

Dos elevado a cero

MIQUEL ALBERTÍ PALMER

Crónica de una clase no anunciada

El tiempo es nuestro
(Proyecto L'INSiTU)

Llegué al aula y la encontré abierta. Algunos de mis alumnos estaban levantados y hablando a gritos entre ellos. Otros se empujaban y corrían entre las mesas golpeando las sillas. Cuando empecé a ser profesor, ante situaciones así, entraba en el aula gritando más que ellos y dándoles órdenes de que se sentaran cada uno en su sitio y se callaran. La contemplación del caos me generaba tensión y yo me imponía a él con más tensión y violencia sonora. Pero hace ya mucho que cambié mi modo de actuar y de enfrentarme al caos. Así que, como es ya mi costumbre, esperé en silencio apoyado en una jamba de la puerta a que el caos fuese diluyéndose por sí solo en un orden razonable.

Miles de millones de años de experiencia en el universo demuestran que el orden acaba imponiéndose, aunque dicho proceso requiera su tiempo. Mi presencia silenciosa aceleró el proceso, pues me respetaban más de lo que yo pensaba. Al cabo de un par de minutos pude contemplar cómo todos habían vuelto a sus sitios y habían sacado los apuntes, estuches y calculadoras de sus mochilas. Entonces sonreí, entré en el aula y les di los buenos días. Respondieron al unísono y, entre sonrisas, pudimos comenzar la clase de matemáticas de forma relajada.

La sesión estaba anunciada en el horario. Cada viernes a la misma hora nos reuniríamos las mismas 31 personas en el mismo espacio cerrado. Llevábamos haciéndolo ya un par de meses. Nos quedaban siete más. Las actividades a realizar en esa sesión también habían sido anunciadas en el dossier de matemáticas de 1.º de la ESO. Dentro del tema de divisibilidad, titulado «Coincidencias periódicas» se iban a resolver dos problemas de coincidencias que a lo largo de la hora de clase pretendía que ellos realizaran.

El primero consistía en averiguar cuántas veces coincidirían los destellos de dos faros cuyas luces se encendían a intervalos regulares. Para realizar esta actividad, debían buscar los datos necesarios en la web de *Fars de Balears*, donde se ofrecen, entre muchas otras informaciones, las fichas técnicas de todos los faros de las Islas Baleares. La actividad pedía:

Si los destellos de los faros de Sa Mola, en Formentera, y el de Portopí, en Mallorca, coinciden al mismo tiempo, ¿cuándo volverán a coincidir?
¿Cuál será el período de esas coincidencias?
¿Con qué frecuencia coincidirán sus destellos?

La otra actividad trataba una situación matemáticamente similar, pero en otro contexto:

En un hospital el personal de enfermería pasa por las habitaciones para tomar los valores de las constantes vitales de los pacientes (FC, FR, T y TA). La frecuencia cardíaca, se toma cada 24 h; la frecuencia respiratoria, cada 8 h; la temperatura, cada 10 h; y la tensión arterial, cada 12 h. A un enfermo se le ha tomado nota de las cuatro constantes vitales hoy a las 08:00 h. ¿Cuándo se le volverán a tomar las cuatro constantes vitales a la misma hora?

Además, había un grupo de alumnas preparando un vídeo matemático sobre las coincidencias de los destellos de dos coches, una situación similar a la de los faros. Habían aprovechado el fin de semana para reunir en un mismo lugar dos vehículos de sus familiares y medir los períodos de los intermitentes: 0,8 s y 1 s.

Mientras me paseaba entre las mesas atendiendo dudas y dificultades, alguien reclamó mi atención. Para mi sorpresa, su consulta no estaba directamente relacionada sobre el problema de los destellos de los faros ni con el de los medicamentos. Su pregunta era más profunda matemáticamente y, en un principio, me pareció poco relacionada con la divisibilidad:

—¿Por qué dos elevado a cero da uno? Mi profesor de primaria me lo explicó, pero no acabé de entenderlo. ¿Podrías explicármelo?

Su maestro se lo había explicado, pero no había acabado de comprenderlo. Al escucharle me sentí identificado con su maestro: ¿cómo podría explicarle yo a un crío de 12 años algo tan raro?

Ante una situación así tenemos varias opciones. Una es la huida: eludir el compromiso diciéndole que ya lo comprenderá más adelante, cuando esté en 4.º de la ESO o en 1.º de Bachillerato. Descarté esa salida porque me pareció impropia de un profesor. Otra opción es ofrecerle una respuesta a todas luces incomprensible desde su bagaje cultural, tanto lingüístico como matemático, mediante la cual pondremos en evidencia nuestra propia incapacidad para adaptarnos a su conocimiento, nuestras limitaciones como profesores y, seguramente, como matemáticos. Dicha opción pasaría por activar una respuesta formal y algebraica que podría desarrollarse más o menos así:

$$\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0 :$$

$$a^0 = a^{1-1} = a \cdot a^{-1} = a \cdot \frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1$$

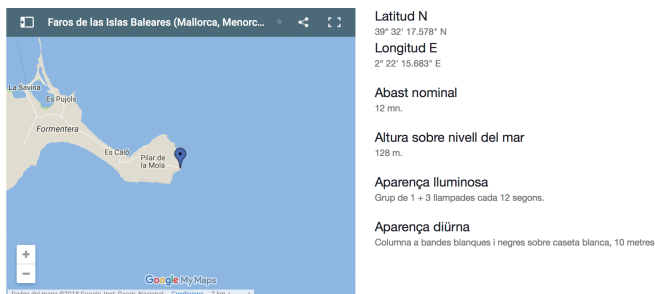


Figura 1. Datos técnicos del faro de Sa Mola (Formentera)

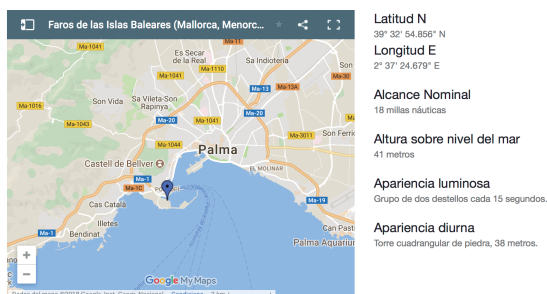


Figura 2. Datos técnicos del faro de Portopí (Mallorca)

Lo cierto es que esta no sería verdaderamente una demostración, pues daría por sentados otros conceptos sin definir.

