicar algún modo de calcular cuántos palillos necesitarán para hacer un edificio de 46 plantas? ¿Cómo lo sabes?
d) Si un edificio está formado por 27 palillos, ¿cuántas plantas tiene? ¿Cómo lo sabes?

Figura 3. Problema de patrones geométricos de la primera etapa

En estos problemas, incluimos tres cuestiones de relación directa (a, b y c) y una de relación inversa (d). Por una parte, las cuestiones de relación directa están graduadas en dificultad, teniendo en cuenta que la mayor lejanía entre el término demandado (inmediato, próximo o lejano) y los datos hará más difícil calcular el número de elementos que lo componen y será necesario desarrollar y usar estrategias más elaboradas. Estas cuestiones sirven de contexto para que los estudiantes identifiquen similitudes y diferencias entre las figuras de la secuencia y puedan llegar a des-

cubrir un patrón de crecimiento que les pueda ayudar a alcanzar una generalización del patrón, pudiendo llegar incluso a obtener una regla general que les permita calcular el número de elementos de cualquier término, por lejano que sea. Por otra parte, para resolver la cuestión de relación inversa, los estudiantes deberán generar estrategias de inversión de las operaciones, que son un paso previo a la introducción de las ecuaciones y al aprendizaje de su resolución.

Conviene plantear, a lo largo de esta etapa, problemas con estructuras geométricas de distintos grados de complejidad. Dependiendo de cómo esté construido el patrón y cómo estén distribuidas las piezas de las figuras, puede resultar más fácil o difícil identificar el patrón de la secuencia y una relación general. En las figuras 4 y 5, mostramos patrones con estructuras geométricas de distintos grados de complejidad. Mientras que el patrón de la figura 4 tiene un crecimiento lineal claramente ligado a la posición del término en la secuencia ($2n$), los patrones de la figura 5 se corresponden con una fórmula general afín ($2n+1$), que es más difícil de identificar. Por otra parte, aunque los dos patrones de la figura 5 son equivalentes, ya que cada elemento de la secuencia tiene el mismo valor en ambos, la estructura gráfica del patrón superior es mucho más simple que la del patrón inferior, en el que los segmentos compartidos por los triángulos hacen que aumente el nivel de dificultad para interpretar las figuras e identificar el proceso de crecimiento.

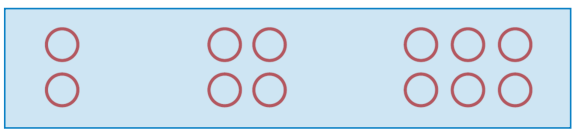


Figura 4. Patrón geométrico lineal

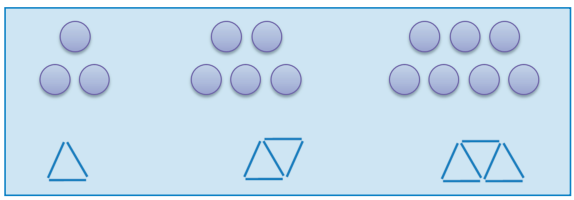


Figura 5. Patrones geométricos afines equivalentes de diferente complejidad gráfica

Etapa 2. Introducción de conceptos algebraicos

La segunda etapa de la unidad de enseñanza introduce a los estudiantes en la comprensión del significado de las letras y del signo = en expresiones algebraicas, la transformación en expresiones algebraicas de verbalizaciones de las generalizaciones de patrones geométricos, el uso del paréntesis y la jerarquía de las operaciones y la resolución de ecuaciones lineales. Para ello, proponemos plantear nuevos problemas de patrones geométricos con cuestiones diferentes de las anteriores (figura 6).

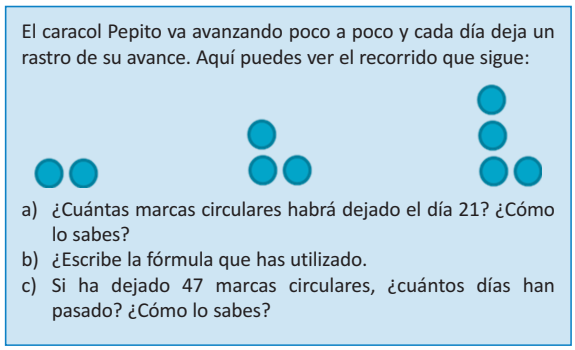


Figura 6. Problema de patrones geométricos de la segunda etapa

Estos problemas incluyen una cuestión de relación directa (a) y una de relación inversa (c). La cuestión b pide escribir la fórmula general empleada en la cuestión a, con el objetivo de introducir la utilización de letras para transformar las expresiones verbales, expresadas al explicar la forma de calcular la respuesta en la cuestión a, en expresiones algebraicas. Para ello, es conveniente que la introducción de las letras se haga de un modo significativo, para que los estudiantes puedan relacionarlas directamente con la variable a la que representan. Por ejemplo, en la figura 6, los estudiantes podrían usar la letra *d* para hacer referencia a *día*, como proponen Store, Richardson y Carter (2016).

En esta etapa, la cuestión de relación inversa (c) debe servir para iniciar a los estudiantes en la resolución de ecuaciones lineales. A partir de la fórmula algebraica expresada en la cuestión b, el

profesor puede guiar a los estudiantes para que planteen la ecuación necesaria para la resolución de la cuestión c. Existen diversos métodos para dar significado a las ecuaciones como paso previo a enseñarles a resolverlas, por ejemplo, el modelo geométrico, basado en la comparación de áreas de figuras formadas por rectángulos, y el modelo de la balanza, basado en mantener una balanza en equilibrio (Rojano, 1985). Nuestra propuesta es usar el *modelo de balanza*, ya que es dinámico y manipulativo y permite a los estudiantes asociar el signo = de la ecuación al equilibrio de la balanza, resolviendo así las ecuaciones mediante procesos de compensación. La figura 7 muestra un ejemplo de balanza dinámica (NLVM, 2016).

Esta balanza permite representar ecuaciones lineales, del tipo $ax+b=cx+d$, con incógnita en uno o ambos lados de la ecuación y resolverlas mediante manipulación o indicando las operaciones aritméticas que deben aplicarse a ambos brazos para mantener la balanza en equilibrio. Dado su dinamismo, es posible conocer en todo momento si se mantiene la igualdad durante la resolución de la ecuación, proporcionando, de este modo, una herramienta para interpretar la resolución de ecuaciones como un proceso de compensación. No obstante, esta aplicación también presenta algunas limitaciones, como utilizar siempre la letra x para representar la incógnita y la imposibilidad de representar coeficientes de más de una cifra.

Etapa 3. Aplicación en diversos contextos

La última etapa de la unidad de enseñanza sirve para comprobar si los estudiantes son capaces de aplicar aquello aprendido durante la segunda etapa en el contexto de los problemas de patrones geométricos y fuera de él. Para ello, dividimos esta etapa en dos subetapas.

En la subetapa de aplicación en problemas de patrones geométricos, proponemos que el profesor plantee de nuevo los problemas utilizados durante la primera etapa cuya cuestión de relación inversa (d) presentó más dificultades de resolución a los estudiantes. Estos problemas pueden rediseñarse para que los alumnos apliquen en ellos los conceptos estudiados en la etapa anterior (figura 8).

Dos amigas están haciendo edificios con palillos de esta forma:



a) Escribe la fórmula algebraica que utilizarías para calcular cuántos palillos necesitarán según el número de plantas.
b) ¿Crees que podríamos escribir esta fórmula de un modo más simple? En caso afirmativo, escríbela.
c) Si un edificio está formado por 45 palillos, ¿cuántas plantas tiene? ¿Cómo lo sabes?

Figura 8. Problema de patrones geométricos de la tercera etapa

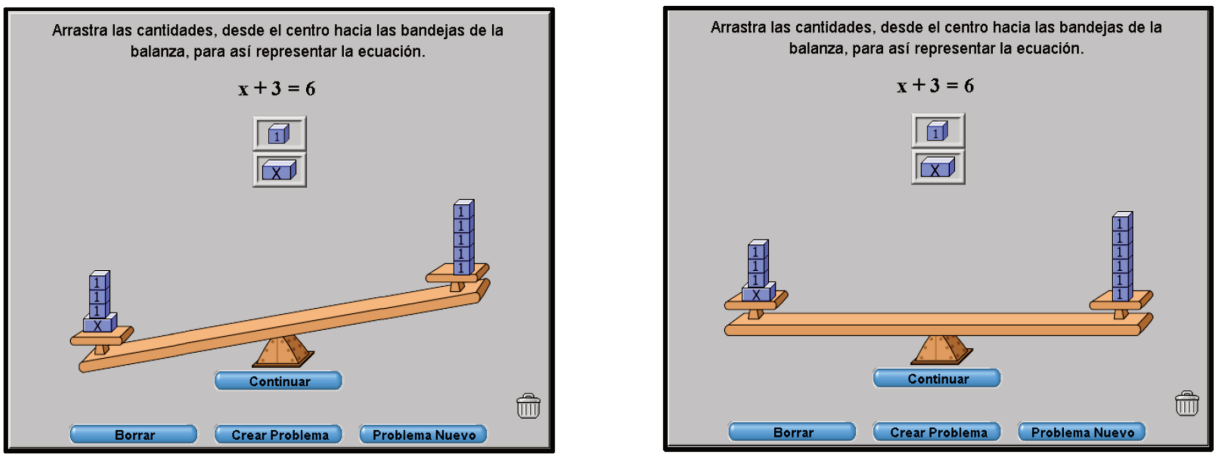


Figura 7. Modelo de balanza dinámica

Como se observa, la cuestión a tiene como objetivo que el alumno escriba una expresión algebraica correspondiente a la fórmula de cálculo de cualquier término de la secuencia, haciendo uso de símbolos y letras según lo aprendido en la etapa anterior. La cuestión b tiene como objetivo que el alumno simplifique la expresión algebraica que ha obtenido en a, para facilitar la resolución de ecuaciones con dicha expresión. La cuestión de relación inversa c ofrece un contexto en el que los estudiantes planteen ecuaciones y utilicen el modelo de la balanza para resolverlas, si han comprendido e interiorizado dicho modelo. Además, la resolución de problemas de patrones geométricos que no habían logrado resolver previamente por medio de nuevos métodos, permite mostrar a los estudiantes la utilidad del álgebra y del uso de ecuaciones.

Por otra parte, la subetapa de aplicación en otros contextos pretende ampliar el aprendizaje de los estudiantes, mediante la resolución de problemas verbales algebraicos. Para ello, proponemos diversos problemas de enunciado verbal (figura 9), con contextos diferentes al de los patrones geométricos y con un aumento gradual de dificultad, que fomenten específicamente la transformación de expresiones verbales en expresiones algebraicas y que se puedan resolver mediante ecuaciones lineales.

Héctor y María han estado contando en clase cuántos colores de madera tiene cada uno.
Héctor tiene el doble de María más 7.
Si Héctor tiene 33 colores de madera, ¿cuántos tiene María?

Figura 9. Problema verbal algebraico

Sugerencia de análisis de respuestas

Es conveniente analizar las respuestas de los estudiantes a lo largo de cada etapa para poder valorar su aprendizaje y adaptar la unidad didáctica a sus necesidades. Por ejemplo, nuestra opción en la primera etapa ha sido analizar las estrategias de resolución empleadas por los estudiantes para descubrir su grado de comprensión del patrón. Proponemos los siguientes criterios para la clasificación y evaluación de las estrategias, basados en García-Cruz y Martinón (1997) y García-Reche, Callejo y Fernández (2015):

— Estrategias en cuestiones de relación directa:
  - Según el procedimiento de resolución:
    - *Visual*: realizan una descomposición gráfica de las figuras del patrón en partes diferenciadas que permiten obtener de forma más sencilla el número de objetos que componen cada término de la secuencia.
    - *Numérica*: cuentan los objetos que hay en las representaciones gráficas de los términos y deducen el patrón aritmético de crecimiento a partir de estos valores numéricos.
  - Según el procedimiento de cálculo:
    - *Recuento*: dibujan el término demandado y cuentan los elementos que lo forman.
    - *Recursiva*: realizan sumas sucesivas de la diferencia entre los valores de dos términos consecutivos de la secuencia, desde los términos conocidos hasta llegar al término demandado.
    - *Funcional*: expresan una fórmula matemática general que permite calcular el número de objetos de cualquier término en función de su posición en la secuencia.
    - *Proporcional*: establecen una proporción, que generalmente es errónea, entre las posiciones de dos términos de la secuencia y la cantidad de elementos que los forman, que utilizan para calcular el valor desconocido de uno de los términos.

— Estrategias en cuestiones de relación inversa:
  - *Ensayo y error mediante cálculo de la relación directa*: prueban diferentes valores de la posición del término hasta encontrar aquel al que corresponde el número de elementos indicado.
  - *Inversión de las operaciones*: usan operaciones aritméticas inversas (suma y resta, multiplicación y división) a las que han utilizado en las tareas de relación directa y cambian el orden de las mismas.
  - *Resolución de ecuaciones*: plantean y resuelven una ecuación.

A continuación, incluimos algunos ejemplos de respuestas a la cuestión a de la figura 3 que hacen uso de las diferentes estrategias descritas arriba.

— Estrategia visual y funcional:

Estudiante: *Para construir un edificio de 6 plantas, necesitarán 21 palillos porque he hecho 4x6=24, le he restado 5, que es lo que comparten, y le he sumado el tejado que es 2.*

— Estrategia numérica y recursiva:

Estudiante: *Para construir un edificio de 6 plantas, necesitarán 21 palillos porque 12+3+3+3=21.*

— Estrategia visual y de recuento:

Estudiante: Para construir un edificio de 6 plantas, necesitarán 21 palillos. Lo he dibujado (figura 10).



Figura 10

— Estrategia numérica y proporcional:

Estudiante: *Para construir un edificio de 6 plantas necesitarán 24 palillos porque si en el edificio de 3 plantas hay 12 palillos, en el edificio de 6 plantas habrá 24 palillos.*

También incluimos a continuación algunos ejemplos de posibles respuestas a la cuestión d de la Figura 3. En ellos, se muestran las distintas estrategias descritas para cuestiones de relación inversa.

— Estrategia de ensayo y error mediante cálculo de la relación directa:
En las cuestiones de relación directa, el estudiante hizo los cálculos empleando la generalización $4n-(n-1)+2$.

Estudiante: S*i el edificio está formado por 27 palillos, tendrá 8 plantas porque he probado con 8 pisos y me daba 8 $\times$ 4=32, menos 7 que comparten, 25. 25+2=27 palillos.*

— Estrategia de inversión de las operaciones:
En las cuestiones de relación directa, el estudiante empleó la generalización $3n+3$.

Estudiante: *Si el edificio está formado por 27 palillos, tendrá 8 plantas porque 27−3=24 y 24 entre 3 da 8.*

— Estrategia de resolución de ecuaciones: en cuestiones de relación directa, el estudiante empleó la generalización
$$4n-(n-1)+2.$$

Estudiante: $4n-(n-1)+2=27$
$4n-n+1+2=27$
$3n+3=27$
$3n=24$
$n=24/3=8$

Conclusión

En este artículo hemos presentado una propuesta de unidad de enseñanza para introducir a estudiantes de los últimos cursos de Educación Primaria al álgebra de una forma gradual mediante la resolución de problemas de patrones geométricos. La unidad está dividida en tres etapas (iniciación a la generalización, introducción de conceptos algebraicos y ecuaciones, y aplicación de lo aprendido en diversos contextos) con objetivos didácticos diferenciados. La implementación de esta unidad en Educación Primaria puede servir como antecedente al inicio del estudio del álgebra en la ESO y propiciar la desaparición de algunas de las dificultades que presentan los estudiantes durante su aprendizaje. Pensamos que esto es así porque los patrones geométricos son un contexto que permite una aproximación inicial visual e intuitiva, al alcance de todos los estudiantes, y permiten pasar de forma significativa a la aproximación algebraica mediante el uso de letras y símbolos que adquieren significado en el contexto de las representaciones gráficas de secuencias numéricas.

Además, el análisis de las respuestas de los estudiantes puede servir para orientar al profesorado sobre qué conocimientos poseen sus alumnos y, así, poder adaptar y personalizar esta propuesta didáctica a cada uno de ellos. De este modo, los profesores serán capaces de proporcionar una respuesta efectiva a las distintas necesidades de los estudiantes, en particular a aquellos con altas capacidades matemáticas, dado que la complejidad de los enunciados puede graduarse, hasta constituir un reto para este colectivo que demanda más profundidad y que puede avanzar más que la media.

Referencias bibliográficas

Arbona, E. (2016), *Introducción al álgebra mediante problemas de patrones geométricos a un estudiante de Educación Primaria con altas capacidades matemáticas*, Trabajo Final de Máster, Universitat de València, Valencia. Recuperado de <https://roderic.uv.es:8443/handle/10550/56731>.

Banerjee, R., y K. Subramaniam (2012), «Evolution of a teaching approach for beginning algebra», *Educational Studies in Mathematics*, vol. 80, 351-367.

Benedicto, C., A. Jaime y Á. Gutiérrez (2015), «Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos», en C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX*, SEIEM, Alicante, 153-162.

Department of Education (2014), *National curriculum in England: mathematics programmes of study*, Department of Education, Londres. Recuperado de <https://www.gov.uk/government/publications/national-curriculum-in-england-mathematics-programmes-of-study>.

Fritzlar, T., y N. Karpinski-Siebold (2012), *Counting patterns as a component of algebraic thinking–An interview study with primary school students*, texto de la presentación en el 12th International Congress on Mathematical Education (ICME12), Seúl, Corea del Sur. Recuperado de: <http://www.icme12.org/upload/upfile2/tsg/0360.pdf>.

García-Cruz, J. A., y A. Martinón (1997), «Actions and invariant schemata in linear generalising problems», en E. Pehkonen (ed.), *Proceeding of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 2, PME, Helsinki, 289-296.

García-Reche, A., M. L. Callejo y C. Fernández (2015), «La aprehensión cognitiva en problemas de generalización de patrones lineales», en C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX*, SEIEM, Alicante, 279-288.

Jaime, A., y Á. Gutiérrez (2014), «La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de E. Primaria con altas capacidades matemáticas», en B. Gómez y L. Puig (eds.), *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán*, PUV, Valencia, 147-190.

Jupri, A., P. Drijvers y M. Van den Heuvel-Panhuizen (2015), «Improving grade 7 students' achievement in initial algebra through a technology-based intervention», *Digital Experiences in Mathematics Education*, vol. 1, nº 1, 25-58.

National Library of Virtual Manipulatives (NLVM) (2016), Algebra balance scales, Applet disponible en <http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_201_g_3_t_2.html?open=instructions&from=category_g_3_t_2.html>, Utah State University, Logan.

Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria», *Boletín Oficial del Estado* (1 de marzo de 2015), n.º 52, 19349-19420.

Rojano, T. (1985), *De la aritmética al álgebra (un estudio clínico con niños de 12 a 13 años de edad)*, Tesis doctoral no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados (CINVESTAV) del I.P.N., México D. F.

Store, J. C., K. D. Richardson y T. S. Carter (2016), «Fostering understanding of variable with patterns», *Teaching Children Mathematics*, vol. 22, nº. 7, 420-427.

Torrego, J. C. (coord.) (2011), *Alumnos con altas capacidades y aprendizaje cooperativo. Un modelo de respuesta educativa*, Fundación SM, Madrid.

Eva Arbona Picot
Universitat de València
<eva.arbona@uv.es>

María José Beltrán Meneu
Universitat Jaume I
<maria.jose.beltran@uv.es>

Adela Jaime Pastor
Universitat de València
<adela.jaime@uv.es>

Ángel Gutiérrez Rodríguez
Universitat de València
<angel.gutierrez@uv.es>

1 Esta investigación es parte de los proyectos EDU2012-37259 (MINECO) y EDU2015-69731-R (MINECO/FEDER) y ha sido realizada con una Ayuda de Iniciación a la Investigación de la Universitat de València.

suma+
Artículos
Noviembre 2017
86
pp. 47-55

Ciclo de reflexión sobre el teorema de Pitágoras

María Dolores Torres González
Pablo Flores Martínez

En este trabajo se desarrolla un proceso de reflexión basado en el ciclo de Smyth. La experiencia propia que presentamos nace a raíz del descubrimiento de un problema en cuanto a la comprensión de la componente geométrica del Teorema de Pitágoras por estudiantes de 2.º ESO. Veremos como el uso de un método ordenado y sistemático de reflexión influye de manera eficaz en la búsqueda de soluciones con las que hacer frente al problema.

Palabras clave: Ciclo de reflexión de Smyth, Desarrollo profesional del profesor, Teorema de Pitágoras, Componente geométrica, Enseñanza de la geometría.

Cycle of reflection about the Pythagorean Theorem

In this work a reflection process is developed based on the Smyth cycle. The own experience that we present is born as a result of the discovery of a problem in the understanding of the geometric component of the Theorem of Pythagoras by students of 2nd ESO. We can see how the use of an orderly and systematic method of reflection influences effectively in the search for solutions to deal with the problem.

Keywords: Smyth's Cycle of Reflection, Teacher's Professional Development, Pythagorean Theorem, Geometric Component, Geometry Teaching.

La característica del profesor como profesional reflexivo es fundamental en la enseñanza y el aprendizaje de cualquier tópico. Contribuye a desarrollar responsabilidad en su profesión si la asume como un modo habitual de afrontar las situaciones problemáticas e imprevistas que suceden en la práctica docente.

El desarrollo profesional del profesor de matemáticas comienza con una formación inicial pensada para que se permita garantizar no solo la preparación científica sino también una formación didáctica. Dentro de esta formación didáctica se hace patente la necesidad de que el aspirante a profesor incluya en su conocimiento modos de actuar ante situaciones problema que se dan en la práctica de esta actividad social. Los futuros profesores, en el Máster Universitario de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas (MAES), al sumergirse en el período de prácticas perciben inseguridad y la vulnerabilidad que les causa la inexperiencia, bloqueando, en muchos casos, la resolución de los problemas y precisando de herramientas con las que enfrentarse a los que son nuevos retos para ellos, como profesores noveles.

El método sistemático que describimos en este artículo para afrontar los problemas deriva-

Artículo recibido en *Suma* en septiembre de 2017 y aceptado en octubre de 2017

dos de los procesos de enseñanza y aprendizaje, incluye unas fases de reflexión que permiten tanto analizar el contexto del que surge el problema como generar propuestas para solventarlo mediante la colaboración y contribución de otros. Este ciclo de reflexión enriquece el conocimiento que un profesor tiene sobre un problema que surge en su práctica al obligarse a revisar contribuciones teóricas, que aposenta al compartirlo con los demás. Nos centramos en el contexto de la formación inicial de profesores desde la que se origina la experiencia que exhibimos.

Como mencionan Flores y Peñas (2009), el concepto de reflexión proviene de los escritos de Dewey (original de 1933, edición en español de 1989), quien sugiere que la reflexión incluye un estado de duda y un acto de búsqueda de resolución. Para Dewey, el proceso de reflexión de los profesores comienza cuando la experiencia se torna difícil y surge algún acontecimiento problemático que no puede ser resuelto inmediatamente. Los profesores experimentan una incertidumbre que les hace analizar su experiencia, durante la acción o después de ella. Para llevar a cabo un proceso de reflexión, el profesor tiene que adquirir ciertas actitudes: mente abierta, entusiasmo y responsabilidad y herramientas de pensamiento: razonamiento y pensamiento ordenado (Flores y Peñas, 2009: 98).

Flores (2007) señala aspectos cruciales que caracterizan la profesionalidad del profesor, como son la responsabilidad, mente abierta y pensamiento ordenado. Ciertamente, como indican Cardeñoso, Flores y Azcárate (2001: 234), la docencia está dirigida a alumnos irrepetibles, continuamente cambiantes, por lo que el profesor no puede quedarse estancado poniendo en práctica unas técnicas de actuación, por muy sólidas que sean. Una de las características que explotamos en el despliegue de este artículo es la forma de pensar ordenada, por facilitar el encuentro de soluciones en un contexto determinado. Dewey (1993: 21) decía que:

> Nadie puede decirle a otra persona cómo debe pensar… No obstante, es posible indicar y describir a grandes rasgos las distintas maneras en que los hombres piensan realmente. Algunas de ellas son mejores que otras… Quién comprenda cuáles son las mejores maneras de pensar y por qué son mejores, puede, si lo desea, modificar su propia manera de pensar para que resulte más eficaz.

En el desarrollo profesional del profesor, apreciamos el interés de ser un profesional reflexivo. En esta orientación, empleamos el término «reflexivo» para referirse a la actitud del profesional de convertir su propia práctica en objeto de estudio. Entendiendo su profesión como lo que es, una continua evolución de un conocimiento didáctico en el que el profesor se posiciona de forma activa ante sus problemas o cuestiones profesionales.

La idea de reflexión en el ámbito de la actuación y formación de profesionales prácticos se debe principalmente a Schön (1992), quién señaló la dificultad de formar en la autonomía profesional debido a que se genera una dependencia del saber establecido, que supuestamente otorga estabilidad y seguridad frente al desempeño profesional. «La autonomía y la responsabilidad de un profesional no se entienden sin una gran capacidad de reflexionar en la acción y sobre la acción. Esta capacidad está en el interior del desarrollo permanente, según la propia experiencia, las competencias y los conocimientos profesionales de cada uno» (Schon, 1992: 43).

Se pueden exponer las experiencias propias que sirven como fuente de datos para luego sistematizar la forma de analizarlos. Esto sirve como material básico para nuevas reflexiones, para creaciones, modificaciones y rechazos de teorías o estrategias educativas, para ayudar a otros profesores, a problematizar su labor (Guichot, 2013: 191).

El ciclo de reflexión que presentamos se desarrolló durante un taller de clase en el contexto del máster de Didáctica de la Matemática en el que se imparte un curso centrado en el conocimiento y desarrollo profesional del profesor de matemáticas donde se enfatiza la necesidad del hábito de un pensamiento ordenado basado en las fases del ciclo de reflexión de Smyth (1991), con las que se obtiene un análisis, una reflexión profunda basada en el cuestionamiento propio de cómo y por qué enseñar aspectos concretos, que llevarán a la mejora de la enseñanza y el

aprendizaje, en este caso, de la versión geométrica del teorema de Pitágoras.

Ciclo de reflexión de Smyth

El ciclo reflexivo de Smyth (1991) es un proceso metódico de reflexión que engloba 4 fases. Inicia con la detección de un problema en la práctica docente, y termina en un proceso de reconstrucción de la práctica. Presenta un sentido cíclico, en el que el ir y venir de una etapa a otra precisa el tratamiento de nuestra reflexión, como exhibiremos, siguiendo las siguientes fases:

— *Descripción*. Fase en la que se define el problema señalando: qué es lo que hago, para qué se realiza y por qué.
— *Inspiración*. Trata de la profundización sobre el significado de lo que hago, indagando sobre las teorías propias que le dan sentido a mi enseñanza. En el caso que relatamos se favorece mediante los aportes de los demás para apreciar qué creen sobre lo que hago.
— *Confrontación*. En esta parte es clave la colaboración de los demás atendiendo a hacer aportaciones sobre cómo lo harían, incluyendo aportes teóricos que ayuden a ampliar la visión del problema planteado. Responde a cómo llegué a hacer lo que hago.

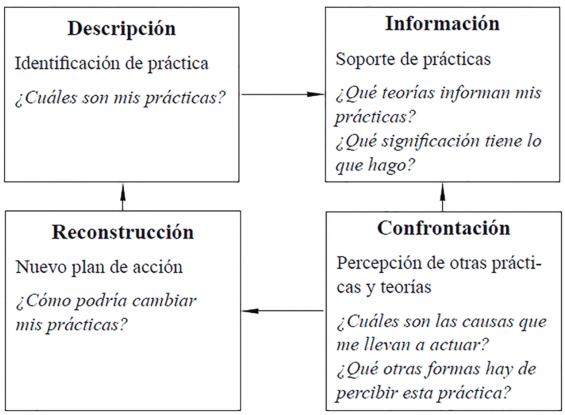


Figura 1. Ciclo de reflexión de Smyth (1991), (Flores, 2000: 118)

— *Reconstrucción*. Se plantea la cuestión ¿cómo podría hacer las cosas de otra manera?, cerrando el ciclo planteando futuras soluciones o reformulando el problema inicial en otros términos.

Descripción del problema

Comenzamos por especificar la situación en la que se produce el problema. Durante las prácticas del Máster Universitario de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas (MAES), en la especialidad de Matemáticas, en el curso 2015-2016, me asignaron impartir el tema «teorema de Pitágoras y semejanzas» a un curso de 2.º ESO. Los contenidos desarrollados durante 10 sesiones tuvieron que ver con la relación entre áreas de cuadrados y la demostración del teorema. En su enseñanza se tuvieron en cuenta los distintos contextos de aplicación del teorema de Pitágoras en cuanto al cálculo de un lado de un triángulo rectángulo conociendo los otros dos; resolución de triángulos rectángulos; identificación de triángulos rectángulos a partir de las medidas de sus lados y el cálculo de áreas de figuras planas. En la parte de semejanzas el contenido a tratar tuvo que ver con la razón de semejanza, ampliaciones y reducciones así como la relación entre las áreas de dos figuras semejantes. Posteriormente la semejanza de triángulos y condiciones generales, teorema de Tales y semejanza entre triángulos rectángulos. Finalmente aplicaciones de las semejanzas, como la construcción de figuras semejantes (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015).

Durante la instrucción enfaticé el sentido geométrico del teorema. El interés en esta dirección parte, como explica Gómez (2011), de que a nivel curricular se da mayor importancia al componente numérico variacional, dejando la enseñanza de la geometría a un lado; los estudiantes no identifican propiedades ni relaciones entre las figuras geométricas, lo cual dificulta inferir, proponer y abstraer información de las mismas. En el contexto del Trabajo Fin de Máster (Torres, 2016), nos propusimos acentuar la parte geomé-

trica menos habitual del teorema de Pitágoras debido al convencimiento de que la geometría desarrolla el razonamiento lógico, la percepción espacial y la visualización además de actuar de trampolín de comunicación de conceptos y procedimientos para otras materias. Algunas de las tareas que se les propusieron a los alumnos y que dan cuenta de la intención mencionada, se presentan a continuación para comprender mejor la situación en la que se encontraba el grupo de 2.º de ESO:

a) Demostración geométrica del teorema de Pitágoras mediante el uso de dos ternas pitagóricas y usando cartulinas. La tarea consistía en que los alumnos recortaran cuadrados que servirían para demostrar el resultado.

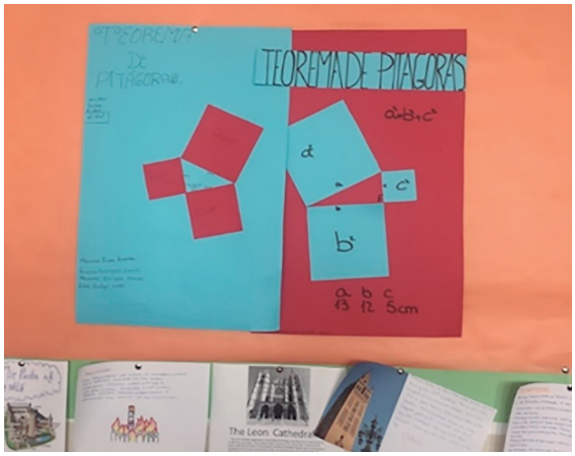


Figura 2. Tarea de clase sobre la demostración del teorema de Pitágoras (Torres, 2016)

b) Tarea de clase en la que tenían que hallar el área de los cuadrados coloreados. La tarea ofrecía una oportunidad de aplicación sobre lo aprendido en el aula.

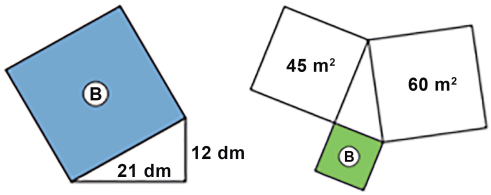


Figura 3. Relación métrica entre áreas y lados de un triángulo rectángulo

c) Tarea de clase en la que se pedía que escribiesen el enunciado del teorema de Pitágoras y buscaran una terna pitagórica, comprobando que se cumplía el teorema en la figura (figura 3).

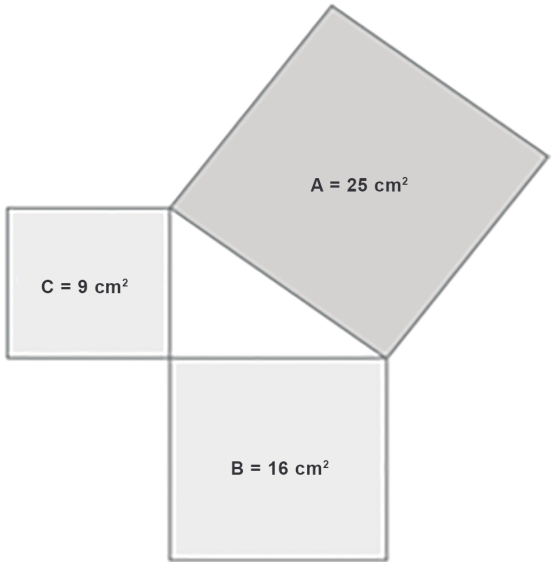


Figura 4. Comprobación del teorema de Pitágoras

Al término de la intervención docente se plantearon preguntas relacionadas con la generalización del teorema de Pitágoras. Estos recursos se encabezaban con representaciones geométricas ejerciendo de soporte intuitivo para el desarrollo de habilidades tales como visualizar, describir, comparar, deducir y justificar. Se pretendía observar el modo en el que entendían el teorema de Pitágoras y lo que habían aprendido de la instrucción previa. Al finalizar la misma se aplicó el instrumento con los siguientes objetivos:

O1. Analizar el modo en el que los alumnos interpretan geométricamente el teorema de Pitágoras, identificando elementos y relaciones que conocen previamente.
O2. Analizar los procesos de deducción que aplican para estudiar la demostración y la generalización del teorema, estudiando qué relaciones establecen entre los conceptos.
O3. Observar su habilidad para emplear el teorema de Pitágoras para resolver problemas, analizando las conjeturas que formulan y sus posteriores comprobaciones.

Se exponen algunas de las tareas que conforman el instrumento aplicado a los alumnos de 2.º de ESO, así como algunas de las respuestas que dieron los educandos:

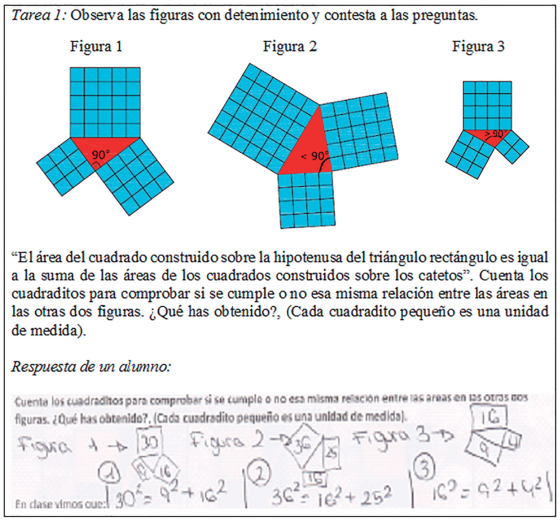


Figura 5. Tarea 1 del instrumento aplicado (Torres, 2016)

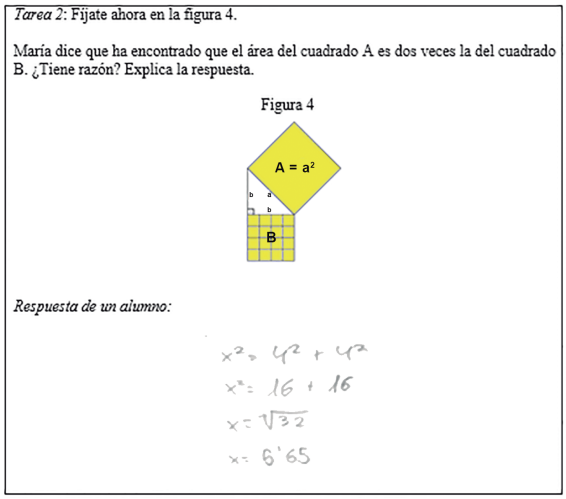


Figura 6. Tarea 2 del instrumento aplicado (Torres, 2016)

Se observa un error recurrente en la resolución de las tareas por parte de estos alumnos. Una vez determinadas las medidas de las áreas de los cuadrados, las sustituían en la expresión algebraica del teorema, elevando esos números al cuadrado. Este error aparece en repetidas ocasiones y en distintas tareas. El alumno involucra a toda costa la fórmula con la que está familiarizado. Se aprecia además que los alumnos expresan: «se ha de calcular con la fórmula porque con las áreas no queda completamente demostrado». Esta apreciación nos lleva a preguntarnos cuál es la interpretación que tienen los alumnos del teorema de Pitágoras y cómo se les puede enseñar la interpretación geométrica para darle más sentido al teorema. Nos anima a plantear este problema el interés práctico, teórico y didáctico del teorema de Pitágoras.

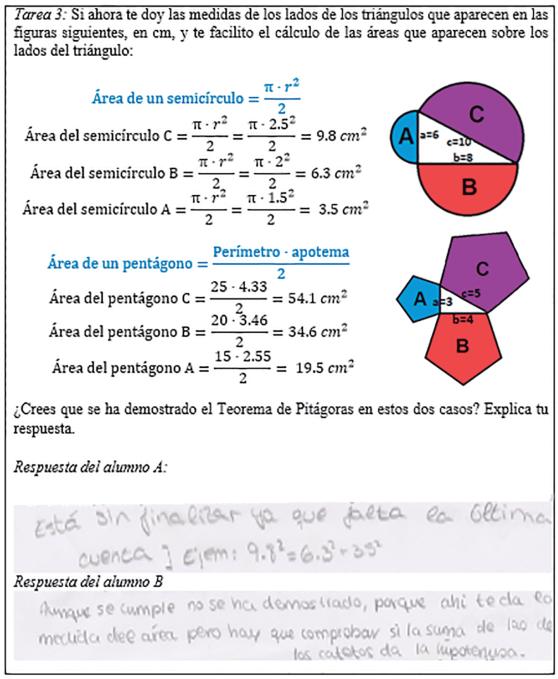


Figura 7. Tarea 3 del instrumento aplicado (Torres, 2016)

Tras analizar las respuestas de los alumnos y desgranar la información que nos entregan, se produce una insatisfacción al no cumplirse las expectativas iniciales planteadas. Los resultados que aparecen no concuerdan con el esfuerzo depositado, centrado en que comprendieran el teorema de una forma completa al introducir el carácter geométrico del mismo. En el tiempo de instrucción ya se evidenciaba una dificultad en este sentido que se intentó salvar ofreciendo nuevas oportunidades de aprendizaje mediante diferentes tareas.

