suma+
Artículos
Marzo 2018
87
pp. 31-40

Destrezas de modelización en la formación inicial de maestros de Educación Primaria

Jesús Montejo Gámez
Elvira Fernández de Ahumada
Carmen León Mantero
Noelia Jiménez Fanjul
Natividad Adamuz Povedano

Se presenta una propuesta didáctica para trabajar la modelización matemática con alumnado del grado de Educación Primaria. La idea surge de una investigación en la que se observaron dificultades de los estudiantes para modelizar y resolver problemas presentados en contexto e interpretar los resultados obtenidos, así como algunas carencias al trabajar con unidades de medida y la noción de área. Este trabajo proporciona pautas para trabajar la modelización desde las necesidades observadas y da un ejemplo concreto de tarea de instrucción aplicable a maestros de matemáticas en formación inicial.

Palabras clave: Modelización matemática, Resolución de problemas, Formación de maestros.

Modelization skills in the initial formation of Elementary School teachers

A didactic proposal to teach mathematical modelling to preservice Elementary School teachers is proposed. The idea arises from an investigation which revealed students' difficulties to model and solve contextualized problems and interpret the obtained results, as well as lacks related to measure units and the notion of area. This paper provides guidelines to teach modelling from the observed needs and gives an example of learning task for preservice mathematics teachers.

Keywords: Mathematical modelling, Problem solving, Formation of elementary school teachers.

El debate sobre qué tipo de aprendizajes deben promover los currículos escolares de matemáticas está teniendo gran repercusión en los últimos años, debido a las normativas europeas y nacionales que impulsan el trabajo por competencias, las evaluaciones internacionales que miden capacidades matemáticas transversales a los contenidos (OECD, 2013) y algunas corrientes ya clásicas en educación matemática que consideran la resolución de problemas como un elemento fundamental de la educación matemática de los individuos (Polya, 1978; NCTM, 2000) y que subrayan la necesidad de presentar matemáticas contextualizadas (Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2014). Este tipo de ideas contrastan con planteamientos fundamentados en contenidos que pueden verse reducidos a la reproducción de procedimientos fuera de contexto, dejando así en el aire la relevancia de las destrezas matemáticas para comprender otras disciplinas y, en general, el mundo que nos rodea. En el ámbito de la formación inicial del profesorado, el trabajo con matemáticas contextualizadas conlleva múltiples beneficios. No solo refuerza los significados de las nociones matemáticas escolares, sino que contribuye a que los futuros docentes identifiquen situaciones y fenómenos que permitan presentar estas nociones de forma adaptada al conocimiento e intereses

Artículo recibido en *Suma* en noviembre de 2017 y aceptado en enero de 2018

de sus alumnos. También contribuye al pensamiento crítico de los profesores en formación, ya que el contexto obliga a estructurar y describir la realidad en forma matemática y a interpretar resultados matemáticos dentro de situaciones reales. Asimismo, la resolución de problemas es la forma más natural de introducir matemáticas contextualizadas, aunque no está claro qué contenidos deben reforzarse a través de esta vía en los grados de educación primaria. En muchos casos, este tipo de grados alberga tan solo una asignatura orientada al desarrollo matemático de los maestros en formación inicial. En la Universidad de Córdoba, además, el alumnado del grado en Educación Primaria presenta gran diversidad de bagajes matemáticos, lo que condujo a proponer una evaluación inicial que permitiera conocer qué matemáticas debían tener prioridad en su instrucción matemática. El resultado de la evaluación dejó en evidencia carencias a la hora de abordar cuestiones abiertas o que no eran explícitas respecto al contenido matemático necesario para ser resueltas (figura 1). Estas carencias apuntaron hacia destrezas asociadas a la modelización matemática, lo que motivó el desarrollo de una investigación para analizar las estrategias seguidas por los estudiantes ante problemas abiertos y profundizar en las dificultades subyacentes a las carencias observadas (Montejo-Gámez y otros, 2017).

El resultado de la evaluación dejó en evidencia carencias a la hora de abordar cuestiones abiertas o que no eran explícitas respecto al contenido matemático necesario para ser resueltas.

El presente trabajo expone las necesidades formativas que se desprenden de la investigación y proporciona pautas y una propuesta didáctica para cubrir estas necesidades de los maestros en formación inicial a través del desarrollo de habilidades de modelización.

Modelización en educación matemática

Durante las últimas décadas la modelización ha adquirido especial relevancia en el ámbito de la educación matemática (Blum y Borromeo, 2009). Son diversos los autores que han abordado la discusión sobre qué debe entenderse por modelización matemática, llegando a definiciones que presentan tanto analogías como diferencias en algunos matices. Blum (2002) se refirió a la modelización matemática como el proceso que transforma una situación problema en un modelo matemático. Lesh y Doerr (2003), a su vez, consideraron la modelización como el conjunto de procesos que el estudiante utiliza y desarrolla en su esfuerzo por resolver un problema del mundo real. Por su parte, Blomhøj (2004) la definió como una práctica de enseñanza que centra el aprendizaje en la relación entre el mundo real y la matemática. Más adelante, Blum y Borromeo (2009:1) se refirieron a la modelización como «el proceso de traducción entre el mundo real y las matemáticas en ambos sentidos» y Niss y Hojgaard (2011) la definieron como una competencia del individuo para estructurar y matematizar una situación real, trabajar con un modelo de la misma y analizar críticamente tanto los resultados como el proceso seguido. En esta línea, Blum (2002) había planteado que la modelización conlleva la matematización de una situación real, seguida de una interpretación y validación en la realidad de los resultados matemáticos obtenidos. Más recientemente, Ferrando y otros (2017:222) señalaron que la modelización matemática implica «un tipo concreto de tareas de re-