La tercera opción consiste en ser conscientes de que una pregunta así requiere una respuesta en términos comprensibles para quien la formula. Si en ese preciso momento no se nos ocurre, hay que desarrollarla. Quería ser honesto y sincero y no banalizar una cuestión nada fútil. Los pensamientos que activan en la mente de un matemático la expresión «dos elevado a cero» son muy distintos de los que puede activar en una persona de 12 años.

Las buenas explicaciones no radican en el uso de un lenguaje exquisito ni en el uso de recursos tecnológicos o teatrales, artísticos o de cualquier otra índole. Una buena explicación es un modo de comunicación en el que importa más el receptor que el emisor. El objetivo de la cuestión no era explicarlo, sino explicárselo. Para ello mi explicación debía formularse en su lenguaje y limitándose, como máximo, a los conocimientos que se le suponen dada su edad y educación. Es decir, en base a su bagaje cultural. Opté por esa tercera opción y le pareció bien:

—Deja que me piense cómo responderte este fin de semana y el lunes te lo explico.

Entretanto, algunos de los que habían terminado el problema de las constantes vitales me mostraron sus resoluciones. En una de ellas, reproducida y discutida en la pizarra (figura 3), se habían hecho listas de múltiplos hasta dar con la primera coincidencia: 120 h = cinco días.

Otra solución (figura 4) era prácticamente visual y no precisaba del cálculo del mínimo común múltiplo, aunque resultaba impracticable.

Otros que habían resuelto el de los faros también solicitaban mi ayuda. Me dirigí hacia ellos.

—Hemos hecho el mínimo común múltiplo, pero no sabemos si está bien. Es un poco raro.

Miré sus apuntes y vi unos cuantos números decimales.

—¿Habéis hecho el mínimo común múltiplo con decimales?

—Sí. Mira...

Y partiendo de que el faro de Sa Mola, en Formentera, emite sus destellos cada 12 segundos; y que el de Portopí, en Mallorca, destella cada 15 segundos, me explicaron cómo habían hallado el período de las coincidencias:

—15 segundos son 0,25 minutos, ¿no? Y 12 segundos son 0,2 minutos. Para buscar el mínimo común múltiplo de 0,25 y 0,2, hemos multiplicado por 100, y dan 25 y 20. Hemos buscado el mínimo común múltiplo de 25 y 20, que es 100, y luego lo hemos dividido por 100, por los decimales, y da 1 minuto.

Así que habían desarrollado un modo de calcular el mínimo común múltiplo de dos números decimales. ¡Jamás se me había pasado por la cabeza hacer algo así!

Expresado formalmente, habían hecho lo siguiente:

$$\text{mcm}(0,25, 0,2) = \frac{\text{mcm}(25, 20)}{100} = \frac{100}{100} = 1$$

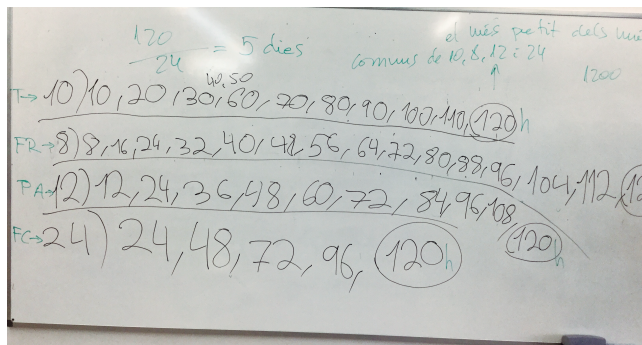
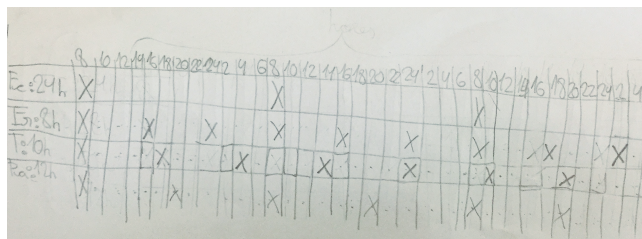
85
SUMA
87

Figura 3. Solución del problema de las constantes vitales



mcm de dos números decimales

Si yo a su edad hubiese hecho algo parecido, me habrían dicho que el mínimo común múltiplo solo estaba definido para números naturales. Esos decimales aparecían cuando en lugar de trabajar con segundos, la unidad de tiempo en la que se había planteado el problema, se había optado por trabajar con minutos. En un primer momento pensé que su cálculo reflejaba implícitamente ese cambio de unidades, pero no era realmente así, puesto que en la relación entre minutos y segundos el factor es 60 y no 100. Por tanto, su cálculo era numérico y no relativo a la equivalencia entre diferentes unidades de la misma magnitud: el tiempo.

Lo que había hecho ese grupo de alumnos podría expresarse así:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{decimales} & \xrightarrow{\cdot 100} & \text{naturales} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{mcm}(\text{decimales}) & \xleftarrow{\div 100} & \text{mcm}(\text{naturales})
 \end{array}$$

O formalmente:

$$\text{mcm}\left(\frac{a}{10^n}, \frac{b}{10^n}\right) = \frac{\text{mcm}(a, b)}{10^n}$$

La generalización era, para mí, inmediata:

$$\text{mcm}\left(\frac{a}{p}, \frac{b}{p}\right) = \frac{\text{mcm}(a, b)}{p}$$

Y si los denominadores son distintos:

$$\text{mcm}\left(\frac{a}{p}, \frac{b}{q}\right) = \text{mcm}\left(\frac{a \cdot q}{p \cdot q}, \frac{b \cdot p}{q \cdot p}\right) = \frac{\text{mcm}(a \cdot q, b \cdot p)}{p \cdot q}$$

Por ejemplo, tomando $a=3/7$ y $b=5/4$, tendríamos:

$$\begin{aligned}
 \text{mcm}\left(\frac{3}{7}, \frac{5}{4}\right) &= \text{mcm}\left(\frac{12}{28}, \frac{35}{28}\right) = \\
 &= \frac{\text{mcm}(12, 35)}{28} = \frac{420}{28} = 15
 \end{aligned}$$

¡El mcm de dos decimales puede salir entero! De hecho, esto nos lleva al problema visual del mcm que puede trabajarse con regletas. Y aunque las regletas suelen hacerse con un número entero de unidades de longitud, esa limitación no tiene por qué darse, pues incluso los múltiplos de las fracciones o números decimales acaban coincidiendo... casi siempre.