Es inevitable y natural generar conjeturas sobre las posibles causas que expliquen lo que ocurre con la comprensión de los alumnos ante el problema en concreto, dando lugar a un pensamiento crítico: ¿se debe a la instrucción recibida?, ¿qué es lo que he hecho mal o que no he hecho para que se cumplieran las expectativas planteadas?, ¿se debe a que habitualmente se introduce

este resultado destacando que la relación está entre las longitudes de los tres segmentos mediante una fórmula que sostiene simbólicamente por $h^2 = a^2 + b^2$?, ¿se debe a una dificultad aritmético-algebraica?

En el ejemplo de la figura 5, podíamos entender que la resolución del alumno se debe a una dificultad aritmética sin más, pero al comparar respuestas parece que exista una dificultad más profunda, algo más trascendental en lo que reparar: ¿el problema tiene que ver con el paso de una magnitud longitudinal a otra superficial? Este paso no es trivial, entonces, ¿comprenden el concepto de área para poder compararlas? Además, es indudable la utilización de la fórmula que conocen o han memorizado, en todas las tareas que tienen que ver con el teorema, aunque sea sin darle sentido.

La primera parte de este taller de clase y primera fase del ciclo de reflexión culminaba formulando una cuestión abierta tras la descripción y puesta en común del problema. ¿Cómo comprenden los alumnos el teorema de Pitágoras? ¿Qué significado le atribuyen los alumnos al teorema de Pitágoras?

Distanciamiento. Indagación sobre teorías propias

En esta etapa de distanciamiento, y una vez que se ha planteado el problema a los demás, se contó con el apoyo de los compañeros para clarificar los presupuestos que pueden estar condicionando nuestras acciones como profesores, haciéndonos ver las creencias que pueden estar implícitas en la formulación del problema. Gracias a las interpretaciones que hacen los compañeros en función de lo que creen que creemos, se abre la posibilidad de contemplar nuevos aspectos que no se habían tenido en cuenta. Hemos seleccionado de todas las creencias recibidas, aquellas con las que nos hemos sentido identificados y aquellas que nos han hecho pensar. El resto no se incluyen por no encontrar relación con el problema y su contexto en cuestión. Se muestran en la tabla 1.

Las creencias con las que te sientes identificado no aportan cambios a la formulación del problema, sirven para poner de manifiesto y ratificar algo que pensabas al plantear el problema. Sin embargo, las que te hacen pensar, enriquecen el proceso de reflexión. La interpretación geométrica del teorema contribuye a completar el significado del resultado, no es más importante sino que es necesaria para transmitir un aprendizaje más significativo. A priori puede resultar más intuitivo el estudio del teorema de manera geométrica que mediante la expresión algebraica con longitudes, pues la superficie no es una magnitud derivada de la longitud. Recibir las creencias que te adjudican los compañeros te hace consciente de tus presupuestos. Esto revela que la colaboración entre profesores es fructífera para el proceso de reflexión que puede llevar a la mejora de la enseñanza y el aprendizaje.

Creencias	
Me siento identificada	
Identifican el teorema con una fórmula	*Dificultad en la comprensión geométrica del teorema*
Yo creo que María Dolores cree que los alumnos han aprendido mecánicamente la fórmula del teorema de Pitágoras.	Yo creo que María Dolores cree que los alumnos no entienden el significado geométrico del teorema de Pitágoras.
Yo creo que María Dolores cree que los estudiantes memorizaron una fórmula, pero no comprendieron realmente el teorema de Pitágoras.	Yo creo que María Dolores cree que los alumnos no comprenden la versión geométrica del teorema de Pitágoras.
Yo creo que María Dolores cree que los alumnos se limitan a aplicar una mera fórmula del teorema de Pitágoras, sin conocer su significado.	Yo creo que María Dolores cree que los alumnos no entienden el significado geométrico del teorema de Pitágoras
Me han hecho reflexionar	
Yo creo que María Dolores cree que la interpretación geométrica del teorema de Pitágoras es su interpretación más importante.	
Yo creo que María Dolores cree que la comprensión de la expresión en longitudes del teorema de Pitágoras debe llevar a comprender el enunciado con áreas (interpretación geométrica).	

Tabla 1. Lo que creen que creo

Confrontación

Una cosa es describir y reflexionar sobre la enseñanza que impartimos, y otra adoptar nosotros mismos una posición que nos haga cuestionar el cómodo mundo que conocemos y en el que vivimos; esta es una tarea mucho más difícil. El intento de colocar o situar a la enseñanza en un contexto cultural, social y político más amplio supone embarcarse en una reflexión crítica sobre los supuestos que subyacen tras los métodos y prácticas utilizados en el aula (Smyth, 199: 285). La confrontación arroja luz, abre una puerta a la creación de conciencia sobre las creencias personales fruto del proceso de reflexión.

Los compañeros siguieron colaborando mediante la recomendación de documentos que pudieran resultar de ayuda en la profundización del problema que detectamos. Entre los recibidos podemos destacar el trabajo de Araya y Alfaro (2010) que nos sitúa en el lugar en que se encuentra la geometría. Esta disciplina se presenta a los alumnos como algo acabado, un conjunto repleto de definiciones, fórmulas y teoremas totalmente alejado de su realidad y donde los ejemplos y ejercicios no poseen ninguna relación con su contexto. Los autores nos advierten de que los alumnos consideran que han de tener la capacidad para memorizar definiciones, fórmulas y teoremas para tener éxito en la materia. En la descripción de nuestro problema hemos podido observar como esa base memorística hace mella en los estudiantes obstaculizando la comprensión del significado que presentan las representaciones geométricas, para llegar a lograr una habilidad práctica.

De Vargas y Gamboa (2013) extraemos la idea de estudiar el teorema de Pitágoras usando el software GeoGebra. En su estudio particular los autores siguen el modelo de Van Hiele, usan diferentes representaciones de la demostración del teorema a modo de puzles pitagóricos. Destacamos la idea dinámica que ofrece un mayor nivel de visualización, favoreciendo el desarrollo de habilidades geométricas. Del mismo modo nos hacemos eco de la contribución del artículo de Álvarez, Arrieta y González (1997) por el uso del geoplano durante la instrucción del tema. El abanico de posibilidades que admite la manipulación de materiales abre un panorama rico en cuanto al ejercicio de destrezas geométricas tales como la visualización, comparación, descripción, deducción y generalización, útiles para comprender el carácter geométrico del teorema de Pitágoras. Ambas recomendaciones se centran en cómo introducir el teorema en el aula; son propuestas didácticas.

Por otro lado, de Moreno, Gil y Montoro (2015) atendemos a que la relación entre las áreas que sostiene el teorema presenta la necesidad de conocer el concepto de superficie. La comprensión de tal magnitud no es sencilla. Esta reflexión sobre el concepto de área como también las diferentes propuestas didácticas que permiten el acercamiento al carácter geométrico del teorema de Pitágoras, han sido relevantes para la continuidad del ciclo, pues marcan nuevos puntos por los que continuar el análisis del problema evidenciado.

De entre los diferentes enfoques suministrados para indagar en el problema no todos resultan igual de valiosos de cara al problema planteado. Resumimos a continuación los elegidos, según su contenido:

- Uso de distintos materiales manipulativos y recursos dinámicos tales como geoplanos o GeoGebra para mejorar la comprensión del teorema.
- Atender a la comprensión de la magnitud superficie para entender los errores de aprendizaje que aparecen. Nos muestran que las fórmulas pueden obtenerse a partir de otros procedimientos, enfocándose en la didáctica de la magnitud.
- Crear conciencia sobre la enseñanza mecanicista y la resolución automática de problemas. La enseñanza tradicional ha enfatizado la memorización de fórmulas para calcular áreas y volúmenes, así como definiciones geométricas, teoremas y propiedades, apoyadas en construcciones mecanicistas y descontextualizadas Existe la necesidad de un cambio de la metodología tradicionalmente usada.

— Atender a distintas estrategias para la introducción del tópico basadas en los procesos cognitivos que se ponen de manifiesto en la resolución de problemas de geometría.

Al analizar las diferentes colaboraciones, contrastándolas con lo que se ha pensado previamente sobre las causas del problema, se barajan diferentes visiones del mismo. Lo primero que evalúas es tu propia intervención docente. Los aportes dirigidos a modificar estrategias o a incluir recursos son de interés como también lo son aquellas sugerencias encaminadas a investigar en el comportamiento de los alumnos en la resolución de problemas en este tópico. Es decir, estudiar el modo en el que comprenden este resultado ayuda a poder establecer cambios más adecuados. En definitiva, te planteas cómo podría hacer las cosas de otra manera. Para dar respuesta a esta pregunta se han analizado tanto las aportaciones de los compañeros como informaciones propias en torno al problema que nos ocupa. La respuesta no es absoluta. Inicialmente la pregunta que definía el problema contenía al sujeto alumno: ¿cómo comprenden los alumnos el teorema de Pitágoras?

Reconstrucción

Tras el ciclo de reflexión, habiendo analizado las teorías propias sobre lo que ocurre y los aportes ajenos para comprender el problema se reformula el interrogante inicial: ¿Cómo enseñar el teorema de Pitágoras para que los alumnos comprendan su significado geométrico?

Al parecer queda claro cómo están interpretando el teorema los alumnos y se barajan los orígenes de ciertas dificultades. Ahora habría que comprobar si mejora la comprensión de esta parte del teorema de Pitágoras ofreciendo ciertos cambios en la enseñanza como proponen los documentos de colaboración. Pero antes de eso habrá que estudiar qué estrategias y por qué esas serían las adecuadas. Iniciando así un nuevo ciclo de reflexión.

Consideraciones finales

El proceso de reflexión que se ha llevado a cabo en este taller de clase ha supuesto un conocimiento mayor de los presupuestos desde los que planteamos el problema debido a la puesta en evidencia de las propias creencias y ha permitido profundizar en algunos aspectos gracias a las aportaciones teóricas (propias y de los compañeros) facilitando otras vías a tener en cuenta, dando pie a una mejor fundamentación de la propia práctica docente.

Estos hechos son los realmente trascendentes del proceso de reflexión ya que se han encontrado nuevas maneras con las que afrontar el problema. El uso de materiales manipulativos o software dinámicos para introducir o explicar el teorema de Pitágoras creemos que puede facilitar la comprensión de su componente geométrica. Ahora habría que estudiar su implementación.

La implementación de este taller en clase ha ayudado a desarrollar conciencia sobre el análisis involucrado en una reflexión profesional novedosa. En ella se ha ampliado el panorama con aportes que tienen que ver con aspectos cognitivos del aprendizaje geométrico de los estudiantes y con la advertencia de la enseñanza mecanicista de la misma.

La selección de los documentos realizada de manera personal, nos ha ayudado a posicionarnos en un punto de acción desde el que partir con una información más sólida y consistente con la que afrontar el problema.

Las diferentes colaboraciones en distintas orientaciones en búsqueda de respuestas significativas al problema del entendimiento del carácter geométrico del teorema de Pitágoras, como el uso de materiales manipulativos, empleo de recursos dinámicos como GeoGebra, aplicación de diferentes estrategias con las que introducir el tópico y selección de nuevas actividades, no se habían contemplado inicialmente al enfatizar la componente geométrica del teorema de Pitágoras.

La riqueza del proceso revela una postura adecuada que poder tomar en la tarea profesional.

Referencias bibliográficas

Álvarez, J., J. Arrieta y A. González (1997), «El teorema de Pitágoras a partir de la manipulación con Geoplanos», *Suma* n.º 25, 71-86.

Araya, R. G., y E. B. Alfaro (2010), «La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes», *Revista electrónica Educare*, vol. 14, n.º 2, 152-142: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5414933>.

Cardeñoso, J., P. Flores y P. Azcárate (2001), «El desarrollo profesional de los profesores de matemáticas como campo de investigación en educación matemática», en P. Gómez y L. Rico (eds.). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*, Universidad de Granada, Granada, 233-244.

Flores, P. (2000), «Reflexión sobre problemas profesionales surgidos durante las prácticas de enseñanza», Revista EMA, vol. 5, n.º 2, 113-138.

— (2007), «Profesores de matemáticas reflexivos: Formación y cuestiones de investigación», *PNA*, vol. 1, n.º 4, 139-159.

Flores, P., y M. Peñas (2009), «Formación inicial de profesores de matemáticas reflexivos», *Revista Educación y Pedagogía,* vol. 15, n.º 35, 93-116.

Gómez, M. (2011), *Pensamiento geométrico y métrico en las Pruebas Nacionales* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia.

Guichot, V. (2013), «La capacidad reflexiva, factor esencial de la identidad profesional del profesorado: reflexiones en torno a las propuestas de John Dewey y Martha Nussbaum», *Cuestiones Pedagógicas*, n.º 22, 183-202.

Kenneth, M., y K. Zeichner (1993), «El maestro como profesional reflexivo», *Cuadernos de pedagogía*, n.º 220, 44-49.

Moreno, F., F. Gil, y A. B. Montoro (2015), «Sentido de la medida», en P. Flores y L. Rico (eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*, Pirámide, Madrid, 147-168.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, *Boletín Oficial del Estado* (3 de enero de 2015), n.º 3, 169-546.

Schön, D. A. (1992), *Formación de profesionales reflexivos,* Paidós, Barcelona.

Smyth, J. (1991), «Una pedagogía crítica de la práctica en el aula», *Revista de Educación*, n.º 294, 275-300.

Torres, M. D. (2016), *Descubriendo el Teorema de Pitágoras* (Trabajo Fin de Máster), Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada.

Vargas, G., y R. Gamboa (2013), «La enseñanza del Teorema de Pitágoras: una experiencia en el aula con el uso del geogebra, según el Modelo de Van Hiele», *Uniciencia*, vol. 27, n.º 1, 95-118.

Mariloli Torres Gonzalez
Màster Didàctica de la Matemática Universidad de Granada
<mtorresg_esa@hotmail.com>

Pablo Flores Maritínez
Universidad de Granada
<mtorresg_esa@hotmail.com>

Publicaciones recibidas

SCM/Notícies
Societat Catalana de Matemàtiques
N.º 41, juliol 2017
ISSN: 1696-8247

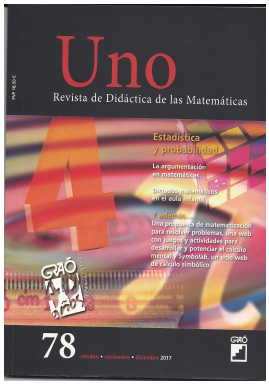




NOUBIAIX
Revista de la FEEMCAT i de la SCM
n.º 40, juliol 2017
Barcelona
ISSN: 2014-2021

LA GACETA DE LA RSME
R*SME*
Vol. 20, n.º 2, 2017
Madrid
ISSN: 1138-8927

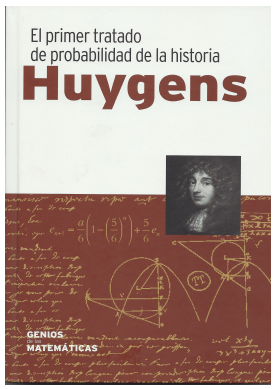




UNO
Revista de Didáctica de las Matemáticas
Ed. Graó
Nº 78, octubre-noviembre-diciembre 2017
Barcelona
ISNN : 1133-9853

INVESTIGACIÓN Y CIENCIA
Prensa cientifica, S.A.
n.º 493, octubre 2017
Barcelona
ISSN: 02210136X





HUYGENS. EL PRIMER TRATADO DE PROBABILIDAD DE LA HISTORIA
Gabriel Ruiz-Garzón
RBA. Genios de las Matemáticas
2017
Tres Cantos (Madrid)
ISBN: 978-84-473-8908-7
159 PÁGINAS

suma+ 86
Artículos
Noviembre 2017
pp. 57-67

El teorema de Bayes con nomogramas

Gabriel Ruiz-Garzón
Jaime Ruiz-Zapatero

El objetivo de este artículo es resolver problemas de aplicación del teorema de Bayes utilizando nomogramas. La Nomografía calcula valores de funciones mediante el empleo de tablas gráficas llamadas nomogramas. Esta ciencia fue profusamente utilizada por ingenieros militares durante la Primera Guerra Mundial y olvidada con la irrupción de los ordenadores. El objetivo es introducirla como un recurso didáctico interesante y novedoso en nuestras aulas para mostrar el teorema de Bayes de una forma diferente a la tradicional.

Palabras clave: Recursos didácticos, Nomografia, Teorema de Bayes, Bachillerato y Universidad.

Bayes' Theorem with nomograms

The aim of this article is to solve problems encountered during the application of Bayes' Theorem through the usage of nomograms. Nomography calculates function values by using graphical tables named nomograms. This science was profusely used by military engineers during World War I to be forgotten after the irruption of computers. This paper purposes to reintroduce this tool as a novel an effective way to explain Bayes' Theorem in our classroom.

Keywords: Educational resource, Nomography, Bayes' Theorem, Secondary School and University.

En 1908, el onubense, D. Nicomedes Alcayde y Carvajal (1871-1930), coronel de ingenieros y profesor de la Academia de Artillería, publicó su *Cálculo de Probabilidades*, obra que sería declarada libro de texto en las Academias de Artillería e Ingenieros del Ejército, al igual que en la de Ingenieros y Maquinistas de la Armada y por la que se le concedería, en recompensa por su elaboración, la Cruz de 1.ª clase del Mérito Militar con distintivo blanco. Se publicó, como el propio autor indica en el prólogo, con el ánimo de ayudar a los alumnos que deben tomar apuntes ante la falta de libros de texto adecuados y «al pasar dichos apuntes de unas a otras manos se producen tantos disparates de copia, que llegan a constituir un inconveniente» (Alcayde, 1942).

Alcayde resuelve, utilizando la probabilidad, una serie de problemas de balística que podrían presentarse a un artillero o ingeniero militar en el frente de combate, como es el que sigue:

Ejemplo 1

Si tomamos como origen de coordenadas el centro de impactos de una pieza artillera, podemos señalar dos paralelas a ambos ejes donde se concentren el 50% de impactos de una manera longitudinal y transversal. En las tablas de tiro que suelen acompañar a una arma particular figura que, a la distancia supuesta, el 50% de los impactos caen dentro de una zona de anchura $z = 80$ m. Se trataría de determinar el tanto por ciento

Artículo recibido en *Suma* en marzo de 2017 y aceptado en octubre de 2017

de impactos que caerán en una zona centrada en el objetivo de anchura diferente, en este caso de z' = 16 m. y de esa manera calcular la probabilidad de que el blanco sea alcanzado.

Matemáticos franceses como Isidore Didion (1798-1878), profesor de la Escuela Militar de Metz, habían efectuado diversos experimentos y conseguido modelizar la cantidad de impactos que caen en una cierta región del plano a través de una distribución normal (Didion, 1858), de ahí que en el libro de Alcayde apareciera junto a una tabla de la distribución normal, una tarjeta denominada *nomograma* que permite la resolución de problemas como el anterior de una manera gráfica.

El nomograma o ábaco permitía al artillero, en el fragor de la batalla, calcular de una manera gráfica sencilla el tanto por ciento de impactos que recibirá el objetivo, sin más que unir, con una regla o hilo, tres puntos de igual número de escalas, como las que mostramos en la figura 2 y que después pasaremos a detallar.

El propio Alcayde publicaría una obra titulada *Elementos de Nomografía* (Alcayde, 1915), donde explicaría los secretos de esta disciplina. La Nomografía se podría definir como el cálculo de valores de funciones mediante el empleo de tablas gráficas, los nomogramas.

En 1912 también inventó una regla llamada «Regla de Alcayde» o de las «Academias Militares», que en 1915 patentó y que fue fabricada por Nestler, un constructor alemán. Se trata de una regla



Figura 1. Isidore Didion

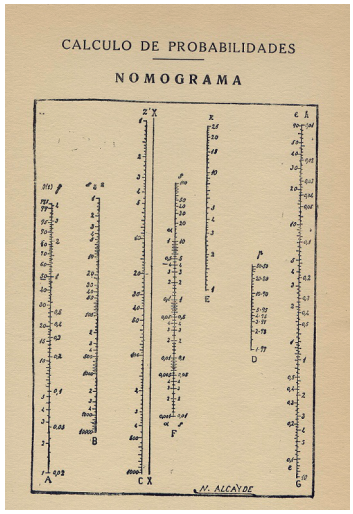


Figura 2. Nomograma de Alcayde

donde figuran los valores de $\text{sen}\alpha\cos\alpha$, $\cos^2\alpha$ y escalas de números (logaritmos de distancias), de gran utilidad para los topógrafos en la nivelación de terrenos y el levantamiento de planos. En 1928, recibiría la medalla de la Legión de Honor de la República francesa por su contribución a la puesta en servicio del túnel de Somport.

Por otra parte, en 1701 había venido al mundo Thomas Bayes. Hijo de Joshua Bayes y Anne Cotton. Su padre fue uno de los primeros seis ministros no-conformistas ordenados públicamente en Londres en 1694, es decir, religiosos protestantes pero que se oponían a la iglesia oficial anglicana. Sus ideas religiosas le privaron de la oportunidad de acceder a universidades de prestigio inglesas como Cambridge u Oxford, que establecían como requisito previo a sus alumnos la aceptación de las normas provenientes de la iglesia anglicana. Uno de sus profesores quizás fuera De Moivre. En 1736, Thomas Bayes publicó, bajo el pseudónimo de John Noon, la obra titulada *Una introducción a la doctrina de las fluxiones, y una defensa de los matemáticos frente a las objeciones del autor del Analista*. Este trabajo era una defensa de Newton frente al obispo Berkeley que había escrito otro titulado *El Analista,* criticando las bases del cálculo diferencial. Bayes fue admitido en la Royal Society en 1742. No se casó y tras heredar la fortuna de su padre, se retiró del ministerio en 1749, muriendo en 1761, estando ac-



Figura 3. Tumba de Thomas Bayes en Bunhill Fields (Londres)

tualmente enterrado en el cementerio londinense de Bunhill Fields.

A su muerte, su amigo y también reverendo no-conformista Richard Price (1723-1791), fue requerido por la familia Bayes para examinar los papeles que el matemático inglés había escrito y legado sobre diferentes temas. Tras una revisión concienzuda, que le llevó dos años, Price remitió a la Royal Society la comunicación de Bayes titulada *Essay towards solving a problem in the doctrine of chances,* ya que según sus palabras: «tiene gran mérito y merece ser preservada». En ella aparecerá el renombrado teorema de Bayes en su versión continua, siendo la versión discreta (que es la que se enseña en las aulas universitarias de hoy), obra de Pierre Simon Laplace. Digamos que Price tuvo «gran ojo clínico» ya que pocos artículos han marcado el devenir de la estadística

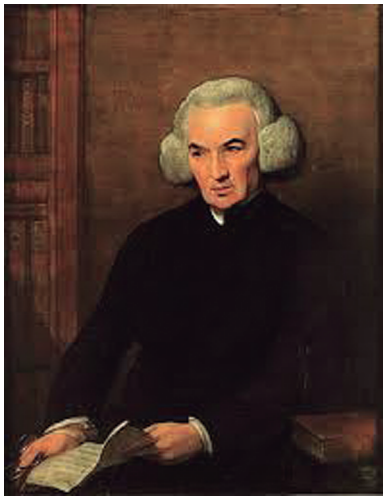


Figura 4. Richard Price

creando toda una rama de las matemáticas, el análisis bayesiano.

Hoy en día, el teorema de Bayes, en particular, es utilizado por los médicos en el desempeño de la práctica clínica al objeto de valorar si una persona presenta una enfermedad una vez se ha obtenido el resultado de una prueba clínica, es decir:

Ejemplo 2

La prevalencia de cierta enfermedad en una población de 5 000 personas es del 2 %. Con una prueba o test se detectaron que 70 de 100 pacientes enfermos obtuvieron un resultado positivo en el test y en el grupo de control de las 4 900 personas que no tenían la enfermedad 76 dieron positivo. Calcular la proporción de pacientes con resultados positivos que tienen la enfermedad.

El objetivo de este artículo es resolver problemas de aplicación del teorema de Bayes utilizando nomogramas. La Nomografía tuvo su apogeo en el primer tercio del siglo XX y fue desplazada por la llegada de los ordenadores, pero todavía se pueden encontrar artículos recientes donde se estudia (Fagan, 1975; Marasco y otros, 2011), ya que permite una valoración rápida del estado del paciente allí donde los ordenadores no llegan, como ocurre aún hoy en día en muchos lugares del Tercer Mundo. Pero no solo es interesante para ingenieros, artilleros o médicos, sino que tiene una aplicación didáctica interesante en nuestras clases de matemáticas. Hace unos años, en los primeros números de esta misma revista *Suma* (Arenzana y otros, 1990), los autores ya proponían nomogramas como un recurso para nuestras clases de bachillerato, calculando raíces de ecuaciones bicuadradas, potencias, divisiones y probabilidades. Nosotros utilizaremos la Nomografía para mostrar el teorema de Bayes desde otra perspectiva.

Para cumplir nuestro objetivo, hemos estructurado este trabajo de la siguiente manera: en la siguiente sección veremos las nociones matemáticas para construir un nomograma de escalas paralelas que nos permita conseguir el resultado de una función como producto de otras dos. A continuación mostraremos el teorema de Bayes en su versión menos conocida, en forma de *odds*

o apuestas en contra, para posteriormente utilizar los nomogramas construidos para resolver problemas probabilísticos, ligados a la aplicación del teorema de Bayes y al cálculo artillero, y acabaremos con unas breves conclusiones.

Nomogramas

Los nomogramas son calculadoras geométricas. Existen nomogramas de diferentes escalas: en línea recta, curva o combinaciones de ambas (Parellada, 1942). Nosotros trataremos los nomogramas de escalas paralelas.

Para que una función de tres variables α, β y γ, de forma general se pueda representar mediante un nomograma de puntos alineados en tres escalas rectilíneas y paralelas, han de cumplirse unas condiciones.

Partiremos de la ecuación

$$f_1(\gamma)\,\varphi(\alpha)+f_2(\gamma)\,\psi(\beta)+f(\gamma)=0 \qquad [1]$$

Tracemos dos rectas *MM'* y *NN'* paralelas al eje *OY*, la primera de abscisa arbitraria *a* y la segunda *–a*. Sea φ una función que se coloca sobre una escala.

Sean α_1 y α_2 dos valores de la variable α y sea *L* la distancia que separa a $\varphi(\alpha_1)$ y $\varphi(\alpha_2)$ sobre el papel. Definimos la unidad de la escala o módulo de la escala como:

$$U=\frac{L}{\varphi(\alpha_1)-\varphi(\alpha_2)} \qquad [2]$$

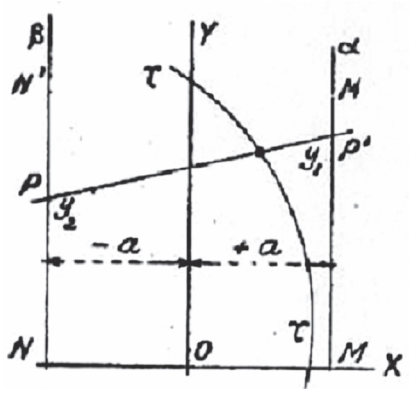


Figura 5. Diagrama de un nomograma de puntos alineados

Luego las coordenadas de todos los puntos de *MM'* con respecto al origen de la escala serán $(a, U\varphi(\alpha))$. Tomando *V* como unidad de escala en *NN'*, todos sus puntos tendrán de coordenadas $(-a, V\psi(\alpha))$. Dado un punto cualquiera (x,y) de la recta *PP'*, la ecuación de dicha recta que corta a las otras dos escalas en los puntos anteriores tendrá por ecuación:

$$\frac{y-U\varphi(\alpha)}{V\psi(\beta)-U\varphi(\alpha)}=\frac{x-a}{-2a}$$

Es decir,

$$U(a+x)\,\varphi(\alpha)+V(a-x)\,\psi(\beta)-2ay=0 \qquad [3]$$

Si los tres puntos $(a, U\varphi(\alpha))$, $(-a, V\psi(\alpha))$ y $(x,f(\gamma))$ han de estar sobre una única recta *PP'*, esas coordenadas han de verificar las ecuaciones [1] y [3] simultáneamente, podremos, por tanto, identificar coeficientes:

$$f_1(\gamma)=U(a+x)$$
$$f_2(\gamma)=V(a-x)$$
$$f(\gamma)=-2ay$$

Luego las coordenadas (x,y) de los puntos de la recta *PP'* que satisfacen simultáneamente las ecuaciones [1] y [3] son:

$$x=a\frac{Vf_1(\gamma)-Uf_2(\gamma)}{Vf_1(\gamma)+Uf_2(\gamma)} \qquad [4]$$

$$y=-\frac{f(\gamma)UV}{Vf_1(\gamma)+Uf_2(\gamma)} \qquad [5]$$

En general, esos puntos formarán una línea curva pero si $f_1(\gamma)$ y $f_2(\gamma)$ son constantes independientes de γ, la línea determinada por las coordenadas [4] y [5] será una línea paralela al eje *OY* porque la abscisa será una constante. Y si $f_1(\gamma)=f_2(\gamma)$ resultará que la recta soporte de la escala de γ es el eje de ordenadas *OY* situado en el centro de las escalas de las variables α y β. Si además consideramos que $f_1(\gamma)=f_2(\gamma)=1$, la ecuación [1] se reduce a

$$\varphi(\alpha)+\psi(\beta)+f(\gamma)=0 \qquad [6]$$

Y de igual manera, las ecuaciones [4] y [5] que nos dan las coordenadas de los puntos de la recta *PP'* se reducen a

$$x=a\frac{V-U}{V+U} \qquad [7]$$

$$y = f(\gamma)W = f(\gamma)\frac{UV}{U+V} \qquad [8]$$

Y si las unidades U y V son iguales para las escalas, todavía se pueden simplificar más las ecuaciones anteriores [7] y [8], quedando entonces como:

$$x = 0$$
$$y = f(\gamma)\frac{V}{2}$$

Con lo que el módulo para la escala de la tercera variable es la mitad del de las otras dos. Pero veamos todo esto con un ejemplo práctico.

Ejemplo 3

Construir un nomograma de escalas paralelas que permita calcular $\alpha\beta=\gamma$, en particular multiplicar tres por cinco, sabiendo que α varía de 0,1 a 10 y β de 2 a 6 y que tenemos un papel de 10 por 20 cm.

Podemos resolver $\alpha\beta=\gamma$ ya que si tomamos logaritmos obtendríamos $\log(\alpha)+\log(\beta)=\log(\gamma)$. Ecuación similar a [6] que sí admite una resolución mediante nomogramas.

Calculamos las unidades de las escalas de las variables α y β al modo de la ecuación [2]:

$$U = \frac{20}{\log(10)-\log(0{,}1)} = 10$$
$$V = \frac{20}{\log(6)-\log(2)} = 41{,}91$$

Como la anchura del papel $10 = a + b$ y $a/b = U/V$ podemos calcular la distancia de separación a y b entre las tres rectas:

$$a = \frac{10}{10+41{,}91}10 = 1{,}927 \text{ cm}$$
$$b = \frac{41{,}91}{10+41{,}91}10 = 8{,}073 \text{ cm}$$

Y el módulo de la tercera escala vendrá dado por la ecuación:

$$W = \frac{UV}{U+V} = \frac{10(41{,}91)}{10+41{,}91} = 8{,}073 \text{ cm}$$

Con lo que podríamos calcular las distancias de algunos puntos al origen de su correspondiente escala (tabla 1).

Construidas las tres escalas sobre cada una de las rectas, las subimos o bajamos hasta que podamos trazar una recta por tres puntos que satisfagan la ecuación para poder calcular los demás.

$U\varphi(\alpha)$	$Wf(\gamma)$	$U\psi(\alpha)$
$10\cdot\log(0{,}1)=-10$	$8{,}07\cdot\log(0{,}2)=-5{,}64$	$41{,}91\cdot\log(2)=12{,}61$
$10\cdot\log(1)=0$	$8{,}07\cdot\log(1)=0$	$41{,}91\cdot\log(3)=20$
$10\cdot\log(2)=3{,}01$	$8{,}07\cdot\log(10)=8{,}07$	$41{,}91\cdot\log(4)=25{,}25$
$10\cdot\log(3)=4{,}77$	$8{,}07\cdot\log(20)=10{,}50$	$41{,}91\cdot\log(5)=29{,}29$
$10\cdot\log(4)=6{,}02$	$8{,}07\cdot\log(30)=11{,}92$	$41{,}91\cdot\log(6)=32{,}61$
$10\cdot\log(5)=6{,}99$	$8{,}07\cdot\log(40)=12{,}93$	
$10\cdot\log(6)=7{,}78$	$8{,}07\cdot\log(50)=13{,}72$	
$10\cdot\log(7)=8{,}45$	$8{,}07\cdot\log(60)=14{,}36$	
$10\cdot\log(8)=9{,}03$		
$10\cdot\log(9)=9{,}54$		
$10\cdot\log(10)=10$		

Tabla 1

Una vez construidas las tres escalas sobre cada una de las rectas podemos calcular el producto de $\alpha=5$ por $\beta=3$ simplemente observando el punto de corte de la recta que los une en la escala de la recta intermedia, que nos da $\gamma=15$.

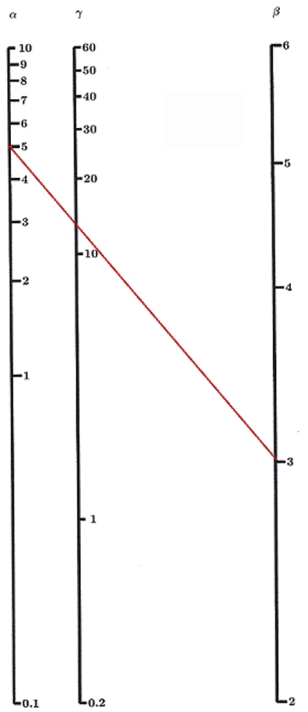


Figura 6. Nomograma para la multiplicación

El teorema de Bayes

En la probabilidad juega un papel predominante el teorema de Bayes a la hora de modificar probabilidades de acuerdo a la información recibida. El teorema de Bayes nos permite, a partir de la

prevalencia de una enfermedad (la proporción de la población que padece la enfermedad en un momento determinado), es decir, una probabilidad a priori establecida y los resultados de un test de laboratorio, calcular cuál es la probabilidad de que un paciente tenga una determinada enfermedad. El teorema nos dice cómo debemos modificar nuestras probabilidades a priori al recibir información adicional.

Partamos de una prueba dicotómica que clasifica a cada paciente como sano o enfermo en función de que el resultado del test sea negativo o positivo, respectivamente. La situación se puede modelizar en una tabla 2×2 (tabla 2).

	Sano	*Enfermo*	*Total*
Test –	Verdaderos negativos (*TN*)	Falsos negativos (*FN*)	*TN + FN*
Test +	Falsos positivos (*FP*)	Verdaderos positivos (*TP*)	*FP + TP*
Total	*TN + FP*	*FN + TP*	

Tabla 2

Pero los tests o pruebas médicas no son infalibles, sino que cometen errores. Así, se habla de la *sensibilidad* de un test como la proporción de individuos afectados que son dados como positivos correctamente por el test, es decir, es la fracción de verdaderos positivos:

$$p(+ / E) = \frac{TP}{TP + FN}$$

donde el suceso E = «tener la enfermedad» y el suceso + = «dar positivo en el test». La sensibilidad de un test refleja la capacidad del test para detectar la enfermedad cuando está presente. El término tasa de *falsos negativos* hace referencia al complemento de la sensibilidad.

$$\text{Tasa de falsos negativos} = 1 - \text{sensibilidad} = = p(- / E) = \frac{FN}{FN + TP}$$

Por otro lado, la *especificidad* de un test es la proporción de individuos sobre todos los no afectados que son dados como negativos correctamente por el test, es decir, la capacidad de detectar a los sanos. De ahí que se llame fracción de verdaderos negativos a:

$$p(- / \bar{E}) = \frac{TN}{TN + FP}$$

El término tasa de *falsos positivos* hace referencia al complemento de la especificidad.

$$\text{Tasa de falsos positivos} = 1 - \text{especificidad} = = p(+ / \bar{E}) = \frac{FP}{TN + FP}$$

Como hemos comentado, una prueba interesa que tenga una alta sensibilidad y especificidad. En una persona con cáncer o tuberculosis que requiera un tratamiento urgente que podría salvar su vida, la sensibilidad de la prueba es muy importante, siendo el gran problema los falsos negativos. En una persona con una enfermedad terminal lo importante sin embargo es la especificidad, ya que tratar a un sano podría tener peores consecuencias que no tratar a un enfermo, aquí el problema serían los falsos positivos.

De manera recurrente, en los medios de comunicación aparecen noticias que alertan del elevado número de falsos positivos, que en estudios recientes sobre mamografías, entre mujeres de 40 y 50 años, se eleva al 61 %, lo que conlleva la realización de pruebas diagnósticas adicionales de elevado coste, sin que la mortalidad por cáncer de mama en mujeres con mamografía y sin mamografía sea diferente.


≡ EL PAÍS SOCIEDAD

EDUCACIÓN SALUD CIENCIA MEDIO AMBIENTE IGUALDAD CONSUMO COMUNICACIÓN TECNOLOGÍA TV BLOGS TITULARES »

Sigue el debate sobre los riesgos y beneficios de las mamografías

Un nuevo estudio reitera que la prueba de prevención es importante, pero que provoca muchos sobrediagnósticos y falsos positivos

Figura 7. Noticia sobre falsos positivos

Ejemplo 4

Con los datos del ejemplo 3, calcular la sensibilidad y especificidad de la prueba.