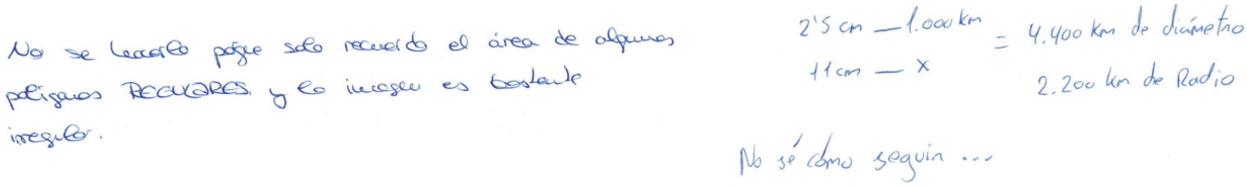


Figura 1. Muchos alumnos no supieron cómo aproximar el área de una figura irregular presentada a escala, a pesar de conocer procedimientos matemáticos necesarios

solución de problemas contextualizados en las cuales es indispensable crear una representación matemática de una realidad o fenómeno, lo que llamamos un modelo». En este trabajo, con el fin de facilitar la detección de las habilidades asociadas a la modelización que deben trabajarse en la formación inicial de maestros, se adoptó la interpretación de modelización como el conjunto de procesos que se activan para construir un modelo matemático, extraer conclusiones a partir del mismo y discutir la validez tanto de dichas conclusiones como del modelo completo.

Son numerosos los trabajos que presentan el planteamiento de tareas de modelización, su análisis y resultados en niveles de secundaria (Gallart y García-Raffi, 2013; Gallart, Ferrando y García-Raffi, 2014; Gallart, Ferrando y Navarro, 2015; Socas, Ruano y Hernández, 2016; Ferrando y otros, 2017). A nivel de primaria, también existen trabajos que exploran el desarrollo del conocimiento matemático y los procesos de razonamiento de los niños, al trabajar con problemas de modelización (English y Watters, 2005; English, 2006; Ulu, 2017), siendo diversos los autores que defienden que la modelización matemática puede y debe comenzar en la escuela primaria donde los niños y niñas ya tienen las competencias básicas sobre las cuales se puede desarrollar la modelización (NCTM, 2000; Diezmann, Watters y English, 2002; Lehrer y Schauble, 2003). En cuanto a la importancia de abordar la modelización matemática en la formación inicial del docente, Mathews y Redd (2007) y Ortiz, Rico y Castro (2007) la consideran esencial porque resulta una herramienta dinámica que moviliza conceptos y procedimientos matemáticos para la resolución de problemas, además de invitar a la reflexión sobre lo que significa enseñar matemáticas. Según Mora Zuluaga y Ortiz Buitrago (2014), la modelización ayuda al profesorado en formación a tomar conciencia de que las matemáticas escolares pueden resultar útiles para comprender, describir, interpretar y modificar la realidad. Por su parte, Doerr (2007) señaló la necesidad de que los profesores en formación tengan experiencias sobre modelización que les permitan disponer de contextos y herramientas para la enseñanza, y English (2006) considera las tareas de modelización como experiencias desafiantes y estimulantes para los maestros mientras exploran la naturaleza de las ideas matemáticas que se quieren trabajar, consideran estrategias de implementación apropiadas y promueven equipos de aprendizaje dentro de sus aulas. Entre las investigaciones empíricas que han analizado las destrezas de modelización en formación inicial del profesorado destacan los trabajos de Bukova-Güzel (2011) que examinó los enfoques que plantearon los estudiantes en el diseño de problemas de modelización matemática y en qué medida implementaron procesos de modelización al resolver los problemas que proponían, y de Hıdıroğlu, Dede, Kula-Ünver y Bukova-Güzel (2017) que analizaron las soluciones que estudiantes para profesores de secundaria daban a un problema concreto diseñado para trabajar la modelización matemática.

Dada la complejidad de procesos que involucran las actividades de modelización, se plantea el interrogante acerca de qué características debe tener una tarea de modelización matemática. En este trabajo se siguieron los principios propuestos por Lesh y otros (2000). Para diseñar actividades que estimulan la modelización (AEM), estos autores centraron su atención en dos dimensiones: características de las tareas y características de las soluciones. Respecto a las características de la tarea, el *principio de realidad* marca que esta debe ser significativa para los estudiantes, es decir, ser acorde a sus diferentes niveles de habilidad matemática y en general, a sus conocimientos. Además de ser significativa, la actividad debe ser lo más sencilla posible, según el *principio de prototipo efectivo*. También es necesario que incluya criterios que los estudiantes puedan usar para revisar sus modelos y crear documentación para revelar cómo resolvieron la tarea, según establecen los *principios de autoevaluación y de documentación*, respecti-