No lo harán si los números decimales son incommensurables, esto es, cuando no exista un múltiplo común, como ocurre con las longitudes 1 y $\sqrt{2}$, por ejemplo. En cambio, de dos números enteros siempre existe un múltiplo común: al menos su producto lo es. Pero no así con números de infinitas cifras decimales sin fracción equivalente:

$$\text{mcm}(1, \sqrt{2}) = \nexists$$

Hemos llegado a un teorema que conecta dos temas matemáticos más concretados de lo que pueda parecer a primera vista como son la incommensurabilidad y la divisibilidad:

a y b son conmensurables si y solo si existe su mcm

Me planteé llevar esas disquisiciones al aula. Pero pronto vi claro que debía limitar y mucho esas ideas para 1.º de la ESO. Decidí que lo mejor sería ofrecer la posibilidad de que el grupo que había desarrollado la idea de calcular el mcm de decimales expusiese su resolución a toda la clase y abrir un diálogo posterior sobre la aplicación de ese método al cálculo del mcm de dos números decimales cualesquiera. No plantearía siquiera la situación con fracciones, me limitaría a expresiones decimales sencillas.

Así lo hice y en la siguiente sesión expusieron su desarrollo. Fue muy bien acogido. No es de extrañar, pues la linealidad siempre se da por buena, sea en la situación que sea. Lo difícil es comprender que la gran mayoría de situaciones no son lineales o lo son a muy corto plazo o distancia o intervalo. Pero tampoco hay que tener prisa. Si la linealidad es tan bien acogida es porque las situaciones con las que uno se ha topado hasta ese momento son lineales y tiende a pensar que todo es lineal universalizando este tipo de relación. Ya habrá tiempo a lo largo de la ESO y más allá

para vivir otros fenómenos cuyas variables no estén relacionadas linealmente y ver que la no linealidad es más corriente que la linealidad.

La conclusión fue que como todo decimal finito se convierte en un entero multiplicándolo por 10, 100, 1000..., para calcular el mcm de dos decimales basta multiplicarlos por un 1 seguido de tantos ceros como decimales tienen, luego calcular... En fin, el teorema que a modo de conclusión cerró el diálogo fue redactado así:

El mcm de dos decimales es el decimal del mcm

El grupo que preparaba el vídeo sobre las coincidencias de los destellos de los intermitentes de dos coches podría haber utilizado ese método para hallar el período de las coincidencias. Sin embargo, y teniendo en cuenta que se trataba de un video, optó por una versión visual y gráfica del cálculo de ese período (figura 5). Las figuras 6 y 7 muestran dos capturas del vídeo con destellos coincidentes y consecutivos en $t = -10$ s y en $t = -6$ s (período de 4 s).

Dos elevado a cero

Aquel fin de semana estuve pensando cómo explicar a una persona de 12 años por qué dos ele-

vado a cero da uno. Lo primero que me vino a la cabeza fue la cadena de igualdades escrita más arriba en la que se relacionan las potencias con los exponentes negativos y las fracciones. Pero esta secuencia de igualdades algebraicas e implicaciones podría satisfacer a un adulto matemático, pero no a un niño matemático que requiere más significado y menos formalismo. Un significado del que el álgebra muy raramente nos provee.

De ahí que buscase una respuesta a la pregunta haciendo un ejercicio de situación mental por medio del cual me imaginaba a mí mismo con el bagaje cultural de quien me formulaba la cuestión. Así fue como llegué a la conclusión de que no debería utilizar el álgebra para desarrollar mi respuesta. No debería haber ninguna letra, solo cifras concretas, símbolos de operaciones elementales y el signo de igualdad. Tampoco usaría números negativos, y menos todavía exponentes negativos. A ser posible, tampoco debería utilizar fracciones.

También reconocí que, fuese cual fuese mi respuesta, la cuestión era traumática en sentido matemático, ya que el sentido y significado de dos elevado a cero es muy diferente del que tiene, por ejemplo, dos elevado a tres. Pero a eso volveré más adelante.



Figura 5. Captura del vídeo sobre el período de coincidencias de los intermitentes de dos coches



Figura 6. Intermitentes encendidos en $t = -10$ seg



Figura 7. Intermitentes encendidos en $t = -6$ seg

Las bases aritméticas que sí podía dar por sentado que conocía el alumno eran que sabía realizar y escribir las operaciones elementales, incluida la potenciación con números naturales pequeños. Por lo tanto, podía basarme en que el alumno conocía el significado de un exponente y que, por ejemplo, tres elevado a cuatro, significa multiplicar el número tres por sí mismo cuatro veces, tantas como expresa el exponente de la potencia. De hecho, es así como se definen, se presentan y se da sentido a la potenciación con números naturales.

El quid de la cuestión era elaborar una respuesta de por qué 2^0 tiene que ser igual a 1 haciendo aparecer una potencia de exponente nulo en algún momento de la argumentación. Al final di con una explicación del problema que me pareció suficientemente satisfactoria y cuyo desarrollo no requería malabarismos algebraicos.

Llegado el lunes siguiente pregunté al alumno si le importaba que comentase la cuestión con todo el grupo de clase, pues me parecía importante que todos pudiesen conocer la pregunta y su respuesta. No tuvo inconveniente. Así que desarrollé el siguiente planteamiento:

—Alguien de vosotros me preguntó el viernes por qué dos elevado a cero da uno. ¿Hay alguien que sepa la respuesta?

Se mantuvieron en silencio.