Empezaremos confeccionando la tabla 3.

	Sano	*Enfermo*	*Total*
Test –	Verdaderos negativos (TN) 4 824	Falsos negativos (FN) 30	4 854
Test +	Falsos positivos (FP) 76	Verdaderos positivos (TP) 70	146
Total	*TN + FP* 4 900	*FN + TP* 100	5 000

Tabla 3

La sensibilidad es en nuestro caso:

$$p(+/E)=\frac{TP}{TP+FN}=\frac{70}{100}=0,70$$

Y la especificidad es de un 98 % como vemos:

$$p(-/\bar{E})=\frac{TN}{TN+FP}=\frac{4824}{4900}=0,98$$

Observamos la importancia de la especificidad. Si en el ejemplo anterior modificamos la especificidad al 90 % (tabla 4).

	Sano	*Enfermo*	*Total*
Test –	4 410	30	4 440
Test +	490	70	560
Total	4 900	100	5 000

Tabla 4

Vemos que aumentan considerablemente los falsos positivos a 490 individuos, que casi con seguridad serán tratados con medicación lo que les podría ocasionar problemas, aparte del gasto para el sistema sanitario que ello conllevaría.

Por tanto, la sensibilidad y la especificidad permiten valorar la validez de una prueba diagnóstica, nos informan de la probabilidad de obtener un resultado correcto en función del estado del enfermo. Pero desde un punto de vista clínico al médico le interesa la seguridad de la prueba, es decir, ante un resultado positivo (negativo) de la prueba, cuál es la probabilidad de que el paciente esté realmente enfermo (sano), respectivamente. A esa pregunta se responde utilizando el teorema de Bayes, podemos calcular las probabilidades a posteriori (en función de los resultados del test): el llamado Valor Predictivo Positivo y Negativo. Concretamente:

$$\text{Valor Predictivo Positivo } (VPP)=p(E/+)=$$

$$=\frac{p(+/E)p(E)}{p(+/E)p(E)+p(+/\bar{E})p(\bar{E})}=\frac{TP}{TP+FP}$$

Es decir, el *VPP* es la proporción de pacientes con resultados positivos que tienen la enfermedad.

O dicho de otra manera, podríamos calcularlo en función de la sensibilidad y especificidad de la siguiente manera:

$$VPP=\frac{\text{Sensibilidad}\left(\text{Prevalencia}\right)}{\text{Sensibilidad}\left(\text{Prevalencia}\right)+(1-\text{Especificidad})(1-\text{Prevalencia})}$$

También podemos calcular el:

$$\text{Valor Predictivo Negativo } (VPN)=p(\bar{E}/-)=$$

$$=\frac{p(-/\bar{E})p(\bar{E})}{p(-/E)p(E)+p(-/\bar{E})p(\bar{E})}=\frac{TN}{TN+FN}$$

Es decir, la proporción de pacientes con pruebas negativas que han sido diagnosticados correctamente.

O dicho de otra manera:

$$VPN=$$

$$=\frac{\text{Especificidad}(1-\text{Prevalencia})}{(1-\text{Sensibilidad})\text{Prevalencia}+\text{Especificidad}(1-\text{Prevalencia})}$$

Ejemplo 5

Con los datos del ejemplo 2 calcular los *VPP* y *VPN*.

Dados los datos tendríamos:

$$VPP=p(E/+)=\frac{TP}{TP+FP}=\frac{70}{146}=0,4$$

$$VPN=p(\bar{E}/-)=\frac{TN}{TN+FN}=\frac{4824}{4854}=0,99$$

El valor predictivo positivo sería del 47 % y el negativo del 99 %.

Los valores predictivos dependen mucho de la prevalencia como vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6

Si la prevalencia de la enfermedad fuera del 10 %, calcular los valores predictivos positivo y negativo, *VPP* y *VPN*.

En este caso, la especificidad y la sensibilidad no cambian (tabla 5):

	Sano	*Enfermo*	*Total*
Test –	4 410	150	4 560
Test +	90	350	4 400
Total	4 500	500	5 000

Tabla 5

El valor predictivo positivo aumentará:

$$VPP = p(E/+) = \frac{TP}{TP+FP} = \frac{350}{440} = 0{,}79$$

y el valor predictivo negativo disminuirá:

$$VPN = p(\bar{E}/-) = \frac{TN}{TN+FN} = \frac{4\,410}{4\,560} = 0{,}96$$

Observamos que si la prevalencia de la enfermedad es alta, un resultado positivo del test tiende a confirmar la enfermedad con un aumento del *VPP*. Cuando la prevalencia de la enfermedad es baja, un resultado negativo permitirá descartar la enfermedad con mayor seguridad, aumentando el valor predictivo negativo. Otros resultados no nos permitirán confirmar el diagnóstico.

Pero para tratar el teorema de Bayes a través de nomogramas necesitaremos presentarlo a través de las *odds* o apuestas en contra. En el mundo anglosajón, en el mundo de las apuestas de caballos, se habla de expresiones del tipo «6 a 3 en contra», es decir, unas *odds* de 6 a 3, quiere decir que 3 de cada 9 apostantes lo hacen por dicho caballo como vencedor, es decir, la probabilidad de que dicho caballo gane es $p(G) = 3/9$ y $p(\bar{G}) = 6/9$. Podemos ver otras aplicaciones de las *odds* al ámbito del Derecho en (Ruiz-Garzón, 2014).

De igual manera, si denotamos por O (del inglés *odds*) las apuestas expresadas en forma de fracción, tener la enfermedad y no tener la enfermedad, podemos escribir:

$$\text{Odds pretest} = \frac{p(E)}{p(\bar{E})}$$

$$\text{Oddspost} - \text{test} = \frac{p(E/+)}{p(\bar{E}/+)}$$

Si las *odds pretest* son mayores que 1 entonces el suceso estar enfermo es más probable que no estarlo y al revés, si es menor que 1.

Dado el *VPP:*

$$p(E/+) = \frac{p(+/E)p(E)}{p(+/E)p(E) + p(+/\bar{E})p(\bar{E})}$$

Si reemplazamos E por su complementario tenemos:

$$p(\bar{E}/+) = \frac{p(+/\bar{E})p(\bar{E})}{p(+/\bar{E})p(\bar{E}) + p(+/E)p(E)}$$

Si dividimos ambas expresiones obtenemos:

$$\frac{p(E/+)}{p(\bar{E}/+)} = \frac{p(+/E)p(E)[p(+/E)p(E) + p(+/\bar{E})p(\bar{E})]}{p(+/\bar{E})p(\bar{E})[p(+/E)p(E) + p(+/\bar{E})p(\bar{E})]}$$

Que simplificado queda:

$$\frac{p(E/+)}{p(\bar{E}/+)} = \frac{p(+/E)}{p(+/\bar{E})} \cdot \frac{p(E)}{p(\bar{E})}$$

que es el teorema de Bayes en forma de apuestas (*odds*), que quedaría como:

$$\text{Odds post} - \text{test} = \frac{\text{sensibilidad}}{(1 - \text{especificidad})} \cdot \text{Odds pretest}$$

Al primer factor de la derecha se le llama *Razón de Verosimilitud Positiva* (*LR*+), del inglés *Likelihood Ratio (LR)*, que definiremos como:

$$LR+ = \frac{\text{sensibilidad}}{(1 - \text{especificidad})} = \frac{\frac{TP}{TP+FN}}{\frac{FP}{FP+TN}}$$

El *LR*+ indica cuánto crece la probabilidad pretest si el test es positivo, es decir, cuánto aumentan las probabilidades de la enfermedad cuando un resultado es positivo. Cuánto más grande es el *LR*+ mayor nivel de discriminación tiene. Por ejemplo, un TAC de abdomen para el diagnóstico de apendicitis suele tener un *LR*+ de 11 y una ecografía para un apendicitis de 23.

Así, el teorema de Bayes se puede enunciar como que las *odds* a posteriori son iguales a las *odds* a priori veces la razón de verosimilitud.

$$\text{Odds post} - \text{test} = (LR+) \cdot \text{Odds pretest}$$

Si el resultado del test es negativo, se define la razón de verosimilitud negativa (*LR*–) como:

$$LR- = \frac{(1 - \text{sensibilidad})}{\text{especificidad}} = \frac{\frac{FN}{TP+FN}}{\frac{TN}{FP+TN}}$$

El *LR*– indica cuánto disminuyen las probabilidades de la enfermedad cuando un resultado es negativo.

Ejemplo 7

Con los datos del ejemplo 2, calcula la razón de verosimilitud positiva y negativa *LR*+ y *LR*–.

La razón de verosimilitud positiva $LR+$ vale:

$$LR+ = \frac{\text{sensibilidad}}{(1-\text{especificidad})} = \frac{\frac{TP}{TP+FN}}{\frac{FP}{FP+TN}} =$$

$$= \frac{\frac{70}{100}}{\frac{76}{4\,900}} = \frac{1\,715}{38} = 45{,}13$$

Esto indica, que un test positivo es 45 veces más probable en un paciente enfermo que en otro que no lo es.

La razón de verosimilitud negativa $LR-$ es:

$$LR- = \frac{(1-\text{sensibilidad})}{\text{especificidad}} = \frac{\frac{FN}{TP+FN}}{\frac{TN}{FP+TN}} =$$

$$= \frac{\frac{30}{100}}{\frac{4\,824}{4\,900}} = \frac{245}{804} = 0{,}3047$$

La interpretación del cociente de verosimilitud es que el resultado negativo de la prueba es 0,3 veces más frecuente en paciente con enfermedad con sospecha de padecerla. Es mejor expresar en forma inversa $1:0{,}3 = 3{,}3$, y concluir que el test negativo es 3,3 veces más frecuente en los que no tienen la enfermedad que en los que la tienen.

La tabla 6 refleja el grado de utilidad de la prueba diagnóstica en función de los valores de la razón de verosimilitud. Los mejores tests para confirmar el tener una enfermedad serán aquellos que tenga el $LR+$ más alto y para descartar la enfermedad los del $LR-$ más bajos.

Utilidad de la prueba	LR–	LR+
No es útil	1	1
Poco útil	0,33-1	1-3
Utilidad regular	0,16-0,33	3-6
Prueba útil	0,10-0,16	6-10
Muy útil	<0,1	>10

Tabla 6

Ejemplo 8

Con los datos del ejemplo 2 calcular el *VPP* en forma de *odds*.

Con los datos ya calculados de $LR+ = 1\,715/38 = 45{,}13$, y conocida que la prevalencia es $p(E) = 0{,}02$, y por tanto los Odds pretest $= 1/49$, luego:

$$\text{Odds postest} = (LR+) \cdot \text{Odds pretest} =$$

$$= \left(\frac{1\,715}{38}\right) \cdot \frac{1}{49} = \frac{1\,715}{1\,862} = 0{,}92$$

Con lo que:

$$VPP = p(E/+) = \frac{0{,}92}{1+0{,}92} = 0{,}47$$

valor que coincide con el previamente hallado en el ejemplo 5.

El teorema de Bayes a través de nomogramas

Gracias a la versión en *odds* del teorema de Bayes como producto:

$$\text{Odds postest} = (LR+) \cdot \text{Odds pretest}$$

lo podemos transformar en una suma tomando logaritmos:

$$\log(\text{Odds postest}) = \log(LR+) + \log(\text{Odds pretest})$$

lo que nos permite construir un nomograma y resolver el ejemplo 2 de aplicación del teorema de Bayes mediante nomogramas.

Ejemplo 9

Con los datos del ejemplo 2 calcular el *VPP* a través de un nomograma.

Construidas las tres escalas del nomograma, unimos el punto de la primera escala del 2 % de la prevalencia con el 45 de la $LR+$ de la segunda, dándonos en la tercera escala el VPP, que en este caso es de aproximadamente el 47 % (figura 8).

Volviendo a la resolución del ejemplo 1, Alcayde nos ofrecía un nomograma que permite la resolución gráfica de problemas, sin hacer cálculos numéricos. Así en la escala señalada con la letra A están contenidos en la graduación iz-

quierda los valores, en tanto por ciento, de la función:

$$\theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt$$

y en la graduación derecha los de la variable que él llama *f (factor de probabilidad),* sustituyendo esta escala, por tanto, a la tabla de la distribución normal. La escala nombrada con la letra B es una escala logarítmica que contiene los números entre 1 y 10 000 y representa las anchuras, en metros, de las zonas del 50 % de los impactos, correspondientes a un arma a una distancia determinada. La escala C es otra escala logarítmica de módulo doble que la anterior y su graduación expresará, en metros, las anchuras z' de zonas batidas en tantos por ciento de impactos determinados.

Así, si se quiere determinar el tanto por ciento de impactos que corresponden a una zona centrada de anchura $z'=16$ m, siendo $z=80$ m la zona del 50 % que a la distancia supuesta corresponde el arma empleada, se coloca una regla sobre las divisiones $z'=16$ y $z=80$ de C y B y el trazo en $\theta(t)$ de A nos da la solución de $p=11$ %. Y al revés, podemos calcular z' en función de z y $\theta(t)$.

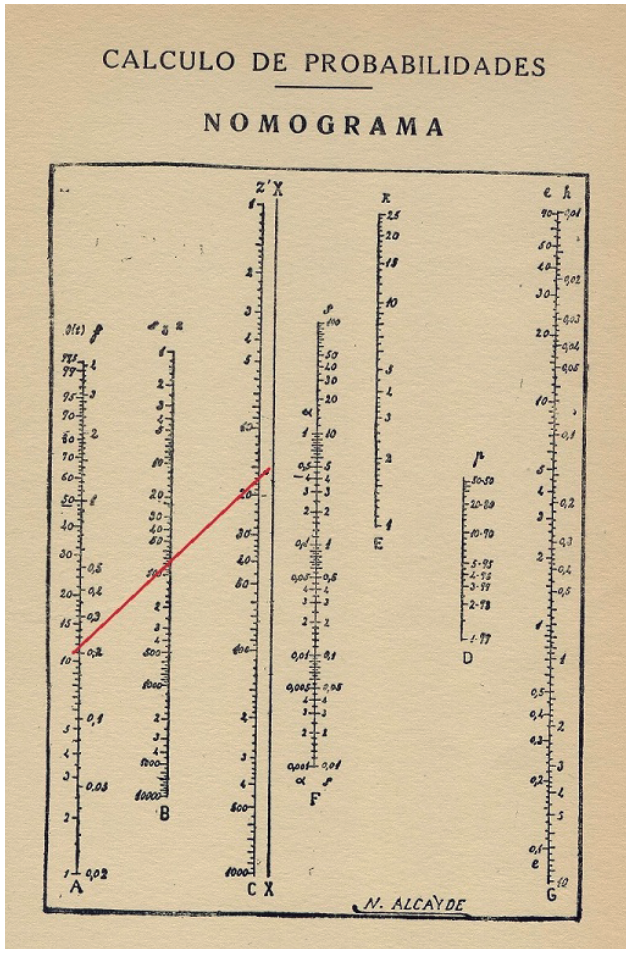


Figura 9. Resolución del ejemplo 1

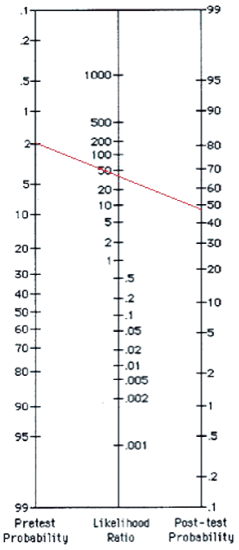


Figura 8. Nomograma para el teorema de Bayes

Epílogo

En resumen, en este trabajo nos hemos acercado al teorema de Bayes de una forma diferente, a través de *odds* y hemos resuelto gráficamente un ejemplo de aplicación del mismo utilizando la técnica de la nomografía, de manera similar a como a comienzos del siglo XX calculaban los artilleros probabilidades. En un reciente artículo (Marasco y otros, 2011), los autores aportan una serie de razones para seguir utilizando nomogramas en lugar de algoritmos implementados en el ordenador. En la tabla 7 hemos seleccionado algunas de ellas.

La Nomografía, una ciencia olvidada que se resiste pasado un siglo a morir y puede sobrevivir como recurso didáctico, depende de nosotros.

Requerimientos	*Ordenador*	*Nomograma*
De hardware	Ordenador o Tablet o impresora o Smartphone…	Solo lápiz y regla
De software	Windows u otro licenciado	Solo el que llevas en tu cerebro
De infraestructura	Acceso a internet, app…	Solo luz ambiente
De energía	Fuente alimentación o baterías	Solo luz ambiente
Rapidez del resultado	La del procesador Intel de tu ordenador	La de tu destreza dibujando líneas rectas
Fallo más común	Teclear mal los números	¡No encuentro mis gafas!
Uso en el Tercer Mundo	Limitado por el acceso a los ordenadores	El papel y el lápiz es fácil de conseguir

Tabla 7

Referencias bibliográficas

Alcayde, N. (1915), *Elementos de Nomografía*, Dossat Editor, Madrid.

— (1942), *Cálculo de probabilidades*, Dossat Editor, Madrid.

Arenzana, V., P. Buera y L. Rodríguez (1990), «Los cambios de escala y el cálculo gráfico», *Suma*, n.º 5, 59-64.

Didion, I. (1858), *Calcul des probabilités appliqué au tir des projectiles,* Mallet-Bachelier. París.

Fagan, T. J. (1975), «Letter: Nomogram for Bayes's Theorem», *New England Journal of Medicine*, vol. 293, n.º 5, 257.

Marasco, J., R. Doerfler y L. Roschier (2011), «Doc, what are my chances?», *The UMAP Journal*, vol. 32, n.º 4, 279-298.

Parellada, A. (1942), *Gráficas y nomogramas*, Dossat Editor, Madrid.

Ruiz-Garzón, G. (2014), *Condenado por la Estadística (Casos reales de aplicación de la Estadística al Derecho),* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz, Cádiz.

Gabriel Ruiz-Garzón
Universidad de Cádiz (UCA)
<gabriel.ruiz@uca.es>

Jaime Ruiz-Zapatero
University College London (UCL)
<jaimeruizzapatero@gmail.com>

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Comisión Ejecutiva

Presidente: Onofre Monzó del Olmo
Secretario General: Agustín Carrillo de Albornoz Torres
Vicepresidente: Juan A. Martínez Calvete
Tesorera: Encarnación Amaro Parrado

Secretarías

Técnica adjunta: Bienvenido Espinar Cepas
Revista *Suma*: Lluís Albarracín Gordo, Miquel Albertí Palmer, Iolanda Guevara Casanova y Daniel Sierra
Relaciones internacionales: M.ª Claudia Lázaro del Pozo
Servicio de publicaciones: Juan Martínez Tébar Giménez
Actividades y formación del profesorado: Juana M.ª Navas Pleguezuelos
Actividades con alumnos: Luisa Almazán Álvarez

Sociedades Federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT)
Presidente: Manuel Sol Puig
C/St Ramon 29. 08340 Vilassar de Mar

Sociedad Aragonesa *Pedro Sánchez Ciruelo* de Profesores de Matemáticas
Presidente: Daniel Sierra Ruiz
Instituto Universitario de Matemáticas y Aplicaciones
Edificio de Matemáticas, 1.ª planta. Universidad de Zaragoza
C/Pedro Cerbuna s/n. 50009 Zaragoza

Sociedad Canaria *Isaac Newton* de Profesores de Matemáticas
Presidente: Juan Agustín Noda Gómez
C/ La Isa, 33, Cercado Mesa, 38205, La Laguna, S/C de Tenerife

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García Cuesta
IES Universidad Laboral, Avda de la Mancha sn, 02006 Albacete

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas *Tornamira*-Matematika Irakasleen Nafar Elkartea
Presidente: J. Javier Jiménez Ibáñez
IES *Alhama,* Avda. Villar, 44. 31591 Corella (Navarra)

Sociedade de Ensinantes de Ciencias de Galicia (ENCIGA)
Presidente: Paulino Estévez Alonso
Apdo. de Correos 103. Santiago de Compostela

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo*
Presidente: Juan A. Martínez Calvete
IES Villablanca. C/ Villablanca, 79. 28032 Madrid

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidente: Jesús Diego Rodríguez García
IES Enrique Nieto
C/ Avenida de la Juventud, 4. 52005 Melilla.

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas *A prima*
Presidenta: Elena Ramírez Ezquerro
Facultad de Ciencia y Tecnología Edificio Científico Tecnológico, CCT; C/ Madre de Dios, 53. 26006 Logroño

Societat Balear de Matemàtiques SBM-XEIX
Presidente: Daniel Ruiz Aguilera
C/ Miquel Capllonch, 30, 3A. 07010 Palma. Illes Balears

Sociedad Andaluza de Educación Matemática *Thales*
Presidente: Salvador Guerrero Hidalgo
Facultad Matemáticas. Apdo. de Correos 1160. 41080 Sevilla

Sociedad Asturiana de Educación Matemática *Agustín de Pedrayes*
Presidente: Rubén Pérez Zamanillo
Apdo. de Correos 830. 33400 Avilés (Asturias)

Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática *Miguel de Guzmán*
Presidente: Antonio Bermejo Fuertes
IES Comuneros de Castilla. C/Batalla Villalar, s/n. 09006 Burgos

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidente: Bienvenido Espinar Cepas
Facultad de Matemáticas. Universidad de Murcia.
Campus de Espinardo. 30100 Murcia

Sociedad Extremeña de Educación Matemática *Ventura Reyes Prósper*
Presidente: Antonio Molano Romero
Apdo. de Correos 590. 06080 Badajoz

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: Carmen Espeso Ortiz
Avda. del Deporte s/n. 39012 Santander

Sociedad *Puig Adam* de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Facultad de Educación. (Sec. Deptal. Álgebra). Despacho 3005
C/ Rector Royo Villanova, s/n. 28040 Madrid

Asociación Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)
Presidente: Julio Rodríguez Taboada
CPI Dos Dices
C/ Dos Dices, s/n. 15911 Rois (A Coruña)

Societat d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana *Al-Khwarizmi*
Presidente: Onofre Monzó del Olmo
Departamento de Didáctica de la Matemática.
Apdo. 22045. 46071 València

Euskadiko Matematika Irakasleen Elkartea *EMIE 20+11*
Presidenta: Ana Fernández de Betoño Sáenz de Olamendi
Berritzegune de Vitoria-Gasteiz
Avda. Gasteiz, 93. 01009 Vitoria-Gasteiz (Araba)

suma+ 86
Artículos
Noviembre 2017
pp. 69-80

Recursos visuales en relación con la función inversa

Félix Martínez de la Rosa

En este artículo se propone mejorar la enseñanza de la función inversa a través de la visualización.

Palabras clave: Función inversa, Visualización, Recursos, Derivada, Integral.

Visual resources in relation with the inverse function

The goal of this paper is to improve the teaching of the inverse function by using the visualization.

Keywords: Inverse function, Vizualization, Resources, Derivative, Integral.

La escasez de tiempo es uno de los obstáculos a los que los profesores de matemáticas tenemos que enfrentarnos, y que debemos superar, para poder llevar a cabo nuestra tarea educativa y formativa. Esto ocurre en todos los niveles de la enseñanza, y provoca que los profesores no podamos detenernos a profundizar en algunos conceptos que, por su interés, merecerían ser tratados con mayor intensidad de lo que se hace.

En bachillerato, el problema se acrecienta debido a la gran cantidad de materia que se debe impartir. Además, los exámenes de ingreso en la universidad son un pensamiento permanente en la mente de los estudiantes. Para los profesores, el objetivo es ofrecer una preparación que permita superar estos exámenes. Es por esto que los temas que tienen especial incidencia en esas pruebas, son prioritarios. Esto debe ser así, y no puede ser de otra manera, por la responsabilidad que tenemos los profesores con nuestros alumnos. Como consecuencia, quedan relegados a un segundo plano los temas cuya aparición en esos exámenes es menos frecuente.

La función inversa es un ejemplo de lo anterior. Es muy raro que en los exámenes de acceso, aparezca alguna pregunta relacionada con ese concepto. Por eso, este tema no se explica con demasiada profundidad. En los textos de bachi-

Artículo recibido en *Suma* en febrero de 2017 y aceptado en octubre de 2017

llerato se expone de manera algo superficial, y los estudiantes tienen la percepción de que las fórmulas que se relacionan con él, no son demasiado importantes. Como consecuencia, entre los estudiantes de primer curso de Cálculo en la universidad es fácil detectar, además de una cierta desgana en relación a este tema, algunos errores de tipo conceptual. En realidad, ya la propia notación $(\,)^{-1}$ resulta confusa porque se trata de un «símbolo matemático polisémico» (Mamolo, 2010), es decir puede tener distintos significados (puede interpretarse como un recíproco, o como la inversa de una función). En (Kontorovich, 2017) puede verse un estudio sobre la confusión que provoca esta notación en los estudiantes.

En este artículo se analiza la forma de introducir el tema de la función inversa en algunos libros de texto de bachillerato, y se exponen algunos de los errores de concepto detectados ente estudiantes universitarios. Pero el foco principal del trabajo, son las posibilidades visuales que ofrece este tema, y que permiten que muchos aspectos relacionados con él puedan explicarse de una forma atractiva y motivadora para los estudiantes. Se hace un recorrido por algunas de ellas: la relación entre las gráficas de una función y su inversa, las técnicas visuales para obtener fórmulas sobre sus derivadas e integrales, y un tipo de fórmulas con gran importancia en la historia de las matemáticas.

El concepto de función inversa en el bachillerato

En el bachillerato, la forma usual de motivar el concepto de función inversa (Cólera y Oliveira, 2009; González y otros, 2009), es la de mostrar dos funciones cuya composición da el valor x: cada una de ellas deshace lo que hace la otra. Se denominan f y f^{-1}, y se tiene que $f(a) = b$ si y sólo si $a = f^{-1}(b)$. Se aclara que f debe ser inyectiva para que pueda existir su inversa y se menciona la simetría de sus gráficas respecto de la recta $y = x$.

Para obtener la fórmula de la inversa de $y = f(x)$, se aplica el método que consiste en intercambiar la variable x por y en la expresión de la función. Despejando y se obtiene $y = f^{-1}(x)$.

Suponiendo que $f'(a) \neq 0$, el valor de la derivada de f^{-1} en $b = f(a)$, $1/f'(a)$, se obtiene aplicando la regla de la cadena en la expresión $f(f^{-1}(x)) = x$ (Cólera y Oliveira, 2009; Escoredo y otros, 2009).

En la lista de derivadas, se dan las correspondientes a las funciones trigonométricas inversas. También, en el tema de la integración, la lista de integrales inmediatas incluye aquellas cuyas primitivas son el arcotangente y el arcoseno.

Esta exposición provoca la aparición de algunos errores de concepto entre los estudiantes, que se exponen a continuación.

- El hecho de no especificar si la función debe ser continua o no para que exista la inversa, contribuye a sembrar ideas confusas. Por ejemplo, los estudiantes de primer curso de Cálculo en la universidad no saben a qué atenerse cuando se les pregunta si la función de la figura 1 tiene inversa. Comprenden que la función es inyectiva, pero la discontinuidad de salto en b, y el hecho de que no sea ni creciente ni decreciente en el intervalo (a, c), les hace inclinarse a pensar que no tiene inversa.
- También tienen cierta confusión en relación con las variables. Si se les dice que es $x = f^{-1}(y)$ la función inversa de $y = f(x)$, no entienden muy bien que en el proceso de calcularla se cambie x por y para obtener $y = f^{-1}(x)$.
- En cuanto a la simetría de las gráficas respecto de la recta $y = x$, es algo que los estudiantes parecen asumir sin estar demasiado convencidos de ello y de lo que significa.

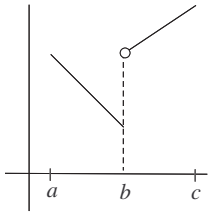


Figura 1

— La regla de la cadena no puede aplicarse en la composición $f \circ f^{-1}$, a no ser que se sepa ya que f^{-1} es derivable. Por tanto, aunque la fórmula de la derivada de la inversa es correcta, el método empleado para obtenerla no es una demostración válida.

Los estudiantes miran a las funciones inversas, y en especial a las de las funciones trigonométricas, con una mezcla de recelo, aprensión y fastidio. Estas últimas aparecen en la lista de derivadas que deben memorizar. A veces simplemente se incluyen a la manera de entes extraños y, aparentemente, solo para engrosarla (González y otros, 2009). En ocasiones la lista se da primero y después se da la fórmula para el cálculo de la derivada de la inversa (Escoredo y otros, 2009). Finalmente se incorporan en la lista de integrales inmediatas. En ambos casos el tratamiento que se les da no es nada motivador.

La visualización, es una de las mejores bazas de las que dispone un docente para motivar a los estudiantes y conseguir que el aprendizaje de los conceptos matemáticos sea eficaz y atractivo al mismo tiempo. El tema de las funciones inversas es especialmente proclive a ello, ya que sus aspectos visuales son muchos y variados.

Construcciones visuales de la gráfica de la función inversa

En una función $y=f(x)$, la x se denomina variable independiente. Si conseguimos despejar x entonces tendremos una expresión en la que la variable independiente es y. Esta expresión se conoce como inversa de f: $x=f^{-1}(y)$.

La primera forma de visualizar la gráfica de la inversa de una función inyectiva, es partir de cada punto (a, b) de la gráfica de f y obtener el correspondiente punto (b, a) de la gráfica de f^{-1}. Para ello, en (Ayoub, 1987) se propone observar que los puntos (a, b) y (b, a) son los vértices de una diagonal de un cuadrado de lado $a-b$, cuyos otros dos vértices (a, a), y (b, b), están sobre la recta $y=x$. Por eso las gráficas de f y de f^{-1} son simétricas respecto de esa recta (figura 2).

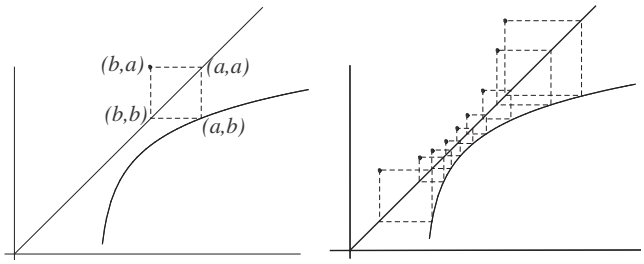


Figura 2

El proceso de obtención de la inversa consiste en intercambiar la variable x por y para obtener $y=f^{-1}(x)$, lo cual choca con la denominación inicial $x=f^{-1}(y)$. La visualización es una forma interesante de aclarar este baile de variables que fomenta cierta confusión. En la expresión $x=f^{-1}(y)$ la variable independiente es y, por tanto podemos visualizarla si miramos a la gráfica de la función $y=f(x)$ desde el eje y (figura 3, arriba). Si queremos que la variable independiente y esté en el eje horizontal basta girar ese dibujo 90° en

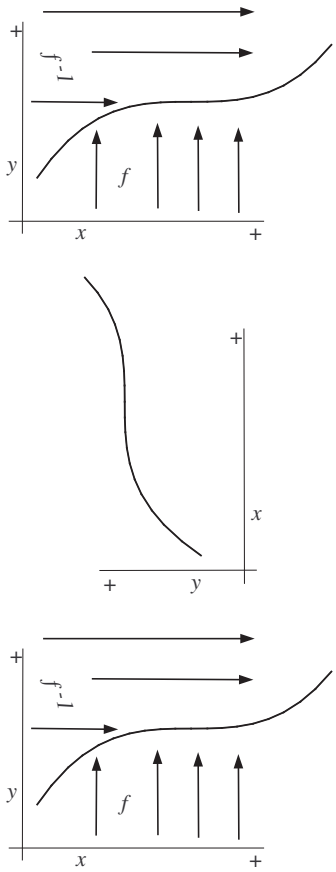


Figura 3

sentido positivo. Invirtiendo el dibujo para que la parte derecha del eje horizontal sea la parte positiva (figura 3, abajo) se obtiene una visión directa de la gráfica de (Spivak, 1986).

En la sección dedicada a la integración, se utilizará la figura 3 (arriba) como herramienta para obtener primitivas de funciones inversas, y otras propiedades de las integrales, de una manera visual.

Finalmente, intercambiar x por y permite que x sea la variable independiente de las dos funciones f y f^{-1}, lo que hace que la gráfica de ambas puedan observarse desde el mismo punto de vista (figura 4).

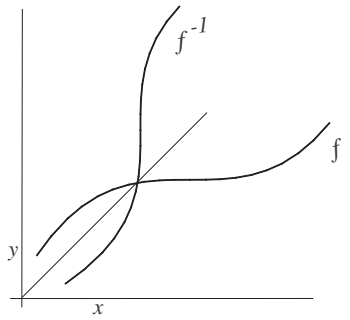


Figura 4

Graficas de la función exponencial y logarítmica

Uno de los ejemplos más socorridos para ilustrar la gráfica de una función y la de su inversa, es el de la función exponencial $y = a^x$ y la logarítmica $y = \log_a x$, donde $a > 0$ (figura 5).

La figura 5 es válida para muchos valores de a como 2, 10, e, pero no para todos: se muestra solo una parte de la realidad sin decirlo, y al actuar de esta forma los profesores somos responsables de la formación de ideas erróneas en los estudiantes.

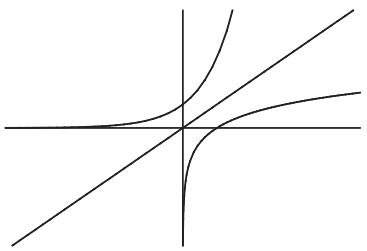


Figura 5

En Couch (2002) se analiza el caso $a > 1$. Si $a^t > t$ se verifica que $a^t > t > \log_a t$. Asimismo si $a^t < t$ entonces $a^t < t < \log_a t$. Por tanto si las gráficas de $y = a^x$ y de $y = \log_a x$ se cortan en t, entonces $a^t = t$. Por otro lado si $a^t = t$ entonces $\log_a t = t$. y las gráficas se cortan en t. Conclusión:

Para $a > 1$, las gráficas de $y = a^x$ y de $y = \log_a x$ se cortan en t si y sólo si $a^t = t^{1/t}$.

En la figura 6 están dibujadas la gráfica de $f(x) = x^{1/x}$ junto con la de la recta $y = a$.

Ambas se cortan en dos puntos si $1 < a < e^{1/e}$, en uno si $a = e^{1/e}$ y no se cortan si $a > e^{1/e}$ por tanto, para $a > 1$, el dibujo correcto de la función exponencial y logarítmica es el de la figura 7.

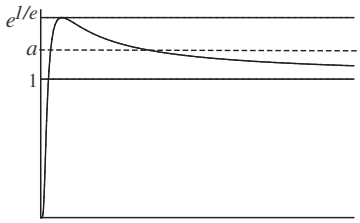


Figura 6

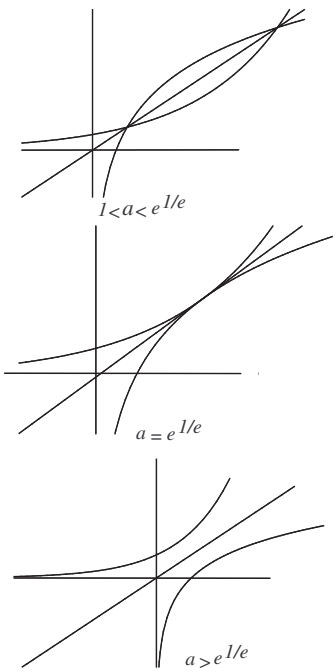


Figura 7

Si $0<a<1$ (Bilan y Jelic, 2014), existe un punto de corte si $1/e^e \leq a<1$ y tres puntos de corte si $0<a<1/e^e$. La figura 8 corresponde al caso $a=1/1000$.

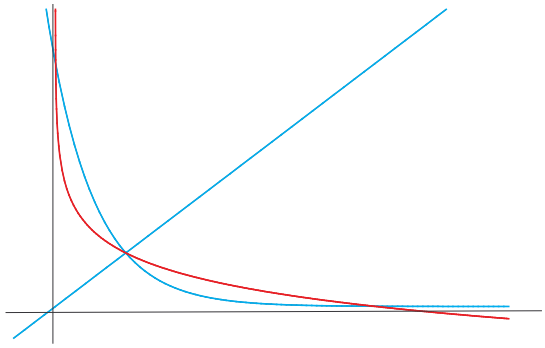


Figura 8

Sumas de arcotangentes

La visualización y la historia son dos excelentes recursos que pueden usarse para despertar el interés de los alumnos por las matemáticas. Ambos se aúnan perfectamente en la función arcotangente. Entre los siglos XVIII y XIX, los matemáticos se emplearon a fondo para obtener decimales del número π. Para ello disponían de la conocida como serie de Leibniz de 1674:

$$\arctan 1 = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\cdots=\frac{\pi}{4}$$

Esta serie permite calcular decimales de π, el problema es que su obtención es muy lenta. Por eso optaron por emplear la fórmula de James Gregory de 1671:

$$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$$

Combinando esta fórmula con identidades relativas a la suma de arcotangentes se consiguió calcular una buena cantidad de esos decimales de una forma más rápida.

Por ejemplo en 1737, Euler obtuvo la fórmula:

$$\arctan\frac{1}{x}=\arctan\frac{1}{x+y}+\arctan\frac{y}{x^2+xy+1}$$

Para $x=y=1$, se obtiene:

$$\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}$$

Para $x=2$, $y=1$, se tiene que

$$\arctan\frac{1}{2}=\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{7}$$

Sustituyendo en la primera expresión se obtiene:

$$\frac{\pi}{4}=2\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{7}$$

Esta fórmula la publicó Hutton en 1776. Fue utilizada en 1789 por Greg Von Vega para calcular 143 decimales de π, y por Clausen en 1847 para calcular 248 decimales de π.

Existen numerosas identidades como las anteriores, pero aquí nos interesamos solo en las que pueden demostrarse visualmente. Esto ocurre con la fórmula de Euler. Se parte de la figura 9.