En este trabajo [...] se adoptó la interpretación de modelización como el conjunto de procesos que se activan para construir un modelo matemático, extraer conclusiones a partir del mismo y discutir la validez tanto de dichas conclusiones como del modelo completo.

vamente. Respecto a las características de las soluciones que deben fomentarse, el *principio de construcción del modelo* afirma que los estudiantes deben proporcionar una explicación o modelo explícito. Por último, *el principio de habilidad compartida y reutilización* establece que debe estimularse la producción de soluciones compartibles y reutilizables. El proceso de resolución de estas tareas de modelización abarca distintas fases que pueden interpretarse como un ciclo. Uno de los más utilizados como referencia es el propuesto por Blum y Leiss (2007), el cual constituyó el marco teórico de la investigación desarrollada y cuyo esquema puede verse en la figura 2. Este modelo se articula en torno a siete fases de forma que (1) la situación-problema tiene que ser entendida, es decir, se tiene que construir un modelo de la situación (*fase de comprensión y construcción*); (2) la situación tiene que ser simplificada, estructurada y precisada (*fase de simplificación y estructuración*), dando lugar a un modelo real de la misma; (3) la *fase de matematización*, donde se transforma el modelo de la situación en un modelo matemático; (4) la fase de *trabajar matemáticamente* produce resultados (matemáticos) que (5) se interpretan (*fase de interpretación*) y (6) validan en el mundo real (*fase de validación*). El ciclo finaliza con (7) la *fase de exposición* de los resultados obtenidos.

Dado que la trayectoria que sigue un individuo o grupo de individuos al resolver un problema no sigue linealmente las fases de Blum y Leiss (2007), Borromeo (2007, citado por Blum y Borromeo, 2009) asocia las estrategias de resolución de un problema con diferentes formas de pensar.

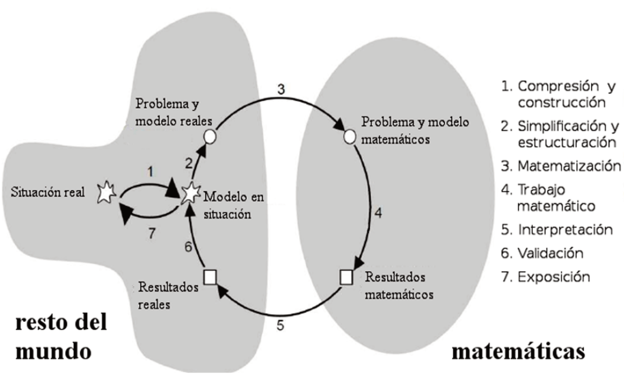


Figura 2. Esquema del ciclo de modelización. Fuente: Blum y Leiss (2007)

Así, define tres estilos de pensamiento matemático que resultaron especialmente útiles en el estudio realizado:

a) pensamiento visual, mediante el cual el individuo suele razonar sobre la realidad más que sobre el modelo matemático, muestra tendencia a abordar los problemas de forma global y prefiere las representaciones pictóricas,

b) pensamiento analítico, mediante el cual el individuo suele razonar sobre el modelo matemático más que sobre la realidad, muestra tendencia a utilizar representaciones simbólicas o verbales y prefiere estructurar paso a paso el procedimiento seguido, y

c) pensamiento integrado, en un punto intermedio entre ambos extremos, mediante el cual el individuo es capaz de combinar elementos de los otros dos tipos de pensamiento.

Resultados de la investigación y necesidades formativas encontradas

En la investigación desarrollada se propuso a 227 estudiantes del grado de Educación Primaria el problema de estimar el área de la Antártida a partir de un mapa a escala dado y se analizaron las soluciones que dieron al problema cada uno de los participantes del estudio. El análisis atendió a las estrategias empleadas para resolver el problema, el tipo de pensamiento que cada estrategia manifestaba y la identificación e interpretación de errores (pueden consultarse los detalles en Montejo-Gámez y otros, 2017).

El primer resultado relevante de la investigación es la gran cantidad de alumnos que no fueron capaces de afrontar el problema: más del 70% de los participantes del estudio (159) no dejaron evidencias de haberlo abordado.

En cuanto al tipo de estrategia empleada por los alumnos que sí trataron de resolver el problema, se encontró cierta variabilidad de enfoques. Las estimaciones más comunes aproximaron el área de la isla por el de una única figura plana. Quince alumnos utilizaron un rectángulo