—Bien, atendiendo la consulta de vuestro compañero voy a tratar de explicar por qué dos elevado a cero es igual a uno.

Comencé escribiendo dos igualdades que todos aceptaron y comprendieron sin dificultad:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

Tampoco planteó problemas la siguiente consecuencia:

$$2^3 \cdot 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

Ni esta:

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^7$$

En este momento les pregunté:

—¿De dónde sale el 7?

—De 3 más 4 (todos).

—Entonces, estaréis de acuerdo en escribir:

$$2^{3+4} = 2^7$$

Se aceptó sin protestas, con lo que me animé a escribir:

$$2^{3+0} = 2^3 = 8$$

Estuvieron de acuerdo y continué:

—Pero según lo dicho antes:

$$2^{3+0} = 2^3 \cdot 2^0$$

—Luego tenemos que:

$$8 \cdot 2^0 = 8$$

—¿Y qué número multiplicado por 8 da 8?

—¡El uno! (unanimidad).

—Por lo tanto, dos elevado a cero tiene que ser igual a uno, ¿no?

$$2^0 = 1$$

Y lo que acabamos de hacer con el 2 puede hacerse con cualquier otro número, con lo cual la conclusión es que cualquier número elevado a cero da uno.

Aceptaron los estadios, pero no se tragaron la conclusión. Aceptaban los peldaños, pero no a dónde les había conducido la escalera. Lo mismo me ocurre a mí: acepto y comprendo la lógica del razonamiento, pero no acabo de comprender la conclusión. La acepto y hace ya mucho que aprendí a vivir con ella, pero me supone un conflicto siempre que pienso en su significado. Lo mismo les ocurrió entonces a mis alumnos.

Si al principio la cuestión no me había parecido muy pertinente, pues surgió al tratar de resolver dos problemas contextualizados de divisibilidad, el alumno que la había planteado me confesó más tarde que la pregunta se le había ocurrido al calcular de forma mecánica el mcm.

En efecto, un modo de obtener el mínimo común múltiplo es factorizar los números para expresarlos como productos de potencias de números primos. Algo que, como ilustra la figura 8, puede tener algunos detractores.

Esta manera de calcularlo conlleva dos dificultades. Una es que suele olvidarse la norma (yo nunca la he recordado y siempre tengo que repensarla para expresarla correctamente). La otra, que permite calcular el mcm sin comprender absolutamente nada de lo que se está haciendo. Fue al calcular el mcm de este modo y ver las potencias de varios primos que esa persona recordó la existencia de potencias con exponente nulo acerca de las que había interrogado a su maestro en primaria. Por tanto, la cuestión sí que estaba relacionada con la divisibilidad y las coincidencias periódicas.

Esa forma de realizar el cálculo nunca puede preceder a la vivencia o experimentación de sus significados. ¿Quiere decir esto que la norma es vana e inútil? No, evidentemente es útil. Sobre todo, una vez se han efectuado extensas listas de múltiplos y divisores hasta dar con la primera coincidencia. Es entonces cuando uno acaba dándose cuenta de que la tarea se convierte en imposible por tediosa e impracticable, cuando los números involucrados son grandes o apenas poseen factores comunes. Es entonces cuando necesitamos un recurso más potente que la elaboración de una lista.

Pese a todo, yo no recomiendo la norma a mis alumnos. Una vez disponen de la factorización, suelo recomendar construir uno de los números y tomar del otro los factores que necesitamos para completarlos a todos.



Figura 8. La norma de cálculo del mcm y del mcd en una calle de Barcelona esperando a ser reciclados

Por ejemplo, para hallar el mcm de 12, 15 y 25, primero tomamos la factorización del 12 ($2^2 \cdot 3$). Luego, nos preguntamos qué factores necesitamos tomar de la factorización del 15 para poder componerlo con los que ya tenemos: solo un 5, el 3 ya lo tenemos. Por último, ¿qué falta para componer el 25? De los dos cincos necesarios, ya disponemos de uno, solo falta otro:

$$\left. \begin{array}{l} 12 = 2^2 \cdot 3 \\ 15 = 3 \cdot 5 \\ 25 = 5^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{mcm}(12, 15, 25) = \\ = ((2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 5) \cdot 5 = \\ = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 300 \end{array}$$

Pero también esta norma se vuelve ineficaz cuando los números son mayores aún o se carece de referentes para determinar si son primos o no. En tal caso abandonamos los algoritmos manuales en beneficio de los recursos tecnológicos y digitales disponibles. Dudo que nadie se atreva a hallar el mcm (2018, 2019) mediante el único recurso del cálculo mental o manual.

Algunos cursos después volvió a aparecer la cuestión de $2^0 = 1$ con otro grupo de alumnos de una promoción distinta, estos ya de 2.º de la ESO. Los acontecimientos se desarrollaron de forma similar a la expuesta, aunque a partir de una causa diferente, pues la incitación partió de cuántos divisores tenía el ángulo de 360° .

La cuestión estaba relacionada con los recubrimientos regulares del plano y venía a colación de averiguar cuáles eran los polígonos regulares cuyos ángulos eran enteros, esto es, divisores de 360° . La cuestión volvía a estar relacionada con la divisibilidad, pero no a través de un problema de encuentros o de destellos periódicos de la vida real y cotidiana, sino relacionando dos contextos distintos de las matemáticas como son la divisibilidad y la geometría.

En esa clase de 2.º de la ESO se había deducido una fórmula para hallar el ángulo interior de un polígono regular de N lados distinta a la que alguien había encontrado en Internet (figura 9).

Tras encargar la tarea de aplicar la fórmula a mis 24 alumnos, cada uno de ellos con un valor de N distinto, desde ($N = 11$ hasta $N = 34$), se introdujo la fórmula en una hoja de cálculo de Excel para verificar los resultados obtenidos y

extraer conclusiones sobre ellos (figura 10). Fue una de dichas conclusiones la que inspiró una cuestión relacionada con la divisibilidad, pues alguien observó que había ángulos enteros y otros decimales y se preguntó por qué.

En esa clase de 2.º de la ESO se hizo una lista con todos los divisores de 360. Lo que incitó la cuestión sobre dos elevado a cero fue que alguien, al ver lo tediosa que era la tarea buscando uno a uno todos los divisores, preguntó cómo podía saberse cuántos divisores tiene un número sin tener que hacer la lista.