En la figura 9 (arriba), las longitudes de los lados del triángulo grande son las del pequeño multiplicadas por $(x+y)$. Es decir:

$$(x+y),\ (x+y)x,\ (x+y)\sqrt{1+x^2}$$

En la figura 9 (abajo), se ha girado el pequeño en un ángulo recto, manteniendo el vértice común de los triángulos, y después se ha trasladado hacia arriba.

En la figura 10 (Wu, 2004), se ha completado el rectángulo y se observa que $a=b+c$. Finalmente, la fórmula de Euler se deduce de los siguientes valores de las tangentes:

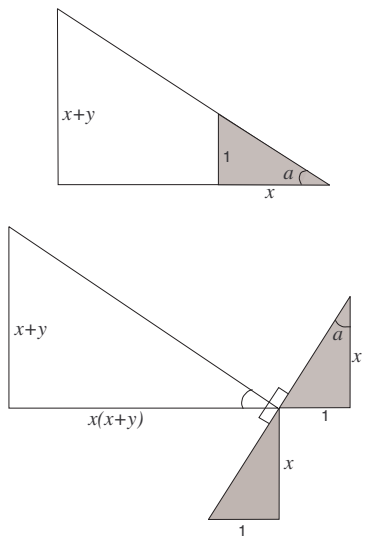


Figura 9

$$\tan a = \frac{1}{x},\ \tan b = \frac{y}{x^2+xy+1} \text{ y}$$

$$\tan c = \frac{B}{A} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{(x+y)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{x+y}$$

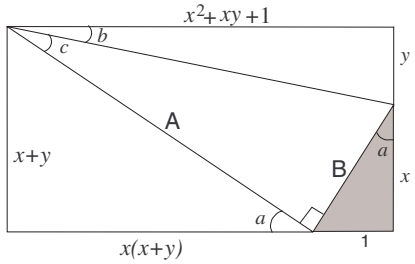


Figura 10

Otras sumas de arcotangentes se pueden visualizar con un solo dibujo (Wu, 2003). Para ello se parte de la figura 11.

En la figura 11 (arriba) se ha inscrito un cuadrado dentro de otro, por tanto el ángulo marcado es $\pi/4$. En la figura 11 (abajo) se ha tomado la parte de abajo del dibujo anterior, y se han resaltado dos triángulos. Es obvio que $\tan a = 1/3$ y que $\tan b = 1/2$. Por ser $\text{sen}(\pi/4) = a + b$, se tiene que:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$$

Partiendo de la figura 11 (abajo), y poniendo el énfasis en los distintos ángulos que se señalan,

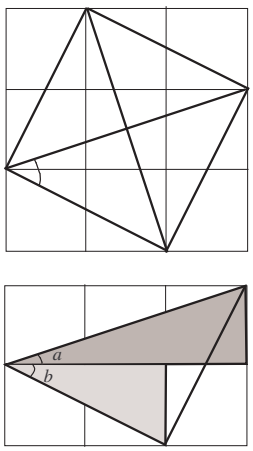


Figura 11

se obtienen otras identidades parecidas. Tomemos la figura 12.

En la figura 12 (arriba) vemos que $\tan a = 3$ y que $\tan b = 2$. Por ser $a + b + \pi/4 = \pi$, se tiene que $\pi = \arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3$. De forma similar, la figura 12 (abajo) permite deducir la fórmula:

$$\frac{\pi}{2} = \arctan 1 + \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$$

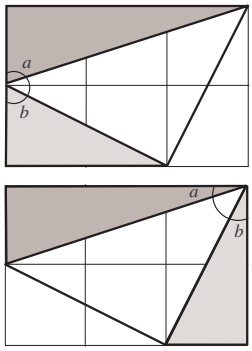


Figura 12

Tomemos la figura 13.

En la figura 13 (arriba) se aprecia que $\tan(a + \pi/4) = 3$ y que $\tan a = 1/2$. Por ser $a + \pi/4 = \arctan 3$, se obtiene $\pi/4 = \arctan 3 - \arctan(1/2)$. De forma similar la figura 13 (abajo) permite deducir la fórmula $\pi/4 = \arctan 2 - \arctan(1/3)$.

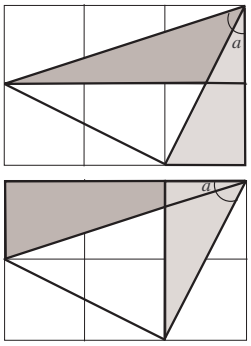


Figura 13

Otras dos identidades pueden visualizarse en las figuras 14 y 15 (Nelsen, 2013).

En la figura 14 se observa que $2a + b = \pi/4$, siendo $\tan a = 1/3$ y $\tan b = 1/7$, de donde se de-

duce la fórmula de Hutton. Finalmente en la figura 15, se ve que $a+b+c=\pi/4$, de donde se deduce la fórmula de Strassnitzky:

$$\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{8}$$

con la cual Dahse en 1844 calculó 200 decimales de π.

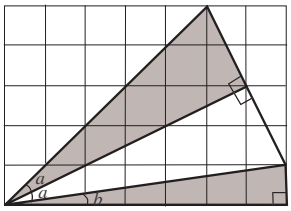


Figura 14

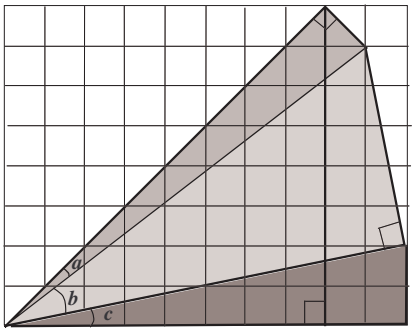


Figura 15

Derivación de funciones inversas

Ya se mencionó antes que no basta con que $f'(a)\neq 0$ para asegurar que f^{-1} sea derivable en $f(a)$. En Ionin (1993) esto se comprueba a través de la siguiente función.

Se define para $f(x)=x$ para $x\leq 0$. Para cada número natural n, se define $f(x)=(1+1/n)x$ si $1/(n+1)\leq x<1/n$. Por ahora la función f está definida en $(-\infty, 1)$, es estrictamente creciente y su imagen está formada por $(-\infty, 0]$ junto con los intervalos $[1/n, 1/n+1/n^2)$. Los huecos entre estos últimos se rellenan definiendo f en cada $[n, n+1)$ como la recta que aplica este intervalo sobre $[1/(n+1)+1/(n+1)^2, 1/n)$, es decir $f(x)=$ $=x/n(n+1)^2+1/(n+1)$ si $x\in[n, n+1)$. La gráfica de la función se observa en la figura 16, y en la figura 17 se muestra un fragmento ampliado de esta gráfica.

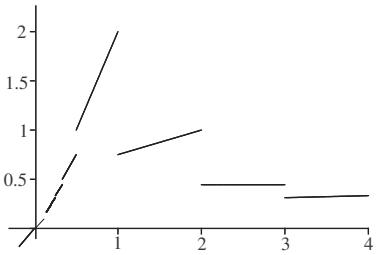


Figura 16

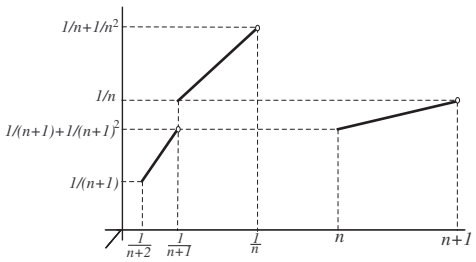


Figura 17

Su dominio es todo $\mathbb{R}$, su imagen es $(-\infty, 2)$ y tiene inversa. Además $f(0)=0$ y $f'(0)=1$ ya que $\lim_{x\to 0}(f(x)/x)=0$. Sin embargo, la función f^{-1} no puede ser derivable en el origen porque no es continua. Y esto ocurre porque no está acotada en ningún entorno del mismo. Invirtiendo la figura 17 se aprecia visualmente esta propiedad.

El problema es que para asegurar la derivabilidad de la inversa en 0 es necesario que f sea continua en un entorno abierto de 0, lo que no sucede porque f es discontinua en cada $1/n$.

En este ejemplo lo importante no son las demostraciones analíticas sino visualizar cómo se va construyendo la función para lograr las características deseadas. Legítimamente, a los profesores nos asalta una pregunta: ¿es necesario todo este esfuerzo para mostrar que las hipótesis de los teoremas deben ser las correctas?

Derivada de la función arcotangente

Las listas de derivadas incluyen las de las inversas de las funciones arcotangente, arcoseno y arcocoseno. Estas fórmulas a veces se deducen de la fórmula general y otras no. Pero los estudiantes siempre parecen tener la sensación de que se in-

cluyen solo para fastidiarlos. En cualquier caso, deberán memorizarlas y eso ya es una molestia.

Ya se mencionó antes la importancia histórica de la función arcotangente. Este hecho podría ser una motivación para obtener su derivada con un cierto cariño. En Schaumberger (1982) se propone hallarla mediante un proceso visual que incluye conceptos como la semejanza de triángulos y el área de un sector circular. Merece la pena conocer el proceso.

Como la función arcotangente es impar, al serlo la tangente, basta obtener su derivada para el caso $x>0$. Se parte de una circunferencia de radio $\sqrt{1+x^2}$ y centro el origen, y se toma la figura 18.

Se observa la siguiente desigualdad:

$$\text{Área triángulo } OED < \text{Área sector circular } OBD < \text{Área triángulo } OBC \qquad [1]$$

Ahora sigue el cálculo de cada área.

1. Área triángulo OBC = Área triángulo OAC − Área triángulo OAB =
$$\frac{x+\Delta x}{2}-\frac{x}{2}=\frac{\Delta x}{2}$$
2. Para calcular el área del triángulo OED, observamos la figura 19.

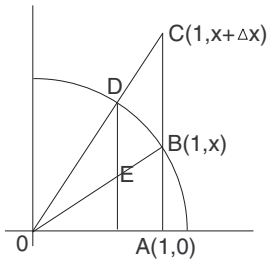


Figura 18

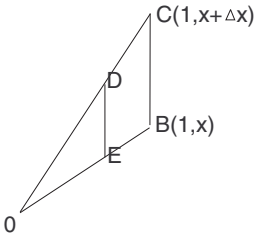


Figura 19

Se aprecia que los triángulos OED y OBC son semejantes, por lo que el cociente entre sus áreas es el cuadrado de la razón de semejanza, es decir:

$$\frac{\text{Área de } OED}{\text{Área de } OBC}=\left(\frac{\overline{OD}}{\overline{OC}}\right)^2=\frac{1+x^2}{1+(x+\Delta x)^2}$$

Por tanto

$$\text{Área de } OED=\frac{1+x^2}{1+(x+\Delta x)^2}\cdot\frac{\Delta x}{2}$$

3. Para calcular el área del sector circular OBD, observamos la figura 20.

Como el radio de la circunferencia del principio es $\sqrt{1+x^2}$, entonces el área del sector circular OBD vale

$$\frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}{2}a-\frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}{2}b=$$
$$=\frac{1+x^2}{2}\left(\arctan(x+\Delta x)-\arctan x\right)$$

Por último sustituyendo en [1] el valor de cada área se obtiene:

$$\frac{1+x^2}{1+(x+\Delta x)^2}\cdot\frac{\Delta x}{2}<$$
$$<\frac{1+x^2}{2}\left(\arctan(x+\Delta x)-\arctan x\right)<\frac{\Delta x}{2}$$

por tanto:

$$\frac{1}{1+(x+\Delta x)^2}<$$
$$<\frac{\arctan(x+\Delta x)-\arctan x}{\Delta x}<\frac{1}{1+x^2}$$

Haciendo tender a cero el incremento de x se obtiene la derivada de la función arcotangente.

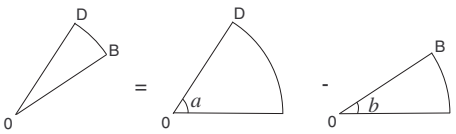


Figura 20

Derivada del arcsen y del arccos

La derivada de la función arcoseno también puede obtenerse con un proceso geométrico si-

milar al anterior (Schaumberger, 1986). Pero para esta función hay otras dos formas visuales de obtener su derivada, y en ambas se utiliza como herramienta la integración. Se basan en la figura 21 (Spiegel, 1956) y en la figura 22 (Johnson, 1998).

El dominio de la función inversa del seno es el intervalo $[-1,1]$. Como la función seno es impar entonces también lo es su inversa, y basta hallar la fórmula de la derivada en $[0,1]$. En la figura 21, el área de la región sombreada se puede obtener de dos formas. Aplicando la fórmula del área de un sector circular, su valor es $(1/2)\text{arcsen}x$, mientras que a través de la integración, su valor es:

$$\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$$

Por tanto:

$$\text{arcsen}\,x = 2\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt - x\sqrt{1-x^2}$$

Finalmente, del teorema fundamental de cálculo se deduce que:

$$(\text{arcsen}\,x)' = 2\sqrt{1-x^2} - \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

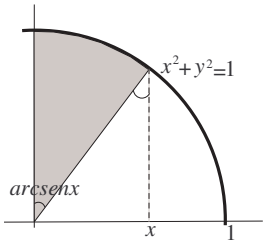


Figura 21

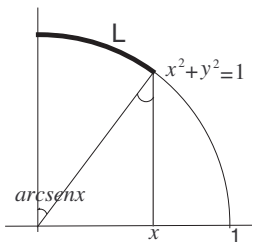


Figura 22

En la figura 22 observamos que la longitud del arco de circunferencia L es $\text{arcsen}x$. Por tanto tomando la función $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, la derivada buscada sale de la igualdad:

$$\text{arcsen}\,x = L = \int_0^x \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

Finalmente, la derivada de la función arcocoseno se puede obtener de una forma visual a partir de la del arcoseno utilizando la figura 23 (Moran, 1991).

El dibujo de la figura 23 (arriba) representa la gráfica de la función $y=\text{arcsen}x$. El dibujo del centro es la gráfica de $y=-\text{arcsen}x$. Trasladándolo unidades hacia arriba se obtiene la gráfica de $y=\arccos x$, y se visualiza la relación:

$$\arccos x = \pi/2 - \text{arcsen}\,x$$

En conclusión, $(\arccos x)' = -(\text{arcsen}\,x)'$.

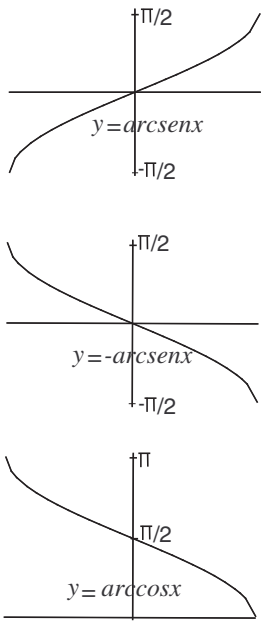


Figura 23

Integración de funciones inversas

La relación entre las gráficas de una función y la de su inversa, da lugar a una técnica que es útil para visualizar propiedades relativas a la integración de una función inversa. Al observar la gráfica

$y=f(x)$de desde el eje x, y la de $x=f^{-1}(y)$ desde el eje y, se obtienen rectángulos que pueden dividirse en zonas cuyas áreas son fáciles de calcular. Tomemos las figuras 24 y 25.

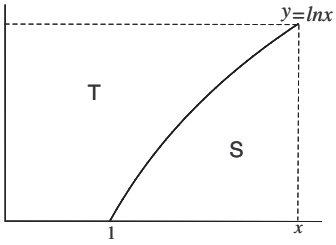


Figura 24

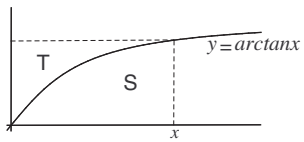


Figura 25

En la figura 24 se observa que $x\ln x=S+T$. Ya que S se calcula integrando la función $y=f(x)=\ln x$, y que T se calcula integrando $x=f^{-1}(y)=e^y$, se verifica:

$$x\ln x=\int_1^x \ln t\,dt+\int_1^{\ln x} e^y\,dy=$$
$$=\int_1^x \ln t\,dt+x-1$$

Por tanto, las primitivas de $y=\ln x$ son: $F(x)=x\ln x-x+C$.

En la figura 25 se observa que $x\arctan x=S+T$, y la misma técnica anterior da lugar a:

$$x\arctan x=\int_0^x \arctan t\,dt+\int_0^{\arctan x}\tan y\,dy$$

Con ayuda de la identidad $\sec^2 x=1+\tan^2 x$, se calcula la segunda integral:

$$\int_0^{\arctan x}\tan y\,dy=-\ln\left(\cos(\arctan x)\right)=$$
$$=\ln\left(\sec(\arctan x)\right)=\ln\left(\sqrt{1+\tan^2(\arctan x)}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$$

Por tanto:

$$\int_0^x \arctan t\,dt=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

y las primitivas de $y=\arctan x$ son .

$$F(x)=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$$

Esta técnica (Holley, 1981) que se ha utilizado en los dos ejemplos anteriores para el cálculo de primitivas, también se emplea para visualizar relaciones entre una función y su inversa. Tomemos la figura 26.

La figura 26 (arriba) corresponde a una función continua y creciente. Se verifica que $A+B=xf(x)-af(a)$, por tanto:

$$\int_a^x f(t)\,dt=xf(x)-af(a)-\int_{f(a)}^{f(x)} f^{-1}(y)\,dy$$

Derivando respecto de x se obtiene:

$$\frac{d}{dx}\left(xf(x)-af(a)-\int_{f(a)}^{f(x)} f^{-1}(y)\,dy\right)=f(x)$$

Es decir, si $x=G(y)$ es una primitiva de $x=f^{-1}(y)$ se verifica:

$$\int f(x)\,dx=xf(x)-G(f(x))+C$$

La figura 26 (abajo) corresponde a una función decreciente. Se verifica que $A+B=x(f(a)-f(x))$, por tanto:

$$-\int_{f(a)}^{f(x)} f^{-1}(y)\,dy+(x-a)f(a)-\int_a^x f(t)\,dt=$$
$$=x(f(a)-f(x))$$

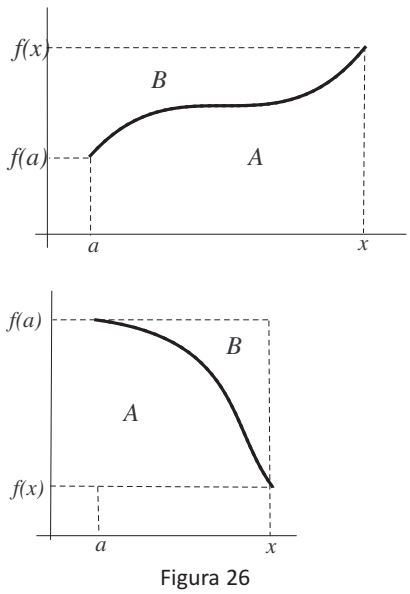


Figura 26

Simplificando y derivando respecto de x se obtiene el mismo resultado que en el caso anterior.

Por último, para funciones no negativas y estrictamente crecientes que pasen por el origen, la técnica anterior permite visualizar (figura 27) la conocida desigualdad (Young, 1912):

$$\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b f^{-1}(y)\,dy \geq ab$$

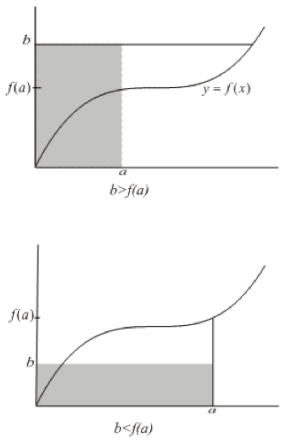


Figura 27

Resumen final

La función inversa es un concepto al que se le dedica poco tiempo en bachillerato y poco espacio en los libros de texto. Esto da lugar a que los alumnos que ingresan en la universidad tengan carencias y una cierta confusión sobre el mismo.

En este artículo se propone aprovechar las posibilidades visuales que tiene para hacer más atractiva su enseñanza. Estas permiten establecer, de una manera atractiva y sencilla, la relación entre la gráfica de una función y la de su inversa. Como consecuencia directa de ello, se pueden visualizar fácilmente algunos resultados relativos a la integración de ambas funciones.

La función arcotangente tiene una gran importancia histórica en la búsqueda de los decimales del número π. La visualización de algunas de las fórmulas utilizadas para ello, junto con la referencia a la historia de las matemáticas, es un recurso que hace que el proceso enseñanza-aprendizaje sea más fluido y motivador.

Las visualizaciones, en relación con la derivación de las funciones inversas, no son tan directas como en otros aspectos que se han mencionado. Sin embargo se basan en conceptos sencillos y atractivos, como la semejanza de triángulos o el área de un sector circular, que se salen del camino estrictamente analítico que se emplea habitualmente.

Referencias bibliográficas

Ayoub, A. B. (1987), «Behold! The Graphs of f and are Reflections About the Line», *The College Mathematics Journal,* n.º 18(1), 52.

Bilan, N. K., e I. Jelic (2014), «On intersections of the exponential and logarithmic curves», *Annales Mathematicae et Informaticae,* n.º 43, 159-170.

Colera, J., y M. J. Oliveira (2009), *Bachillerato 2. Matemáticas II*, Anaya, Madrid.

Couch, E. (2002), «An Overlooked Calculus Question», *The College Mathematics Journal,* n.º 33(5), 399-400.

Escoredo, A., M. D. Gómez, J. Lorenzo, P. Machín, C. Pérez, J. del Río y D. Sánchez (2009), *Matemáticas II. Bachillerato 2*, Santillana, Barcelona.

González, C., J. Llorente y M. J. Ruiz (2009), *Matemáticas, 2.º bachillerato*, Editex, Madrid.

Holley, A. (1981), «Integration by Geometric Insight-A Student's approach», *The two-year College Mathematics Journal,* n.º 12(4), 268-270.

Ionin, Y. (1993), «On the derivative of the inverse function», *International J. of Mathematical Education in Science and Technology,* n.º 24(1), 163-166.

Johnson, C. (1998), «The Derivative of the Inverse Sine», *The College Mathematics Journal,* n.º 29(4), 313.

Kontorovich, I. (2017), «Students confusions with reciprocal and inverse functions», *International J. of Math. Education in Science and Technology,* n.º 48(2), 278-284.

Mamolo A. (2010), «Polysemy of symbols: signs of ambiguity», *The Mathematics Enthusiast,* n.º 7(2-3), 247-262.

Moran, D. (1991), «Graphs and derivatives of the inverse trig functions», *The College Mathematics Journal,* n.º 22(5), 417.

Nelsen, R. B. (2013), «Proof without words: the formulas of Hutton and Strassnitzky», *Mathematics Magazine* 86(5), 350.

Schaumberger, N. (1982), «The derivative of Arctanx», *The College Mathematics Journal,* n.º 13(4), 274-276.

—(1986), «The derivative of arsecx, arctanx and tanx», *The College Mathematics Journal,* n.º 17(3), 244-246.

SPIEGEL, M. R. (1956), «On the derivatives of trigonometric functions», *American Mathematical Monthly* 63(2), pp. 118–120.

Spivak, M. (1986), *Calculus. Cálculo infinitesimal*, Reverté, Barcelona.

Young, W. H. (1912), «On classes of summable functions and their Fourier series», *Proceedings of the Royal Society of London. Series A,* n.º 87, 225-229.

WU, R. (2003), «Arctangent Identities», *The College Mathematics Journal,* n.º 34(2), 115.

— (2004), «Proof without words: Euler's Arctangent Identity», *Mathematics Magazine,* n.º 77(3), 189.

Félix Martínez de la Rosa
Universidad de Cádiz
<felix.martinez@uca.es>

secciones



suma+
Secciones
Noviembre 2017
86
pp. 83-88

Tareas ricas para clasificar y describir figuras

David Barba Uriach
Cecilia Calvo Pesce

En esta entrega propondremos analizar un conjunto de tareas ricas asociadas al estudio de figuras planas o tridimensionales que permiten generar un ambiente de clase centrado en la comunicación y en la construcción del conocimiento a partir de la voz de los alumnos. Al igual que Afzal Ahmed en su libro *Better Mathematics: A Curriculum Development Study*, entendemos por tareas ricas aquellas que en un inicio son accesibles a todos los alumnos, pero que permiten plantear nuevos retos a partir del enunciado inicial y que invitan a los alumnos a tomar decisiones, a especular, formular hipótesis, justificar, explicar, reflexionar, interpretar…, tareas que promueven el debate y la comunicación, alentando preguntas del tipo «¿qué pasaría si?».

Defendemos la opinión de que en primaria la geometría se puede trabajar a partir de actividades que, como piezas de un puzle, pueden intercambiarse sin tener que seguir un orden previamente definido. Lo que debemos tener claro cuando diseñamos estas actividades es que representen un buen recubrimiento de los aspectos que se deben trabajar en el aula. Para ello debemos incluir:

— Actividades que trabajen con objetos geométricos en el plano, con objetos geomé-

Ell@s tienen la palabra

Artículo solicitado por *Suma* en julio de 2017 y aceptado en septiembre de 2017

tricos tridimensionales y actividades que relacionen los objetos tridimensionales con sus representaciones planas (desarrollos, vistas, representaciones en perspectiva, etc.).

— Actividades que trabajen con objetos geométricos estáticos y actividades que estudien las transformaciones que se pueden realizar con objetos geométricos (giros, simetrías, ampliaciones, reducciones, distorsiones).

— Actividades que analicen las propiedades de las figuras más allá de la medida de su área, perímetro o volumen y actividades que ayuden a entender estas magnitudes más allá de conocer una serie de fórmulas. También debemos incluir actividades que impliquen la estimación previa a calcular esas medidas.

— Actividades que involucren:
  - Uso de materiales para manipular (de la vida cotidiana, como pueden ser envases, o didácticos como pueden ser el Polydron o el geoplano).
  - Construcción de cuerpos tridimensionales (por ejemplo, con plastilina) o de figuras planas (por ejemplo, plegando papel).
  - Representación de figuras planas o tridimensionales sobre diferentes tipos de papel (blanco, cuadriculado, con trama isométrica), a mano alzada, utilizando regla, compás, semicírculo y escuadra o utilizando un software (por ejemplo, Geogebra).

— Actividades que pidan identificar objetos geométricos, describirlos y representarlos.
  - Debemos proponer situaciones variadas para evitar que los alumnos reconozcan un objeto geométrico sólo en posiciones prototípicas y sean capaces, por ejemplo, de reconocer un prisma aunque no esté apoyado sobre una de sus bases o un triángulo rectángulo aunque sea su hipotenusa la que aparece paralela al margen inferior de la hoja.
  - También han de ser variadas nuestras propuestas en relación a las representaciones que pedimos a los alumnos, ya que son muy diferentes e igualmente importantes los requerimientos implicados en la representación de un cuadrado sobre una hoja cuadriculada, sobre un papel blanco o en Geogebra.
  - Las propiedades de un objeto forman parte de su descripción y conocer algunas de ellas es una parte importante del trabajo en geometría. Pero este conocimiento no ha de venir de la transmisión de información por parte del maestro o del libro, sino a partir del descubrimiento de patrones y regularidades de las figuras (por ejemplo, que los ángulos de un triángulo suman 180° o que todas las pirámides tienen la misma cantidad de caras que de vértices).
  - Las actividades que presentamos a los alumnos son las que determinan la extensión del vocabulario de geometría que desarrollamos en el aula ya que entendemos el aprendizaje de términos geométricos al servicio de las necesidades de descripción implicadas en la actividad.

Ejemplos de actividades

Geoplanos

Los geoplanos permiten proponer una cantidad enorme de actividades interesantes. En «Algunas actividades para hablar de medida» (*Suma* 77) y «Manipular, representar y describir figuras planas» (*Suma* 79) planteamos varias utilizando geoplanos de retícula cuadrada, pero también podemos proponer actividades sobre geoplanos isométricos o circulares como la de la figura 1.

Es muy importante ir más allá de representar los cinco triángulos posibles en el geoplano de 8 puntos, siete en el de 9 puntos, ocho en el de 10 puntos y diez en el caso de 11 puntos. Se puede ver, por ejemplo, que solo cuando la cantidad de puntos es par se pueden obtener triángulos rectángulos (dos en el caso de 8 puntos y también dos en el caso de 10 puntos) o que solo cuando

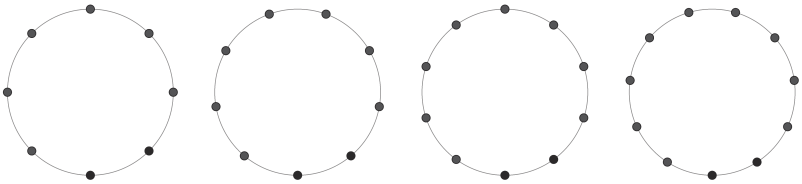


Figura 1. ¿Cuántos triángulos diferentes se pueden representar en cada uno de los siguientes geoplanos circulares? Clasifícalos.

la cantidad de puntos es múltiplo de tres se pueden obtener triángulos equiláteros.

Barras de Mecano

Las barras de Mecano son una buena excusa para proponer actividades como la que mencionamos en el artículo «Manipular, representar y describir figuras planas» (*Suma* 79) y que pedía cuántos triángulos diferentes se podían obtener con barras de 3, 4 y 5 cm. Pero también podemos proponer tareas similares con regletas Cuisenaire (figura 2).

En la figura 3 presentamos las tres posibles parejas de triángulos que se pueden formar con esas seis regletas. También aquí la parte más rica de la tarea está más allá de presentar estas tres soluciones, radica en la pregunta: ¿por qué no hay otras soluciones?

Tangram

El tangram también inspiró actividades ricas en el artículo «Manipular, representar y describir figuras planas» (*Suma* 79), pero hay muchas otras que podemos presentar.

Sin duda los requerimientos de la tarea cambian si proponemos la tarea a alumnos que no



Figura 2. Representa una pareja de triángulos con seis regletas: la del 2, la del 3, la del 4, la del 5, la del 6 y la del 7. ¿Cuántas soluciones diferentes puedes dar? Verifica que en todas las soluciones, como mínimo uno de los dos triángulos es obtusángulo. ¿Cómo es, en cada caso, el otro triángulo?

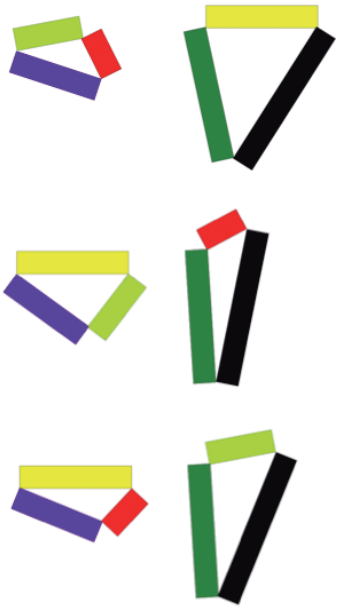


Figura 3

disponen de las piezas para manipular, pero también se puede proponer la tarea para ser realizada sobre papel o utilizando un simulador virtual del tangram. La búsqueda de razones por las cuales las once disposiciones de piezas son las únicas posibles, se complementa aquí con la discusión de que diferentes disposiciones de piezas nos llevan a la misma solución. La última pregunta permite extender la tarea acercándonos al trabajo del área desde la idea básica: la determinación de la cantidad de «unidades de área» que cubre la composición (figura 5).

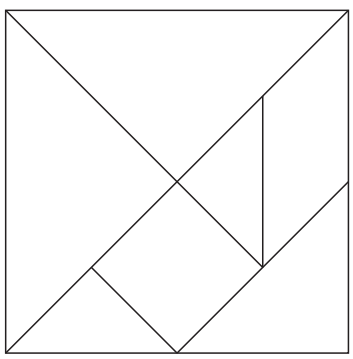


Figura 4. ¿Cuántos rectángulos diferentes se pueden obtener usando piezas del tangram clásico? Si la pieza más pequeña tiene área 1, ¿cuánto mide el área de cada rectángulo?

No es cuestión de quedarse solo en la geometría plana, debemos proponer tareas ricas en el contexto de la geometría del espacio. Y los diversos materiales existentes para construir poliedros a partir de sus caras (Polydron, Creator, Plot) nos permiten proponer tareas como la que surge de preguntarse cuántos poliedros convexos diferentes se pueden hacer usando únicamente piezas triangulares.

Se puede encontrar más información sobre este problema en el post «Poliedros con caras triangulares» del blog del *Puntmat* [1].

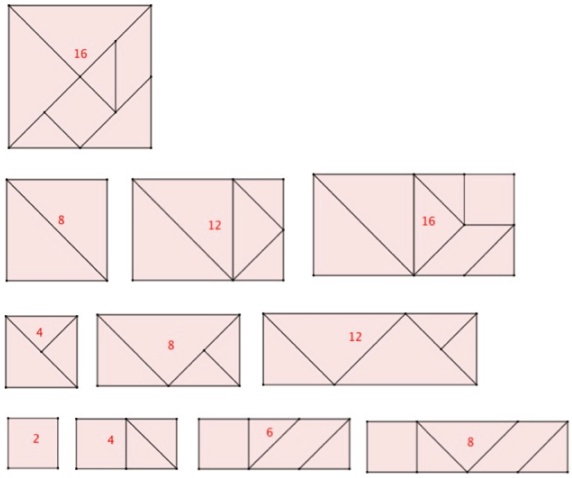


Figura 5

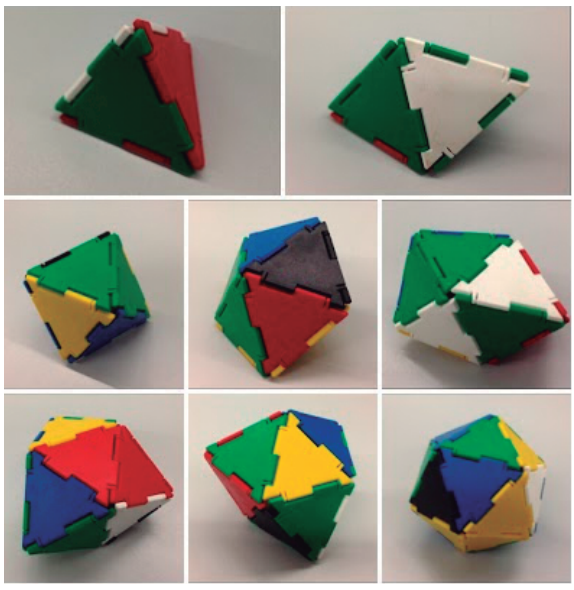


Figura 6

Cubos encajables

Con relación a actividades que relacionen los objetos tridimensionales con sus representaciones planas, en «Representar cuerpos tridimensionales mediante vistas» (*Suma* 75) ya mencionamos tareas vinculadas con el uso de cubos encajables (Multilink).

La respuesta a la pregunta del pie de la figura 7 es que se pueden haber usado 5, 6, 7, 8, 9 o 10 cubos y además para cada una de estas cantidades, exceptuando en el caso del 10, existen soluciones diferentes con la misma cantidad de cubos. En este sentido podemos preguntar, por ejemplo, cuántos objetos hechos con 8 cubos generan tales vistas, pero debemos tener presente que la cantidad de soluciones para esta segunda pregunta puede variar si el material no son cubos encajables, ya que soluciones como la que se ve en la figura 8 dependen de la posibilidad de encajar cubos.

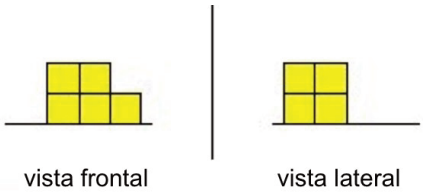


Figura 7. ¿Cuántos cubos se han usado para construir un objeto que genera estas dos vistas?

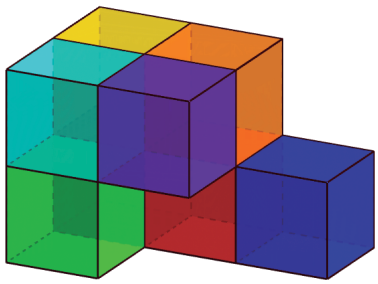


Figura 8

Los cubos encajables también dan lugar a este problema que conocimos a través de Jordi Font[2]: ¿Cuántos prismas rectangulares puedes hacer con 48 cubos? ¿Podrías ordenarlos según su área la-

teral? ¿Qué pasaría si la cantidad de cubos disponibles fuera 47, 49 o 50?

En la figura 9 vemos los dos prismas de menor área lateral entre los nueve que se pueden obtener con 48 cubos:

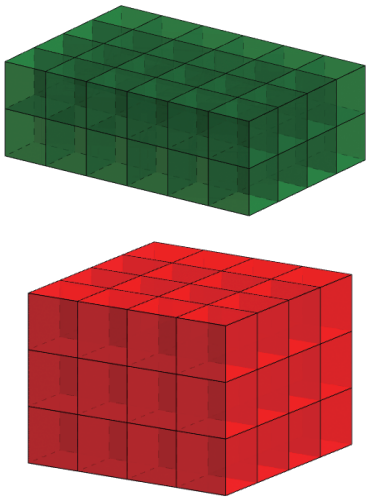


Figura 9

No siempre tenemos que involucrar un material. Por ejemplo, en la siguiente tarea (figura 10) se pide a los alumnos que generen ejemplos de cuadriláteros a partir del número de ángulos rectos, agudos u obtusos y los representen, sin manipular, sino recurriendo al repertorio de ejemplos que han ido construyendo a partir de sus experiencias previas.

cuadrilátero con	ningún ángulo	un único ángulo	dos ángulos	tres ángulos	cuatro ángulos
obtuso					- -
recto				- -	
agudo					- -

Figura 10

Tal como comentábamos en «Describir poliedros contando caras, aristas y vértices» (*Suma* 71) comenzamos con material manipulativo, pero la geometría también debe hacerse imaginando. Por ejemplo, podemos proponer: si pintamos las caras de un poliedro de manera que las caras que comparten una arista sean de colores diferentes, ¿cuál es la mínima cantidad de colores que necesito para pintar una pirámide de base triangular? ¿Y una de base cuadrangular? ¿Y de base pentagonal? ¿Observas algún patrón? ¿Y si cambiamos prismas por pirámides? ¿Y por bipirámides?

Tal y como comentábamos al inicio, no solo debemos estudiar las figuras de manera estática, sino también los movimientos que sobre ellas podemos realizar, por ejemplo, las simetrías. En este sentido, creemos especialmente inspiradora la propuesta de Don Steward en su blog *Median*[3] (figura 11).