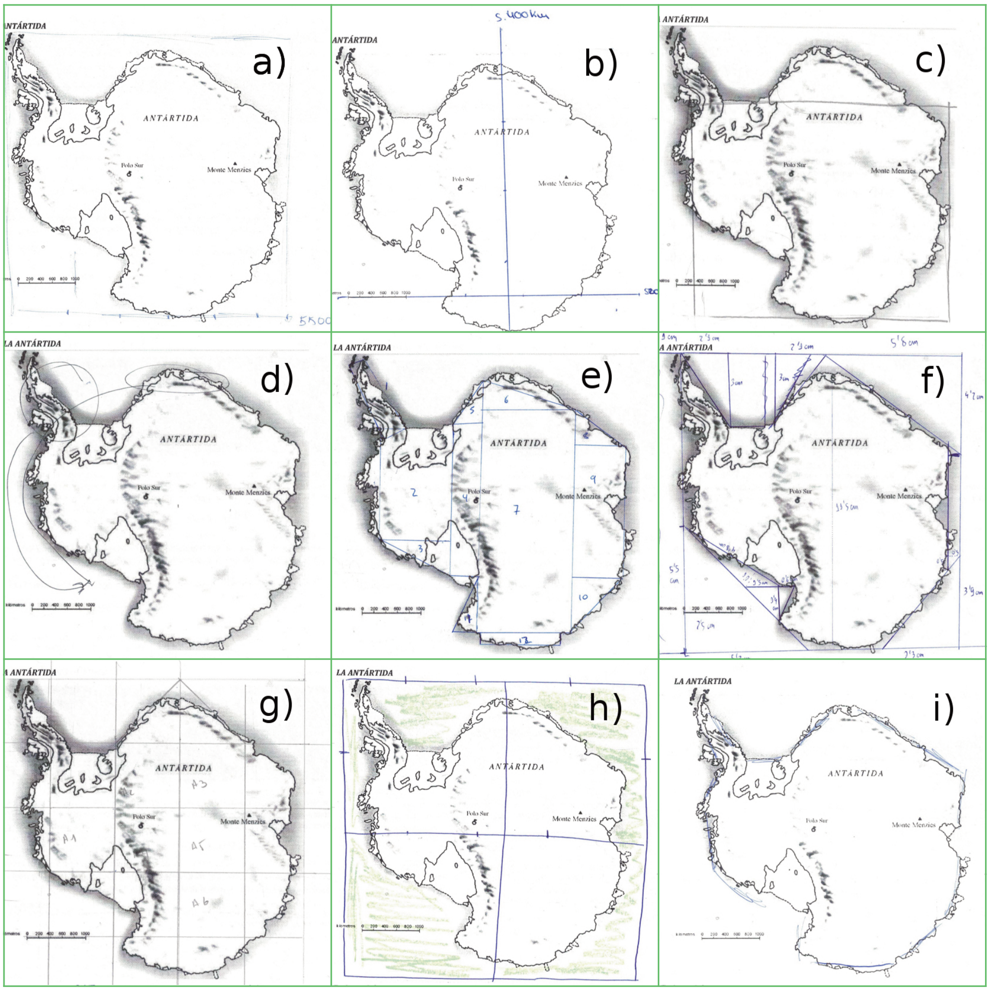


Figura 3. Ejemplos de las estrategias aplicadas por los estudiantes.
El alumno del dibujo f) no ha hecho ningún cálculo

que contenía completamente la isla, algunos lo hicieron circunscribiendo este rectángulo a la isla (figura 3a) pero otros utilizaron un polígono algo más amplio (figura 3b). A su vez, 14 participantes usaron un rectángulo que compensaba las zonas de mar que dejaba en su interior con zonas de tierra que quedaban fuera del polígono, mientras que otros 12 alumnos hicieron el mismo tipo de estimación pero tomando un cuadrado (figura 3c). Otros 5 estudiantes llevaron a cabo un procedimiento similar, pero eligiendo un círculo (figura 3d). Por otra parte, también se observaron estrategias de mayor complejidad: 6 individuos descompusieron la isla en diferentes polígonos y sumaron las áreas de los polígonos (figura 3e). De forma análoga, 5 participantes incluyeron la isla en un cuadrado y descompusieron en polígonos la zona de mar que quedaba fuera de la isla (figura 3f).

Se observaron también otras estrategias minoritarias: 2 alumnos trazaron una retícula de lado igual a la escala gráfica, contabilizaron los cuadrados interiores a la isla y trataron de descomponer los cuadrados que tenían trozos de isla y de mar en otros polígonos (figura 3g). Otro estudiante dibujó un rectángulo que incluía a la isla y estimó el área de la zona de mar que contenía este rectángulo por la cuarta parte del área del mismo, aproximando así el área de la isla mediante las tres cuartas partes restantes (figura 3h). Por último, hubo 8 participantes que utilizaron longitudes para dar la estimación pedida. En particular, dos de ellos estimaron el área por medio de la longitud del perímetro (figura 3i) y otros dos se limitaron a medir un *diámetro* de la isla y proporcionaron el resultado de esta medición como solución al problema.

En relación al tipo de pensamiento mostrado por los participantes en el estudio, se observó predominio de pensamiento de tipo analítico (34 alumnos) sobre el integrado (20 alumnos) y el visual (14 alumnos). En particular, la mayoría de los estudiantes que aplicaron estrategias de estimación basadas en el área de una única figura plana (figuras 3a-3d) exhibieron un pensamiento más analítico, limitándose a mostrar cálculos o texto y sin dejar evidencias de trabajo sobre la imagen (no trazaron la figura). Por su parte, las estrategias de descomposición en polígonos de la isla (figura 3e) o de la zona marítima circundante (figura 3f) están mayoritariamente asociadas a un pensamiento integrado y denotan mayor complejidad de razonamiento.