Los adultos matemáticos sabemos que el número de divisores de un número se obtiene precisamente de los exponentes de su factorización. Como $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, la cantidad de divisores de 360 es: $(3+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Ese +1 dentro de cada paréntesis se oculta en el exponente 0 de cada una de las potencias. De ahí que les propusiese buscar la descomposición factorial de 360. Y la encontraron.

A partir de aquí surgieron propuestas de combinar distintos factores presentes en la descomposición para construir productos. Alguien vio que si en 2^3 hay tres doses, en 3^2 hay dos trespes, y solo tenemos un 5, la solución debería estar en cómo combinar tres doses, dos trespes y un cinco. Es decir, $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Pero seis son tan solo la cuarta parte de los divisores de 360. Entonces les pregunté:

- El 1, ¿no es un divisor de 360?
- ¡Claro! (unanimidad)
- Si solo combinamos doses, trespes y cincos, jamás obtendremos el 1, ¿no?

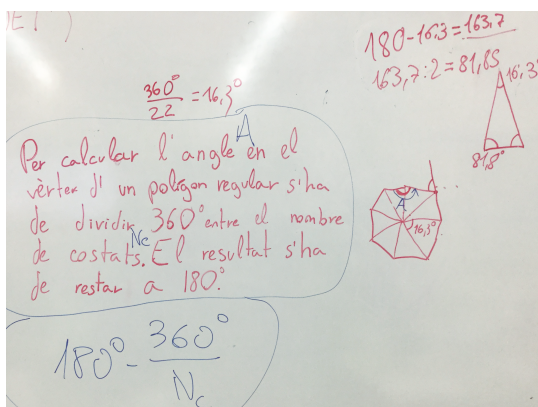


Figura 9. Fórmula deducida en clase para el ángulo interior de un polígono regular de N lados

Alguien preguntó:

—Pero, entonces, ¿de dónde sale el 1?

Fue entonces cuando otra persona dijo:

—Dos elevado a cero da uno.

Yo repliqué:

—¿Y dónde está el 2º?

No respondieron mi pregunta, pero sus comentarios se iban acercando:

- No se ve, pero el 1 está en el 2, dijo uno.
- Y en el 3 y en el 5, dijo otro.
- ¿Y entonces?, dije yo.
- Hay que contar con el 1 también.
- ¿Y cuántas opciones supone el hacerlo?, pregunté.
- Una más para todos. Si antes eran seis, ahora serán..., quien hablaba se quedó en el aire.
- 6 por 2 son 12, concluyó otra persona.
- Pero no son 12 los divisores, observé.
- No, son el doble todavía, dijo alguien.
- ¡Claro! El 1 está en todos, en cada uno, está en el 2, en el 3 y en el 5.

Quien había hablado acababa de encontrar la clave de la respuesta. De nuevo, intervine:

—¿Cómo contamos las opciones?

La misma persona iluminó al resto:

- Si antes eran tres, dos y una, ahora son 4, 3 y 2.
- Sí, ahora sí: ¡4 por 3 y por 2 da 24!, expresó con júbilo otra persona.

Sabíamos que había que contar una opción más para cada factor primo de la descomposición. Sin embargo, la opción adicional que a cada factor aportaba el 1 no se había hecho todavía visible, seguía oculta. La argumentación se había desarrollado de forma dialogada.

	A	B
1	costats	angle
2	3	60,0
3	4	90,0
4	5	108,0
5	6	120,0
6	7	128,6
7	8	135,0
8	9	140,0
9	10	144,0
10	11	147,3
11	12	150,0
12	13	152,3
13	14	

Figura 10. Hoja de cálculo para los ángulos interiores de un polígono regular

Yo sabía que había unos en el 2^0 , en el 3^0 y en el 5^0 , y que cuando se observan los exponentes de la descomposición factorial hay que considerar esos ceros ocultos que hacen que los divisores sean uno más de los que indican los exponentes:

$$\begin{array}{ccc}
 2^3 = 8 & 3^2 = 9 & 5^1 = 5 \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 2^0 = 1 & 3^0 = 1 & 5^0 = 1 \\
 2^1 = 2 & 3^1 = 3 & 5^1 = 5 \\
 2^2 = 4 & 3^2 = 9 & 5^2 = 25 \\
 2^3 = 8 & &
 \end{array}$$

Así es como aparecen los cuatro divisores de 2^3 (1, 2, 4 y 8), los tres divisores de 3^2 (1, 3 y 9) y los dos divisores de 5^1 (1 y 5) que combinados en productos proporcionan las $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ combinaciones posibles que dan lugar a los 24 divisores de 360. Esa explicación fue la que expuse a la clase, pues no todos habían experimentado la iluminación de quienes más intervinieron en el diálogo. Pero la cuestión de por qué $2^0 = 1$ seguía en el aire.

Justifiqué esta igualdad reproduciendo la misma argumentación que unos años antes había presentado en 1.º de la ESO y que he reproducido más arriba. La gran mayoría parecieron comprender los motivos por los que dos elevado a cero tiene que ser uno, pero sus caras demostraban sorpresa y escasa credibilidad. Incluso hubo quien exclamó:

—¡Esto es magia!

—No, no es magia, intervine. Es lógica y es coherencia. El mismo razonamiento que nos ha llevado a que $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4}$ es el que nos conduce a que 2^0 se iguala a 1. Y tenemos que aceptarlo porque este resultado es hijo de nuestra lógica, de nuestro pensamiento.

El trauma matemático

Su perplejidad era la misma con la que respondemos a un argumento incuestionable pero que nuestra mente no acaba de aceptar, que no acaba de acomodarse en nuestro bagaje cultural. Estaban viviendo su primer trauma matemático.