En la figura 12 puede verse una solución aún incompleta de la tarea sobre la cual se encontrará más información en el post «Puzles y figuras simétricas» del blog del *Puntmat*[4].



Figura 11. Coloca las tres piezas de manera que generen una figura con un eje de simetría.

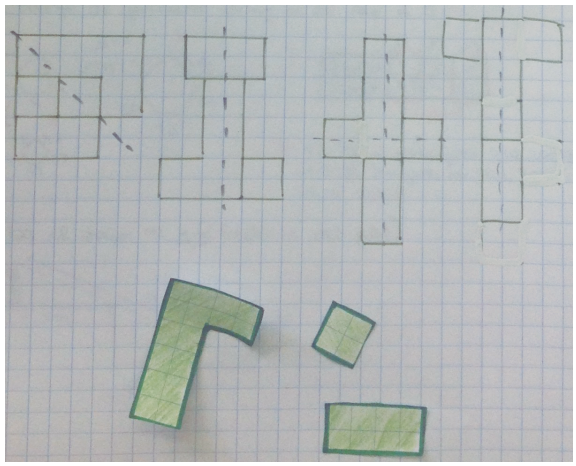


Figura 12

Reflexión final

Nos hemos centrado en tareas sobre geometría que podemos plantear en las aulas de primaria con el objetivo de practicar habilidades básicas en este ámbito como son la clasificación y la descripción de figuras en un ambiente de resolución de problemas. Como es habitual en esta sección hemos seleccionado tareas con un alto potencial de comunicación, tareas que al poner en común sus soluciones invitan a los alumnos a hablar de geometría.

David Barba Uriach
Universitat Autònoma de Barcelona

Cecilia Calvo Pesce
Escola Sadako (Barcelona)
<tienenlapalabra@revistasuma.es>

1 https://puntmat.blogspot.com.es/2013/03/poliedres-amb-cares-triangulars.html
2 http://matematiquesmarines.blogspot.com.es/2015/11/prismes-amb-policubs.html
3 http://donsteward.blogspot.com.es/2011/06/and-yet-another-three-shapes.html
4 https://puntmat.blogspot.com.es/2017/09/puzzles-figures-simetriques.html

suma+ 86
Secciones
Noviembre 2017
pp. 89-92

Viva la Revolución. Jo Boaler

Carme Burgués Flamarich

Vale la pena

En esta ocasión les quiero presentar la web de la Universidad de Stanford.<youcubed.org>. Según el *Urban Dictionary, cubed* (al cubo) es una manera de decir grandioso, sorprendente, increíble..., entre otros muchos significados que no vienen al caso. ¿Cómo fue tu clase? «It was cubed!». Creo que las fundadoras de la web han querido hacer un guiño a los visitantes diciendo de algún modo: eres grandioso o grandiosa, eres *youcubed*.

Jo Boaler es profesora de Educación Matemática en la Universidad de Stanford (California, USA) y es la directora de *youcubed*. Es la autora del primer MOOC (*massive online open courses*) de enseñanza y aprendizaje matemático, con gran éxito por cierto. Si quieren inscribirse busquen en Google «Jo Boaler MOOC for students», de la que hay una versión en español.

Antes de contarles lo que pueden encontrar en esta web, y para animarles a consultarla, me parecen oportunas algunas reflexiones. Primero unas cuestiones:

¿Cómo se enteran de las últimas investigaciones en aprendizaje y enseñanza de las matemáticas?

¿Qué plan siguen para incorporarlas a su quehacer en clase?

¿Con qué soporte?

Artículo solicitado por *Suma* en julio de 2017 y aceptado en septiembre de 2017

¿Saben que muchos problemas de aprendizaje se han estudiado y se sabe cómo actuar para evitarlos o resolverlos?

¿Cree, de verdad, que todos sus alumnos pueden aprender matemáticas de alto nivel?



Figura 1. Jo Boaler

O, tal vez, sus creencias sobre cómo se aprenden las matemáticas y cómo deben enseñarse hacen que las preguntas anteriores le resulten innecesarias.

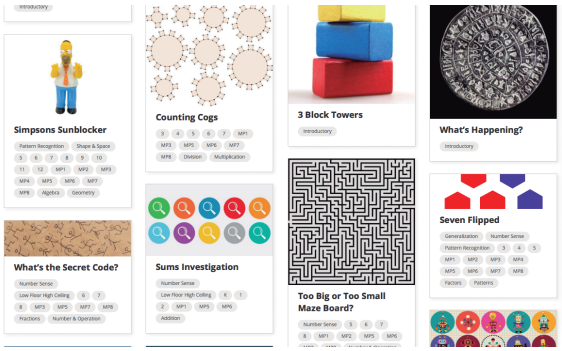


Figura 2. Actividades seleccionadas por el equipo de *youcubed*

También puede ser que sus alumnos amen las matemáticas y tengan éxito en su aprendizaje, es decir, usen los números con flexibilidad y de manera creativa, sean capaces de representar las situaciones matemáticas de manera visual, crean en sí mismos como aprendices matemáticos y se involucren en las tareas propuestas, sean capaces de hacerse nuevas preguntas, los errores se conviertan en un reto, estén interesados en comprender las soluciones de sus compañeros y discutan las matemáticas implicadas en profundidad…, entonces usted ¡tiene que contar a sus compañeros cómo trabaja con sus clases!

Aún en este caso, puede encontrar en esta página información, formación y recursos para mejorar el aprendizaje matemático de todos sus alumnos.

En primer lugar lea atentamente sus objetivos y filosofía, es esencial para entender cómo aplicar las ideas y recursos que se muestran.

Su objetivo declarado es inspirar y capacitar a los maestros y profesores poniendo los medios necesarios para que accedan a las últimas investigaciones sobre el aprendizaje matemático. Para ello pone al alcance de los docentes artículos en los que se describen y comentan los resultados de investigaciones que ellos consideran relevantes para el aprendizaje matemático.

Cuando vayan a la página encontrarán un menú en el que no deben perderse la columna de la izquierda: *Ideas and Impact*. Allí descubrirán las bases de la metodología que se formula y las investigaciones (referencias e ideas esenciales) en las que se apoyan:

— Matemáticas abiertas y creativas
— Sentido numérico
— Matemáticas visuales
— Mentalidad matemática de crecimiento
— Evaluación
— Agrupación mixta de los alumnos
— Trabajo en grupo
— Educación superior
— Profundidad, no velocidad
— Neurociencia
— Impacto de *youcubed* en los docentes.

De la serie de artículos del apartado anterior, que se va ampliando, me gustaría convencerles que leyeran algunos de ellos en primer lugar. No son muchos, no tratan de colapsar el interés de los maestros, pero son relevantes porque contradicen algunas creencias sobre la educación matemática.

En primer lugar el titulado «Fluency Without Fear: Research Evidence on the Best Ways to Learn Math Facts» donde además de consejos y su justificación, basados en la investigación, se ofrecen actividades como ejemplos de trabajo en el tema numérico. Se previene contra las prue-

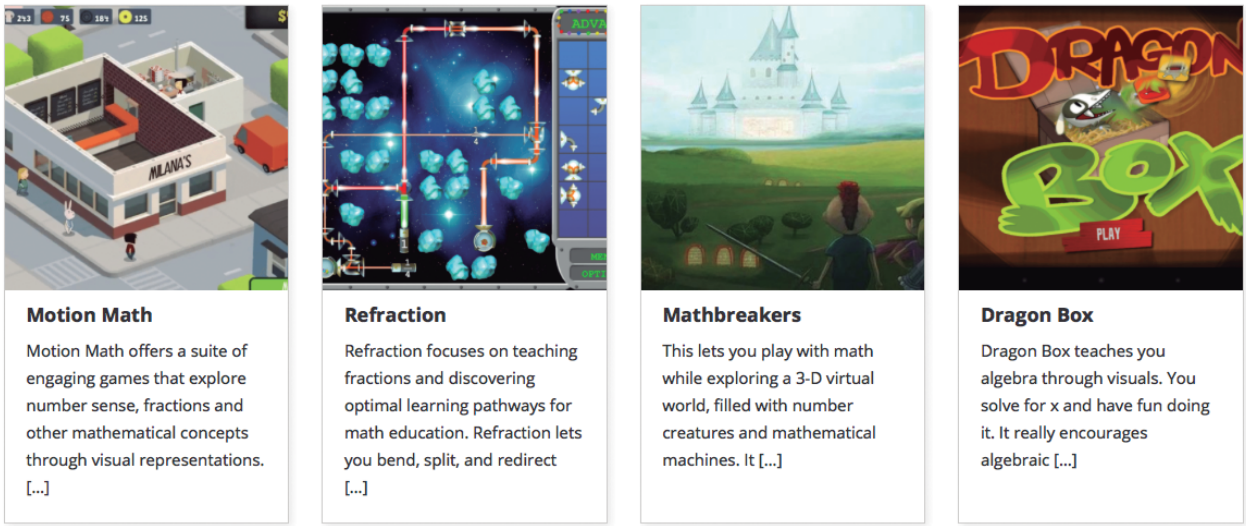


Figura 3. El apartado de juegos y aplicaciones

bas cronometradas, se muestra cómo desarrollar el sentido numérico que implica el uso de los números y las relaciones numéricas con flexibilidad.

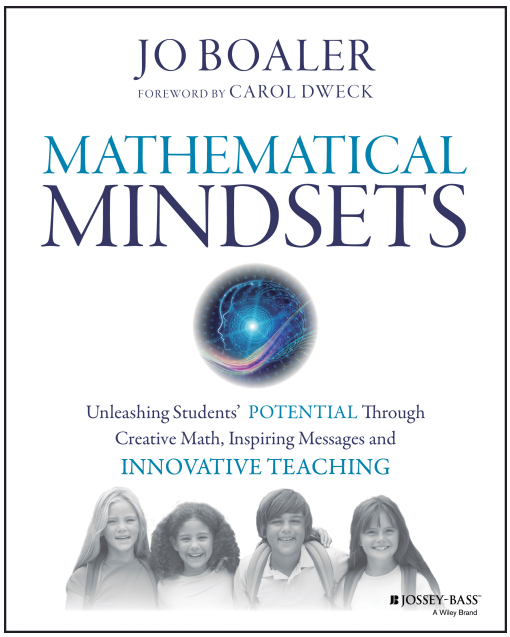


Figura 4. *Mathematical Mindsets*

La neurociencia muestra que en el cerebro, a través del aprendizaje, se forman nuevas trayectorias, se refuerzan las existentes o se conectan. Teorías, como la de Carol Dweck sobre la mentalidad de crecimiento sostienen que la «inteligencia matemática» no se mantiene inalterable, sino que a base de esfuerzo y motivación se puede desarrollar en cualquier individuo. La flexibilidad en el manejo de los números está relacionada con la formación de conexiones entre aprendizajes.

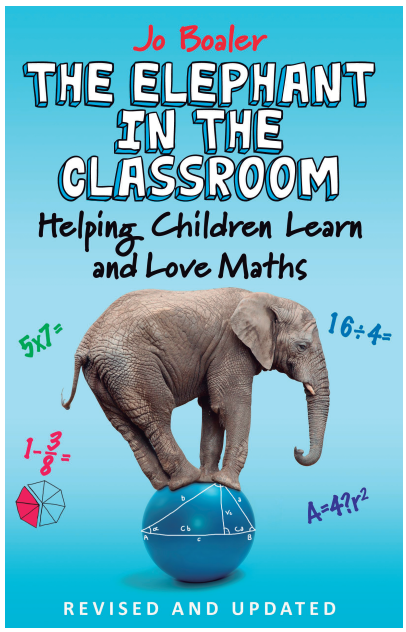


Figura 5. *The elephant in the classroom*

Un segundo artículo a leer es «Seeing as understanding: The Importance of Visual Mathematics for our Brain and Learning» que se completa con «Visual Mathematics Activities». Describe diferentes investigaciones sobre el modo en que el cerebro trabaja matemáticamente. Los resultados descubren el papel de la visuali-

zación aunque se trabaje con números. Proponen actividades para fortalecer las conexiones que permiten potenciar el uso de la visualización y una mayor comprensión matemática. Son propuestas con consejos y aportando ejemplos de alumnos.

En tercer lugar lean «The Mathematics of Hope: Moving from Performance to Learning in Mathematics Classrooms». Encontrarán aquí la adaptación de la idea de Dweck «mentalidad de crecimiento» al caso de las matemáticas, detallando aspectos y poniendo ejemplos. Remarcable el tratamiento de los errores.

En la segunda columna encontrarán actividades (figura 2) seleccionadas por el equipo de *youcubed*. Todas son interesantes, se ofrecen consejos de cómo proponerlas y, en muchos casos, soluciones de los alumnos.

También hay un apartado para las familias: artículos y videos. Son especialmente interesantes los artículos «Por qué una revolución matemática» y «Matemáticas de la esperanza: de la acción al aprendizaje» que les interesará leer.

Otra sección es para los alumnos, textos y videos para animarlos a pensar en sí mismos como personas que son capaces de aprender matemáticas de alto nivel. El apartado de juegos y aplicaciones (figura 3) es especialmente interesante. Los pósteres que se encuentran al final de la columna son de motivación y contienen ideas importantes para los alumnos.

La tercera columna del menú recoge todos los videos de la página. Los hay dedicados a cómo enseñar, y también de docentes que cuentan sus experiencias.

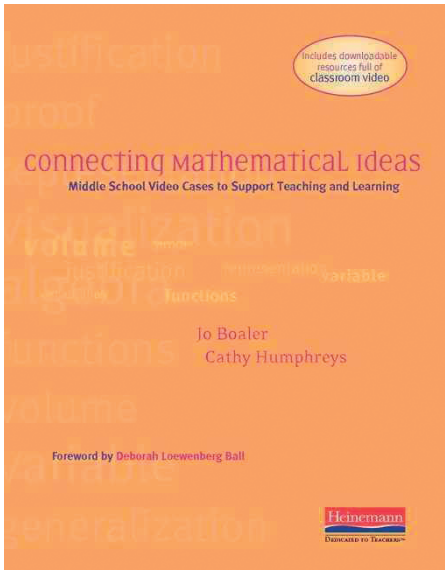


Figura 6. *Connecting mathematical ideas*

Cursos, evidencias de los resultados, libros y noticias de los medios configuran el resto del menú. Para los que estén interesados en profundizar más en la manera de enfocar la docencia de las matemáticas y el porqué pueden leer tres de los libros de Jo Boaler (figuras 4, 5 y 6), especialmente el primero.

Y, por cierto, si se han preguntado a qué viene el título de este número, es por que Jo Boaler firma sus artículos con un «Viva la Revolución» literalmente.

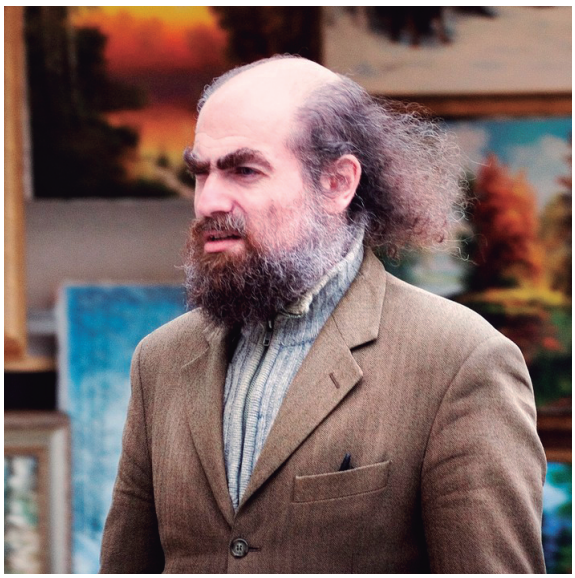
Espero que algunas de las cosas que lean les hagan progresar hacia la mejora de la enseñanza de las matemáticas. Me parece esencial que crean que todos sus alumnos pueden aprender matemáticas de alto potencial y actúen en consecuencia. Esta es la verdadera revolución.

Carme Burgués Flamarich
Universidad de Barcelona
<valelapena@revistasuma.es>

suma+
Secciones
Noviembre 2017
86
pp. 93-102

Grigori Perelman. El vencedor de la conjetura de Poincaré

Antonio Pérez Sanz



En puertas del tercer milenio

Madrid
Palacio de Congresos del IFEMA
22 de agosto de 2006
10 de la mañana

Madrid es la capital mundial de las matemáticas. Más de 3 500 matemáticos venidos de más de 120 países han invadido la capital de España en este aún caluroso verano. Jóvenes y menos jóvenes, vestidos de manera poco formal, muchos con bermudas y zapatillas, de todas las razas y colores de piel llenamos el enorme hall del recinto ferial del IFEMA, formando largas colas para recoger nuestras acreditaciones y el programa del XXV ICM (*International Congress of Mathematicians*).

Cientos de periodistas cubren el acto de apertura, presidido por el rey Juan Carlos I, Esperanza Aguirre (presidenta de la Comunidad de Madrid), Alberto Ruiz Gallardón (alcalde de Madrid) y los presidentes de la Unión Matemática Internacional (IMU) John Ball y de la Real Sociedad Española de Matemáticas (RSME), Carlos Andradas. Entre todos los asistentes flota una misma pregunta: ¿vendrá Grigori Perelman a recoger su medalla Fields?

A las 12 h comienza el acto. Tras los discursos de rigor de bienvenida, y un concierto de cuerda

Artículo solicitado por *Suma* en julio de 2017 y aceptado en septiembre de 2017

a cargo de un trío de violín y guitarra conducido por Ara Malikian, el rey va a proceder a entregar las cuatro medallas Fields de esta edición consideradas los «Nobel» de Matemáticas y que se otorgan cada cuatro años a matemáticos menores de 40 años. Los elegidos son los rusos Andrei Okounkov y Grigori Perelman, el australiano Terence Tao y el francés Wendelin Werner.

John Ball inicia su discurso en el que presentará a los ganadores por orden alfabético:

> Las matemáticas son una profesión en la que cuentan la integridad y los valores. Nosotros discutimos libremente de nuestros trabajos con los otros sin miedo de ser plagiados y los resultados son comunicados libremente antes de la publicación formal. Los procedimientos editoriales son justos y adaptados y los trabajos adquieren su valor por sus méritos y no por la manera en la que son presentados. Tales son las normas seguidas por la gran mayoría de los matemáticos. Las excepciones son escasas y se hacen destacar…

Parece que Ball está haciendo una alusión a Perelman y la controversia en torno a la demostración de la conjetura de Poincaré.

El nombre y la fotografía de cada uno de los candidatos aparecen en la enorme pantalla que preside el imponente salón de actos. Okounkov, Tao y Werner suben a recoger su galardón de manos del rey. Cuando en la pantalla aparecen el nombre y la foto de Perelman se escuchan primero aplausos al enumerar sus méritos, pero después un silencio de hielo recorre el Palacio de Congresos… Grigori Perelman no recogió su medalla.

«Lamento profundamente que el Dr. Perelman haya declinado la medalla Fields», anuncia el presidente de la IMU, John Ball, quien viajó ex profeso a San Petersburgo para intentar convencerle. Pero, nos dice: «Quedé desilusionado por su rechazo. Su motivación gira alrededor de su sensación de aislamiento de la comunidad matemática».

Los corrillos y los comentarios de los congresistas y de los periodistas al acabar el acto no cesaban. Cada cual tenía su versión. Pero el hecho es que Grigori no pisó Madrid. Sin embargo, el ICM-2006 de Madrid fue el congreso de Perelman.

Tras la comida, la primera conferencia plenaria la impartió, con gran expectación, Richard Hamilton. Habló de sus aportaciones sobre el flujo de Ricci, la técnica que él había introducido cuatro décadas antes. Desarrolló en la sesión la noción de entropía, introducida por Perelman para demostrar el teorema de no-colapso que permite cortar una variedad en porciones geométricas. Señaló que los revolucionarios razonamientos de Perelman eran totalmente correctos:

> Estoy tan agradecido a Grisha por haber resuelto esto. Yo había raspado con las uñas para probarlo en algunos casos, ahora ya no tendré que preocuparme de eso… Estoy tan asombrado como todo el mundo de comprobar que todo eso funciona. Estoy muy agradecido a Grisha por haber terminado esto.

El jueves 24, John Morgan, especialista en geometría de la Universidad de Columbia y evaluador de los artículos de Perelman, dio otra conferencia sobre la conjetura de Poincaré. El enorme salón de actos del IFEMA estaba lleno a rebosar y expectante. Morgan hizo una historia de la conjetura, resaltando que cada avance sobre ella había contribuido a desarrollar nuevas matemáticas y que sus autores habían recibido la medalla Fields: Milnor, Smale, Freedman, Donaldson, Thurston y Yau. Con voz calmada y serena al final de su exposición anunció de forma solemne: «Grigori Perelman ha resuelto la conjetura de Poincaré».

El público que hasta ese momento había permanecido en un silencio casi religioso estalló en una explosión de aplausos. Habían sido necesarios más de cien años para responder a la pregunta que Poincaré había formulado en la última página de la última sección del último de sus grandes artículos de topología.

¡La conjetura de Poincaré había sido vencida!

Las razones del rechazo de Perelman

En conversación telefónica a la agencia rusa Interfax, Perelman declaró: «He rechazado el premio. La razón principal es mi desacuerdo con la comunidad matemática. Sus decisiones no me gustan y las considero injustas. […] Pienso que la contribución del matemático americano Richard Hamilton a la resolución de este problema no es inferior a la mía».

El matemático más popular… a su pesar

Desde 2006, «Grisha» Perelman (aunque su nombre es Grigori siempre ha firmado sus artículos con el diminutivo con el que le llamaba su madre), es sin duda el matemático más popular a nivel mundial. Y no será por sus apariciones en público o en los medios de comunicación.

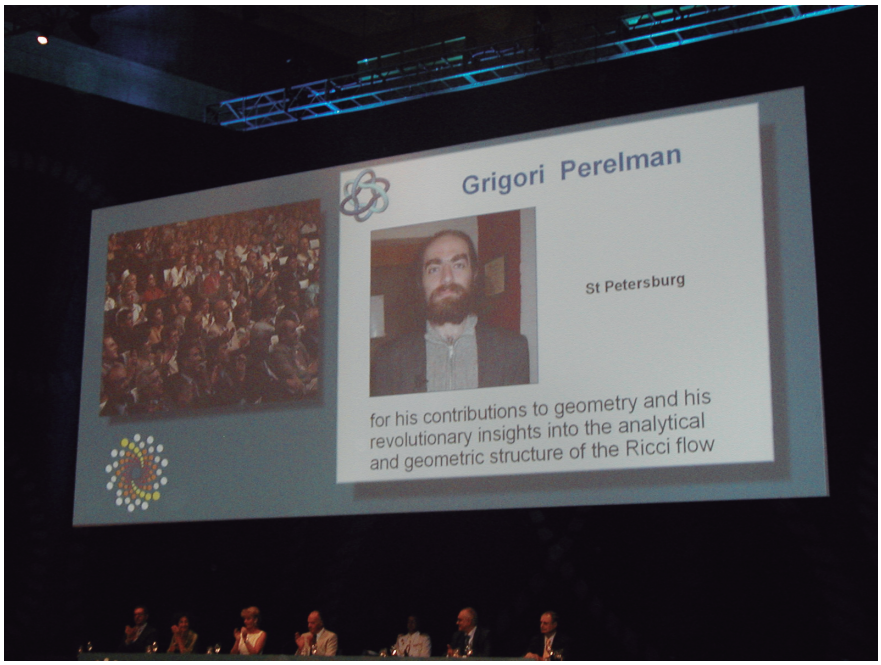
La prensa mundial se hizo eco de la polémica demostración de la conjetura formulada por el matemático francés Henri Poincaré a principios del siglo XX. Su fotografía, con su aspecto desaliñado, su mirada profunda, su barba y su melena como contrapunto de una más que incipiente alopecia, aportaba reminiscencias de Rasputín. No era la imagen de hombre normal. Para los periodistas era la imagen de un genio… o de un loco.

Y como loco le calificaron muchos al negarse también a recibir el millón de dólares de recompensa otorgado por el Instituto Clay de Matemáticas de Massachusetts por haber resuelto uno de los siete problemas del milenio.

El 24 de mayo del año 2000 (el año mundial de las matemáticas), el matrimonio Landon y Lavinia Clay, millonarios y filántropos, decidieron crear un nuevo instituto dedicado a fomentar el avance y la difusión de las matemáticas, el Instituto Clay, y dotarlo económicamente. El consejo superior del mismo decidió que la mejor manera de conseguir estos fines era identificar siete problemas abiertos y ofrecer un millón de dólares para el autor de la solución de cada uno de ellos.

Los siete problemas fueron presentados en la Academia de Ciencias de París, en la conocida como «conferencia del milenio» por los miembros del Consejo del Instituto. Su presidente, Arthur Jaffe, inició la presentación reproduciendo uno de los últimos discursos de Hilbert de 1930, el primero en ser retransmitido por radio, un claro paralelismo con los 23 retos de Hilbert para ser resueltos a lo largo del siglo XX. La voz de Hilbert terminaba el discurso con su famosa frase: «Debemos saber, y sabremos».

A continuación, tomó la palabra Timothy Gowers, medalla Fields en 1998, destacando la importancia de las matemáticas y de la necesidad de dejar a los matemáticos administrar los fondos de investigación en función de su propio sentido de la belleza y de la armonía. Le siguieron en el uso de la palabra Michael Atiyah, medalla Fields en 1996, y John Tate, especialista en teoría de



Entrega de medallas Fields. ICM 2006
(Foto: Antonio Pérez Sanz)

números, que presentaron los enunciados y las circunstancias históricas de los siete problemas seleccionados. Todos conocidos, todos extraordinariamente difíciles y tremendamente importantes. El Consejo había hecho bien su trabajo.

Uno de los problemas era la conjetura de Poincaré. Un reto de casi un siglo de vida. Un problema importante para los matemáticos, para los científicos y para el mundo en general.

Apenas habían pasado dos años cuando el 11 de noviembre de 2002 Perelman publica un artículo en línea en <www.arXiv.org>, la web de intercambio público de publicaciones de matemáticas, física e informática. El título es *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications* y tiene una extensión de 30 páginas. Envió unos cuantos correos a amigos y conocidos anunciando la publicación. El artículo, brillante y lúcido, está dirigido a los matemáticos que están trabajando sobre el flujo de Ricci y comienza con una llamada breve a los trabajos de Hamilton:

> Hamilton ha descubierto una propiedad notable que le permite comparar la curvatura de una solución en diferentes puntos y en diferentes momentos. Estos resultados llevan a Hamilton a formular ciertas conjeturas sobre la estructura de los límites en dimensión tres [...]; el presente artículo viene a confirmar esas conjeturas.

Esas conjeturas, un muro en apariencia invencible, conducían de forma directa a demostrar la conjetura de la geometrización para variedades tridimensionales cerradas.

Perelman brindaba una descripción de las grandes líneas de su artículo. Las 10 primeras secciones se aplican en todas las dimensiones y sin hipótesis sobre la curvatura. Las tres últimas trataban la aproximación de Hamilton para llegar a la conjetura de geometrización: «Al final, en la sección 13 esbozamos rápidamente la conjetura de geometrización». Prometía un segundo artículo que publicaría cuatro meses después e incluso un tercero ocho meses más tarde.

Poco más o menos Perelman venía a decir a quien lo quisiese entender que acababa de demostrar lo que Hamilton había conjeturado sobre el flujo de Ricci. En fin, que había demostrado la conjetura de geometrización y, por tanto, la conjetura de Poincaré.

Las reacciones al anuncio de Perelman no se hicieron esperar. Vitali Kapovitch, de la universidad de California envió un correo a Perelman:

> —Saludos, Grisha. Lamento molestarte, pero mucha gente me hace preguntas sobre el tema de tu artículo «Fórmula de entropía para el flujo de Ricci...». Si he comprendido bien: si no puedes aún hacer todas las etapas del programa de Hamilton, ¿puedes hacer lo necesario para poder demostrar la geometrización? Vitali.

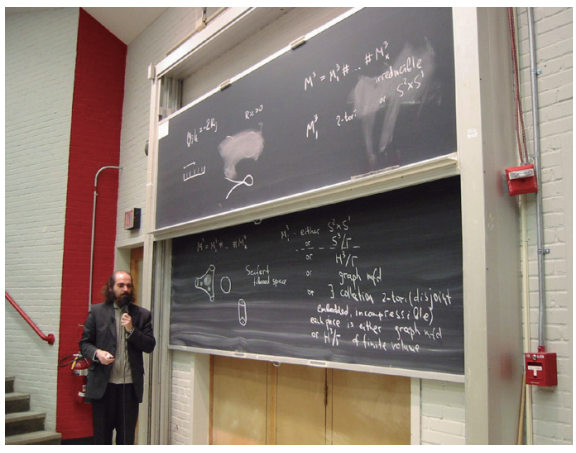
La respuesta de Perelman fue breve y contundente:

> —Así es. Grisha.

La expectación era máxima. Los matemáticos esperaban con impaciencia el siguiente artículo de Perelman con la demostración prometida en la sección 13 de su artículo de noviembre. Y el artículo vio la luz, también en <www.arXiv.org>, el 20 de marzo de 2003, esta vez con una extensión de tan solo 22 páginas.

Dos matemáticos de la Universidad de Michigan, Bruce Kleiner y John Lott pusieron en marcha una web en la que los matemáticos de todo el mundo pudieron no solo acceder a los dos artículos de Perelman, sino también aportar sus puntualizaciones y sus argumentos para clarificar los puntos más complicados del razonamiento de Perelman.

El mes siguiente, Perelman viajó a Estados Unidos para impartir dos conferencias que cambiarán la historia de las matemáticas. A su regreso a Rusia, el 17 de julio publicó su tercer artículo (en <www.arXiv.org>) en el que proporcionaba un re-



«Grisha» Perelman

sultado analítico suplementario que le permitía, utilizando los resultados de su segundo artículo, demostrar directamente la conjetura de Poincaré. Tan solo siete páginas para vencer a Poincaré.

Dos conferencias para la historia

Tarde del lunes 7 de abril de 2003. El público abarrota el anfiteatro del Massachusetts Institute of Technology (MIT). Hay gente de pie y sentada en los pasillos, delante de la primera fila de butacas y hasta en el fondo de la sala. El conferenciante que ha levantado tanta expectación es un joven matemático de 36 años, Grigori Perelman, vestido con una chaqueta arrugada y zapatillas de tenis, con barba y una calvicie más que incipiente, comienza tímido y vacilante: «No soy muy bueno para las presentaciones lineales, daré prioridad a la agudeza antes que a la claridad».

Un murmullo nervioso recorre la sala. Ese murmullo que precede a los grandes acontecimientos. Perelman toma una tiza y escribe en la pizarra la ecuación del flujo de Ricci:

$$\partial_t g_{ij} = -2Ric_{ij}$$

Richard Hamilton fue el primero en utilizar este flujo en 1981, demostrando que cualquier 3-variedad que admita una métrica de curvatura positiva, admite también una métrica de curvatura constante.

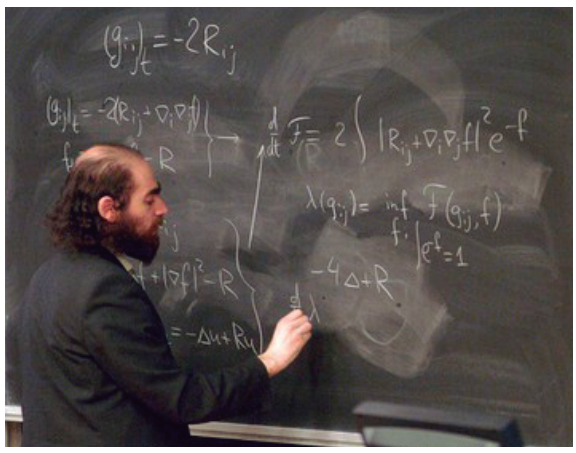
La inmensa mayoría de los asistentes han leído el artículo de noviembre y muchos de ellos han trabajado o están trabajando en el teorema de uniformización o en la conjetura de Poincaré. Intuyen que son testigos privilegiados de un momento histórico.

Dos semanas más tarde una escena parecida tiene lugar en Stony Brook, en el campus de la Universidad de Nueva York. Pero en esta ocasión en la sala hay un buen número de periodistas, algo bastante raro en una conferencia de matemáticas. La voz de que Perelman ha resuelto uno de los problemas del milenio del Instituto Clay y que puede recibir el premio de un millón de dólares ha corrido como la pólvora. El flash de una cámara se dispara. «Nada de fotos» le conmina un Perelman molesto al fotógrafo. Sin embargo, y por suerte para todos nosotros, sí hubo fotos, aunque sin flash.

Las herramientas matemáticas que Perelman estaba utilizando tenían menos de dos décadas de vida, incluso algunos de sus creadores estaban entre el público. La mayoría tomaba notas, para seguir después los razonamientos con más calma, y para poder mostrárselas a sus amigos con orgullo: ¡sí, yo estuve allí!

Las notas se subirían a internet durante la misma conferencia y varios días y semanas después. De hecho, Perelman dio más detalles técnicos durante los días siguientes en un seminario organizado precipitadamente. Pero se negó a dar ninguna entrevista a los periodistas.

Regresó a San Petersburgo a los pocos días, rechazando las invitaciones de las más prestigiosas universidades estadounidenses.



Conferencia de Perelman en el MIT

Los méritos de Perelman. Presentación de Perelman como galardonado con la medalla Fields en el ICM a cargo de John Lott, profesor de la Universidad de Michigan

Grigori Perelman nació en 1966, en lo que entonces era la Unión Soviética, y se doctoró en la Universidad Estatal de San Petersburgo. Durante los años 1990 pasó una temporada en Estados Unidos, incluyendo una estancia como Miller Researcher de la Universidad de California en Berkeley. Durante algunos años fue investigador en el Instituto Steklov de Matemáticas, en San Petersburgo, y en 1994 fue conferenciante invitado en el Congreso Internacional de Matemáticos de Zurich.

El nombre de Grigori Perelman se ha hecho familiar entre el público interesado en cuestiones científicas. Su trabajo del periodo 2002-2003 proporcionó una rompedora visión del estudio de las ecuaciones de evolución y sus singularidades. Y más significativo aún, sus resultados han proporcionado una forma de resolver dos importantes problemas de la topología: la conjetura de Poincaré y la conjetura de la geometrización de Thurston. Después de más de tres años de intensivo escrutinio, los mayores expertos no han encontrado serias objeciones al trabajo. Los pequeños errores y detalles oscuros han sido aclarados por diversos grupos, lo que ha permitido a John Morgan decir en su charla del 24 de agosto en el IACM que «en 2003 Perelman resolvió la conjetura de Poincaré».

Durante décadas, la conjetura de Poincaré ha sido considerada uno de los más importantes problemas de las matemáticas. La cuestión recibió una mayor atención del público en general cuando fue incluido por el Instituto Clay de Matemáticas como uno de los siete Problemas del Milenio, para cada uno de los cuales esta institución estableció, en el año 2000, un premio de un millón de dólares por su resolución. El trabajo de Perelman sobre la conjetura de Poincaré supone la primera candidatura seria para obtener uno de estos premios.

La conjetura de Poincaré pertenece a la topología, que estudia las propiedades fundamentales de las formas geométricas, las que permanecen inalteradas cuando se deforman. Un ejemplo sencillo de forma es el de una 2-esfera (una esfera ordinaria), que es la superficie en dos dimensiones de una bola en un espacio tridimensional. Otra forma de visualizar la 2-esfera es pensar en un disco colocado sobre un plano bidimensional e identificar los puntos de su borde que pasarían a ser el polo norte de la 2-esfera. Aunque, globalmente, una 2-esfera es muy diferente de un plano, cada punto de la esfera está en una región que semeja un plano. Esta propiedad de ser localmente como un plano es la propiedad definitoria de una variedad de dimensión 2 o 2-variedad. Otro ejemplo de una 2-variedad es el toro, que es la superficie de un «donut». Aunque, localmente, la 2-esfera y el toro parecen iguales, globalmente sus topologías son diferentes: sin agujerear una 2-esfera no hay forma de deformarla para convertirla en un toro. He aquí otra manera de ver esta distinción: consideremos un lazo colocado sobre una 2-esfera. No importa donde se coloque, el lazo podrá ser reducido a un punto, y la reducción se puede hacer sin salirse de la esfera. Ahora imaginemos un lazo colocado sobre un toro; si rodea el agujero del toro el lazo no puede ser reducido a un punto. Si el lazo puede ser reducido a un punto en una variedad, esta se denomina simplemente conexa. La 2-esfera es de este tipo; mientras que el toro, no.

El análogo de la conjetura de Poincaré en dos dimensiones sería la afirmación de que cualquier 2-variedad simplemente conexa y finita puede ser deformada hasta convertirse en una 2-esfera, y esta afirmación es correcta. Es natural preguntarse entonces qué podemos decir de una 2- variedad que no sea simplemente conexa. Resulta que pueden clasificarse de acuerdo con el número de agujeros que tengan: se pueden deformar hasta convertirse en un toro, o en un doble toro (con dos agujeros), o en un triple toro (la superficie de un «pretzel»), etc. Uno necesita entonces otras dos hipótesis técnicas en esta cuestión: compacidad y orientabilidad.

La geometría ofrece otra forma de clasificar las 2-variedades. Cuando uno observa topológicamente una variedad no existe la noción de distancia. Si la dotamos de esta cualidad, es decir, añadimos una métrica y medimos la distancia entre dos de sus puntos obtenemos la noción geométrica de curvatura. Las 2-variedades pueden clasificarse por su geometría: una 2-variedad con curvatura positiva puede deformarse para convertirse en una 2-esfera; una con curvatura 0 puede deformarse en un toro, y una con curvatura negativa puede deformarse en un toro con más de un agujero.

