suma+ 87
ARTÍCULOS
Marzo 2018
pp. 41-48

Triángulos de MacMahon: del plano al espacio

José Luis Martín Montaño

En este artículo presento una propuesta educativa para introducir a nuestros alumnos en el proceso de la investigación matemática explorando las posibilidades de llevar al espacio el puzle de los veinticuatro triángulos y cuatro colores, ideado por el matemático británico MacMahon.

Palabras clave: Investigación didáctica, Materiales, Combinatoria, Poliedros, Calidociclos.

MacMahon's triangles: adding a new dimension

In this article an educational proposal is introduced to initiate our students in the process of mathematical research by exploring the possible ways of transporting to a tri-dimensional space the puzzle of the twenty four triangles and four colours, devised by the British mathematician McMahon.

Keywords: Educational research, Materials, Combinatorial, Polyhedra, Kaleidocycles.

Entre los numerosos puzles ideados por el matemático británico MacMahon (1854-1929) llaman la atención, por la cantidad de retos que se puede plantear con ellos y por su aplicación en el aula, el *puzle de los veinticuatro cuadrados y tres colores* (figura 1)[1] y el *puzle de los veinticuatro triángulos y cuatro colores* (figura 2).

Con el primer puzle ya se consiguió colocar los 24 cuadrados como caras de cuatro cubos de forma congruente, es decir, de manera que en cada arista los triángulos que confluyen de cada cara sean del mismo color, es el que se conoce como *puzle de Scout Nelson*.

Se trataba pues de hacer lo propio con el segundo puzle, guiando a los alumnos en la exploración de las distintas posibilidades que pueden existir de llevar los veinticuatro triángulos al espacio, a la vez que aprenden cómo se construye formalmente una teoría matemática.

Desde que leí en la sección de juegos de la revista *Suma* n.º 63 el artículo «MacMahon y las matemáticas en colores», escrito por el Grupo Alquerque de Sevilla, han sido muchas las horas que he dedicado a los puzles que allí se desarrollan, tanto en clase con mis alumnos como en solitario[2]. Hemos fabricado, después de haber estudiado todas las posibilidades de colorearlos con las más variopintas técnicas, tanto los cua-

Artículo recibido en *Suma* en noviembre de 2017 y aceptado en enero de 2018

drados como los triángulos de MacMahon y hemos jugado con ellos hasta conseguir completar todos los retos que se plantean y algunos otros que idearon los propios alumnos.

Pero la mayor satisfacción que he conseguido jugando con estos puzles la encontré cuando planteé en una clase, al empezar el tema de los poliedros, el reto de llevar los triángulos al espacio. En este artículo comento las distintas propuestas que fueron surgiendo y algunas otras que he desarrollado posteriormente.

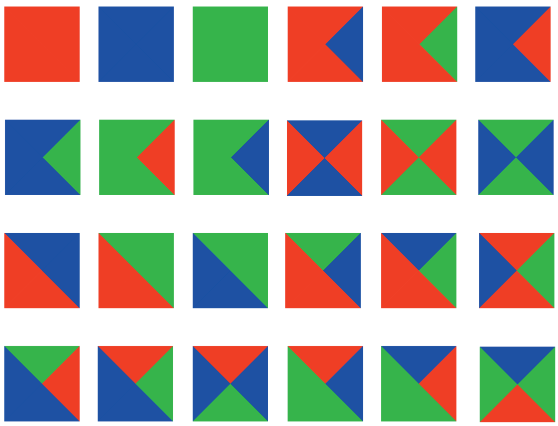

Figura 1

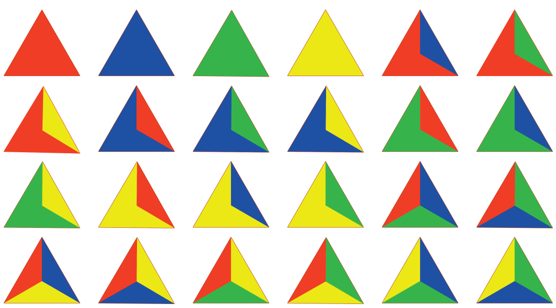

Figura 2

Los tres octaedros

La primera idea que surgió en clase fue construir, con los 24 triángulos, tres octaedros con sus caras congruentes de manera que después estos se pudiesen apilar también de forma congruente. No les fue complicado encontrar algunas soluciones para la construcción de los octaedros, aunque costó un poco más encontrar soluciones que después pudiesen apilarse. Lo primero que tuvieron que descubrir fue qué piezas pueden acoplarse para luego intentar colocar cada una en un octaedro diferente.