El análisis de los errores cometidos por los estudiantes dejó entrever dificultades en relación a ciertos contenidos. En primer lugar, se encontraron errores asociados a la medida, como el uso incorrecto de las unidades de medida (error más común, figura 4a) o la realización de mediciones con resultados significativamente inexactos. También se observaron errores relacionados con la noción de área, además de la ya comentada estimación de áreas a través de longitudes de perímetros o de diámetros. Algunos de ellos son el cálculo de áreas de rectángulos sumando las dimensiones de dicho rectángulo, la aplicación de fórmulas no válidas, o la utilización de que un cuadrado de dimensiones $n \times n$ tiene área n. Por otra parte, el uso de la escala también generó errores entre los alumnos. El que más se repitió incide de nuevo en el uso de las unidades de medida como son identificar con 1 cm la longitud total de la escala gráfica (2,5 cm) o la partición más pequeña de la misma (0,5 cm). Este tipo de errores puede verse ilustrado en las figuras 4b y 4c, respectivamente. También se observaron estudiantes que calcularon correctamente el área utilizando las mediciones directas (sin cambiar de escala) y transformaron de manera errónea las unidades: bien multiplicando por 1 000 o utilizando el factor de escala lineal (cm–km) en lugar del cuadrático (cm^2–km^2), como en la figura 4d.

El análisis de los errores encontrados fue útil para profundizar en las fases del ciclo de Blum y Leiss (2007) en las que los alumnos presentaban mayores dificultades. En este sentido deben destacarse aquellos alumnos que proporcionaron una solución con orden de magnitud poco realista, que incurrieron en errores de validación del modelo u otros que propusieron planteamientos de alta complejidad pero no los materializaron, habiendo casos en los que no hicieron cálculo alguno (figura 3f), mostrando debilidades en la fase de trabajo matemático.

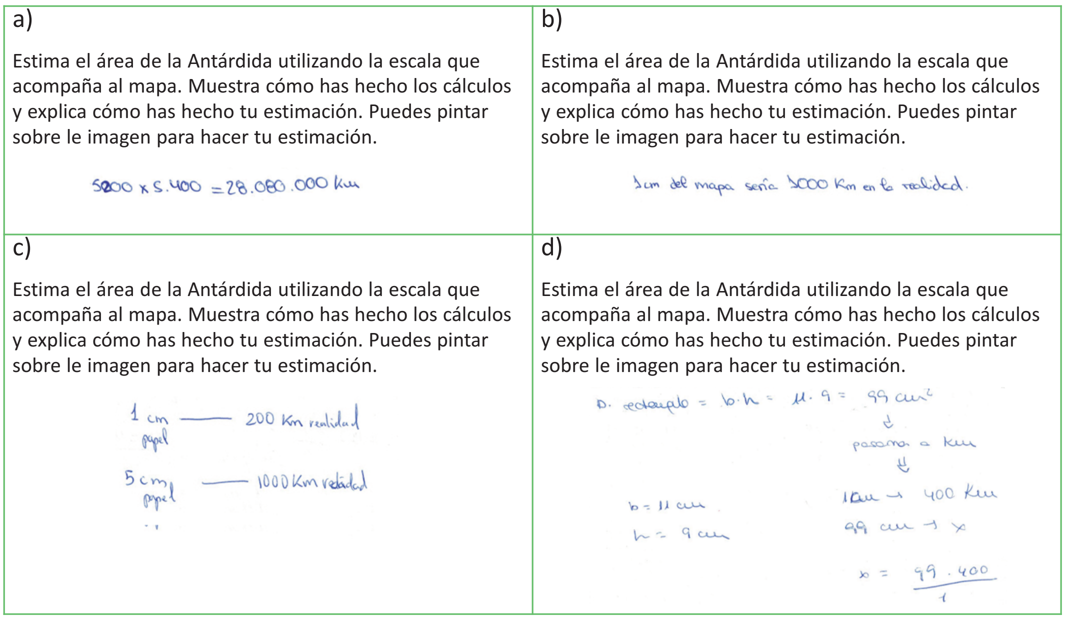


Figura 4. Ejemplos de errores asociados al uso de la escala gráfica

Los resultados expuestos anteriormente permitieron trazar un perfil de las necesidades formativas de los participantes en el estudio. En primer lugar, la gran cantidad de respuestas en blanco encontradas puso de manifiesto que los estudiantes no comprendieron lo que se les solicitó o no tuvieron recursos para aplicar contenidos matemáticos estudiados cuando se les presentaron fenómenos asociados a esos contenidos en situaciones realistas. La existencia de planteamientos complejos que no condujeron a respuesta porque no se hizo ningún cálculo (figura 3f) reforzó esta interpretación, que hizo explícita la primera necesidad formativa relevante: trabajar la conexión entre las ideas matemáticas y los fenómenos del mundo real. Por otra parte, la gran cantidad de alumnos que expresaron áreas en unidades erróneas y los que mostraron resultados muy alejados de la realidad describen a un alumnado que no fue consciente de cómo debía de ser aproximadamente la solución al problema planteado. Surgió así la segunda necesidad formativa destacable: reflexionar sobre los resultados obtenidos, en el sentido de interpretar los resultados y validar, al menos, su verosimilitud. La existencia de alumnos que utilizaron de forma inadecuada la escala gráfica, junto con los errores en el cambio de unidades cuadráticas y el ya mencionado uso de unidades lineales para expresar áreas apuntaron hacia dificultades en la comprensión de lo que es una unidad de medida, situación que define la tercera necesidad a tomar en consideración: reforzar la noción de unidad de medida. Por otra parte, la alta variabilidad de cálculos de áreas planteados de forma errónea unida a la baja incidencia de alumnos que evidenciaron pensamientos de tipo visual invitó a pensar que los participantes del estudio no tenían asentada la noción geométrica de área, lo que condujo a la cuarta necesidad formativa a tener en cuenta: reforzar el área como medida de magnitud de superficies planas. Igualmente, los errores encontrados en el uso de la escala hicieron pensar que la aparición de contenidos interrelacionados generó dificultades a los alumnos a la hora de aplicar conocimientos relacionados ya conocidos. Esta situación determinó la quinta necesidad formativa que se apunta: trabajar diferentes contenidos de forma integrada.