La conjetura de Poincaré, propuesta originalmente por el matemático francés Henri Poincaré en 1904, se refiere a las variedades de dimensión 3 o 3-variedades. Un ejemplo sencillo de este tipo es la 3-esfera: de forma análoga con la 2-esfera, uno obtiene una 3-esfera tomando una bola en tres dimensiones e identificando los puntos de su contorno en un solo punto (igual que el espacio tridimensional es el hogar natural de una 2-esfera, el de una 3-esfera es un espacio tetradimensional, el cual resulta difícil de visualizar). ¿Puede cada 3-variedad ser deformada para convertirse en una 3-esfera? La conjetura de Poincaré afirma que la respuesta a esta pregunta es afirmativa.

De igual manera que con las 2-variedades, uno puede pensar en una clasificación de las 3-variedades. En los años 70, el medallista «Fields» William Thurston hizo una nueva conjetura, denominada *Conjetura de geometrización de Thurston*, que proporciona una forma de clasificar las 3-variedades. Esta conjetura ofrece una visión global de las 3-variedades que incluye la conjetura de Poincaré como un caso especial. Thurston propuso que, de forma análoga al caso de las 2-variedades, las 3-variedades podían ser clasificadas utilizando la geometría. Pero la analogía no llega muy lejos, porque estas son mucho más diversas y complejas que las 2-variedades. Thurston identificó y analizó ocho estructuras geométricas y conjeturó que permitían clasificar todas las 3-variedades posibles. Su trabajo revolucionó el estudio de la geometría y la topología. Las ocho estructuras geométricas fueron intensamente investigadas y la conjetura de la geometrización fue verificada en muchos casos. El propio Thurston la demostró en un gran número de variedades. Sin embargo, la demostración global de la conjetura permaneció sin resolver.

En 1982, Richard Hamilton identificó una ecuación de evolución particular, llamada *flujo de Ricci*, como la clave para resolver las conjeturas de Poincaré y de geometrización de Thurston. El flujo de Ricci es similar a la ecuación del calor, que describe cómo fluye el calor de la parte más caliente de un objeto a la más fría, hasta homogeneizar la temperatura de manera uniforme en todo el objeto. La idea de Hamilton fue utilizar el flujo de Ricci para homogeneizar las 3-variedades y mostrar que su geometría se ajusta a la clasificación de Thurston. Durante más de veinte años, Hamilton y otros especialistas en geometría analítica hicieron grandes progresos en la comprensión del flujo de Ricci, pero no consiguieron resolver el problema de las «singularidades», que son regiones donde la geometría, en lugar de evolucionar hacia la homogeneidad, muestra repentinos e incontrolados cambios.

Así estaban las cosas cuando el trabajo de Perelman apareció en escena. En una serie de artículos, iniciados a finales de 2002 y colocados en un archivo de *preprints*, Perelman mostró revolucionarios resultados sobre el flujo de Ricci y sus singularidades. Proporcionó nuevas formas de analizar la estructura de las singularidades y mostró cómo se relacionan con la topología de las variedades. Perelman rompió el parón que se había producido en el programa que Hamilton había establecido y validó la idea de utilizar el flujo de Ricci para demostrar las conjeturas de Poincaré y de geometrización de Thurston. Aunque el trabajo de Perelman parece poner un definitivo punto final en la demostración de ambas conjeturas, sus contribuciones no terminan aquí. Las técnicas que ha introducido para manejar singularidades en el flujo de Ricci han generado una gran excitación entre los especialistas del análisis geométrico y están empezando a utilizarse para resolver otros problemas en este campo. La combinación de una visión profunda y unas técnicas brillantes señalan a Perelman como un matemático extraordinario. Al iluminar el camino hacia la resolución de dos problemas fundamentales de la topología en dimensión 3 ha producido un profundo impacto en las matemáticas.

La conjetura de Poincaré

Esta conjetura afirma que «una variedad tridimensional cerrada con grupo fundamental trivial es homeomorfa a la esfera tridimensional».

En una esfera bidimensional, una 2-esfera, todo lazo cerrado se puede contraer hasta reducirlo a un solo punto. Esta propiedad caracteriza la esfera ordinaria y todas las superficies homeomorfas a ella. La superficie de un toro (un flotador) no cumple esta condición, pues hay lazos que no se contraen en un punto: aquelos que le rodean transversalmente.



Poincaré conjeturó que esta misma propiedad caracterizaba también a las 3-esferas o esferas tridimensionales. Curiosamente fue más fácil demostrarlo en dimensiones superiores a 3. En la década de los 60 Stephen Smale, medalla Fields en 1966, lo demostró para $n \geq 7$, Erik C. Zeeman[1] dio la demostración para $n = 5$ y John R. Stalling consiguió demostrarlo para $n = 6$. Para el caso $n = 4$ hubo que esperar más de veinte años, hasta 1981, año en que Michael Freedman obtuvo la demostración para las 4-variedades. Freedman obtuvo la medalla Fields en 1986.

Para las 3-variedades, las únicas a las que hacía referencia Poincaré, habría que esperar otros 20 años.

Pero… ¿quién es Perelman?

En 2006 Grigori Perelman abandonó el mundo de las matemáticas. Ya en diciembre de 2005 había dejado su trabajo en el Instituto Steklov de Matemáticas, institución dependiente de la Academia Rusa de Ciencias. Actualmente vive con su madre en un modesto apartamento en Kúpchino, un suburbio de San Petersburgo y la última estación de la línea 2 del metro. No quiere que nadie le moleste. Tras el ICM de Madrid y el premio del Instituto Clay decidió negarse a conceder entrevistas, incluso por teléfono. Al principio muchos curiosos tomaban la línea 2 del metro para encontrarle, pues su aparición en la televisión rusa le había hecho reconocible. Algunos se atrevían a hacerle una foto con su móvil. Así tenemos imágenes suyas en el metro o con la bolsa de la compra que hace en las tiendas del barrio.

¿Quién es este personaje tan exótico? Grigori Yakovlevich Perelman nació en Leningrado (ahora San Petersburgo) el 13 de junio de 1966 en el seno de una familia judía. Su madre Lubov Lvovna era una prometedora licenciada en matemáticas. Al terminar la carrera iba a iniciar el doctorado bajo la dirección de Garal'd Isidorovich Natanson. Las posibilidades de hacer un doctorado para una mujer y judía en 1960 en la URSS eran muy escasas, tenía que ser muy brillante y renunciar a pausas por embarazos y maternidad.



Perelman pillado en sus quehaceres cotidianos

Lubov tuvo que elegir entre el doctorado y la maternidad y gracias a su elección Grisha vio la luz. Después nacería su otra hija Elena, también matemática, que emigraría a Suecia.

Lubov les inculcó a los dos un gran amor por las matemáticas, por el esfuerzo y por la música. Desde muy pequeño, Grisha fue entrenado para competir y brillar en los torneos matemáticos tan populares en la URSS. A los diez años ganó su primer torneo, lo que le permitió inscribirse en el círculo matemático del Palacio de los pioneros de Leningrado, bajo la dirección de un experto en preparar a jóvenes para las olimpiadas matemáticas, Sergei Rukshín. La recomendación iba firmada por el propio Natanson. Rukshin recuerda que era un niño introvertido y talentoso. Para resolver los problemas no escribía nada en el papel, hacía los cálculos mentalmente hasta encontrar la solución; solo después la pasaba al papel. Una serie de tics repetidos anunciaban que estaba cerca de la solución.

A los 14 años Perelman ingresó en la selecta Escuela 239 de Leningrado en la que se formaban los jóvenes superdotados para los estudios de física y matemáticas. Allí estuvo bajo la tutela del profesor jefe Valeri Rízhik, un notable pedagogo, y de Nikolái Kuksa. El programa de estudios lo había diseñado el propio Kolmogorov. Rízhik recuerda que Perelman se sentaba en silencio siempre al final de la clase. Solo hablaba para corregir los errores de sus compañeros que veía en la pizarra. Centrado en las matemáticas y un tanto aislado de sus compañeros, no solía participar en las excursiones y actividades organizadas en el internado. Además de la preparación formal de la Escuela 239 Grisha siguió asistiendo al círculo de Rukshín.

La entrada en la facultad de matemáticas era algo más complicado. Solo había dos plazas para alumnos judíos y el examen era realmente duro.

Olímpico notable

En 1981, Ruskhín propuso a dos de sus alumnos para participar en la olimpiada nacional de matemáticas: uno era Perelman y el otro Alexander

Levin. Perelman resolvió todos los problemas de la prueba nacional, lo que le valió ser seleccionado para el equipo soviético que participaría en la olimpiada internacional que se celebraría el año siguiente en Budapest. Levin falló solo uno y fue eliminado.

En la olimpiada de Budapest, Grisha obtuvo la puntuación máxima (42 puntos) y la medalla de oro al resolver correctamente los siete problemas. Sólo otros dos participantes lo consiguieron: el alemán Bruno Haible y el vietnamita Lê Tu Quòc Thang, en la actualidad profesor titular en el Georgia Institute of Technology de Estados Unidos. Además de la medalla recibió un cubo de Rubik, inventado solo ocho años antes.

Este triunfo permitió al joven Grigori entrar a los 16 años directamente sin prueba de acceso en la facultad de Matemáticas de la Universidad de Leningrado, la recompensa por muchos años de sacrificio. El primer año tuvo como profesor de geometría al mítico Alexander Danilovich Alexandrov. Este pronto descubrió el talento de Grisha y lo convirtió en su protegido hasta que se trasladó a Moscú.



Perelman y su madre en San Petersburgo

Perelman era un alumno ejemplar que vivía en su propio mundo, ignorando la realidad exterior y con poca relación con sus compañeros. Nunca se interesó por la política, las fiestas o las chicas. Vivía por y para las matemáticas. Gracias al apoyo de Alexandrov y después de Yuri Burago, Grigori acabó su carrera de forma brillante, obtuvo su grado como Candidato de la Ciencia, el equivalente al doctorado, con su tesis titulada *Superficies en silla en espacios euclídeos*. Tras la graduación, Perelman comenzó a trabajar en Leningrado en el prestigioso Instituto Steklov de Matemáticas de la Academia Rusa de las Ciencias, donde al cabo de pocos años se convertiría en uno de los mejores geómetras del mundo. Su sueldo no era gran cosa, el equivalente a 150 euros al mes, aunque en la URSS no era un mal salario.

En 1992 fue invitado a pasar sendos semestres en la Universidad de Nueva York y en la Universidad de Stony Brook donde pronto reconocerían su genio. En 1993 aceptó una beca de investigación de dos años en la Universidad de Berkeley. Su nombre empieza a sonar en los círculos matemáticos americanos. Entre sus activos están sus aportaciones en la clasificación de variedades con curvatura integral limitada de Alexandrov y la demostración de la llamada «conjetura del alma», resultado que permite caracterizar variedades cuya curvatura puede ser nula. Si la curvatura es siempre positiva la variedad es homeomorfa al espacio euclídeo. Perelman demostró que si la curvatura era nula en ciertas regiones y positiva en el resto, existía una región del espacio, llamada alma, que contenía de alguna forma toda la topología del espacio. Perelman demostró que el alma consistía en un único punto siempre que la curvatura no fuera nunca negativa. Públicó el artículo[2] en 1994, lo que le valió una invitación a participar en el ICM de Zurich de ese mismo año.

Fue a Princeton a principios de 1995 a dar una conferencia sobre su prueba de la conjetura del alma. Para entonces se había convertido ya en el mejor geómetra del mundo. La Universidad de Princeton mostró interés por contratarlo como profesor asistente, pero él se negó a presentar un currículo; dijo que, si lo querían, que le dieran un puesto de profesor titular. No lo hicieron y lo lamentarían. ¿Por qué esas exigencias?

¿Para qué querían un currículo suyo si habían asistido a sus conferencias? Encontraba absurdo que le pidieran datos sobre su persona. Tampoco aceptó una propuesta para ser profesor titular en Tel Aviv. Volvió al Instituto Steklov en el verano de 1995 y a vivir con su madre en el pequeño apartamento de Kúpchino.

En 1996, la Sociedad Matemática Europea celebró su segundo congreso cuatrienal en Budapest, en el que instituyó premios para matemáticos menores de 32 años. Burago, entonces presidente de la Sociedad Matemática de San Petersburgo, y Mijaíl Grómov, el introductor de Perelman en Occidente, presentaron la candidatura de Grigori, que salió victoriosa. Pero este, al enterarse, dijo que no quería el premio y que no lo aceptaría. Incluso amenazó con montar un escándalo si anunciaban que él era el ganador.

Pero Perelman no había dado la espalda al universo matemático. Su cabeza trabajaba en la demostración de la conjetura de geometrización. En 2000 escribe un correo a Michael Anderson interesándose por sus trabajos sobre el flujo de Ricci. En noviembre de 2002, Anderson recibiría un correo de Perelman en el que este le informaba de que había publicado su famoso artículo *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications* en internet. El resto de la historia ya es conocido por todos:

> Los vacíos existen por todos lados. El poder de calcularlos nos da grandes posibilidades. Sé cómo manejar el Universo. Ahora díganme, ¿por qué tendría que correr a buscar un millón? [3]
>
> G. Perelman

Referencias bibliográficas

Cabezas, E., y V. Miquel (2006), «Demostración de Hamilton-Perelman de las Conjeturas de Poincaré y Thurston», *La Gaceta de la RSME*, Vol. 9.1, 15-42.

Devlin, K. (2007), *Les Énigmes mathématiques du 3e millénaire*, Le Pommier.

Fernández, R. (2010), «La conjetura de Perelman», diario *El País*, 03/10/10.

O'Shea, D. (2008), *La conjetura de Poincaré*, Tusquets Editores, Barcelona.

Quirós, A. (2006), «Las Medallas Fields y otros galardones del ICM 2006», *La Gaceta de la RSME*, Vol. 9.3, 639–654.

Antonio Pérez Sanz
Sociedad Madrileña de Profesores de Matemàticas
<tercermilenio@revistasuma.es>

1 Véase la página web de projecteuclid: https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.bams/1183524149

2 Perelman, G. (1994), «Proof of the Soul Conjeture of Cheeger and Gromoll», *Journal of Differential Geometry*, 40, 299-305.

3 Última entrevista a Perelman realizada por el periodista ruso Alexandr Zabrovski el 28/04/2011.

suma+ 86
Secciones
Noviembre 2017
pp. 103-110

Matemáticas a todo color

José Luis Muñoz Casado

Dos de las novedades más llamativas de GeoGebra son el rastro y color dinámico. El primero de ellos nos permite dejar la huella de un objeto allá por donde pasa y el segundo nos permite cambiar el color del objeto de forma dinámica.

En la pestaña Propiedades de un objeto podemos encontrar ambas posibilidades, en la pestaña Básico encontraremos la opción para activar el rastro y en la pestaña Avanzado la opción para cambiar el color. Antes de adentrarnos en el color dinámico necesitaremos algunas nociones *informáticas*.

Un píxel, acrónimo «pix» de *picture* y «el» de *element*, consiste en la unidad más pequeña de información que compone una imagen. Las pantallas gráficas muestran imágenes dividiendo la pantalla en miles (o millones) de píxeles, dispuestos en filas y columnas. Los píxeles están tan juntos que parece que estén conectados.

Un píxel se compone realmente de tres puntos, uno rojo, uno azul y uno verde. Idealmente, los tres puntos convergen en el mismo pixel. Cada píxel se codifica mediante un conjunto de bits de longitud determinada, denominada profundidad de color; por ejemplo, en modo color de 8 bits permite mostrar 2^8 colores diferentes o gama de grises.

CreoGebra

Artículo solicitado por *Suma* en julio de 2017 y aceptado en septiembre de 2017

A la hora de codificar los bits, es necesario definir que modelo de color se va usar. El modelo más común es el RGB (*Red*-Rojo, *Green*-Verde, *Blue*-Azul), pero existen otros como CMYK o sRGB. El modelo de color RGB permite crear un color compuesto por los tres colores primarios según el sistema de mezcla aditiva. De esta forma, según la cantidad de cada uno de ellos que se use en cada píxel se obtendrá el resultado del color final del mismo.

El modelo RGB asigna un valor de intensidad a cada píxel que oscila entre 0 (negro o sin intensidad) y 255 (blanco o máxima intensidad) para cada uno de los tres colores, pudiendo obtener toda la gama desde 0 hasta 255.

En la pestaña **Avanzado** de las propiedades de un objeto encontramos la opción de modificar la cantidad de rojo, verde y azul.

Inicialmente los tres campos aparecen vacíos. A la hora de introducir valores es conveniente tener en cuenta que GeoGebra no asigna un valor entre 0 y 255 sino un valor entre 0 y 1, donde cero es sin intensidad y 1 es máxima intensidad del color.

La verdadera potencia del color dinámico de GeoGebra reside en que en los campos **Red**, **Green** y **Blue** no solo podemos poner un valor fijo sino un valor variable.



Figura 1. Modelo RGB



Figura 2. Pestaña Avanzado. Colores dinámicos

Guía de construcción

— Con el botón dibujamos un punto.
— Con el botón derecho sobre el punto *A*, pulsamos Propiedades. En la pestaña Básico activamos el rastro y en la pestaña Avanzado escribimos en la casilla Red, *x*(*A*). Automáticamente se rellenarán los otros campos (figura 3).
— Cerramos la ventana preferencias y movemos el punto A.

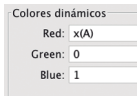


Figura 3. Color de un punto

Como se puede observar aparece una regularidad (figura 4). Como hemos mencionado antes, GeoGebra asigna colores con valores entre 0 y 1, el comando **x(A)**, la ordenada del punto *A* puede tener otros valores. En realidad, GeoGebra usa una función para asignar el color:

— Si el valor o expresión introducida está entre 0 y 1 asigna el mismo valor.
— Si el valor o expresión es mayor que 2 toma su valor módulo 2
— Si el valor o expresión (o su resto módulo 2) está entre 1 y 2 toma 2–el valor introducido.

Se puede simplificar escribiendo

$$c(x)= 1 - abs(1- x+ 2\ floor(x/2))$$

x el valor o expresión del color, **abs** es el valor absoluto y **floor** es la función parte entera. El motivo de esta asignación está en la continuidad de color o más bien en evitar discontinuidades en el color. Aún así, la función $c(x)$ es periódica, $c(x) = c(x) + 2n$.

Una forma de evitar esa periodicidad es componer con una función no periódica, por ejemplo una exponencial.

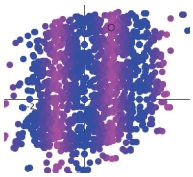


Figura 4. Rastro del punto A

A lo largo de todo el texto usaremos la Vista gráfica 2 para situar los deslizadores y demás controles que insertemos, dejando la Vista gráfica 1 para nuestros diseños.

La configuración de la pantalla sería la figura 5. En la web hemos diseñado un plantilla para trabajar con colores dinámicos.

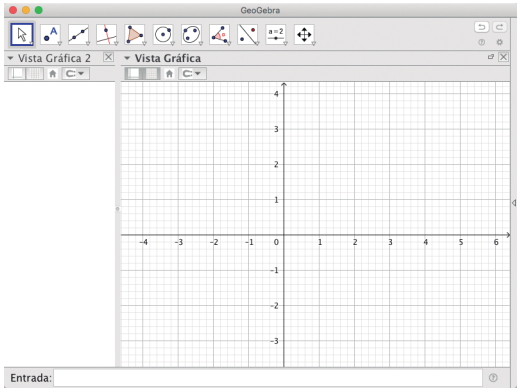


Figura 5. Configuración de las vistas

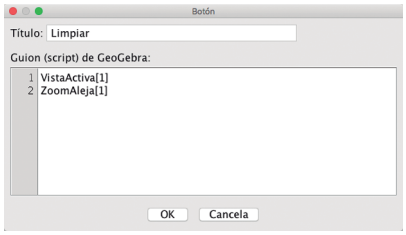


Figura 6. Botón limpiar

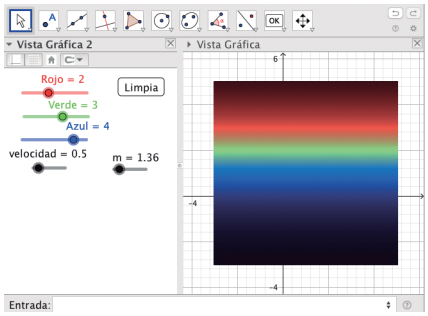


Figura 7. Ejemplo de gradiente de colores

El rastro de un objeto no se guarda al exportar la vista gráfica, por tanto deberemos usar un programa de captura de pantalla para obtener una imagen que contenga al rastro.

Guía de construcción. Gradiente

— Colocamos las vistas gráficas como en la figura 5.
— Insertamos en la Vista gráfica 1 un punto A en la parte superior izquierda de la pantalla.
— Escribimos en la barra de entrada: A + (7,0).
— Añadimos en la Vista gráfica 2 cinco deslizadores:
  • Rojo. Valor mín: 0. Valor máx: 5. Incremento 0.1. Color rojo.
  • Verde. Valor mín: 0. Valor máx: 5. Incremento 0.1. Color Verde.
  • Azul. Valor mín: 0. Valor máx: 5. Incremento 0.1. Color azul.
  • velocidad. Valor mín: 0. Valor máx: 3. Incremento 0.1. Color negro.
  • m. Valor mín: 0. Valor máx: 7. Incremento 0.001. Color negro. Velocidad: velocidad
— En la Vista gráfica 2 añadimos un botón (figura 6):
  • Título: «Limpiar»
  • Guión (script):
    * VistaActiva[1]
    * ZoomAleja[1]
— Hacemos clic en la Vista gráfica 1. Escribimos en la barra de entrada:
  • C=(x(A), y(A)-m)
  • D=(x(B), y(B)-m)
  • segmento[C,D]
— En la pestaña Avanzado de las propiedades del segmento escribimos tres funciones para los colores que contengan al parámetro m y el nombre del deslizador correspondiente al color. Por ejemplo, para el rojo escribimos 2^(-abs(Rojo-m)).
— Antes de cerrar la ventana de propiedades del segmento, activamos el rastro y quitamos las etiquetas a todos los objetos.

Guía de construcción. Punto con color dinámico

— Colocamos las vistas gráficas como en la figura 5.
— En la Vista gráfica 2:
— Escribimos en la barra de entrada:
  • rr=1
  • vv=1
— Creamos dos deslizadores r y v con valores entre 0 y 1 e incremento 0.001. En la opción velocidad escribimos rr para el deslizador r y vv para el deslizador v.
— Añadimos el botón limpiar
— Escribimos en la barra de entrada: s=false
— Creamos un botón para animar los deslizadores r y v:
  • Titulo: «Animar»
  • Guión (script):
    * s=Si[s, false,true]
    * Rótulo[botón2,Si[s, "Parar","Animar"]]
    * IniciaAnimación[r,s]
    * IniciaAnimación[v,s]
  • Creamos dos casillas de entradas para introducir los valores de rr y vv.
— En la Vista gráfica 1:
— Escribimos en la barra de entrada: A=(r,v).
— En la pestaña Básico activamos el rastro.
— En la pestaña Estilo agrandamos el tamaño del punto hasta su valor máximo.
— En la ventana de las propiedades del punto A elegimos la pestaña Avanzado. En la casilla Red escribimos r y en la casilla Green escribimos v y 0 en la casilla Blue.

Cuestiones

— Realizar la misma construcción con otra combinación de colores deslizadores, por ejemplo:
  • Rojo: v, Verde: r, Azul, r+v
  • Rojo: 0, Verde: r, Azul, v
— ¿Qué sucede si pongo velocidades 1 y 2 a r y v respectivamente? ¿Y 2 y 3? ¿Y si pongo velocidades 3 y 5 ?
— Observa las figuras de la 11 a la 16, y obtén las velocidades de r y v para obtenerlas.

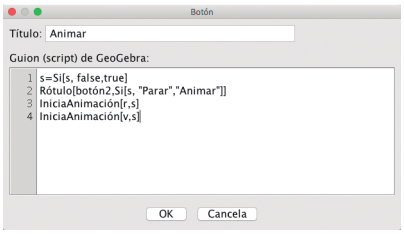


Figura 8. Botón Animar/Parar

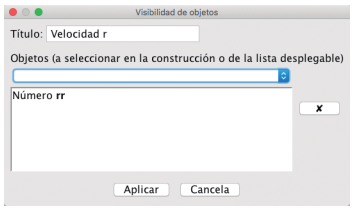


Figura 9. Casilla de entrada para el valor rr

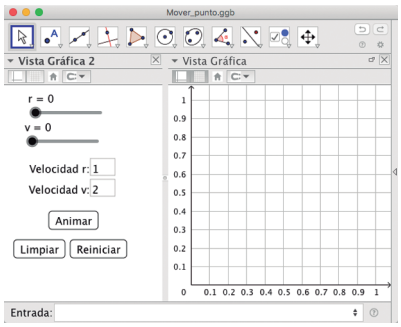


Figura 10. Interfaz de Mover un punto

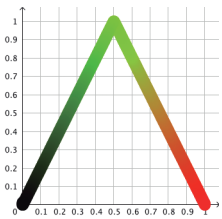


Figura 11. rr=1, vv=2

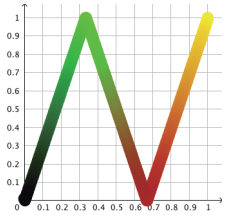


Figura 12. rr=1, vv=3

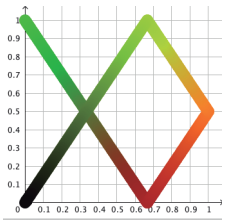


Figura 13. rr=2, vv=3

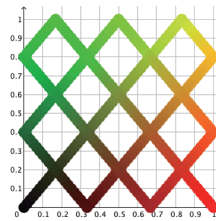


Figura 14. rr=6, vv=7

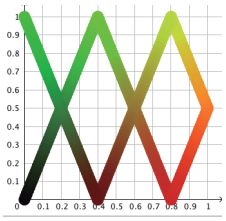


Figura 15. rr=2, vv=5

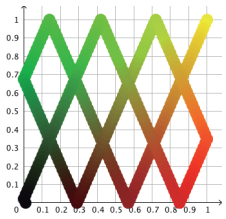


Figura 16. rr=3, vv=7

El color dinámico como elemento artístico

El color dinámico puede ser una gran herramienta en la exploración de lugares geométricos

o en la investigación de curvas algebraicas, diagramas de Voronoi y en otros campos que quizás aún estén sin explorar, sin embargo, en este artículo nos centraremos en tareas más sencillas.

Comenzaremos con un tarea muy simple que desembocó en lo que yo denomino «Arte con Geogebra». Allá por el año 2011 se celebraron en Gijón las XV JAEM. Entre las múltiples actividades programas hubo un espacio de debate sobre Geometría Dinámica conducido por José Antonio Mora. Allí presenté un trabajo realizado con alumnos. Una muestra de los trabajos se puede ver en:

https://multiplicateporcero.wikispaces.com/Arte+geogebra

y en:

https://estoestodoamigos.wikispaces.com/Arte+Curvo

Después José Antonio Mora, en el día GeoGebra 2012 presentó un taller de rectas y curvas de colores, un estupendo trabajo de aula donde amplió de forma extraordinaria la idea de los colores dinámicos. La idea original consistía en representar una recta $y = mx + n$, con m y n dos deslizadores y aplicar los colores dinámicos a la recta según los valores de m y n. Veamos cómo.

Guía de construcción. Rectas de colores

- Creamos dos deslizadores m y n que serán la pendiente y la ordenada de la recta. Los valores máximos y mínimos los dejamos por defecto y cambiaremos el incremento a 0.001.
- Hacemos clic en la vista gráfica 1, a continuación escribimos en la barra de entrada: y= m x + n.
- En la ventana propiedades de la recta, pulsamos en la pestaña Avanzado y escribimos tres funciones que contengan como parámetros a m y n (figura 17).
- Antes de cerrar la ventana propiedades, en la pestaña Básico activamos el rastro.



Figura 17. Colores de la recta

Cuestiones

- Activa la animación del deslizador m. Describe qué sucede.
- Activa la animación del deslizador n. Describe qué sucede.
- Cambia la expresión de los colores. Realiza tu propia composición.
- Ahora para el deslizador n y deja que solo se mueva el deslizador m. ¿Por qué las rectas más inclinadas están más juntas y las que tienen menor inclinación están más separadas? Fíjate en la figura 18, que eso ocurre tanto cuando la inclinación es positiva como cuando es negativa y además para cualquier valor de la ordenada en el origen.
- Observa la figura 19. Intenta reproducirla. Usa tus propios colores.

Esta simple aplicación hipnotizó a los alumnos. Controlada paso a paso, los alumnos experimentan con la pendiente y el valor en la ordenada. Un poco más complicado es llegar a controlar el color dinámico y conseguir que dibuje lo que uno quiere.

Inmediatamente surge la pregunta ¿y con $ax^2 + bx + c$? (figuras 20, 21 y 22)

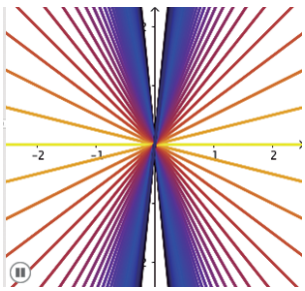


Figura 18. Rectas con incremento de pendiente 0.25

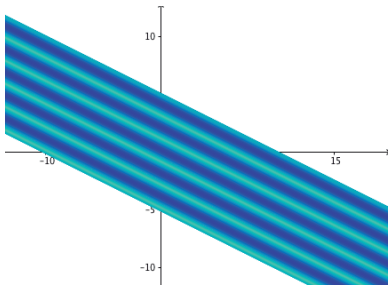


Figura 19. Franja

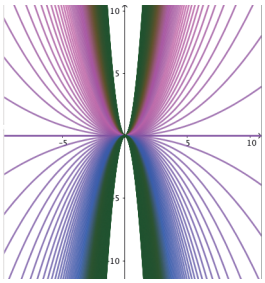


Figura 20. Animando *a*

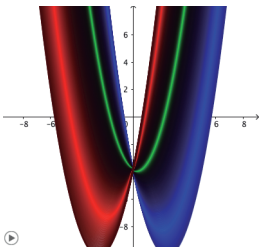


Figura 21. Animando *b*

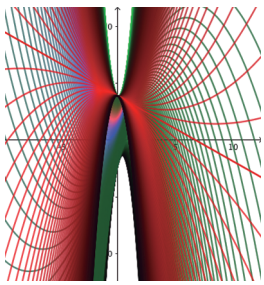


Figura 22. Animando a, *b* y *c*

Arte con GeoGebra

Una vez practicado con las funciones más elementales, es fácil dejar volar la imaginación y obtener verdaderas obras de arte simplemente con las funciones elementales.

Conocer las funciones, su representación y sus propiedades nos permitirá controlar la ejecución de nuestro trabajo para obtener una bonita imagen.

Como mencionamos más arriba, José Antonio Mora para su taller elaboró un *applet* con las principales funciones (figura 23).

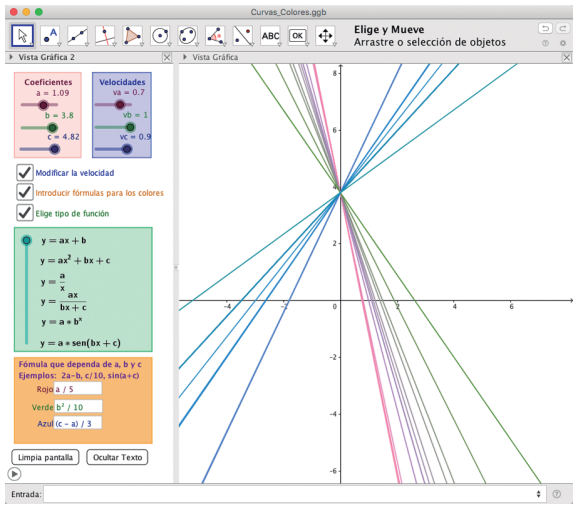


Figura 23. Curvas de colores. José Antono Mora

Pero no solo podemos aplicar los colores dinámicos a funciones, cualquier objeto que podamos insertar en la vista gráfica tiene la propiedad de los colores dinámicos, solamente es cuestión de pensar cómo introducir los colores. Veamos un ejemplo.

Guía de construcción. Circunferencias

— Colocamos las vistas gráficas como en la figura 5.
— En la Vista gráfica 2 dibujamos:
- Un punto A.
- Una circunferencia de centro y radio dado, por ejemplo, 5.
- Sobre la circunferencia *c* ponemos dos puntos, B y C.
- Trazamos una circunferencia de centro A y que pase por B.
- En la vista gráfica 2, creamos un deslizador *v* con valores entre 0 y 1 e incremento 0.001.
- En las propiedades del punto B, en pestaña Álgebra configuramos la velocidad con un deslizador y en la pestaña Básico pulsamos animación.
- En esta circunferencia configuramos el color dinámico.
  * Rojo: x(A), Verde: y(A), Azul: (x(A)+y(A))/2

(figura 24)

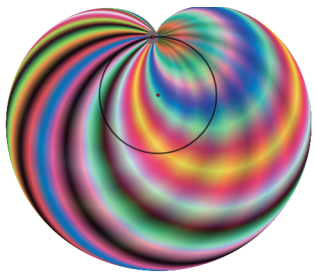


Figura 24

También podemos trabajar con colores dinámicos en la vista 3D.

Guía de construcción. Hélice

— En la Vista gráfica 1 dibujamos:
- Tres deslizadores *r, m* y *k* de tipo entero.
- Un deslizador v con valor mínimo 0, valor máximo 5 e incremento 0.1
- Un deslizador *s* con valor mínimo -4 pi, valor máximo 4 pi, incremento 0.001 y velocidad *v.*

— Activamos la Vista gráfica 3D y en la barra de entrada escribimos:
- Curva(r cos(m t), r sen(m t), k t, t, -4π, 4π)
- A=(0,0,s)
- B=a(s)
- Segmento[A,B]

— En la pestaña Avanzado del menú propiedades del segmento escribimos los colores dinámicos: Rojo: x(A), Verde: y(B), Azul: z(B) y en la pestaña Básico activamos el rastro.

(figura 25)



Figura 25

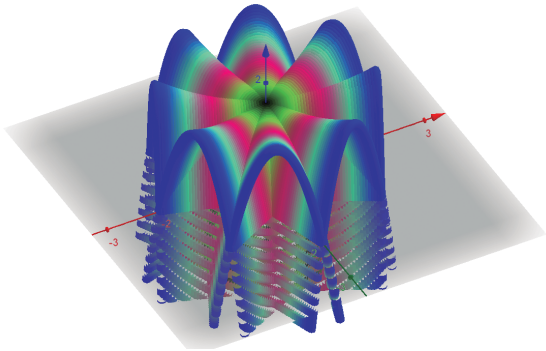


Figura 26. Primer Premio Alumnos. Georgi Mendikov. Profesora, Irene Tusset

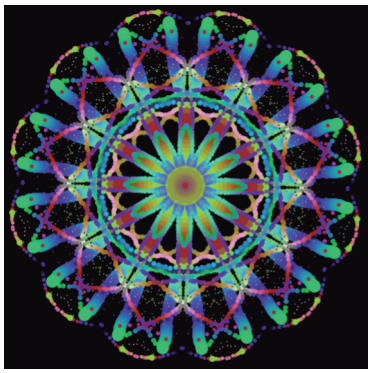


Figura 27. Segundo Premio Alumnos. Carlota Díaz-Munio. Profesora, Ester Alonso

Las posibilidades son infinitas.

En el VIII CIBEM celebrado el pasado mes de julio, el Instituto Geogebra Maslama al-Mayriti convocó el I Concurso de arte con Geogebra, una experiencia con una gran participación de diferentes países.

Dividido en dos categorías, una para alumnos de cualquier nivel educativo en el marco de una experiencia de aula y otra libre para cualquier persona que disfrute con GeoGebra. Los parámetros eran usar los colores dinámicos.

En la web podréis encontrar los trabajos de alumnos y profesores. Aquí rendimos tributo a los ganadores.



Figura 28. Primer Premio. Categoría Libre. Ricardo Alonso

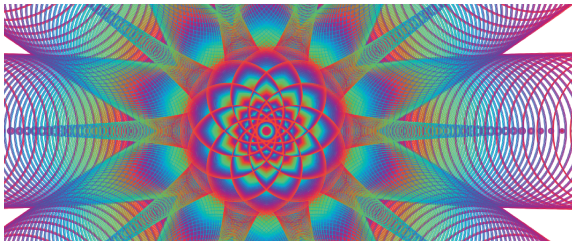


Figura 29. Segundo Premio. Categoría Libre. Lorenzo Lozano

Tanto ha sido el éxito que en Madrid un grupo de profesores hemos creado en IG Maslama el Club de arte GeoGebra con el propósito de transmitir a alumnos y profesores las posibilidades artísticas de GeoGebra.

Referencias bibliográficas

Losada, R. (2014), «El color dinámico en Geogebra». *La gaceta de la Real Sociedad Matemática Española,* vol. 17, n.º 3, 525-547.

Mora, J. A., *Rectas y curvas de colores*, <jmora7.com>.

Muñoz, J. L. (2011), *Arte geogebra,* <https://multiplicateporcero.wikispaces.com>.

— (2012), *Arte curvo*, <https://estoestodoamigos.wikispaces.com>.

José Luis Muñoz Casado
IES Salvador Dalí
<creogebra@revistasuma.es>

suma+
Secciones
Noviembre 2017
86
pp. 111-115

Historia, novela y divulgación

Joan Jareño Ruiz

Breve historia de las matemáticas

Estamos ante una pequeña historia de las matemáticas que, en su título original —*The History of Mathematics. A very Short Introduction*— se presenta como solo una introducción a la misma. Pero, a pesar de su pequeño tamaño, es interesante por el enfoque que Jacqueline Stedall (1950-2014) da a la obra. En su introducción la autora descarta realizar una orientación progresivista y cronológica por no tener en cuenta «complejidades, errores y callejones sin salida que forman parte inevitable de cualquier actividad humana», añadiendo que «los fracasos son tan reveladores como los éxitos». Excluye también centrar su historia en personas clave porque «centrarse en los grandes descubrimientos excluye la experiencia matemática de la mayoría de la especie humana: mujeres, niños, contables, profesores, ingenieros, obreros industriales y demás, incluso a menudo de continentes y de siglos enteros». Su enfoque se orienta entonces a temas. Entre esos temas nos habla de «mitos» de las matemáticas, de «cómo son por dentro» (recogiendo expresiones de los títulos de algunos de sus capítulos), pero también de cómo se difunden, cómo han podido ser o son «medio de vida», o cómo se enseñan. Es cierto que, a lo largo de sus páginas,

Reseñas

Artículo solicitado por *Suma* en julio de 2017 y aceptado en septiembre de 2017

aparecen grandes matemáticos como Fermat, Newton, Pascal, Euler…, pero, a su lado, también lo hacen otros menos conocidos como Ibn Qurrá, Thomas Harriot o John Pell, que sirven perfectamente para ilustrar alguno de los temas que se tratan. Del mismo modo encontramos la archiconocida historia del teorema de Fermat, pero, a su lado, se nos habla de las más desconocidas características del plan de estudios matemáticos «para mujeres» en determinados colegios ingleses del siglo XIX. Estos temas, solo aparentemente menores, también forman parte de la historia de las matemáticas.