Se muestran aquí (figura 3) los desarrollos de una de las soluciones en la que cada octaedro se puede acoplar de forma única con cada uno de los otros dos. Se consigue así que todas las combinaciones sean posibles y cada octaedro pueda ir arriba, en medio o debajo de la pila.

Si se ha trabajado en la construcción de los octaedros, es fácil apilarlos después; pero he podido comprobar que si das los tres octaedros a alguien ajeno al trabajo realizado, para que los apile, le resulta algo más complicado encontrar la solución.

En la figura 4 se puede observar una de las soluciones de los octaedros apilados.

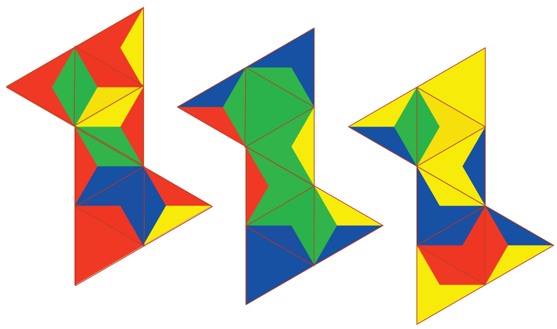

Figura 3

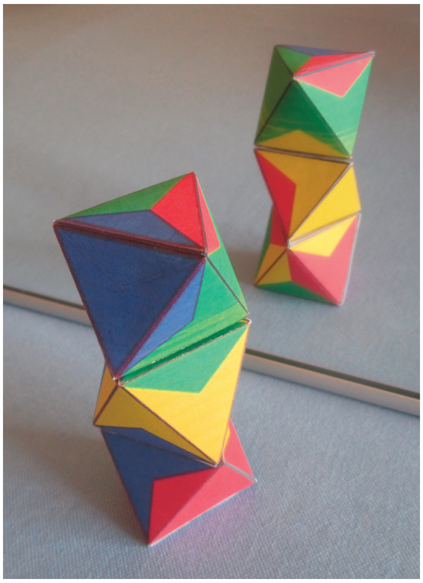

Figura 4

El icosaedro

El segundo planteamiento que surgió fue construir un icosaedro; aunque esto no genera ningún puzle, su propia elaboración fue un reto.

Empezamos dibujando una plantilla donde ir colocando los triángulos. Buscaron un desarrollo del icosaedro, exploraron qué triángulos se unen al pegarlo y elaboraron la plantilla de la figura 5 en la que los triángulos que aparecen con el mismo número han de ser de igual color, además, claro está, de los lados adyacentes de las piezas que se tocan.

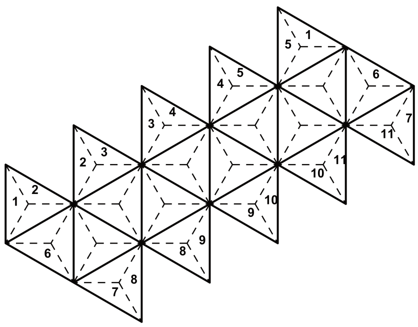

Figura 5

Obviamente para construir un icosaedro tenemos que prescindir de cuatro piezas, pero no podemos elegir aleatoriamente estas piezas y de esto los alumnos fueron dándose cuenta a medida que lo intentaban. Casi todos los alumnos tendían a desechar los cuatro triángulos de un solo color hasta que se fueron dando cuenta de que a la hora de encajar las últimas piezas les faltaban o sobraban triángulos de algún color. Después de muchas discusiones y un poco de ayuda, a la hora de redactar, consiguieron enunciar y elaborar una demostración de su primer teorema:

Teorema
Para construir un icosaedro congruente con los veinticuatro triángulos de MacMahon el número de triángulos de cada color, que tiene que haber entre las cuatro piezas que se han de desechar, tiene que ser par.
Demostración
En el desarrollo del icosaedro los triángulos de cada color van siempre emparejados formando rombos, por tanto el número de triángulos de cada color que hay que utilizar ha de ser par. Puesto que entre las veinticuatro piezas hay 18 triángulos de cada color, es decir, un número par, también ha de ser par el número de triángulos de cada color que se desechan.