Implicaciones para la formación inicial de maestros de matemáticas

Las necesidades formativas reveladas por el análisis de los resultados de la investigación pueden ser cubiertas trabajando tareas de modelización matemática. La comprensión de estas necesidades junto con los principios del diseño de AEM (Lesh y otros, 2000) permitieron establecer características útiles que debe tener una propuesta de instrucción adecuada al contexto formativo de la investigación desarrollada:

— Dada la gran cantidad de alumnos que dejaron en blanco la tarea de la investigación, y de acuerdo al principio de realidad de las AEM, debe hacerse una propuesta que no condicione a aquellos estudiantes que sí son capaces de desarrollar ideas propias pero a la vez proporcione pautas suficientemente concretas para aquellos que tienen dificultades para abordar cuestiones abiertas. Con esta intención se pueden plantear cuestiones a tres niveles: en el primero, inicial y más complejo, la tareas deben consistir en preguntas abiertas; en el segundo se tienen que incluir preguntas que inviten a la reflexión y cierren parcialmente las dificultades a resolver, pero sin llegar a condicionar al alumnado; en el tercer nivel se hacen interpretaciones parciales y se proponen reflexiones y cuestiones totalmente estructuradas.

— Debido a la baja capacidad de interpretación de resultados encontrados en la investigación se tienen que incluir cuestiones destinadas a interpretar las soluciones obtenidas y validar el modelo matemático obtenido. En este sentido, se debe pedir a los alumnos que expliquen razonadamente la solución que dan, según el principio de construcción del modelo de las AEM. También se pueden incluir algunas preguntas de réplica, según el principio de reutilización, para incidir en la interpretación de sus propios resultados y que los alumnos se vean obligados a reutilizar el modelo.

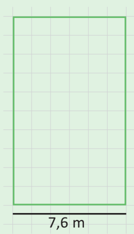
— Dadas las necesidades tercera y cuarta, que están asociadas a contenidos, las tareas de modelización deben trabajar las unidades de medida y las áreas desde su significado como medida de magnitud de superficies. Además, para responder a la quinta necesidad es necesario que estos contenidos se trabajen de forma integrada y tratando de no hacer alusión explícita a los mismos.

— Es adecuado proponer tareas que partan de una situación contextualizada. Particularmente, y siguiendo el principio de realidad de las AEM, debe buscarse que la tarea sea interesante para los futuros maestros, centrando el contexto en su futura labor docente.

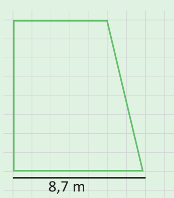
La figuras 5, 6 y 7 presentan un ejemplo de tarea que satisface las características señaladas a los niveles indicados. Para implementarlas en el aula, se recomienda trabajar en pequeño grupo, comenzando con la tarea más abierta y proporcionando las versiones más estructuradas a los grupos que evidencien incapacidad para abordar el problema.

El director de CEIP Europa desea habilitar una ludoteca en un aula de infantil. La normativa indica que las ludotecas deben ocupar *exactamente la cuarta parte del aula* y estar delimitadas con una valla especial.
El colegio dispone de 10 m de esa valla, pero no puede gastar dinero en más, por lo que ha pedido a los maestros de infantil que le expliquen si se puede habilitar la ludoteca en su aula y cómo hacerlo.

a) El maestro de los niños de 3 años cree que la ludoteca podría estar en su aula (tenéis debajo un plano del aula a escala), pero no sabe cómo podría situarse la valla y cuánta valla sobraría.



b) Aplicad el método obtenido en a) para saber si se puede habilitar la ludoteca en el aula de infantil de 4 años con los diez metros de valla y cuánta valla sobraría. El plano a escala de este aula lo tenéis a continuación:

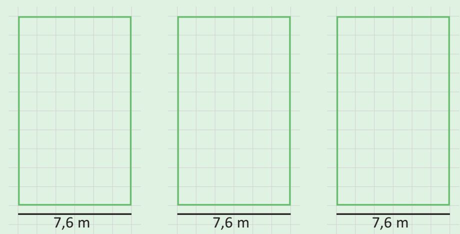


c) Si el método aplicado en a) no funciona en el aula de 4 años, decid por qué e inventad uno nuevo que si funcione en las dos aulas. Usadlo para explicar cómo habría que situar la valla en cada una de las aulas y cuánta valla sobraría en cada caso.

Figura 5. Ejemplo de tarea de modelización para responder a las necesidades formativas encontradas. Primer nivel (abierto)

El director de CEIP Europa desea habilitar una ludoteca en un aula de infantil. La normativa indica que las ludotecas deben ocupar *exactamente la cuarta parte del aula.*

a) A continuación tenéis copias a escala del aula de infantil (3 años). Representad la ubicación de una posible ludoteca en cada una de ellas.