Uno de los capítulos que, como educadores, nos ha de merecer especial atención es el dedicado al aprendizaje de las matemáticas. En su inicio la autora escribe que «un hecho que se pasa por alto con facilidad es que el mayor colectivo de practicantes de las matemáticas está formado no por adultos, sino por escolares». Como anécdota en este capítulo se cita un texto babilónico de *El consejo de un supervisor a un joven escriba* en que, como consejo moral, dicho supervisor le narra un recuerdo propio: «Como un junco que brota, di un brinco y me puse a trabajar. No me desvié de las instrucciones de mi maestro; no me puse a hacer cosas por mi cuenta. Mi mentor se mostró encantado con el trabajo que realicé sobre lo que me había encargado». Asusta pensar en cuántas aulas todavía se aspira, después de casi cuatro mil años, a que los alumnos «no hagan cosas por su cuenta» y se limiten a asimilar y reproducir lo que «instruimos».

Otro capítulo de especial interés es el que se refiere a la historiografía de las matemáticas, en el que nos habla de la evolución en el objetivo, «las formas» o el uso de fuentes en la investigación de la historia de las matemáticas. Por ejemplo, nos plantea cómo en la actualidad se intenta no estudiar los avances matemáticos de forma aislada sino situándolos en el contexto social, económico o cultural de la época. Respecto al uso de fuentes se defiende su diversificación utilizando correspondencia, diarios, apuntes, máquinas de cálculo, libros de ejercicios… De hecho la misma autora afirma que «la historia de las matemáticas no exquisitas ha sido uno de los temas esenciales de este libro». Quizás esta característica, unido a su enfoque por temas no tradicionales, como se comentaba al inicio de la reseña, son el motivo por el que se hace especialmente recomendable su lectura.

Valga también esta reseña como pequeño homenaje a la autora fallecida prematuramente a causa de un cáncer. Como decía el obituario publicado el 24 de octubre del 2014 en *The Guardian*, «fue una influyente historiadora de las matemáticas que movió el tema hacia una visión del mundo más inclusiva» <https://www.theguardian.com/education/2014/oct/24/jacqueline-stedall>.



Breve historia de las matemáticas
Autora: Jacqueline Stedall
Editorial: Alianza
Año de edición: 2017
ISBN: 978-84-9104-649-3
Páginas: 174

La superMATEsobrina y el enigma del gran astrolabio

Las novelas, sean para adultos o juveniles, como en este caso, siempre se sitúan en uno o más contextos generales: un lugar (real o ficticio), un momento (pasado, presente o futuro). Estos contextos generales conllevan sus propios subcontextos. En muchas lecturas, al hilo de la narración, podemos aprender mucho de estos contextos y

subcontextos. Gran parte del éxito del género de la novela histórica, por poner un ejemplo, proviene de los aprendizajes paralelos que obtenemos de su lectura. De manera más o menos voluntaria, más o menos explícita, es a menudo difícil separar el entretenimiento del aprendizaje. Pero hay libros que nacen con un objetivo más directo de acercarse a la máxima horaciana del *prodese et delectare* (instruir deleitando). Si no es divulgación pura y hay una «historia» de por medio, podríamos hablar de una especie de «narrativa divulgativa». En el caso de las matemáticas no son excesivamente abundantes las obras de este estilo. Y es que el género no es fácil. Las fronteras entre géneros son, por otro lado, siempre borrosas. En el quizás sobrevalorado *El diablo de los números* de Hans Magnus Enzensberger, ¿qué domina más?, ¿la divulgación o la narración? Y en *El tío Petros y la conjetura de Goldbach*, ¿la narración o la divulgación? Ya en otras reseñas anteriores hemos hablado de la dificultad de integrar, sin que chirríen, las matemáticas en una ficción. Seguro que todos tenemos en nuestra memoria ejemplos exitosos y otros que no lo son tanto. En el caso de la literatura juvenil uno de los más conseguidos es, sin duda alguna, *Apin Capon Zapun Amanicano* del desaparecido Pere Roig. Uno de sus aspectos más originales es que en la novela no planea ningún experto matemático, sino que vamos acompañando al protagonista en sus propios descubrimientos sobre el campo de la numeración. En este tipo de narrativa-divulgativa es difícil eludir esta figura del «experto». Por citar un ejemplo no matemático en *La puerta de los tres cerrojos* de Sonia Fernández Vidal los personajes del hada Quiona y Eldwen son los que guían en el mundo cuántico a su protagonista. Una de las originalidades de la novela de Manuel García Piqueras que estamos reseñando es que, en este caso, el papel del guía se invierte y es Martina, una excelente alumna de matemáticas, la que orienta a su tío adulto Julián, profesor de literatura.

La novela nos explica, en capítulos alternos, dos historias paralelas. La primera se sitúa en el siglo XV y narra las peripecias de Isaac, que se inician en la ciudad africana de Jenne, del Imperio songhai, y acaban en la Castilla de los Reyes Católicos. Es una historia más reflexiva en la que domina el tema de la esclavitud, tristemente aún existente con nuevos disfraces y políticamente ignorada en muchos países de África. En ella encontraremos el origen de un misterioso tesoro cuya búsqueda centra la segunda historia, mucho más dinámica y trepidante, en la que, al estilo de las películas de Indiana Jones, una pista llevará a otra, que conducirá a una nueva…, y con sus protagonistas sometidos a una feroz persecución por otros misteriosos personajes que también quieren apropiarse de dicho tesoro. Es en la resolución de estas pistas donde las matemáticas juegan un papel importante, y se hacen imprescindibles los conocimientos y descubrimientos de la superMATEsobrina Martina (nombre dado en honor a Martin Gardner, según su propio autor). Son capítulos veloces, en los que pasan y se dicen muchas cosas. Aparecen aspectos de criptografía, las simetrías de los azulejos de la Alhambra, las proporciones en los diseños de la ermita mozárabe de San Baudelio de Berlanga (Soria), el astrolabio, Ramon Llull, los descubrimientos musicales de Pitágoras, la geometría de los sona, dibujos realizados en la arena por los cuentacuentos chokwe…



Autor: Manuel García Piqueras
Editorial: Nivola
Año de edición: 2016
ISBN: 978-84-15913-26-9
Páginas: 174

Es esta velocidad la que hace que, a veces, estos aspectos se toquen solo en su superficie y la parte divulgativa quede, aparentemente, un poco más diluida. Pero, lo que es innegable, es que, en el aula, podemos aprovechar cualquiera o cualesquiera de estos temas para profundizar en ellos. Nos dan un buen punto de partida. Para trabajar en ellos, para ampliar la información o conocer propuestas directas de su tratamiento en clase podemos recurrir a otros escritos del propio autor, algunos de ellos en esta misma revista: «El Tolmo de Minateda. Historia y Mate-*Suma* 51), «Un atardecer en África y América» (*Suma* 78) o «El astrolabio: un instrumento del pasado para una educación de futuro fértil» (*Suma* 84). También será interesante la lectura de *Una historia de la proporción. desde la prehistoria al número de oro*, reseñado en *Suma* 79, y publicado también por Nivola.

La engañosa sencillez de los triángulos

Como ya se indicó en el editorial de *Suma* 85, con esta obra se inaugura la colección Miradas matemáticas editada conjuntamente por La Catarata, la FESPM y el ICMAT. En la introducción del libro se declara como objetivo de esta colección combinar divulgación y didáctica de las matemáticas, centrándose, en el campo de la enseñanza, en la educación secundaria. El formato físico del libro recuerda otra colección de La Catarata (¿Qué sabemos de?), coeditada en este caso con el CSIC, y en la que ambos autores ya han escrito conjuntamente otro par de libros. Uno de ellos, *Rompiendo códigos.Vida y legado de Turing* ya fue reseñado en *Suma* 76. Si hemos de guiarnos por la primera impresión que nos produce este libro tendremos que decir que, entre divulgación y didáctica, la primera parte es la que domina con diferencia. La parte educativa se limita, al menos en este título, a la intercalación de algunos «ejercicios» que, en realidad, son problemas o actividades de carácter diverso, desde los muy concisos, como aplicar la fórmula de Euler a los sólidos platónicos, a los muy genéricos o abiertos, como «¿Crees que existe algún motivo por el cual la naturaleza emplea las formas fractales?». También se comentan algunas construcciones con GeoGebra, pero sin referencias de cómo hacerlas o dónde encontrarlas. Quizás si la atención a los aspectos didácticos explícitos es lo que justifica la participación en la coedición de la FESPM tendrían que ganar peso en próximos volúmenes. Los implícitos ya los hemos comentado en otras ocasiones: una de las tareas del profesorado es la detección y adaptación de posibles actividades de aula a partir de textos divulgativos. Tarea que, por cierto, una buena parte del profesorado sabe hacer muy bien.

El libro se organiza en ocho capítulos de diferente temática y calado. Sus títulos nos ilustran claramente sobre su contenido:

— La engañosa sencillez de los triángulos
— Cálculo de áreas. La fórmula de Herón
— Triángulos para construir sólidos
— Números triangulares
— Jorge Juan y la medida del meridiano terrestre
— Geolocalización
— Fractalidad. Triángulo de Sierpinski
— Triángulos en la vida cotidiana



La engañosa sencillez de los triángulos
Autores: Manuel de León y Ágata A. Timón
Editorial: Los libros de la Catarata
Año de edición: 2017
ISBN: 978-84-9097-344-8
Páginas: 100

Como se ve, a pesar de la brevedad del libro (un centenar justo de páginas), son muchos los temas que se tocan y con un cierto contraste entre capítulos. Algunos, como el último que habla del uso de triángulos en la arquitectura o la música, literatura…, son auténticamente ligeros, y otros, como el segundo en el que se acaban relacionando triángulos con una misma área y superficie con curvas elípticas, exigen una lectura más que atenta.

Uno de los aspectos interesantes del libro es la importancia que da a aspectos históricos y de matemática aplicada. Ambos son especialmente necesarios en obras de carácter divulgativo. Los primeros porque nos ayudan a entender la evolución de las matemáticas. Los segundos porque nos permiten descubrir las *matemáticas invisibles* de nuestro entorno. En esta línea son especialmente importantes los capítulos dedicados a la aplicación de los triángulos en la medición del meridiano y en el funcionamiento del GPS.

Finalmente cabe destacar el esfuerzo de los autores por incorporar temas más o menos novedosos o, como mínimo, menos vistos. Es inevitable que aparezcan ciertos temas recurrentes (fractales, geometrías no euclídeas…), pero la elección o enfoque de otros, que no aparecen con tanta frecuencia, ayudan a dar un soplo de aire fresco a su lectura. Por poner un ejemplo, se le dedican buenos momentos a Herón, tanto al descubrimiento de su nada intuitiva fórmula para el cálculo del área a partir de la medida de los lados, como a los triángulos que llevan su nombre, aquellos que tienen como área y perímetro números naturales.

Joan Jareño Ruiz
CESIRE-CREAMAT
<reseñas@revistasuma.es>

Servicio de Publicaciones de la FESPM









<www.fespm.es/-Servicio-de-publicaciones->

<publicaciones@fespm.es>

FESPM & Cía





XXVIII Olimpiada Matemática Nacional

Ángel Álvarez Gutiérrez
Antonio Bermejo Fuertes
Isabel Negueruela Sánchez
María Encarnación Reyes Iglesias

El pasado curso 2016-2017 la Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática «Miguel de Guzmán», a propuesta de la FESPM, asumió el reto de la organización de la Olimpiada Matemática Nacional, en su edición XXVIII, para alumnos de segundo de Educación Secundaria Obligatoria. Esta Olimpiada es la culminación de las que se desarrollan previamente en sus diferentes fases: local, provincial y autonómica.

Además del concurso de carteles, las pruebas individuales y por equipos, y el concurso de fotografía matemática, los distintos programas de actividades lúdico-recreativas y culturales han permitido conocer algunas características históricas, ambientales y artísticas de la Comunidad Autónoma de Castilla y León.

La realización de esta Olimpiada habría sido imposible sin el apoyo de instituciones y organismos públicos y entidades privadas, entre los que destacan especialmente la Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León y la Universidad de Valladolid. Además, los Ayuntamientos de Valladolid, Burgos y Medina de Rioseco, los Museos de la Ciencia y de Escultura de Valladolid, el Museo de la Evolución Humana de Burgos, las Diputaciones Provinciales de Valladolid y Burgos, la Consejería de Agricultura de la Junta de

Castilla y León, la Real Sociedad Matemática Española (RSME), catedral de Burgos, calculadoras Casio, editoriales: Anaya, Nivola y Oxford y marcas como Coca Cola y Aquabona, han contribuido con sus colaboraciones y ayudas a que la Olimpiada se haya desarrollado con gran dignidad.

Y por supuesto, la colaboración y dedicación desinteresadas, así como el intenso trabajo de los miembros activos de la Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática «Miguel de Guzmán», han sido imprescindibles para que el proyecto Olimpiada Nacional Castilla y León, 2017, haya sido un éxito.

Desarrollo de la Olimpiada

El miércoles, 21 de junio, en la Residencia Universitaria Alfonso VIII de la Universidad de Valladolid se comenzó a recibir a los alumnos y a sus profesores acompañantes, asignando las habitaciones y ofreciendo, para aliviar los calores castellanos, unas tarrinas de fresas frescas u otras frutas, detalle de la Consejería de Agricultura de la Junta de Castilla y León. Los alumnos recibieron la bolsa de la Olimpiada con algunos regalos y el distintivo con el programa. Así mismo, se les entregó una hoja con pistas para hacer la primera actividad: se trataba de encontrar a su «matemático o matemática», que sería el nombre del grupo de trabajo para los primeros días, y el encargo de encontrar antes de la noche al resto de los miembros de su equipo.



Figura 1. Primeras actividades nocturnas



Figura 2. Juegos matemáticos

En el salón de actos de la Residencia se realizó el acto de bienvenida con la información sobre el programa de actividades, los grupos de trabajo, el concurso de fotografía matemática y algunas instrucciones formales.

Tras la cena tuvo lugar la primera actividad lúdica programada con el objetivo de tomar contacto y conocerse los alumnos. Se trataba de la construcción de flexágonos personalizados y de la formación de polígonos estrellados cuyos vértices estaban ocupados por los distintos alumnos y sus conexiones se realizaron mediante hilos de un coloreado ovillo de lana.



Figura 3. La inauguración oficial

El día siguiente, jueves 22, después del desayuno, se inició el camino a la Facultad de Ciencias de la Universidad de Valladolid, donde tuvo lugar la inauguración oficial de la Olimpiada con la presencia de María del Pilar González García, directora general de Innovación y Equidad Educativa de la Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León, Isaías García de la Fuente, decano de la Facultad y Antonio Bermejo Fuertes, presidente regional de la Asociación Caste-

llana y Leonesa de Educación Matemática «Miguel de Guzmán».

A continuación, los alumnos se instalaron en tres aulas climatizadas para realizar la prueba individual. Como es tradición, se trataba de resolver cinco concienzudos problemas, y durante la misma, los alumnos mostraron una seriedad y concentración dignas de admirar.



Figura 4. Prueba individual en la Facultad de Ciencias

Varios alumnos y alumnas fueron entrevistados por Televisión Española en Castilla y León sobre el contenido y dificultad de la prueba. Algunas profesoras del comité organizador informaron sobre la Olimpiada a la misma cadena de televisión. Mientras tanto, los profesores acompañantes disfrutaron de una visita guiada al magnífico Museo Nacional de Escultura de Valladolid y simultáneamente, la coordinadora de las Olimpiadas, Isabel Negueruela y la profesora María Encarnación Reyes acudieron a una entrevista de radio en un programa informativo de la Olimpiada Nacional de Matemáticas en Valladolid.



Figura 5. En el salón de actos del Ayuntamiento de Valladolid

Realizada la prueba, y después de degustar nuevamente otra tarrina de fresas frescas, los alumnos se encaminaron en autobús urbano al ayuntamiento.

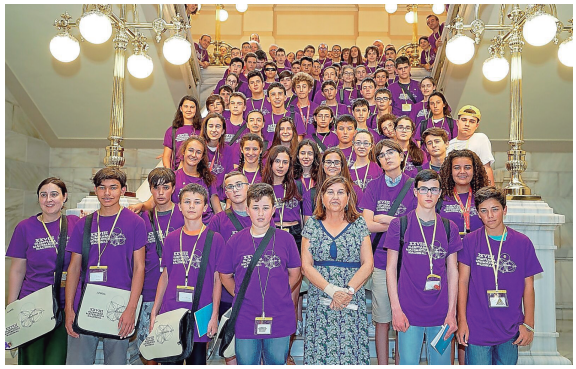


Figura 6. En la escalera principal del Ayuntamiento de Valladolid

A las 13 horas, tuvo lugar una recepción en el Excmo. Ayuntamiento de Valladolid. La concejala de Educación, Infancia e Igualdad, María Victoria Soto Olmedo, recibió a los asistentes en el salón de plenos, y después de sus palabras obsequió a los alumnos y profesores con un pin de Valladolid, un bolígrafo y el libro *Yo, José Zorrilla*. (En el presente año, 2017, se celebra el bicentenario del nacimiento de este famoso escritor vallisoletano).

Por la tarde, después de la comida, los alumnos, en sus grupos denominados por los matemáticos asignados, prepararon la resolución de los problemas de la prueba individual y expusieron con ingenio, brillantez y buena argumentación las soluciones de los mismos a todos los presentes: profesores y resto de alumnos.



Figura 7. El cartel de *Matemáticas en la calle* que se celebraría al día siguiente

Un refrescante baño (obsequio del Ayuntamiento de Valladolid), en la piscina municial Juan de Austria, aligeró el inmenso calor que esa semana soportaba la meseta castellana. Terminada la cena, la jornada se remató con una sesión de magia y juegos matemáticos que servirían de preparación de la actividad *Las Matemáticas en la calle* que se realizaría al día siguiente.

El viernes 23 de junio, después del desayuno, los autobuses esperaban para desplazarse a Medina de Rioseco (Valladolid), donde se desarrollaría parte de la tercera jornada de la Olimpiada.

En esta villa tuvo lugar la recepción en el Excmo. Ayuntamiento por el alcalde David Esteban y su equipo de gobierno.

La profesora de la Asociación, María Encarnación Reyes, expuso una semblanza del matemático y cosmógrafo Rodrigo Zamorano (1542-1623), nacido en esa villa, quien, en tiempos de Felipe II, fue piloto real en la Casa de Contratación de Indias en Sevilla. Así mismo destacó su relevancia en el ámbito matemático por haber sido el primer traductor al castellano de los seis primeros libros de los *Elementos* de Euclides.

El acto de reconocimiento a este ilustre riosecano culminó con el descubrimiento de una placa en su honor en la Casa de Cultura de Medina de Rioseco.

En el salón del ayuntamiento se explicó a los alumnos la trayectoria del recorrido con la marcha



Figura 8. La prueba por equipos en Medina de Rioseco

Dufour sobre una cinta de Moebius, comenzando a continuación la Prueba por Equipos que consistiría en resolver, en grupos de cinco, un enigma y doce problemas durante un recorrido por las calles de la villa de Medina de Rioseco.



Figura 9. La placa de Rodrigo Zamorano



Figura 10. La Olimpiada en Medina de Rioseco



Figura 11. La prueba por equipos en Medina de Rioseco

Ya de regreso en Valladolid, en la céntrica Plaza de la Universidad, comenzó la actividad *Las Matemáticas en la calle* donde los alumnos fueron auténticos profesores y divulgadores de las matemáticas a todas las personas que por allí se acercaban. Fue realmente emocionante observar la valía de estos olímpicos y olímpicas mostrando la belleza y utilidad de las matemáticas a niños, padres, madres, abuelos y paseantes en general.



Figura 12. Matemáticas en la calle en Valladolid

Finalizada la cena se proyectó y comentó por el miembro de la Asociación y experto en cine, Alfonso Población Sáez, la película *X+Y*.

El sábado, 24 de junio, de nuevo los autobuses pusieron rumbo a Burgos, donde los compañeros de la Asociación de esta sección provincial habían preparado un magnífico programa que comenzó con la interesantísima visita guiada al Museo de la Evolución Humana. A continuación, en el histórico IES López de Mendoza, Enrique Hernando, miembro activo de la Asociación, deleitó a todos los presentes con un paseo virtual por la catedral de Burgos a través del arte matemático.



Figura 13. Matemáticas en la catedral de Burgos

Después de recorrer con el tren turístico algunos lugares emblemáticos de esta bonita ciudad castellana, se realizó la visita real matemática a la Catedral, siendo los compañeros de la Asociación

y organizadores de la jornada en Burgos, los guías autorizados para la misma. La presencia de tanta Geometría en esta monumental Catedral sorprendió a todos los asistentes.



Figura 14. Todo el grupo en la catedral de Burgos

Ya en Valladolid y a continuación de la cena, los componentes de la Asociación Physics League, con su actuación *Física de película*, demostraron las bondades de la Física mediante atractivos y sorprendentes experimentos, dejando patente que el binomio física-matemática es fundamental para el desarrollo de la ciencia y la tecnología.





Figuras 15 y 16 *Física de película*



Figura 17. En el Museo de la Ciencia

La jornada del domingo, 25 de junio, se desarrolló en el Museo de la Ciencia de Valladolid.

Comenzó con una visita al Planetario donde se proyectó *El Universo de Escher*.

A continuación se visitaron algunas salas del museo y posteriormente, en el Auditorio, tuvo lugar un acto de reconocimiento al insigne educador matemático Miguel de Guzmán en el 25 aniversario de la Sociedad Castellana y Leonesa que lleva su nombre.

El acto contó con la asistencia y emotivas palabras de su esposa, María Teresa García Monge, quien contempló emocionada y orgullosa, desde la tarde anterior, varios momentos del desarrollo de la Olimpiada. Los profesores de la Asociación Constantino de la Fuente y Antonio Arroyo expusieron la génesis de la Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática y su relación con Miguel de Guzmán.

El profesor de la Universidad de la Rioja, Eduardo Sáenz de Cabezón impartió la conferencia *Pon un matemático en tu vida interior* haciendo vibrar a la audiencia con el ingenio y el humor que le caracterizan.

Por último, a las 12:15 horas, tuvo lugar la clausura oficial presidida por Fernando Rey, consejero de Educación de la Junta de Castilla y León, siendo acompañado por Felicidad Viejo Valverde, vicerrectora de Estudiantes y Extensión Universitaria de la Universidad de Valladolid, Antonio Bermejo Fuertes, presidente regional de la Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán, David Alonso Monge, vicepresidente de la Diputación de Valladolid, María Victoria Soto Olmedo, Concejala de Educación, Infancia e Igualdad del Ayuntamiento de Valladolid, Juan Martínez Calvete, Vicepresidente de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y Ángel Álvarez Gutiérrez, presidente de la sección de Valladolid de la Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática «Miguel de Guzmán».

Después de las palabras de las autoridades, los alumnos Diego Moncalián y Lucía Acedo en representación de todos sus compañeros, transmitieron, con mucha naturalidad y gracia, sus experiencias en la Olimpiada, su satisfacción por la buena estancia castellana, y la alegría por haber

adquirido nuevos amigos con interés por las matemáticas.

Beatriz Escabias y Gabriel Martos, dos de los profesores acompañantes, representando al resto de profesores, trasmitieron el agradecimiento al Comité Organizador de la Olimpiada por el trabajo, a su juicio, muy bien realizado. Manifestaron su satisfacción y valoraron la Olimpiada muy positivamente, tanto el alojamiento, como las diversas actividades realizadas.

El diseño gráfico del logo de la Olimpiada, creado por Sara Barajas, está basado en diagramas de Voronoi y triangulaciones de Delaunay con la idea de conectar las nueve provincias de la Comunidad Autónoma de Castilla y León.

Menciones de honor en la XXVIII Olimpiada Matemática Nacional

Las menciones de honor para los mejores resultados de las pruebas fueron:

Concurso de carteles

Sara del Val Ortega, alumna del IES Conde Lucanor de Peñafiel, recibió el premio del concurso de carteles por su obra *Constelaciones*.

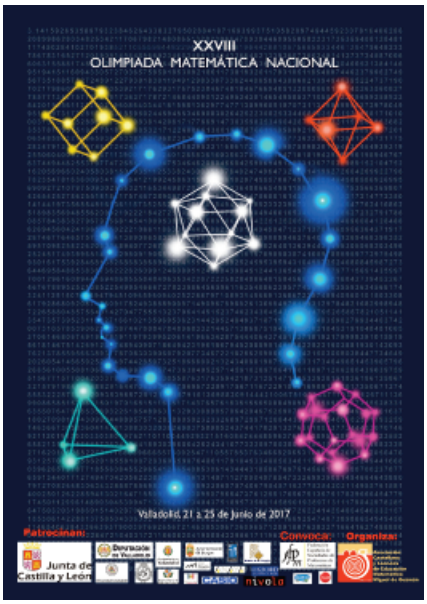


Figura 18. *Constelaciones*

El diseño contiene un interesante contenido matemático: constelaciones con la forma de los cinco sólidos platónicos sobre un fondo de estrellas representadas por algunos de los infinitos decimales del número pi.

Fotografía matemática

La obra elegida en el Concurso de Fotografía Matemática fue la titulada *Flores de metal* de Irene Fernández Fernández.

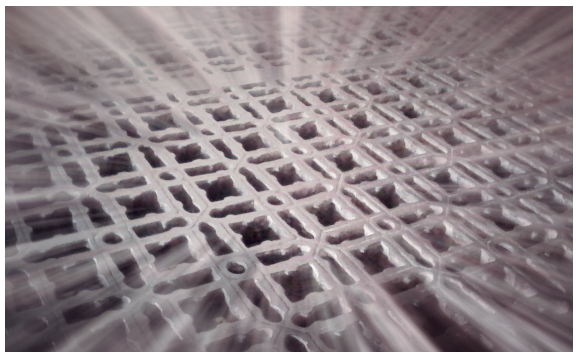


Figura 19. *Flores de metal*

Prueba por equipos

De esta prueba se destacó al grupo formado por:
Leonardo Costa Lesage, de la Comunidad Valenciana.
Jon Jiménez Zulaica, de Euskadi.
David Moreno Martín, de Extremadura.
Javier Ortiz Martín, de la Ciudad autónoma de Melilla.
Carla Simón Sanz, de la Comunidad de Madrid.

Prueba individual

De la prueba individual se eligieron a los siguientes alumnos, ordenados alfabéticamente:
Lucía Blázquez Cahué, de Castilla y León.
Leonardo Costa Lesage, de la Comunidad Valenciana.
Guillermo Escobar López, de Castilla-La Mancha.
Andreu Fitó Castellví, de Cataluña.
Irene Herrero Salas, de Euskadi.

Sergi Ivars Galiana, de la Comunidad Valenciana.
Nicolás López Corral, de Castilla y León.
Martín Rey Ruiz, de Aragón.
Juan Robles Angulo, de Andalucía.
Brais Rodríguez Rodríguez, de Galicia.



Figura 20. Algunos de los premiados

Consideraciones finales

El equipo organizador de esta Olimpiada está muy satisfecho con su realización. La disposición permanente, la ilusión, el trabajo y el esfuerzo de todos sus componentes han merecido la pena. Sin lugar a dudas.

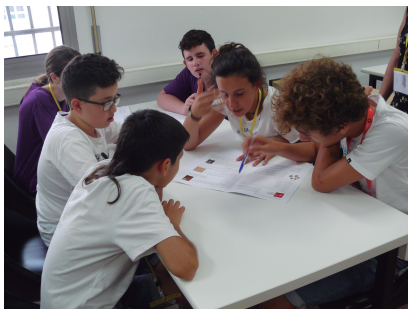
Los alumnos han sido realmente los protagonistas de la actividad. Han destacado por su educación, su ejemplar comportamiento y su interés por todas las actividades planteadas.

Recibir el *feedback* de los compañeros de otras comunidades, y sus felicitaciones por el alojamiento, la hospitalidad, el ambiente y las actividades realizadas, han supuesto un verdadero premio para el equipo responsable de Castilla y León. Desde aquí, queremos destacar la armonía, la colaboración, la disposición a ayudar en todo momento, la empatía con sus alumnos, etc., de este magnífico grupo de profesores acompañantes.

Los miembros de los distintos comités de organización y gestión, agradecen sinceramente la colaboración de todos los patrocinadores y la de aquellas personas implicadas (alumnos protagonistas, sus familias, los profesores, etc.) que han creído en este proyecto, lo han apoyado y han contribuido a que se llevara a buen término.

Desde esta tribuna queremos desear suerte y ánimo a nuestros compañeros valencianos de la Societat d'Educació Matemàtica «Al-Khwarizmi» para la próxima edición de la Olimpiada.

¡Nos vemos en Valencia el próximo 2018!







Figuras 21, 22 y 23. El núcleo de la actividad matemática, la resolución de problemas en grupo

Ángel Álvarez Gutiérrez
Condesa Eylo Alfonso, Valladolid
<alvarezgutierrez.angel@gmail.com>

Antonio Bermejo Fuertes
<abfmatesleon@gmail.com>

Isabel Negueruela Sánchez
<inegueruela@yahoo.es>

María Encarnación Reyes
Universidad de Valladolid
<ereyes@maf.uva.es>

El calendario matemático de la SEMCV

Rafael Martínez Calafat

Se trata de una actividad organizada por la Sociedad de Educación Matemática de la Comunidad Valenciana «Al-khwarizmi» y consistente en la oferta de una actividad (generalmente un problema) a la comunidad educativa para su resolución durante todo el periodo lectivo que abarca desde el mes de septiembre hasta el mes de junio. La generación de esas actividades para un mismo mes, corre a cargo de un profesor que de forma voluntaria y sin casi recompensa (se le proporcionan algunos ejemplares del calendario y su nombre suele aparecer en la última línea de la hoja del calendario) se encarga de crear o de recolectar.

El concurso

Se realizan dos concursos tomando como base el calendario:

A la solución más ingeniosa

En él puede participar cualquier estudiante de ESO, FP o Bachillerato que dé respuesta (solución/comentario) a una actividad planteada un día cualquiera. Cada centro seleccionará las me-

Sociedades federadas

jores soluciones de sus alumnos enviando solo una por cada día e incluyendo: nombre completo del estudiante, curso y nivel, centro, dirección, teléfono y correo electrónico. Los premiados recibirán el correspondiente diploma acreditativo.

Al trabajo en grupo

En él puede participar un solo grupo de cualquier centro de ESO y/o FP y/o Bachillerato que dé respuesta (solución/comentario) a todas las actividades planteadas un mes cualquiera. Deberá indicarse el nombre completo del centro, dirección, teléfono y correo electrónico, así como el nombre de todos los estudiantes que lo integran y del profesor/a que lo coordina. Los agraciados recibirán el correspondiente diploma acreditativo.

Presentación y selección

El plazo de recepción termina el último día del mes siguiente al que correspondan las actividades. Las soluciones en formato electrónico (doc, docx, odt, pdf) deben dirigirse a:

<calendari@semcv.org>.

Las soluciones en formato escritura manual deben enviarse a:

Rafael Martínez Calafat
Carrer Carcaixent, 19, 3r, 6a
12005-CASTELLÓ
(Teléfono: 964635585)

La comisión seleccionadora se reserva el derecho a publicar soluciones presentadas.

Historia

Si bien el calendario se inició desde el curso 1995-1996 con Juan Antonio Mora, fue principalmente a partir del curso 2001-2002 (encargándose de él Floreal Gracia Alcaine) cuando empezó a adquirir cierta notoriedad, bajo el mecenazgo de la editorial SM, que finalizó en el curso 2011-2012 (cuando llegó el ministro Wert y sus recortes educativos). Desde entonces la edición impresa corre a cargo de la Diputación de Castellón.

Los archivos que contienen los diversos meses de los calendarios desde el curso 2001-2002 hasta el curso 2017-2018 están disponibles de forma gratuita en la página de la sociedad: <http://www.semcv.org/calendarimat> en castellano (todo el periodo) y en catalán (desde el curso 2012-2013) en formato jpg (los más antiguos) o pdf.

Reciente

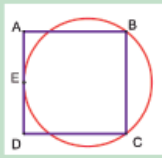
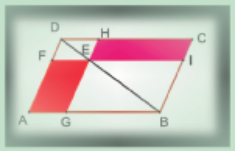
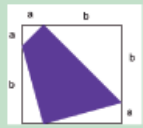
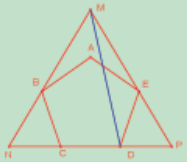
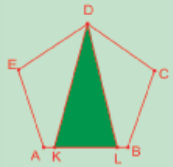
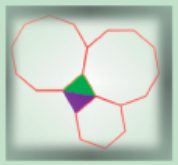
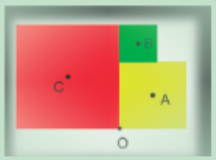
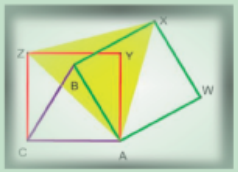
En <http://www.semcv.org/calendarimat/966-solucions-calendari-matematic-2016-2017> se encuentran, desde el mes de octubre del 2017, las soluciones oficiales, en catalán y castellano, a los problemas planteados en el calendario matemático 2016-2017.

Si quieren participar en su generación, preparando una colección de problemas o actividades adecuadas para algún nivel de secundaria o bachillerato, envien un correo a

<calendari@semcv.org>.

Rafael Martínez Calafat
<calendari@semcv.org>

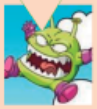
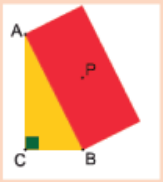
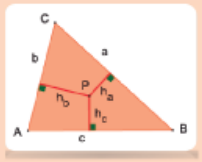
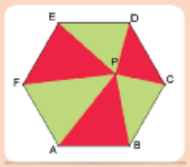
NOVIEMBRE 2017-2018

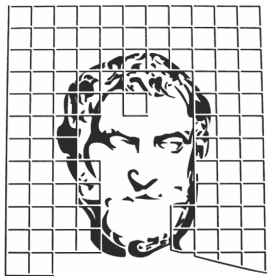
LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES	SÁBADO	DOMINGO
		1 	**2** El corazón de la flor es un círculo de radio 1. El contorno exterior de los pétalos son semicírculos centrados en los puntos medios de un hexágono regular inscrito en un círculo de radio 2 con el mismo centro que el corazón. Calcular el área de todos los pétalos	**3** 	**4** ABCDE es un pentágono regular. P y Q las intersecciones de los segmentos AC, EB y EC, BD, respectivamente. Hallar la razón entre las áreas del cuadrilátero APQD y del polígono estrellado ACEBD	**5**  ¿Quién tiene mayor perímetro el cuadrado o la circunferencia?
6  En el triángulo equilátero de lado 1 se han inscrito 7 círculos iguales y tangentes dos a dos. Hallar su radio	**7** 	**8** En la baldosa adjunta los cuadriláteros rojos son cuadrados y los amarillos rombos; los triángulos blancos son equiláteros y los amarillos isósceles. Hallar la razón de áreas de la zona roja y amarilla	**9** 	**10** **Proposición I.43:** En cualquier paralelogramo el complemento de los paralelogramos construidos sobre un punto de la diagonal tiene la misma área	**11** El lado del cuadrado grande mide 10 cm. Sobre su diagonal se dibujan 4 cuadrados. Hallar el radio de los círculos tangentes 	**12**  Calcular la proporción entre las áreas del cuadrilátero interior y el cuadrado exterior
13 	**14** En la figura se muestra un pentágono regular ABCDE inscrito en un triángulo equilátero MNP. Hallar la medida del ángulo $\angle CMD$	**15** 	**16** En la figura hay un octógono regular de lado c junto con cuatro triángulos equiláteros (de color verde). Hallar el área del cuadrado determinado por los vértices de los triángulos equiláteros	**17** 	**18** El pentágono regular ABCDE está dividido en tres partes iguales por los segmentos DK y DL. Hallar la medida del segmento KL	**19**  En la figura AB = 3, BD = 7, AD = 8 y $\angle BCD = 90^\circ$. Hallar el área del triángulo $\triangle BCD$
20  Una circunferencia está dividida en 12 arcos iguales. Los puntos de las divisiones se unen como indica la figura. Hallar la razón entre las áreas de los rombos formados	**21** 	**22** En la figura hay un octógono y dos hexágonos todos regulares y de lado c. Hallar el perímetro y el área de la intersección de los dos hexágonos	**23** 	**24** La figura está formada por dos eneágonos, un hexágono todos regulares, y dos triángulos. Probar que los dos triángulos son isósceles	**25** 	**26** En la figura hay tres cuadrados de centros A, B y C. El punto O es el vértice de dos cuadrados. Probar que los segmentos OB y AC son iguales y perpendiculares
27 	**28** En la figura, un octógono regular está inscrito en un triángulo rectángulo. Calcular la razón de proporcionalidad entre los perímetros y las áreas del octógono y el triángulo	**29** 	**30** En la ilustración ABC es un triángulo equilátero y AYZC y ABXW son dos cuadrados iguales. Demostrar que $\triangle AZX$ es un triángulo equilátero	**NOVIEMBRE 2017**		

Autor: Ricard Peiró i Estruch. IES "Abastos". València

DICIEMBRE 2017-2018

DICIEMBRE 2017

LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES	SÁBADO	DOMINGO
				1 ¿De cuántas formas se puede obtener una suma de 361 utilizando números de uno o dos dígitos distintos sin repetir ninguno? ¿Y una suma de 360? 	**2** Se sabe que: $\overline{78ab792}=2540abc88$ con a, b, c, [illegible] dígitos. Hallar esos dígitos desconocidos 	**3** En el IES "La Plana" hay 280 alumnos de sexo masculino de un total de 614. De los que cursan bachillerato, siete de cada quince son de sexo masculino. Y de los que cursan ESO, la proporción de mujeres es 127/232. Hallar el porcentaje de alumnado que cursa bachillerato y la proporción de mujeres que cursan bachillerato 
4 	**5** Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo en C con CB = 1 y $\angle A = 30$. Sobre AB se dibuja un rectángulo de área $4\sqrt{\ }$. Sea P el centro del rectángulo. Hallar perímetro y área de los triángulos $\triangle CAP$ y $\triangle CPB$	**6** ¿Cuáles son los naturales que tienen p divisores siendo p un número primo? 	**7** 	**8** Simplificar la expresión: $\frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}}\cdot\frac{\frac{b}{c}-\frac{c}{b}}{\frac{b}{c}}\cdot\frac{\frac{c}{a}-\frac{a}{c}}{\frac{c}{a}}$	**9** ¿Cuántos naturales existen de manera que el producto de sus dígitos sea 78? 	**10**
11 ¿Cuántos naturales de tres cifras cumplen que el producto de sus cifras es 72? ¿Y cuántos de cuatro cifras 	**12** 	**13** ¿Cuántos subconjuntos con al menos seis elementos se pueden formar a partir de $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ de manera que la suma de sus elementos sea múltiplo de 9?	**14** ¿Cuál es la mayor potencia de 2 que divide a $2^{2017}+10^{2017}+100^{2017}$? 	**15** 	**16** Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo de área A y perímetro [illegible]. Sea P un punto interior y h_a (h_b, h_c) la distancia de P (en perpendicular) a CB (CA, AB) y r el radio de la circunferencia inscrita al triangulo. Demostrar que $2A = b\cdot h_b + c\cdot h_c + a\cdot h_a$, que $2A = $ [illegible]r, y que si el triángulo es equilátero de lado a $2A = 3ar$	**17** ¿Para cuántos naturales n de una cifra es $n^2 + n + 1$ un divisor de $n^{2017} + 150$? 
18 Demostrar que 2018 no es suma de un cuadrado y un cubo con bases de distinta paridad (es decir una par y la otra impar) 	**19** Sea ABCDEF un hexágono regular con AB = 1. Sea P un punto del interior del hexágono. Sea S la suma de las áreas de los triángulos $\triangle ABP$, $\triangle CDP$ y $\triangle EFP$. Calcular el valor de S	**20** Demostrar que 2017 no es suma de un cuadrado y un cubo con bases de la misma paridad (es decir las dos pares o las dos impares) 	**21** Demostrar que, si n es primo diferente de 2 y 3, $a^{2n} - 1$ es múltiplo de 6 	**22** Hallar los enteros z que cumplen que $z^4 - 21z^2$ es un cuadrado perfecto 	**23** Demostrar que $11^{2n} - 1$ es múltiplo de 70 	**24** Consideremos A = {1, 2, ...,30}. Demostrar que cualquier subconjunto de A con 21 elementos, tiene, al menos tres con la misma cifra en las unidades 
25 ¿Para qué valores de n $2^n + 3^n + 5^n + 7^n$ es múltiplo de 5? 	**26** 	**27** Demostrar que 2018^{2018} no es suma de dos cubos perfectos 	**28** ¿Para qué valores de n, se cumple que $1^n+2^n+3^n+4^n+5^n+6^n+7^n+8^n+9^n$ es múltiplo de 5?	**29** 	**30** Hallar los enteros z tales que $z^6 - 387z^3$ es un cubo 	**31** ¿Cuántos naturales hay menores que 500 con 12 divisores naturales? 