A partir de esta conclusión se dedicaron a investigar qué cuatro piezas se pueden eliminar de manera que el número de triángulos de cada color que contienen sea par. Y de aquí surgió su segundo teorema:

Teorema
Existen solo seis posibilidades de eliminar cuatro piezas para construir un icosaedro con los veinticuatro triángulos de MacMahon y pueden agruparse de la siguiente forma dependiendo del número de triángulos de cada color que contienen:
Grupo I: ocho triángulos de un color, dos de otro color y dos de un tercer color.
Grupo II: seis triángulos de un color y seis de otro.
Grupo III: seis triángulos de un color, cuatro de otro y dos de un tercero.
Grupo IV: seis triángulos de un color y dos de cada uno de los otros tres colores restantes.
Grupo V: cuatro triángulos de tres colores.
Grupo VI: cuatro triángulos de dos colores y dos de los otros dos colores.
Además todas las posibilidades dan lugar a alguna solución.
Demostración
El problema se reduce a encontrar cuatro números pares, incluyendo al cero, que sumen 12 y desechar aquellas combinaciones que no pueden darse debido a cómo están construidas las veinticuatro piezas del puzle. Existen nueve posibilidades para conseguir esto: 12+0+0+0, 10+2+0+0, 8+4+0+0, 8+2+2+0, 6+6+0+0, 6+4+2+0, 6+2+2+2, 4+4+4+0 y 4+4+2+2.

Tan solo las tres primeras opciones no son válidas ya que es imposible reunir, con cuatro piezas, ocho o más triángulos de un color sin utilizar otros dos colores distintos.

A partir de esto se hicieron grupos para encontrar soluciones a las seis posibles combinaciones de cuatro piezas. En las siguientes imágenes se muestran las combinaciones de las cuatro piezas desechadas así como la solución encontrada del desarrollo del icosaedro (en los ejemplos R representa al rojo, A al amarillo, Az al azul y V al verde):