Justificad razonadamente por qué los dibujos hechos podrían ser ludotecas según la normativa.

b) La normativa también obliga a delimitar las ludotecas con una valla especial. El colegio dispone de 10 m de esa valla, pero no puede gastar dinero en más. ¿Alguna de las ludotecas hechas antes se puede delimitar con 10 m de valla? Justificad vuestras respuestas.

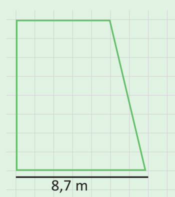
c) El maestro de los niños de 3 años cree que en su aula se podría habilitar la ludoteca usando solo los 10 m de valla, pero no sabe cómo situarla. Para ayudarle, podéis empezar por alguna de las que ya tenéis y, si no es solución, buscad alguna que necesite menos valla. Podéis completar la siguiente tabla:

Intento	1	2	3	4	
Valla (m necesarios)					

AYUDA: *Puede ser útil ir cambiando la forma de la ludoteca. Detrás tenéis papel cuadriculado.*

d) En vista del trabajo hecho, ¿es posible habilitar una ludoteca en el aula de infantil (3 años)? Si creéis que sí, explicad cómo podría situarse la valla y cuánta valla sobraría.

e) Repetid el proceso hecho en c) para saber si se puede habilitar la ludoteca en el aula de infantil de 4 años con los 10 m y cuánta valla sobraría. El plano a escala está debajo:

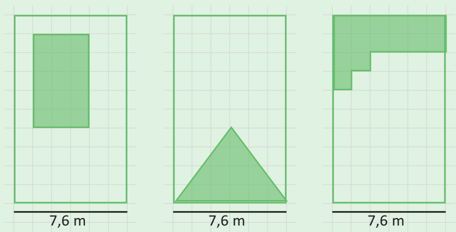


f) Explicad cómo se puede saber si la ludoteca se puede situar en un aula cualquiera (usando solo los 10 m de valla).

Figura 6. Ejemplo de tarea de modelización para responder a las necesidades formativas encontradas. Segundo nivel (intermedio)

El director de CEIP Europa desea habilitar una ludoteca en un aula de infantil. La normativa indica que las ludotecas deben **ocupar exactamente la cuarta parte del aula**.

a) A continuación tenéis diferentes espacios marcados en el aula de infantil (3 años). ¿Cuáles podrían representar la ludoteca? Justificad vuestra respuesta.



b) La normativa también obliga a delimitar las ludotecas con una valla especial. ¿Cuántos metros de valla harían falta para delimitar los espacios en gris?
AYUDA: *En el primer dibujo cada uno de los dos tramos de valla horizontales miden la mitad de la clase. En el segundo dibujo, puede venir bien dibujar una altura del triángulo y ver qué tipo de triángulos salen.*
¿Cuál necesita más valla y cuál menos? ¿Por qué creéis que ocurre eso?

c) El colegio dispone de 10 m de esa valla, pero no puede gastar dinero en más. ¿Alguno de los casos trabajados representan la ludoteca? ¿Por qué?

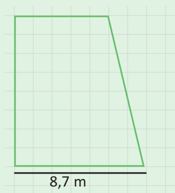
d) El maestro de los niños de 3 años cree que en su aula se podría habilitar la ludoteca usando solo los 10 m de valla, pero no sabe cómo situarla. Para ayudarle, podéis empezar por alguna de las anteriores y si no es solución, buscar alguna que necesite menos valla. Podéis completar la siguiente tabla:

Intento	1	2	3	4	
Valla (m necesarios)					

AYUDA: *Puede ser útil ir cambiando la forma de la ludoteca. Detrás tenéis papel cuadriculado.*

e) En vista del trabajo hecho, ¿es posible habilitar una ludoteca en el aula de infantil (3 años)? Si creéis que sí, explicad cómo podría situarse la valla y cuánta valla sobraría.

f) Repetid el proceso hecho en d) para ver si se puede habilitar la ludoteca en el aula de infantil (4 años) con los 10 m y cuánta valla sobraría. El plano a escala está debajo:



g) Explicad cómo se puede saber si la ludoteca se puede situar en un aula cualquiera (usando solo los 10 m de valla).

Figura 7. Ejemplo de tarea de modelización para responder a las necesidades formativas encontradas. Tercer nivel (estructurado)

Conclusiones

El análisis de los resultados de una investigación basada en la observación de las estrategias empleadas por maestros en formación inicial ante problemas abiertos presentados en contexto puso de manifiesto la necesidad de trabajar la conexión entre matemáticas y el mundo real y de reflexionar sobre los resultados que arroja el trabajo matemático, además de reforzar las nociones de unidad de medida y de área. Todas estas necesidades pueden ser atendidas a través de actividades que estimulen la modelización. La propuesta que se ha presentado es un ejemplo de tarea de instrucción diseñada para este fin. El potencial formativo de este tipo de propuestas didácticas, sin embargo, debe ser aún analizado por investigaciones futuras.

Referencias bibliográficas

Blomhøj, M. (2004), «Mathematical Modelling. A theory for practice», *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics*, National Center for Mathematics Educations, Suecia, 145-159.