Un trauma matemático es fruto de una triple colisión producida por la lógica, la intuición y el significado. Del choque debe nacer un nuevo significado que resultará inaceptable si no encuentra acomodo en nuestra cultura, aunque lo cierto es que acomodarlo significa modificar nuestra cultura y aprender a convivir con él. De niños, se nos explica que la multiplicación de dos números consiste en la suma sucesiva de uno de ellos tantas veces como indica el otro:

$$\begin{aligned}
 3 \cdot 4 &= 3 + 3 + 3 + 3 \\
 4 \cdot 3 &= 4 + 4 + 4
 \end{aligned}$$

Lo mismo ocurre con la potenciación, tal y como se ha comentado antes. Pero al llevar las cosas a casos patológicos con números menos naturales se pone a prueba nuestra intuición y, como consecuencia de ello, nuestra comprensión. Cinco elevado a tres significa multiplicar cinco por cinco tres veces. Pero desde esta perspectiva, cinco elevado a cero carece de sentido, pues no podemos multiplicar un número por sí mismo cero veces. Este shock afecta nuestra concepción, tanto de lo que hasta ahora significaba multiplicar como de lo que significaba el número cero.

De hecho, el número cero no es de los más naturales, ni en un sentido literal del término (es mucho más joven que sus colegas 1, 2, 3, 4...), ni en un sentido matemático, pues hay quienes lo excluyen del que toman como auténticamente matemático conjunto de números naturales.

En cualquier caso, nuestra reacción a ese sinsentido que es dos elevado a cero es la resignación. La lógica de la aritmética nos ha conducido a una igualdad monstruosa ($2^0 = 1$) que pone de manifiesto las consecuencias aberrantes que puede generar y que pone a prueba nuestro entendimiento. Estamos viviendo una contradicción, pues la consecuencia de nuestro pensamiento lógico es un resultado que se nos antoja absurdo. Parece como si la lógica nos dijese: ¿no querías una nueva operación basada en otra más elemental? ¡Atente a las consecuencias!

¿Comprendemos realmente que $2^0 = 1$? Cada lector puede analizar sus reflexiones, pero en un adulto matemático ese análisis quizá llegue tarde porque hace ya mucho que esa igualdad halló acomodo en su bagaje cultural. Incluso puede consi-

derarla indiscutible. Sin embargo, tal vez queden algunos resquicios que nos induzcan a pensar que la hemos aceptado y asimilado demasiado a la ligera, sin profundizar lo suficiente como para comprenderla del todo. Demostramos que la igualdad es cierta, y nos la creemos. Vemos que la calculadora también da como respuesta 1 cuando le ponemos el cero a una potencia, y nos la creemos. Como se la creyeron los alumnos de mi clase. Mis alumnos entendieron los razonamientos, pero no aceptaban ni entendían la conclusión porque trastocó el modo que tenían hasta entonces de comprender la multiplicación de dos números y el modo en que comprendían el número 0. El cero conlleva dificultades y la dificultad de 2^0 no está en el 2, sino en el 0.

Cero por cero igual a cero

Dos elevado a cero da uno, pero el cero provoca problemas en todas las operaciones que no sean la suma. Incluso en multiplicaciones elementales como $0 \cdot 12 = 0$.

Nadie discute esa igualdad, pero si volvemos a traer a colación el significado de la multiplicación, ¿cuál sería el significado de $0 \cdot 1$? Sería equivalente a sumar cero veces uno. ¿Tiene sentido eso? Más sentido tiene sumar una vez cero. Y dicho cálculo, $1 \cdot 0$, sí que da 0. Por tanto, podemos aceptar que $0 \cdot 1 = 0$ en base a la conmutatividad de la multiplicación. Pero, ¿acaso la multiplicación es conmutativa? Vemos y comprendemos que lo es siempre que uno de los dos números involucrados en ella no sea precisamente 0. Y ello es consecuencia de la conmutatividad de la suma. Por lo tanto, para que el producto sea conmutativo basta con aceptar que $1 \cdot 0 = 0 \cdot 1$.

Exponentes negativos

Otra de las consecuencias que se derivan del hecho de que 2 elevado a 0 sea 1 es la del significado que deberemos dar a las potencias de exponente negativo. Aprovechando la misma argumentación que nos ha conducido a que $2^0 = 1$, podemos hacer lo siguiente:

$$1 = 2^0 = 2^{3-3} = 2^3 \cdot 2^{-3}$$

Luego si aceptamos que también para los números negativos es verdad que $2^{3-3} = 2^3 \cdot 2^{-3}$, entonces tenemos:

$$1 = 8 \cdot 2^{-3}$$

Puesto que el número que multiplicado por 8 da 1 es $1/8$, deberá ser:

$$\frac{1}{8} = 2^{-3}$$

Si elevar un número a 0 era monstruoso, ahora resulta que, según el significado original del producto de números, ¡un número multiplicado por sí mismo una cantidad de veces negativa, ¡da su recíproco!

De nuevo estamos ante un shock de significado. Esos traumas van forjando la mente matemáticamente adulta y ponen de manifiesto las consecuencias imprevistas que tiene el pensamiento lógico sobre la aritmética. Unas consecuencias derivadas de las operaciones con números naturales y que dieron lugar a la creación de las fracciones, los irracionales, los enteros y los complejos (citados por orden epistemológico).

Aproximaciones visual y lingüística

Meses después de aquella clase no anunciada, la cuestión volvió a mi cabeza. Entonces me planteé otro modo de enfocarla que quizá podría resultar incluso más comprensible para un alumno de primer curso de la ESO que la que expuse en clase. Ese nuevo enfoque se basaría en el lenguaje.