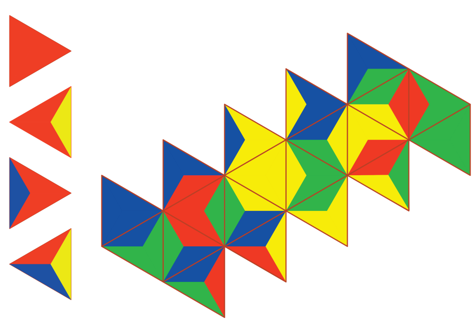

Figura 6. Grupo I: RRR, RRA, RRAz y RAAz

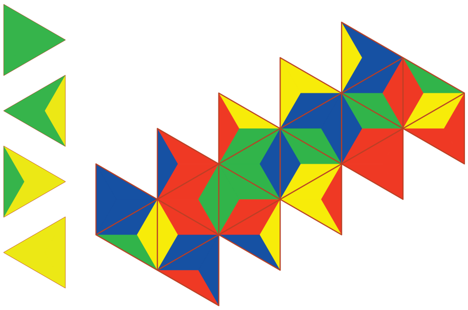

Figura 7. Grupo II: VVV, AAA, VVA y AAV

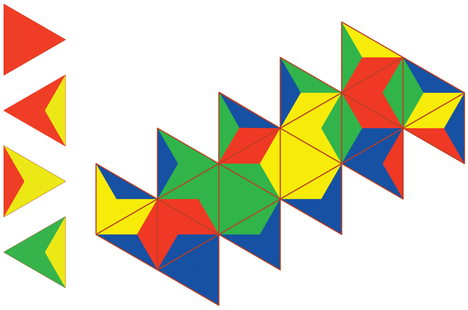

Figura 8. Grupo III: RRR, RAA, AVV y RRA

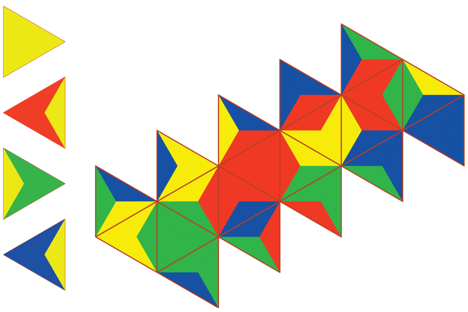

Figura 9. Grupo IV: AAA, AzAzA, VVA y RRA

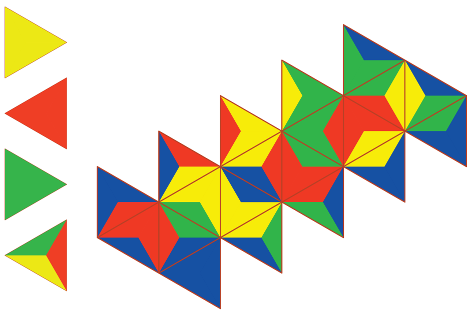

Figura 10. Grupo V: AAA, RRR, VVV y RAV

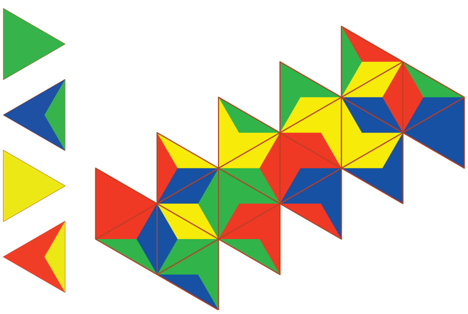

Figura 11. Grupo VI: AAA, RRA, VVV y AzAzV

La figura 12 muestra una fotografía del icosaedro construido con la combinación del Grupo VI apoyado sobre su cara de color azul.

Hasta aquí fue lo que dio de sí todo el proceso de investigación con los alumnos; pero, con posterioridad, se me fueron ocurriendo otras formas de llevar el puzle de los veinticuatro triángulos y cuatro colores al espacio.

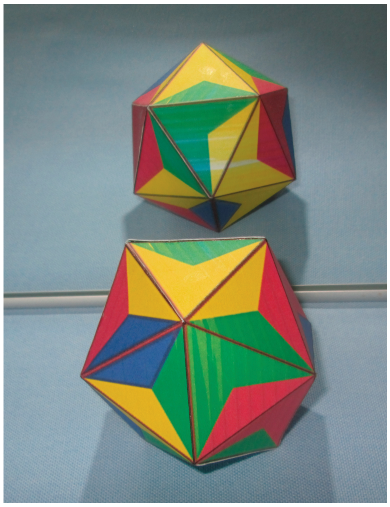

Figura 12

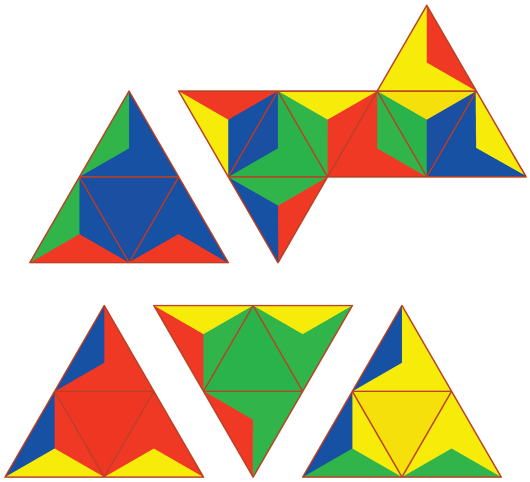

Figura 13

El gran tetraedro

Una de las posibilidades que exploré fue la de formar un tetraedro, cuya arista mida el doble que el lado de las piezas del puzle, utilizando un octaedro y cuatro tetraedros.

Después de haber trabajado con los alumnos el puzle de los tres octaedros me fue más fácil saber qué piezas de las veinticuatro debería de colocar, en los tetraedros y en el octaedro, y dónde hacerlo para que el puzle tuviese solución. Colocar el resto de piezas fue tarea algo más complicada. El desarrollo de la solución que encontré puede verse en la figura 13 y una imagen del gran tetraedro construido se puede observar en la figura 14.