XVII Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas

Matemáticas en tierra de cine

SAEM THALES

Fechas: 4 al 6 de Julio de 2018.
Lugar: Universidad de Almería.
Dirección Postal: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
Avenida Oasis, 139
04700 El Ejido (Almería)
Teléfono: 617 742476
Fax: 950 57 98 21
e-mail: xviiceam@thales.cica.es
Facebook: XVII CEAM
Twiter: @xvii_ceam
Página Web: http://thales.cica.es/xviiceam/
Inscripciones: Hasta el 16/6/2018. Online a través de la página web del congreso, con las siguientes cuotas:

	Hasta el 16/5/2018	*Del 17/5/2018 al 25/6/2018*
Socios (de Thales o de la Fespm)	80 €	120 €
No socios	140 €	180 €
Estudiantes desempleados	40 €	40 €

*Para poder disfrutar de esta oferta debe ser socio de Thales y tener las cuentas al día al menos tres meses antes de la convocatoria.

Convoca: Sociedad Andaluza de Educación Matemática *Thales*
Organiza: Sociedad Andaluza de Educación Matemática *Thales.* Almería
Colaboran: Universidad de Almería
Universidad de Córdoba
Junta de Andalucía. Consejería de Educación
Diputación de Almería

Bloques temáticos

B1. Matemáticas: una película para todos los públicos

Bloque dedicado a las distintas técnicas y recursos que pueden utilizarse para atender a la diversidad.

B2. El guion de aula

Recogerá trabajos que versen sobre distintas metodologías enfocadas a la mejora de la práctica docente.

B3. Mejor guion original

Engloba buenas prácticas y experiencias de aula.

B4. Atrezzo para un Goya a la mejor película

Bloque dedicado al uso y manejo de distintos recursos, incluidas las TIC.

B5. Grandes actores para una gran obra

Versará sobre la actualización y formación del profesorado.

B6. Matemáticas de película (creatividad, arte, cine…)

El congreso contará con:

— Conferencias plenarias
— Ponencias
— Comunicaciones
— Exposiciones
— Talleres
— Póster, Zoco...

Presentación de trabajos

Fecha límite de recepción: 15 de abril de 2018. Confirmación de aceptaciones: 15 de mayo de 2018.

Formatos y modo de envío: según modelos y normas disponibles en la página web del Congreso.

Certificación

24 horas. Se tramitará la homologación de la actividad a la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía.

Actas del Congreso

Solo aparecerán en las Actas del Congreso aquellos trabajos que hayan sido expuestos en el mismo. Estas actas se publicarán en formato digital con el correspondiente ISBN.

Comité científico

Eva Acosta Gavilán
Natividad Adamuz Povedano
Rocío Benítez Cambra
Agustín Carrillo de Albornoz
Francisco España Pérez
Juan José Moreno Balcázar
Francisco Villegas Martín

Comité organizador

Eva Acosta Gavilán
M.ª José Ariza Toledano
David Crespo Casteleiro
M.ª Ángeles Cruz Ruiz
José Abel García Más
Miguel Gea Linares
Juan Guirado Granados
Buensuceso Guzmán Roa
Pedro J. Martínez Fernández
Azucena Martín Sevilla
Josefa Martínez Moreno
Miguel Pino Mejías
Rosana Ramírez Campos
Alejandro Sáez Martín
José Ramón Sánchez García
José Ignacio Tijeras Uclés
Francisco Villegas Martín

SAEM Thales

XIV Jornada de Enseñanza de las Matemáticas: Redes para comunicar, compartir y cooperar en la educación matemática

Pep Bujosa Bravo

El 30 de septiembre de 2017 se celebró en el Edificio del Institut de Estudis Catalans de Barcelona la XIV Jornada de Enseñanza de las Matemáticas, organizada por la SCM, la FEEMCAT, la SBM-XEIX y la SEMCV «Al -Khwarizmi» y que contó con la colaboración del CESIRE-CREAMAT. Desde el año pasado, que se hizo en Valencia, esta Jornada anual se va celebrando, de manera alternativa, en los tres territorios de las entidades que lo organizan. En cada edición, se quiere reflexionar sobre la Enseñanza de las matemáticas y se presentan experiencias y actividades del profesorado de matemáticas de los territorios de habla catalana.

El tema de esta edición, a la que asistieron 114 personas, fue *Redes para comunicar, compartir y cooperar en la educación matemática,* título extraído de la conclusión 12 del Congrés Català d'Educació Matemàtica (C^2EM) que se celebró en Barcelona en julio de 2016.

Conferencia de Ferran Ruiz Tarragó

Tras la apertura de la Jornada por parte de Manel Sol (FEEMCAT), Pep Lluís Pol (SBM-XEIX), Tomás Queralt (SEMCV «Al-Khwarizmi») y Xavier Jarque (SCM), Iolanda Guevara hizo la presentación del ponente Ferran Ruiz, ex presidente del Consell Escolar de Catalunya (2011-2016) y autor de varias publicaciones y conferencias sobre tecnología y educación matemática.

En su conferencia, *Cambio, profesión y conocimiento: las redes y la educación matemática,* comenzó afirmando que el sistema educativo es una red de relaciones entre personas, que todavía está basada en la uniformidad y con un exceso de normativas. A continuación pasó a comentar las conclusiones del C^2EM. Dijo que compartía mucho el sentido general de estas conclusiones, aunque había una serie de detalles que quería comentar:

— Aparte de la referencia a las redes, las conclusiones parecen atemporales. Se podían haber escrito años atrás.
— No ponen en cuestión los actuales objetivos de la educación matemática, ni los contenidos ni las estructuras bajo las que se desarrollan.
— Hablan poco del alumnado, este nuevo alumnado que está en contacto con las tecnologías de comunicación muy pronto.
— No se encuentran palabras como investigación, digital, pruebas externas con su gran acondicionamiento para el trabajo de los enseñantes.

— No se discute la política educativa.
— No se entra en la personalización del aprendizaje. El ponente se pregunta, por ejemplo, ¿por qué el «Bojos per les Mates» se efectúa fuera y no dentro del curriculum?
— La palabra aprendizaje solo sale una vez y ligado a la evaluación.
— El papel de las redes aparece bajo una visión demasiado inocente, como si la bondad de las redes fuera algo garantizado.



Figura 1. La inauguración de la jornada



Figura 2. Ferran Ruiz Tarragó

A continuación, citó la publicación de 2013 del CEC sobre el «Impacto sistémico de la tecnología» donde se afirmaba que la tecnología conlleva la reconstrucción de las reglas sociales, de las instituciones, del entorno y de las mismas personas. Esto quiere decir que las tecnologías actuales obligan a reconstruir la educación escolar. Esta reconstrucción debería entrar en el debate sobre educación matemática que queremos.

También comentó detalles muy interesantes sobre las empresas que controlan el mundo de las redes: Google, Apple, Facebook (con Whatsap), Amazon y Microsoft. Grandes empresas con grandes beneficios económicos, que pueden obtener mucha información de los usuarios y que provocan en los jóvenes una dependencia muy significativa.



Figura 3. En la sala Prat de la Riba

Sobre el tema de «Redes y el Cambio», dijo que todavía no sabemos qué cambio queremos. Para ilustrar el poder actual de las redes, citó el ejemplo de las grandes concentraciones humanas con reivindicaciones políticas y sociales que se han llevado a cabo en estos años, donde las personas se han convocado mutuamente utilizando de las redes sociales de comunicación. En estas concentraciones se han reunido multitudes que compartían los mismos objetivos de cambio social. Pero, si tanta gente tiene ganas de coincidir en un objetivo de cambio, ¿cómo es que tienen tan poco éxito en su consecución?

Según Zeynep Tufecki, socióloga especialista en el estudio de las influencias de las redes en la política y la sociedad, cuando la tecnología empodera los movimientos sociales, paradójica-

mente, lo que hace es debilitarlos. Esta idea es corroborada por el sociólogo César Rendueles. Los grandes movimientos populares que se han llevado a cabo con la ayuda de las redes y que que tienen tanto éxito de convocatoria pierden de vista la fuerza enorme de la estructura del poder que tienen enfrente: las instituciones. Estas se pueden cambiar más fácilmente con organizaciones más tradicionales.

Si esto lo aplicamos a la enseñanza, vemos que la administración educativa y los mismos centros de enseñanza condicionan totalmente la manera de trabajar de los enseñantes. Por lo tanto, por muy bien organizados en red que estemos, si no cambiamos las instituciones no conseguiremos los objetivos.

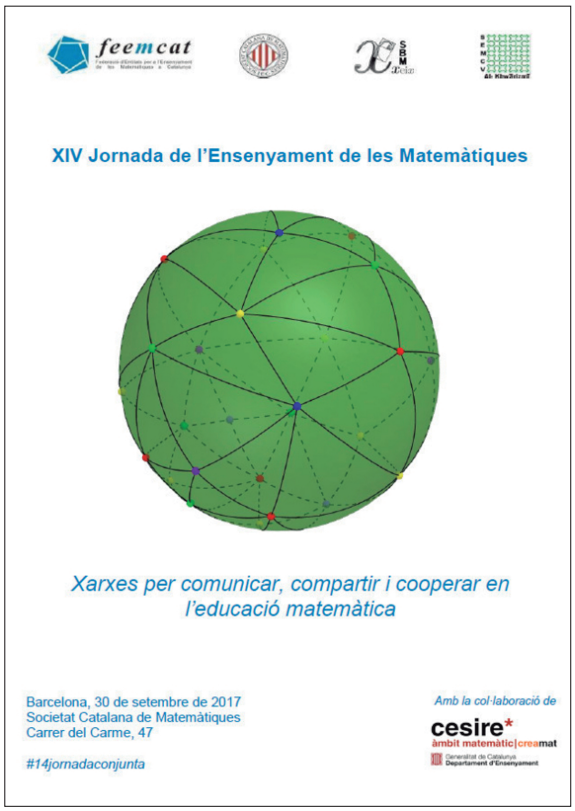


Figura 4. El cartel de la jornada

Dentro de los mismos objetivos debe haber el cambio institucional y no nos podemos contentar con cambios más leves, como el curricular. En resumen, el cambio debe tener en cuenta que:

— La esencia no es el medio (la red) sino la capacidad de pensar y trabajar conjuntamente. Las organizaciones más clásicas ya lo hacen.
— Los objetivos deben incluir la modificación de las instituciones.
— Los colectivos deben querer influir en ámbitos de decisión más amplios que en el suyo propio.

Así pues, las redes deben servir para conseguir cambios en las instituciones y no solo para mejorar nuestro trabajo y formación.

Después pasó al apartado de «Redes y Profesión». Parece que nuestra profesión está todavía protegida de la intromisión de las redes, pero en Estados Unidos ya hay correctores que reciben por red los exámenes que deben corregir y donde los criterios de corrección son totalmente arbitrarios, dependiendo de los resultados globales que se quiera obtener. ¿Quién dice que esto pronto no llegará aquí? En la LOMCE ya se insinúa.

Allí también ya hay agencias que corrigen los exámenes de los profesores. Incluso hay centros educativos que ya los contratan de manera general. Con los gastos de funcionamiento pagan estos servicios por red para que el profesorado no tenga que corregir exámenes.

En la red también se pueden encontrar empresas que hacen clases particulares de cualquier materia, y webs que se ofrecen para hacer trabajos al alumnado que lo desee, con garantías de que no ha habido plagio. Incluso hay webs que venden materiales a profesores hechos por otros profesores. Amazon tiene una compañía, Tenmark, de enseñanza de matemáticas. Esta empresa vive de las deficiencias del modelo tradicional de la enseñanza.

En definitiva, las redes cambian contextos y profesiones.

Acto seguido, pasó a la tercera parte: «Redes y conocimiento». Comenzó preguntándose si la investigación actual sirve para nada.

Afirmó que en la mayoría de investigaciones se habla de resultados y recursos y de las relaciones entre ambos. En cambio, en su opinión, lo más importante es el profesorado y el alumnado.

El trabajo y la organización es lo fundamental. Citó como ejemplo de investigación bien hecha la del equipo de Robin Alexander sobre la enseñanza de primaria en Gran Bretaña. En este trabajo también se afirma que desde el poder se dirige demasiado a los enseñantes, sobre la forma de enseñar. A final el maestro se convierte en una persona que solo debe obedecer las órdenes que le van llegando en los múltiples documentos que las autoridades publican. El ponente considera muy negativo el exceso de normativa y concluye que las redes también deben servir para denunciar el excesivo nivel de intervencionismo de las instituciones. Además, las pruebas externas se convierten en un condicionante muy grande para el trabajo de los enseñantes. Las tres culturas del mundo educativo son la empírica (enseñantes) la académica y la administrativa. Estas dos últimas tienden a controlar la primera. Debería haber una relación más de igual a igual.



Figura 5. *Matemáticas e impresión 3D*



Figura 6. *Fotografía matemática*

A continuación expuso unos estudios sobre los conocimientos matemáticos del alumnado a nivel internacional donde se ve que la educación matemática no va muy bien. ¿No será, se pregunta, que tenemos los objetivos mal planteados? ¿No será que tenemos un café para todos y esto debería acabar de una vez? Habría que diversificar mucho más el curriculum para que todo el mundo disfrute de las matemáticas que realmente necesita. Hizo notar que en el sistema educativo actual, aquel alumno que no se adpta bien al sistema no se puede salir hasta una cierta edad. Si queremos mantener esta exigencia social hay que cambiar los objetivos, sobre todo ahora que la escuela ya no tiene la exclusividad de la información.

Concluyó afirmando que lo esencial de la escolarización es la relación interpersonal, teniendo presente que un cambio en la educación matemática debe servir para tener una mejor vida para todos, pensada especialmente, como un beneficio para el alumnado.

Pueden ver el video de la conferencia a través de: <https://youtu.be/ZQ5BPIO9GyI>, o bien acceder a él vía la biblioteca de vídeos del Insitut d'Estudis Catalans.

Mesas con experiencias de aula

A continuación, salimos al patio y dimos una vuelta por las mesas donde se presentaban diferentes experiencias de aula. En total había 13 con experiencias muy diversas de primaria y secundaria:

— *Cálculo relámpago* de Ramon Martí. Son tarjetas autocorregibles de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, pensadas para practicar y consolidar el cálculo mental, basado en la descomposición numérica.

— *Al-Game* de Mikel Martín y Fede Martín. Se presenta una propuesta de juego algebraico puesta en práctica con alumnos de 1.º y 2.º de ESO de la Fundación Llor y como introducción al lenguaje algebraico a través de la gamificación.



Figura 7. *Recortando el cuadrado*



Figura 8. *La calculadora científica en el aula*



Figura 9. *Maleta didáctica del MMACA*



Figura 10. *Calendario SEMCV*

— *Experiencias de geometría* de Joan Folguera Farré Aprendemos jugando con la geometría, cálculo de volumen de las pirámides, tetraedro regular, octaedro, dodecaedro.
— *Problemáticas* de Cecília Calvo Pesce. El proyecto a través del cual los alumnos de ciclo superior de una docena de escuelas de Cataluña resuelven las mismas cuatro actividades del tipo «rich tasks» permitiendo a sus maestros reflexionar conjuntamente sobre los resultados obtenidos.
— *Maleta didáctica* del MMACA. Una selección de 40 módulos que, en formato DIN-A3 y DIN-A4, pueden servir para montar una exposición, para el alumnado tanto de primaria como de secundaria.
— *Superficies seccionadas* de Maria Garcia Monera. En esta mesa se vio cómo, gracias a unas secciones especiales producidas por la intersección de una superficie con una familia de planos, es posible reproducir un modelo real de la superficie.
— *La calculadora científica en el aula* de María Teresa Navarro y Lluís Bonet. Se presenta una selección de actividades que se pueden utilizar para el alumnado de secundaria desde primero hasta cuarto.
— *Simulaciones de aula* de Roger Grau y Anna Garravé. El ciclo vital de una buena actividad (experimentación, descubrimiento y conceptuación) toma aún más sentido si hablamos de actividades de carácter probabilístico.
— *Matemáticas e impresión 3D* de Sergi Múria, Juan Jareño y Lluís Mora. Una pequeña exposición de materiales elaborados con impresora 3D y que pueden servir de ejemplo de lo que se puede diseñar en las aulas.
— *Recortando el cuadrado* de Guillem Bonet, Sílvia Margelí, Raül Fernández, Victòria Oliu y Francesc Massich. Dividir, cortar, a partir de un cuadrado (o de cualquier otra figura) no representa ningún problema para los alumnos. Pues bien, esto tan sen-

cillo fue la base para varios problemas matemáticos que propusieron.

— *Calendario SEMCV* con Rafa Martínez. Presentación del calendario matemático que anualmente publica la SEMCV.

— *Tono* con Marisa Monsergas, Ivon Cárdenas, Silvia Zurita, Dani Ribó. Actividades diversas sobre ecuaciones, medida del diámetro de la Tierra y trabajo matemático con Lego.



Figura 11. *Tono*



Figura 12. *Experiencias de geometría*



Figura 13. *Superficies seccionadas*

— *Fotografía matemática* con David Alonso, Anna Darnaculeta y Paco Moreno. El grupo de Fotografía Matemática de Abeam, confecciona cada año un calendario con las fotografías premiadas en el concurso del año anterior.



Figura 14. *Al-Game*



Figura 15. *Simulaciones de aula*

Mesa redonda

Al volver a la sala, comenzó la mesa redonda, moderada por la Cecilia Calvo Pesce, sobre el tema de la jornada.

Participaron Lluís Bonet Juan, Carlos Giménez Esteban, Joan Gómez Urgellés y Sara Sánchez Camins.

Se recordó la 12ª conclusión del C²EM:

> Las redes de maestros y profesores (asociaciones o espacios virtuales) son una herramienta al servicio de la educación matemática que hay que difundir.
> — Cambian y amplían la manera de aprender porque permiten compartir y construir conocimiento de manera colectiva.
> — Marcan tendencias que la propia comunidad autoregula.

— Admiten diferentes grados de implicación de los usuarios.

A partir de ahí, cada ponente habló de sus experiencias personales sobre el tema de las redes, poniendo énfasis sobre todo, en las redes de profesores y en las redes como herramientas de aula.



Figura 16. Cecília Calvo coordina la mesa redonda



Figura 17. Durante la mesa redonda

Comisión para el Impulso de las Conclusiones del C²EM

Antoni Vila y Raül Fernández presentaron los trabajos realizados por la Comisión para el Impulso de las Conclusiones de C²EM (CIC). Antoni, uno de los coordinadores de la CIC agradeció a Ferran Ruiz los comentarios que había hecho sobre las conclusiones y dijo que tomaba buena nota de ello. Acto seguido, explicó cómo estaba estructurada la CIC y qué trabajos se habían hecho hasta ahora.

Raül Fernández presentó <http://c2em.feemcat.org/>, la nueva web que recoge toda la información relativa al congreso y también los trabajos de la CIC.



Figura 18. Presentación del trabajo del CIC



Figura 19. Antoni Vila y Raül Fernández

Premio Maria Antònia Canals

Manuel Sol, presidente de la FEEMCAT, en nombre de todas las sociedades convocantes, expuso las nuevas bases que tendrá, a partir de este año, el Premio Maria Antònia Canals.

El premio convocado por FEEMCAT, SBM-XEIX, SEMCV «Al-Khwarizmi» y, en las próximas ediciones, también por la SCM, se otorgará anualmente, aunque en cada edición solo se premiarán dos de los cuatro niveles educativos a los que va dirigido.

Se premia una experiencia de aula innovadora realizada en cualquiera de los diferentes niveles educativos (infantil, primaria, secundaria y universidad). También, una trayectoria por una metodología innovadora implementada en las aulas.

El acto de distribución de premios se continuará realizando en la jornada anual de enseñanza de las matemáticas.

Sesiones paralelas de la tarde

Después de la comida, la jornada continuó con las sesiones de la tarde en que se trataron diversas aportaciones sobre el tema de la jornada en dos sesiones que a su vez se duplicaban en dos simultáneas. Cada asistente a la jornada pudo elegir una de las comunicaciones de cada sesión.

Primera sesión

Tejiendo nuevos espacios de aprendizaje, con Manel Martínez y Carlos Giménez. En esta sesión se presentó una experiencia de aula consistente en el uso de un espacio virtual de aprendizaje proporcionado por el entorno de GeoGebra que permite el trabajo en red entre docentes y alumnos de bachillerato de dos centros.



Figura 20. *Tejiendo nuevos espacios de aprendizaje*



Figura 21. *La Red, un espacio de colaboración*

La Red, un espacio de colaboración para el desarrollo del aprendizaje, con Juanjo Cárdenas y Ximo Altur. Los ponentes presentaron lo que hacen en el aula, compartieron su experiencia en el desarrollo de un trabajo en red, donde los alumnos investigan y se empoderan de su aprendizaje.

Segunda sesión

De la hormiga matemática a las webquest, con Sebastià Capella Priu. La hormiga matemática, un primer paso de «Redes para comunicar, compartir y cooperar en la educación matemática».

La Viquipedia y la educación matemática, con Enrique Brasó Campderrós. Se presenta el proyecto «edit-a-thon matemática» iniciado el curso pasado por la SCM.

¡Nos vemos el año que viene en Mallorca!



Figura 22. *De la hormiga matemática a las Webquest*



Figura 23. *La Viquipedia y la educación matemática*

Pep Bujosa Bravo
<pepbujosa@gmail.com>

suma+
revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

86
noviembre 2017

Consejo de Dirección
<direccion@revistasuma.es>

Lluís Albarracín Gordo
Universitat Autònoma de Barcelona
Bellaterra (Barcelona)

Miquel Albertí Palmer
INS Vallès, Sabadell (Barcelona)
Universitat Autònoma de Barcelona

Iolanda Guevara Casanova
Departament d'Ensenyament
de la Generalitat de Catalunya
Universitat Autònoma de Barcelona

Daniel Sierra Ruiz
IES El Picarral, Zaragoza

Administración
<administracion@revistasuma.es>

Miguel Latorre García

Edita
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM)

Web
<www.revistasuma.es>

Beatriz Rubio Serrano
Universidad de Zaragoza

Jorge Pinilla López
Universidad de Zaragoza

Cubierta

Mercè Cassanyes i Caballeria

Maquetación y corrección

Miquel Albertí Palmer

Ricardo Alonso Liarte
IES Salvador Victoria, Monreal del Campo (Teruel)

Iolanda Guevara Casanova

Julio Sancho Rocher
IES Avempace, Zaragoza
Universidad de Zaragoza

Daniel Sierra Ruiz

Consejo de Redacción

Miguel Barreras Alconchel
IES Matarraña, Valderrobres (Teruel)
<pelanium@yahoo.es>

Carme Burgués Flamarich
Universitat de Barcelona
<cburgues@ub.edu>

José María Muñoz Escolano
Universidad de Zaragoza
<jmescola@unizar.es >

Josep Rey Nadal
MMACA (Museu de Matemàtiques a Catalunya)
INS La Garriga, La Garriga (Barcelona)
<jrey@xtec.cat>

Montserrat Torra Bitlloch
CESIRE, Àmbit matemàtic CREAMAT
Departament d'Ensenyament, Generalitat de Catalunya
<mtorra@xtec.cat>

Consejo Editorial

Agustín Carrillo de Albornoz Torres
Universidad de Córdoba
<agustincarrillo@fespm.es>

Juan Martínez-Tébar Giménez
IES Alto de los Molinos, Albacete
<juanmtg1@gmail.com>

Tomás Queralt Llopis
IES Les Alfàbegues, Bétera (Valencia)
Universitat de València
<tomas.queralt@uv.es>

Onofre Monzó del Olmo
IES Veles e Vents, Torrent (Valencia)
Universitat de València
<onofre.monzo@uv.es>

Revista Suma
Apartado de correos 286
08911 Badalona (Barcelona)
Tirada: 6000 ejemplares
Depósito legal: Gr 752-1988
ISSN: 1130-488X
Twitter: @suma_fespm

Consejo Asesor

Amador Álvarez del Llano
IES La Marina, Santa Cruz de Bezana (Cantabria)
<aalvar29@hotmail.com>

David Arnau Vera
Universitat de València
<david.arnau@uv.es>

Carmen Azcárate Giménez
Universitat Autònoma de Barcelona
<carmen.azcarate@uab.es>

Javier Bergasa Liberal
IES Navarro Villoslada, Pamplona
<jbergasl@educacion.navarra.es>

Luis M. Botella López
IES Figueras Pacheco, Alicante
<lluis.botella@gmail.com>

Salvador Caballero Rubio
IES Gaia, Sant Vicent del Raspeig (Alicante)
<salvador.caballero@gmail.com

Encarnación Castro Martínez
Universidad de Granada
<encastro@ugr.es>

Abilio Corchete González
IES Suárez de Figueroa, Zafra (Badajoz)
<acorchete@gmail.com>

Olimpia Figueras Mourut de Montppellier
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados IPN México
México D.F. (México)
<figuerao@cinvestav.mx>

M.ª José Fuente Somavilla
IES Augusto González de Linares, Santander
<mj.fuente@yahoo.es>

Maria Luisa Girondo
Universitat Rovira i Virgili (Tarragona)
<marialuisa.girondo@urv.net>

Horacio Gutiérrez Álvarez
Profesor de matemáticas, Oviedo
<horag3@gmail.com>

Arturo Mandly Manso
IES José Manzano, Don Benito (Badajoz)
<armandly@gmail.com>

Rafael Martínez Calafat
IES La Plana, Castelló de la Plana
<rmartinez@vila-real.uned.es>

Ricardo Moreno Castillo
Profesor de matemáticas, Santiago de Compostela
<moreno_castillo@hotmail.es>

Maite Navarro Moncho
IES Veles e Vents, Torrent (Valencia)
Universitat de València
<Teresa.Navarro-Moncho@uv.es>

M.ª Jesús Palacios de Burgos
Profesora de matemáticas, Madrid
<mjpalaciosdeburgos@hotmail.com

Miguel Ángel Moreno Redondo
IES Joaquín Sama, San Vicente de Alcántara (Badajoz)
<mamorenor@gmail.com>

Pascual Pérez Cuenca
IES Figueras Pacheco, Alacant
<pascual.prz@gmail.com>

Antonio Pérez Sanz
IES Salvador Dalí, Madrid
<aperez.sanz@gmail.com>

Ana Belén Petro Balaguer
Universitat de les Illes Balears, Palma
<anabelen.petro@uib.es>

Luis Puig Mosquera
IES Sofía Casanova, Ferrol (A Coruña)
<luispuig@edu.xunta.es>

Mariano Real Pérez
Centro de Profesorado, Sevilla
<mariano31415@gmail.com>

Francesc Andreu Rosselló Llompart
Universitat de les Illes Balears, Palma
<cesc.rossello@uib.es>

Manuel José Sastre Álvarez
IES La Corredoria, Oviedo
<mjsastre@telecable.es>

Manuel Sol Puig
Institut Vilatzara, Vilassar de Mar (Barcelona)
Universitat de Barcelona
<msol@xtec.cat>

Carlos Oswaldo Suarez Alemán
Universidad de Cádiz
<carlososwaldo.suarez@uca.es>

Francisco Villegas Martín
Centro del Profesorado, El Ejido (Almería)
<pvillegas@thales.cica.es>

Suma es una revista de didáctica de las matemáticas de periodicidad cuatrimestral cuyo objetivo es tratar sobre los aspectos relacionados con su enseñanza y aprendizaje y destinada, sobre todo, al profesorado que trabaja en educación infantil, primaria, secundaria y universitaria.

La revista SUMA se edita en
Badalona (Barcelona) — España

suma+

no se identifica necesariamente con las opiniones vertidas en las colaboraciones firmadas

Normas de publicación

1. Para el envío de artículos o cualquier consulta sobre su contenido se utilizará el correo electrónico de la redacción de *Suma* <articulos@revistasuma.es> o su dirección postal:

   Revista *Suma*
   Apartado de Correos 286
   08911 Badalona

2. Si los trabajos, imágenes incluidas, ocupan más de 5 Mb sólo se enviaran por correo postal en soporte magnético (CD-ROM, DVD-ROM o *pen drive*).
3. Los trabajos deben ser enviados como archivo en formato .TXT, .ODT, .RTF, .DOC, .DOCX, adjunto a un mensaje de correo electrónico en el que deben figurar:
   1) El título del trabajo, los nombres y apellidos de todos los autores, su lugar de trabajo y su dirección completa así como la sociedad federada a la que pertenecen (si se desea).

   Y a efectos de comunicación:

   2) El correo electrónico, teléfono y dirección postal del autor de contacto.
4. Se debe enviar una segunda versión del original en la que no aparezcan los nombres de los autores, ni información relativa a ellos o que pueda servir para identificarlos (por ejemplo, institución a la que pertenecen, citas y referencias bibliográficas propias, agradecimientos, datos del proyecto en el que se enmarca el trabajo). En esta versión se reemplazarán las citas y referencias bibliográficas por «Autor, 2012» o «Autor y otros, 2012». En las referencias bibliográficas propias se debe eliminar el título y el nombre de la revista o el título del libro donde se publica.
5. Se admiten diversos tipos de trabajos: teóricos, informes de investigaciones, divulgación, innovación didáctica…
6. Junto con el artículo se remitirá un resumen (máximo de 600 caracteres incluyendo espacios), una traducción del mismo y del título en inglés, y cinco palabras clave jerarquizadas (en castellano e inglés).

   Ejemplo: Investigación didáctica, Álgebra, Modelización y dificultades, Enseñanza y aprendizaje, Secundaria y bachillerato.
7. El texto irá una sola columna y tendrá una longitud máxima de 25 000 caracteres sin contar espacios pero incluyendo las tablas, las figuras y los anexos.
8. Los esquemas, dibujos, gráficas e imágenes serán enviados preferentemente en formato TIF o EPS, aunque será admisible el formato JPEG, de modo que, a una resolución mínima de 300 ppp, la imagen tenga un tamaño mínimo de 8 × 8 cm, y en color original. Se adjuntarán en una carpeta aparte del documento del texto, ya que las imágenes incrustadas en el texto no son válidas para su posterior edición. Cada archivo estará claramente identificado y se indicará en el texto el lugar donde se ubica. De igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.
9. Si alguna expresion no se puede escribir con los carácteres disponibles en la fuente Times New Roman, se incluirá, con un editor de ecuaciones, fuera del texto. Si esto no fuera posible, se incorporará como imagen. En tales casos se indicará el lugar que ocupan las fórmulas en el texto, haciendo referencia al nombre del archivo que las contiene.
10. Las referencias bibliográficas se dispondrán al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición.

    Ejemplos:

    Gómez, E. (1990), *Título,* Editorial, Lugar de edición.
    Gómez, E. (1990*a*), *Título,* Editorial, Lugar de edición.
    Gómez, E., y J. Pérez (1990), *Título,* Editorial, Lugar de edición.
    Gómez, E., J. Pérez y D. Hernández (1990), *Título,* Editorial, Lugar de edición.

    En los artículos de revistas y capítulos de libro se seguirá la pauta que se muestra a continuación:

    Gómez, E. (1990), «Título», *Revista,* n.° 31, 35-56.
    Gómez, E. (1990), «Título», en J. Pérez (ed.), *Título,* Editorial, Lugar de edición, 13-23.
11. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: «[…] supone un gran avance (Hernández, 1992)». Si el autor aparece explícitamente en el texto, tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: «[…] según Rico (1993)».
12. Si se cita una referencia de más de tres autores se puede citar el primero seguido de la expresión *y otros.* Por ejemplo: «Bartolomé y otros (1982)», «Gelpi y otros (1987)». Pero en la bibliografía deben aparecer todos los autores.
13. Todas las referencias bibliográficas deben corresponder a menciones hechas en el texto.
14. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente con superíndices a lo largo del artículo y se incluirán al final del texto.
15. A la recepción del trabajo se enviará un correo electrónico como acuse de recibo.
16. Cada trabajo será remitido a dos asesores para ser evaluado. Estos no serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo, aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo o recomendarán posibles modificaciones acordes con las normas y criterios de *Suma*.
17. Si los dos informes son positivos, el artículo será publicado. Si los dos informes son negativos, se desestimará su publicación. Si existe discrepancia entre los informes, se solicitará un tercer informe que decidirá su publicación o no.
18. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como —en caso afirmativo— la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido.
19. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

Boletín de suscripción

Tarifas	Suscripción anual	Número suelto	Monografía
Particulares	25 €	10 €	15 €
Centros	40 €	15 €	15 €
Europa	50 €	20 €	15 €
Resto del mundo	60 €	22 €	15 €

Fotocopiar esta hoja y enviar:

por correo a: Encarni Amaro Parrado (Tesorería de la FESPM)
C/ La Palma nº1, 1ºB,
23740, Andújar-Jaén.

por correo-e a: admin@fespm.es

Deseo suscribirme a la revista *Suma*:

Nombre y apellidos: NIF/CIF:

Dirección: Teléfono:

Población: CP:

Provincia: País:

Correo electrónico:

Importe (€)

☐ Suscripción a partir del año (3 números) _____

☐ N.os sueltos _____

Total

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto)

☐ Transferencia bancaria (IBAN ES79 2100 2153 3802 0010 9089)

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM

Fecha y firma:

Nombre y apellidos:

IBAN: ⌊⌊⌊⌊ Entidad: ⌊⌊⌊⌊ Oficina: ⌊⌊⌊⌊ DC: ⌊⌊ Cuenta: ⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊

Banco/Caja:

Agencia n.º: Dirección:

Población: Provincia:

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que, periódicamente, les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista *Suma*.

Atentamente (fecha y firma):

Conforme a lo establecido en el art. 5 de la Ley Orgánica 15/1999 de Protección de Datos de Carácter personal, le informamos que los datos de carácter personal que Usted ha facilitado de forma voluntaria se incorporarán a un fichero automatizado cuyo responsable es la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), con el fin de llevar a cabo la gestión integral de nuestra relación comercial, cobrar tarifas, contactarle y enviarle información que pueda ser de su interés, estando prevista la comunicación de los mismos a aquellos profesionales y/o empresas que intervienen en la gestión del servicio solicitado, descritos en el Documento de Seguridad. Si no nos manifiesta lo contario entenderemos que Usted consiente el tratamiento indicado. Puede ejercitar sus derechos de acceso, cancelación, rectificación y oposición, mediante escrito dirigido a la dirección postal de SUMA junto con una fotocopia del DNI.