Efectuar una potencia de 2 no es otra cosa que multiplicar por 2 varias veces, es decir, duplicar tantas veces como indica el exponente de la potencia. Si vuelve a multiplicarse por 2, la estamos cuadruplicando, y así sucesivamente. Esto puede representarse del modo siguiente:

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & \dots \\ \cdot 2 & \cdot 2 & \cdot 2 & \cdot 2 & \cdot 2 & \end{array}$$

De forma resumida:

$$2^1 \quad 2^2 \quad 2^3 \quad 2^4 \quad 2^5 \quad \dots$$

De este modo, a medida que continuamos la secuencia vamos obteniendo las sucesivas duplicaciones o potencias de 2. Desplazándonos en sentido contrario, lo que estaremos haciendo es la operación inversa a la multiplicación, es decir, en lugar de multiplicar por 2, dividir por 2. Si antes duplicábamos, ahora partimos en mitades:

$$\begin{array}{cccccc} 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & \dots \\ \div 2 & \div 2 & \div 2 & \div 2 & \div 2 & \div 2 \end{array}$$

Resulta tentador ir más allá en la secuencia. Si la secuencia anterior estaba compuesta por las sucesivas duplicaciones, ahora lo está por las sucesivas mitades:

$$2^5 \quad 2^4 \quad 2^3 \quad 2^2 \quad 2^1 \quad 2^0$$

Cada mitad rebaja en una unidad el exponente precedente. La cuestión de qué número cabe poner en el interrogante tiene solución evidente. No queda otra alternativa que el cero: 2^0 . Y de nuevo concluimos que 1 tiene que ser igual a 2^0 . Además, llevando las cosas más lejos todavía entramos en la serie de las potencias de exponente negativo. Tras 2^0 vendrían 2^{-1} , 2^{-2} , 2^{-3} y así, sucesivamente:

$$\begin{array}{cccccccc} 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 2^5 & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 & 2^{-1} & 2^{-2} & 2^{-3} \end{array}$$

Hemos completado la serie. Sin embargo, no evitamos la sorpresa de los significados de 2^0 y de 2 elevado a un exponente negativo. Este enfoque se basa en la percepción visual de una secuencia, en un patrón, y no tanto en el cálculo de una operación matemática. Por esto no lo considero tan adecuado matemáticamente como aquel. Con todo, el trauma permanece, aunque ya resulta menos doloroso. Nos vamos acostumbrando a él.

Conclusiones y reflexiones teóricas

Según la leyenda, Pierre de Fermat anotó en el margen de un libro una demostración maravillosa del teorema que lleva su nombre y que tardaría más de tres siglos en ser demostrado. Lo que ocurre en los márgenes no es banal, conviene prestarles atención porque también forman parte del todo.

Una clase anunciada no suele contemplar los márgenes. Suele regirse por un guion preestablecido sin planes para abordar situaciones imprevisibles. En una clase así, probablemente, las cuestiones de por qué dos elevado a cero da uno y el cálculo del mínimo común múltiplo de decimales, se habrían mantenido al margen sin ser tratadas.

Actuando así cercenamos la libertad y la creatividad, no solo de nuestros alumnos, sino la nuestra como profesores. Partiendo de que las matemáticas no están en los libros, sino que se hacen y construyen cuando uno desarrolla nuevas ideas y de que, al menos en un primer estadio, es la práctica la que las valida, un grupo de alumnos construyó un teorema: el mínimo común múltiplo de dos decimales es el decimal del mínimo común múltiplo.

Más adelante ya formalizarán ese teorema de modo más riguroso (si alguien les deja margen para hacerlo en una clase más o menos anunciada). Pero esa generalización y demostración que un matemático formal considerará todavía pendientes no les aportará más significado y conocimiento que el que adquirieron cuando osaron hacer algo que a mí, como profesor y como matemático, me impiden hacer las definiciones, los desarrollos formalistas y los prejuicios de mi conocimiento. Yo no podía ni imaginar siquiera el mcm de decimales, pues tengo grabada a fuego la definición del mcm única y exclusivamente para números naturales. Gracias a mis alumnos sé que hay más vida para los decimales en cuestiones de divisibilidad de la que les atribuía.

En cuanto a la cuestión de dos elevado a cero, me alegro de haber adoptado la decisión que tomé y adaptarme al bagaje cultural del alumnado de 1.º de la ESO. Se puso de manifiesto, además, la relevancia que pueden tener las potencias de exponente nulo en la divisibilidad y, en una clase

de 2.º, en la geometría. Dado que la pregunta me pareció de gran importancia y que representaba un primer pequeño trauma matemático, creí conveniente adentrarme en los márgenes de mis clases y ofrecer un tiempo para que toda la clase pudiese reflexionar sobre esa rareza no anunciada ni prevista por mí en las actividades que la inspiraron.

Esa rareza carece de sentido desde la perspectiva clásica con la que aprendemos a calcular y a escribir las potencias, pero a la que nos conduce el ansia de coherencia en el razonamiento lógico. Hemos de tragarnos las consecuencias de nuestro propio modo de razonar, aunque esas consecuencias residan en los márgenes menos frecuentados de nuestros pensamientos. Son, de hecho, estas consecuencias las que alumbran esos márgenes. En eso consiste aprender: en asimilar la vida en los márgenes y en aprender a convivir con las crisis que esa integración supone.

Ante una situación así muchos adoptarán una posición que Eduardo Mendoza (1982) expresa claramente en boca de un personaje de su novela *El laberinto de las aceitunas*: «la memoria almacena lo que el intelecto rechaza». Pero las matemáticas se enfrentan al intelecto, a la comprensión y al razonamiento. No hay asimilación matemática, eso a lo que Piaget (1970) se refería como proceso de acomodación, sin comprensión ni razonamiento. Lo que ocurre es que a veces uno puede seguir el hilo del razonamiento, como en este caso, sin comprender su conclusión. La lógica tiende caminos y autopistas seguros que nos conducen a lugares imprevistos al inicio del viaje. ¿Quién iba a esperar que el camino o la autopista acabase súbitamente en un precipicio, en la jungla o en el mar?

Entonces vemos que los conceptos a los que Vygotsky (1978) calificaba de científicos y que, según él, se construían de arriba hacia abajo en contraposición a los conceptos espontáneos, contruidos de abajo a arriba, no se desarrollan verdaderamente de arriba hacia abajo, sino que, en mi opinión, todos van de abajo a arriba. Entendiendo por abajo la parte práctica y tangible, y entendiendo por arriba la parte conceptual y abstracta del co-

[...] dos elevado a cero no es que sea uno, sino que tiene que ser igual a uno por una cuestión de práctica y de coherencia lógica.

nocimiento matemático. En efecto, dos elevado a cero no es que sea uno, sino que tiene que ser igual a uno por una cuestión práctica y de coherencia lógica. Se trata de un invento humano que no tiene nada de divino. Tal vez Vygotsky pensase

que los conocimientos científicos se elaboraban de arriba hacia abajo porque su percepción de las matemáticas se acercaban más a los cálculos y resultados que no a los procesos de su creación.