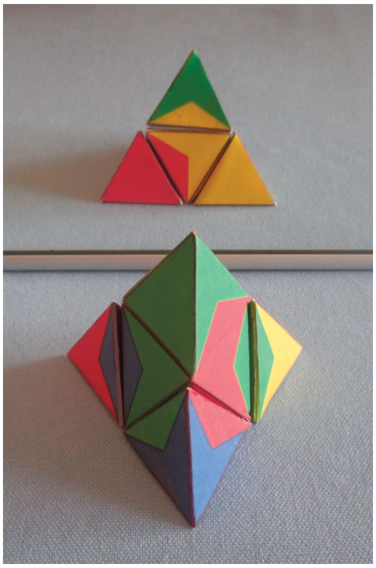

Figura 14

El calidociclo de MacMahon

Ni siquiera a los alumnos se les pasó por alto la posibilidad de poder construir, con las veinticuatro piezas, seis tetraedros, pero siempre terminábamos desechándola por no encontrar qué poliedro formar con ellos.

Por eso fue una revelación reencontrar en casa el libro de la matemática Doris Schattschneider y el diseñador gráfico Wallace Walker *M.C. Escher: Calidociclos*: ¡con seis tetraedros se puede construir un calidociclo!

Según la definición dada en este libro, un calidociclo es un anillo tridimensional compuesto de tetraedros idénticos que pueden girar continuamente en torno a su centro. El orden del calidociclo es el número de tetraedros que lo forman y este orden ha de ser par y mayor o igual que seis.

Con los 24 triángulos de nuestro puzle podemos hacer un calidociclo de orden 6; pero existe un problema ya que los tetraedros de un calidociclo de orden seis han de estar formados por triángulos isósceles y los triángulos del puzle de MacMahon son equiláteros.

Como pude descubrir en los trabajos de Julio Castiñeira *Poliedros y calidociclos* y *Calidociclos y anillos de tetraedros*, para que una cadena de seis tetraedros se pueda cerrar, el ángulo desigual de los triángulos isósceles ha de ser menor o igual a 53º 8’, o lo que es lo mismo, la altura de estos triángulos isósceles ha de medir tanto o más que su lado desigual tomado como base. Por ello no puede existir un calidociclo de orden seis regular, es decir, construido con triángulos equiláteros. Si tomamos este ángulo exactamente igual a 53º 8’ el calidociclo será cerrado (el agujero del anillo desaparece al girarlo).

Se puede resolver este problema rellenando la plantilla del calidociclo con los triángulos equiláteros hasta conseguir la congruencia y, después, con un programa de tratamiento de imagen aplicar un factor de expansión vertical del 87 % para conseguir que los triángulos sean los adecuados.

En la plantilla del calidociclo que se muestra en la figura 15 se han numerado las casillas de manera que las que tienen el mismo número han de ser del mismo color.

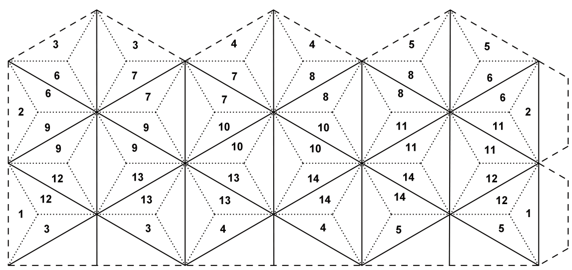

Figura 15

Si solo queremos que el calidociclo sea congruente al pegarlo es suficiente con que lo sean las casillas numeradas con 1, 2, 3, 4 y 5. En la figura 16 muestro una solución de este caso en la que además he conseguido, en la medida de lo posible, cumplir con la restricción que MacMahon ponía a sus puzles, a saber, que el contorno de la figura sea del mismo color.

Si además queremos que al girar el calidociclo los hexágonos que se forman cuando los tetraedros se unen, sean también congruentes, hay que conseguir esto con todos los números que aparecen en la plantilla. Debemos de tener en cuenta que esto solo se observará mirando el calidociclo desde uno de sus lados. Una solución a este caso se muestra en la figura 17. En las figuras 18, 19, 20 y 21 se pueden observar las cuatro posiciones que adopta el calidociclo cuando se gira.