Blum, W. (2002), «ICMI STUDY 14: Applications and modeling in mathematics education-Discussion Document», *Educational Studies in Mathematics*, n.º 51, 149-171.

Blum, W., y R. Borromeo (2009), «Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt?», *Journal of Mathematical Modelling and Application*, n.º 1(1), 45–58.

Blum, W., y D. Leiss (2007), «How do students' and teachers deal with modelling problems?», *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics*, Horwood Publishing,Chichester, 222-231.

Bukova-Güzel, E. (2011), «An examination of pre-service mathematics teachers' approaches to construct and solve mathematical modelling problems», *Teaching Mathematics and Its Applications*, n.º 30, 19-36.

Diezmann, C., J. J. Watters y L. D. English (2002), «Teacher behaviours that influence young children's reasoning», *Proceedings of the 26th International PME Conference*, University of East Anglia, Norwich, 289-296.

Doerr, H. (2007), «What Knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modelling?», *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study*, Springer, New York, 69-78.

English, L. D. (2006), «Mathematical modeling in the primary school», *Educational Studies in Mathematics*, n.º 63, 303–323.

English, L. D., y J. Watters (2005), «Mathematical modeling in the early school years», *Mathematics Education Research Journal*, n.º 16, 59–80.

Ferrando, I., L. Albarracín, C. Gallart, L. M. García-Raffi y N. Gorgorió (2017), «Análisis de los Modelos Matemáticos Producidos durante la Resolución de Problemas de Fermi», *Bolema, Rio Claro (SP)*, n.º 31(57), 220-242.

Ferrando, I., y B. Navarro (2015), «Un viaje de fin de curso y tres tareas de modelización. Una experiencia en un aula de secundaria», *Modelling in Science Education and Learning*, n.º 8(2), 79-92.

Gallart, C., y L. M. García-Raffi (2013), «Primeros pasos con las tareas de modelización en secundaria», *Modelling in Science Education and Learning*, n.º 6(1), 49-60.

Gallart, C., I. Ferrando y L. M. García-Raffi (2014), «Implementación de tareas de modelización abiertas en el aula de secundaria, análisis previo», *Investigación en educación matemática, SEIEM*, Salamanca, 327-336.

Hidiroğlu, Ç. N., A. T. Dede, S. Kula-Ünver y E. Bukova-Güzel (2017), «Mathematics Student Teachers' Modelling Approaches While Solving the Designed Eşme Rug Problem», *Mathematical Thinking and Learning*, n.º 10(3), 293-304.

Lehrer, R., y L. Schauble (2003), «Origins and evolutions of model-based reasoning in mathematics and science», *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*, Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, New Jersey, 59-70.

Lesh, R., y H. M. Doerr (2003), *Beyond constructivism: A models and modeling perspective on mathematics problem solving, learning and teaching*, Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, New Jersey.

Lesh, R., M. Hoover, B. Hole, A. Kelly y T. Post (2000), «Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers», *Research Design in Mathematics and Science Education*, Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, New Jersey, 591-646.

Mathews, S., y M. Reed (2007), «Modelling for preservice teachers», *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics*, Horwood Publishing, Chichester, 458-464.

Montejo-Gámez, J., E. Fernández-Ahumada, N. Jiménez-Fanjul, N. Adamuz-Povedano y C. León-Mantero (2017), «Modelización como proceso básico en la resolución de problemas contextualizados: un análisis de necesidades», *Investigación en Educación Matemática XXI*, SEIEM, Zaragoza, 347-356.

Mora Zuluaga, A., y J. Ortiz Buitrago (2014), «Dificultades en el diseño de tareas con modelización», <http://funes.uniandes.edu.co/5304/1/MoraDificultadesALME2014.pdf>, accedido el 10 de octubre de 2017.

NCTM. (2000), *Principles and Standards for School Mathematics,* National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia.

Niss, M., y T. Højgaard (2011), C*ompetencies and Mathematical Learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*, Roskilde: IMFUFA/NSM, Roskilde University.

OECD (2013), *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012 Matemáticas, Lectura y Ciencias*, Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, Madrid.

Ortiz, J., L. Rico y E. Castro (2007), «Mathematical Modelling: A teacher's training study», *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics*, Horwood Publishing, Chichester, 441-249.

Polya, G. (1987), *Cómo plantear y resolver problemas*, Trillas, México.

Socas, M. M., R. M. Ruano y J. Hernández (2016), «Análisis didáctico del proceso matemático de Modelización en alumnos de Secundaria», *Avances de Investigación en Educación Matemática*, n.º 9, 21-41.

Ulu, M. (2017), «Examining the Mathematical Modeling Processes of Primary School 4th-Grade Students: Shopping Problem», *Universal Journal of Educational Research*, n.º 5(4), 561-580.

Van Den Heuvel-Panhuizen, M., y P. Drijvers (2014), «Realistic mathematics education», *Encyclopedia of Mathematics Education*, Springer, Amsterdam, 521–525, <https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8>.

Jesús Montejo Gámez
Universidad de Granada
<jmontejo@ugr.es>

Elvira Fernández de Ahumada
Universidad de Córdoba

Carmen León Mantero
Universidad de Córdoba

Noelia Jiménez Fanjul
Universidad de Córdoba

Natividad Adamuz Povedano
Universidad de Córdoba