El proceso se desarrolló mediante episodios dialogados en los que intervine más de lo que ahora

considero que debería haber intervenido. El diálogo es un recurso fundamental en matemáticas que deberé utilizar más en mis clases. El diálogo incitó la participación del alumnado y la exposición pública y sincera de cuestiones matemáticas que a menudo se barren debajo de la alfombra.

La importancia del diálogo basado en la argumentación irá creciendo a lo largo de esta sección. Resulta inevitable porque es así como se han desarrollado gran parte de las matemáticas desde sus orígenes. Célebres son los diálogos de Platón (1960) y los de Galileo (1994). El matemático necesita el diálogo para validar o rechazar sus intuiciones, sus demostraciones, sus ideas inspiradas o no en la práctica: necesita al otro. Galileo plantea un diálogo a tres bandas sobre los sistemas cosmológicos vigentes en el siglo XVI. Dos mil años atrás, Platón actúa como el moderador sabio en un diálogo con más participantes y en el que el conocimiento matemático no se aísla del filosófico. El papel del diálogo en el ámbito científico fue destacado por Popper (1994) y en el matemático por Lakatos (1978) a través de conjeturas y refutaciones de cuyo desarrollo emerge el conocimiento validado. El diálogo es, por lo tanto, causa y medio de aprendizaje.

Suele atribuirse al cálculo un mero papel mecánico como medio para obtener resultados. El cálculo se situaría en los márgenes de aquello a lo que Lave y Rogoff (1984) se refieren como práctica en la vida cotidiana. Sin embargo, dentro del ámbito matemático el cálculo juega un papel práctico si su praxis no se reduce, como suele ser común en otros ámbitos como el científico y el de la

vida cotidiana, al de medio sobre el que no cabe la reflexión. Los científicos y los consumidores conocen que dos elevado a cero es igual a uno y quizá con esto les baste para desenvolverse bien en sus tareas. Pero los matemáticos deben saber el motivo y los educadores matemáticos deben fomentar la reflexión sobre los motivos del cálculo porque no es la calculadora lo que debe gobernar nuestro pensamiento. Fuera de las matemáticas, el cálculo es un medio técnico; dentro de las matemáticas, el cálculo es un modo de pensamiento.

Fuera de las matemáticas, el cálculo es un medio técnico; dentro de las matemáticas, el cálculo es un modo de pensamiento.

Los procesos de cálculo matemático merecen más reflexión, sin que eso represente más práctica. En lugar de realizar, como era corriente décadas atrás, mil cálculos sin reflexión alguna, planteemos la realización de diez cálculos con tres o cuatro reflexiones. Entonces convertiremos el cálculo en una práctica vital de las matemáticas a partir de la cual será posible el aprendizaje en un sentido parecido a aquel con el que Lave y Rogoff se refieren a la práctica en la vida cotidiana.

Mis alumnos desarrollaron métodos de cálculo (mcm) y plantearon cuestiones sobre un cálculo concreto (2^0). Fue la reflexión sobre dichos cálculos lo que facilitó el aprendizaje matemático, pues aprender el mcm no se reduce a saber calcularlo ni escribir $2^0 = 1$ es conocer esta igualdad.

Esta ha sido la primera entrega de una sección que hablará de cuestiones reales ocurridas en el aula de matemáticas. La escribo porque mis alumnos me hacen aprender y revivir en los márgenes de clases anunciadas situaciones imprevistas como las descritas. Aprenden ellos y aprendo yo. A diferencia de la muerte anunciada novelada por Gabriel García Márquez (1981) y que acaba por consumarse, es en lo imprevisto de lo no anunciado donde con los alumnos podemos vivir procesos matemáticos creativos de gran riqueza. Y eso es excelente, tanto para el aprendizaje del alumnado como del profesorado. Quizá pueda

objetarse que para ello hace falta tiempo. Sin embargo, el tiempo existe y somos nosotros, el profesorado, quienes lo distribuimos. El currículo orienta, pero no obliga. Debemos sentirnos obligados por lo que realmente importa: ser honestos

con lo que supone hacer matemáticas y con su historia.

A lo largo de esta sección pretendo mostrar lo que puede ocurrir en los márgenes de algunas clases de matemáticas. Unos márgenes que irán agrandándose hasta no merecer dicha denominación, pues con los años (el tiempo) han pasado a ser el centro y el eje de mi tarea como profesor. No quiero ni puedo renunciar a esas orillas, pues en ellas vive el aprendizaje. Ello supone asumir que el tiempo, como expresa la cita inicial de este artículo, no lo distribuyen ni el sistema ni el currículo, lo distribuimos nosotros. He ahí la esencia de una clase no anunciada y esta la primera de sus crónicas.

Referencias bibliográficas

- GALILEI, G. (1994), *Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo ptolemaico y copernicano*, Edición de Antonio Beltrán Marí, Alianza Editorial, Madrid.
- GARCÍA, G. (1981), *Crónica de una muerte anunciada*, Editorial Bruguera, Barcelona.
- LAKATOS, I. (1978), *Pruebas y refutaciones*, Alianza editorial, Madrid.
- LAVE, J., y B. ROGOFF, (1984), *Everyday Cognition: Its Development in Social Context*, Harvard University Press, Cambridge.
- MENDOZA, E. (1982), *El laberinto de las aceitunas*, editorial Seix Barral, Barcelona.
- PIAGET, J. (1970), *The Science of Education and the Psychology of the Child*, Grossman.
- PLATÓN (1960), *Diálogo VII: Felebos, Timaios, Kritias*, Ediciones Ibéricas, Madrid.
- POPPER, K. B. (1994), *Conjeturas y refutaciones: el desarrollo del conocimiento científico*, Editorial Paidós, Barcelona.
- VYGOTSKY, L. S. (1978), *Mind in Society*, Harvard University Press, Cambridge.

MIQUEL ALBERTÍ PALMER
INS Vallès (Sabadell)

<clasenoanunciada@revistasuma.es>