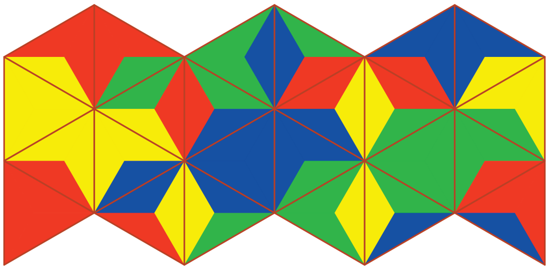

Figura 17

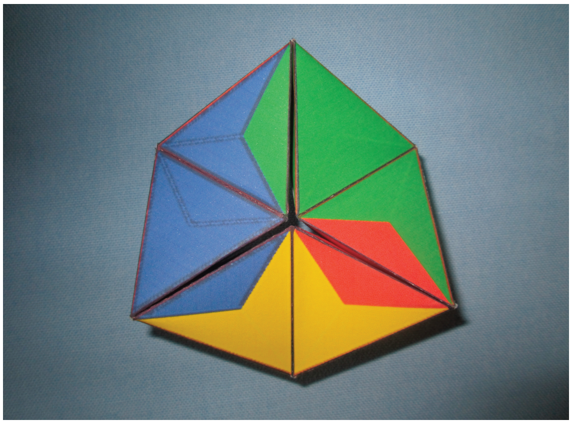

Figura 18

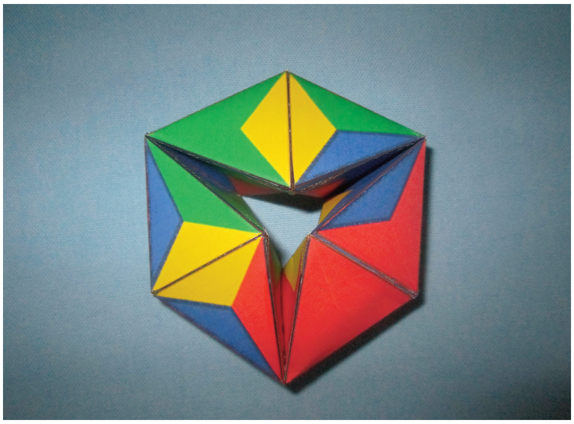

Figura 19

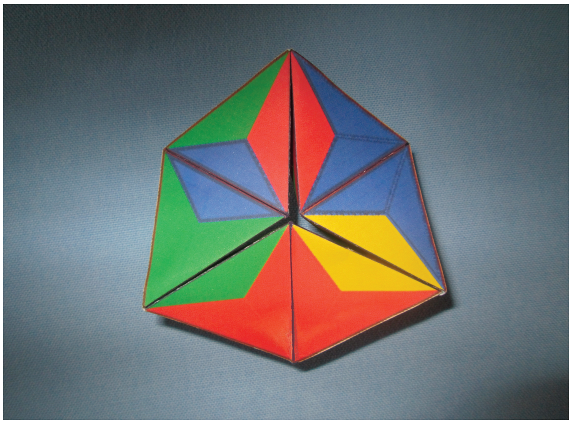

Figura 20

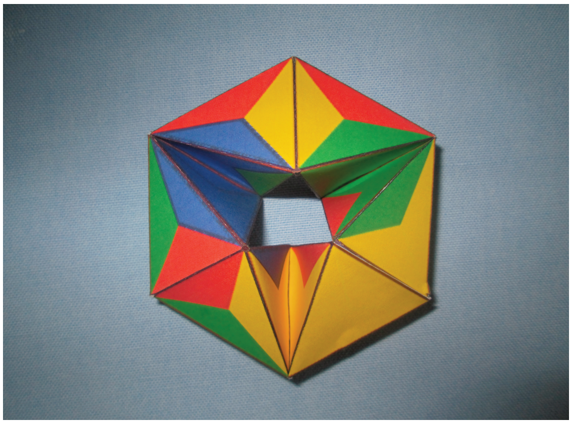

Figura 21

Resolver este puzle no es nada fácil. Para dar con una solución utilicé un procedimiento similar al que utilizaron los alumnos para construir el icosaedro, es decir, exploré las distintas posibilidades que se presentan en la distribución de los colores.

Si se observa la plantilla de la figura 15 se puede ver que en total aparecen doce rombos verticales (con su diagonal mayor vertical) formado cada uno por dos triángulos del mismo color y doce parejas de rombos, que llamaré horizontales, aunque realmente tienen su diagonal mayor inclinada; cada una de estas parejas ha de ser del mismo color. Además, entre las veinticuatro piezas del puzle hay dieciocho triángulos de cada color con lo que se pueden formar nueve rombos de cada color.

Por otra parte la pieza que tiene los tres triángulos de un solo color, al colocarla en la plantilla, genera necesariamente un rombo vertical y dos parejas de rombos horizontales (una en cada línea horizontal) lo que supone un total de cinco rombos. Esto puede verse más claramente observando en la figura 17 la pieza que es toda azul o la que es toda verde; con la roja y la amarilla pasa lo mismo, pero es más complicado verlo porque están en el borde de la plantilla, pero hay que pensar que la parte de arriba de la plantilla se une con la de abajo y la parte derecha con la izquierda.

Por todo lo anterior podemos concluir que, el número de rombos verticales de un color ha de ser un número impar mayor o igual que uno y menor o igual que cinco y el número de rombos horizontales de cada color, tiene que ser un número par mayor o igual que cuatro y menor o igual que ocho.

Con estas restricciones se deduce que solo existen tres grupos de posibilidades a la hora de repartir los cuatro colores entre los treinta y seis rombos de la plantilla:

Grupo I: tres rombos verticales y seis horizontales de cada color (figura 22).

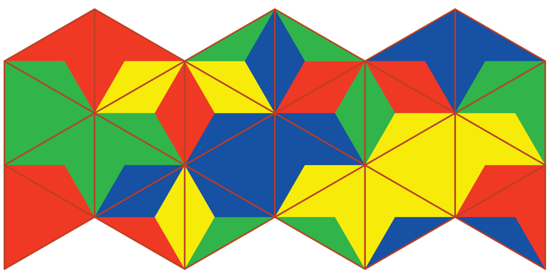

Figura 22

Grupo II: un rombo vertical y ocho horizontales de un color (en el ejemplo, verde), cinco verticales y cuatro horizontales de otro color (en el ejemplo, amarillo) y tres verticales y seis horizontales de los dos colores restantes (rojo y azul) (figura 17).

Grupo III: un rombo vertical y ocho horizontales para dos colores (en el ejemplo, rojo y verde) y para los otros dos, cinco verticales y cuatro horizontales (azul y amarillo) (figura 23).

Por esa tendencia natural hacia el equilibrio y la simetría, empecé a buscar una solución con la combinación del Grupo I. Llegué casi a medio centenar de intentos, consiguiendo en algunos casos colocar todas las piezas salvo una, debido a que el orden de los colores era distinto al del hueco que quedaba.

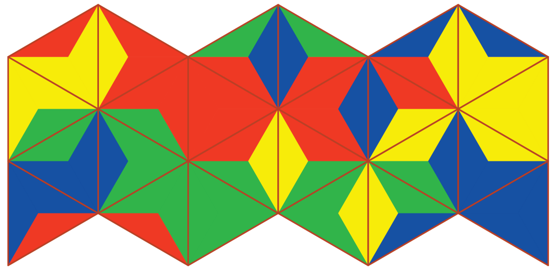

Figura 23

Desesperado por estos resultados, pasé a intentarlo con la combinación del Grupo II y resultó que, en unos cuantos intentos, encajé todas las piezas (figura 17).

Después me puse a probar con el Grupo III y, aunque este provoca muchas restricciones en la distribución de los triángulos horizontales de aquellos colores que solo disponen de un rombo vertical, lo conseguí después de algunos intentos más que con el Grupo II. Puede verse esta solución en la figura 23.

Por último se me ocurrió utilizar la solución del Grupo II para encontrar una solución al Grupo I y, efectivamente, apareció cambiando solo el color de una pareja de rombos horizontales. Esta solución se muestra en la figura 22.

En todo este proceso de encontrar una solución asocié, para llevar un control y no repetirme, cada uno de estos intentos a una matriz cuatro por tres, donde las filas representan las líneas de rombos horizontales y las columnas las parejas de estos rombos, y en la que colocaba en cada una de las cuatro filas las iniciales de los colores correspondientes a las parejas de rombos horizontales que contenían. Por ejemplo, las matrices asociadas a las soluciones de la figura 22, figura 17 y figura 23 serían, respectivamente:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{R} & \mathrm{V} & \mathrm{Az} \\ \mathrm{V} & \mathrm{A} & \mathrm{R} \\ \mathrm{V} & \mathrm{Az} & \mathrm{A} \\ \mathrm{R} & \mathrm{Az} & \mathrm{A} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{R} & \mathrm{V} & \mathrm{Az} \\ \mathrm{V} & \mathrm{A} & \mathrm{R} \\ \mathrm{V} & \mathrm{Az} & \mathrm{A} \\ \mathrm{R} & \mathrm{Az} & \mathrm{A} \end{pmatrix}$$

$$\text{y} \quad \begin{pmatrix} \mathrm{R} & \mathrm{V} & \mathrm{Az} \\ \mathrm{A} & \mathrm{R} & \mathrm{R} \\ \mathrm{V} & \mathrm{R} & \mathrm{A} \\ \mathrm{Az} & \mathrm{V} & \mathrm{V} \end{pmatrix}$$

Posteriormente cambié estas iniciales por los números del uno a cuatro, con el objeto de no repetir la misma combinación con los colores intercambiados.

Cada matriz no genera una única plantilla pues, aunque sí determina el color de los rombos verticales, podemos variar la posición de estos; por ello, con cada matriz probaba las distintas combinaciones y anotaba aquella en la que el número de piezas que quedaban sin colocar era menor.

Hay que tener en cuenta también, que una permutación cíclica de las filas o columnas de estas matrices generan la misma plantilla, lo cual reduce considerablemente el número de posibilidades aunque siguen siendo muchas.

Para terminar quisiera hacer una reflexión acerca de lo que ha supuesto para mí, y para mis alumnos todo este trabajo desarrollado. Cuando empecé los estudios de Matemáticas una de las cosas que más me chocaba era que nuestros profesores nos hicieran aprender las demostraciones de todos aquellos teoremas que íbamos viendo, pensaba que solo el resultado era lo realmente importante. Pronto comprendí la finalidad de ello y entendí que en una obra de arte no solo importa el producto final, el proceso seguido por el artista hasta llegar a ella es igual de valioso.

De la misma forma solemos cometer este error con nuestros alumnos e intentamos transmitir la bondad de las matemáticas solo a través de sus resultados y a menudo nos olvidamos de los procesos. Por ello considero que con este tipo de actividades, en las que los resultados no son tan sorprendentes o útiles como aquellos que solemos enseñar en la clase ordinaria, pero en las que los alumnos se involucran en el proceso de construcción e investigación, contribuyen a que sepan reconocer lo valioso que es el trabajo que está detrás de cualquier resultado.

Referencias bibliográficas

Castiñeira, J. (2009), *Poliedros y calidociclos*, Centro de Formación del Profesorado e Innovación Educativa de Valladolid, <https://es.scribd.com/document/329934128/Calidociclos-y-Poliedros>.

— *Calidociclos y anillos de tetraedros*, IES Marqués de Lozoya de Cuéllar (Segovia), <http://studylib.es/doc/5599229/calidociclos-y-anillos-de-tetraedros-julio-casti%C3%B1eira-mer>.

Fernández-Aliseda, A., J. Muñoz y J. A. Hans (2010), «MacMahon y las matemáticas en colores», *Suma*, n.º 63, 51-57.

Schattschneider, D., y W. Walker (2015), *M.C. Escher: Calidociclos*, Taschen, Colonia (Alemania).

José Luis Martín Montaño
IES Mediterráneo, Salobreña (Granada)
<correo@electron.ico>

1 Todas las figuras de este artículo han sido realizadas con GeoGebra Clásico 5, (2017).

2 Puedes intentar resolver estos puzles visitando la web de GeoGebra y escribiendo, en la búsqueda de recursos, «MacMahon».