suma+

87 revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas · *marzo 2018*



suma+
revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas
87
marzo 2018

sumario

#SialasCalculadoras 3-7

artículos

La experiencia de JUMP Math en España
Andrés Bello de Haro, Carmen Castro Senra, Santi González González, Mireia Planas Dalmases, Carmen Salcedo Vereda, Ana Serena Murillo y José Luis Touron Rivadulla 11-19

Pero… ¿quién encarceló a Sally?
Raúl Ibáñez Torres 21-29

Destrezas de modelización en la formación inicial de maestros de Educación Primaria
Jesús Montejo Gámez, Elvira Fernández de Ahumada, Carmen León Mantero, Noelia Jiménez Fanjul y Natividad Adamuz Povedano 31-40

Triángulos de MacMahon: del plano al espacio
José Luis Martín Montaño 41-48

secciones

Ell@s tienen la palabra
Tareas ricas para trabajar con decimales
David Barba Uriach y Cecilia Calvo Pesce 51-54

Vale la pena
Usar las soluciones de los alumnos
Carme Burgués Flamarich 55-58

CreoGebra
GeoGebra con un dedo. 3D en Educación Infantil
Bernat Ancochea, Isabel Sorigué y José Luis Muñoz Casado (coordinador) 59-69

Mujeres matemáticas: rompiendo moldes
Maryam Mirzakhani: curiosidad, talento y humildad
Marta Macho Stadler **71-75**

Del MMACA al aula
Desde un punto de vista no-formal
Guido Ramellini **77-82**

Crónica de una clase no anunciada
Dos elevado a cero
Miquel Albertí Palmer **83-95**

Reseñas
Jugar, cantar y vigilar la salud
Joan Jareño Ruiz **97-102**

FESPM & Cía

Crónica del VIII CIBEM
Concepción Toboso Nieto **105-112**

Semblanza de Olimpia Figueras Mourut de Montppellier
Luis Puig Espinosa **113-116**

V Jornadas de la enseñanza de las Matemáticas en Navarra
Javier Bergasa Liberal **117-121**

XX Jornada Didáctica Matemática de ABEAM
Cecilia Calvo Pesce **122-125**

Día Escolar de las Matemáticas 2018

Matemáticas y el poder de los votos
Antonio Moreno Verdejo **127-140**

Suma *digital <revistasuma.es>*

Vivencias matemáticas
Besos por la paz
Miquel Albertí Palmer

Enlaces referenciados en este número

suma+ 87
pp. 3-7

#SialasCalculadoras

En octubre de 1988 se publicó el primer número de la revista *Suma*. Por aquel entonces la revista tenía cuatro secciones: *Artículos*, *Ideas para la clase*, *Recursos para el aula* e *Información*.

En el segundo número (febrero de 1989) se publicó, en la sección *Ideas para la clase*, el primer artículo sobre calculadoras «Con la calculadora». Su autor, Vicente C. Juan Martí, propone una actividad sobre fracciones, «Fracciones que crecen». Su propuesta comienza reivindicando el uso de la calculadora en la resolución de problemas: «Un problema deja de serlo cuando conozco un algoritmo que me permite encontrar la solución. La calculadora facilita proponer problemas que de otra forma serían inabordables (entre otras razones por la gran cantidad de operaciones necesarias) y estimula a que los alumnos descubran sus propios métodos de resolverlos, utilizando algoritmos variados».

Desde ese primer momento, han sido muchos y muy diversos los artículos que se han publicado en *Suma*. En ocasiones, como en el primero, se trata de artículos sobre experiencias de aula con calculadora o propuestas de actividades que animan a utilizar la calculadora en todos los niveles. En otras, se trata de un manifiesto a favor del uso de la calculadora como recurso didáctico, en todas sus versiones, elemental, científica, gráfica, con cálculo algebraico y simbólico, de mano, digital.

Suma 7 (1991) publicó «La calculadora en la enseñanza de la matemática» de Elfriede Wenzelbueguer Guttenber en la sección de *Recursos para el aula*. Este artículo recoge una serie de recomendaciones para el uso de calculadoras basadas en documentos del ICMI (1986), del NCTM (1980,1989), de autores como Johnson (1979), Imerzeel y Ockenga (1977), Gibb (1975), Sullivan (1976)…

El artículo recoge las recomendaciones del NCTM («Agenda for Action», «Position Statement: Calculators in the Mathematics Classroom») sobre el uso de la calculadora en las clases de matemáticas en primaria y en secundaria, para los trabajos en clase, tareas y exámenes: «Los estudiantes deben usar las calculadoras para concentrarse en el proceso de resolución de problemas y no en la aritmética; lograr acceso a matemáticas que van más allá de su nivel computacional; explorar, desarrollar y reforzar conceptos incluyendo estimación, computación y experimentación; experimentar con ideas matemáticas y patrones; hacer cálculos tediosos con datos de la vida real».

En 1994 (*Suma* 18) se publica «Las calculadoras en las clases de Matemáticas» de José Antonio Mora Sánchez. «Las calculadoras han entrado en las clases de matemáticas para ocupar un espacio que les ha permitido convertirse en una herramienta natural». Así empieza el artículo, que J. A. Mora escribía hace ya más de 20 años, en el que se analiza cómo influye el uso de la calculadora en las tareas habituales de las clases de matemáticas en todos los niveles educativos. «Los algoritmos para el cálculo, los métodos de resolución de ecuaciones, las operaciones con matrices, el cálculo de límites o la representación de funciones son algunos ejemplos de un amplio abanico de tareas matemáticas que habrá que revisar a la luz de los nuevos recursos tecnológicos. Todo esto no es más que una parte del problema más amplio que constituye la cada vez más necesaria revisión de los contenidos de la matemática escolar, tanto en lo referente a los conceptos, como a los procesos, a las estrategias de resolución de los problemas matemáticos y a la actitud con que se enfrentan a ellos». Pero desgraciadamente la revisión que reclamaba Mora parece que todavía no ha llegado, es cierto que en los currículums oficiales tanto de primaria como secundaria y bachillerato se hace mención explícita del uso de la calculadora. Para la realización de cálculos, para investigar y resolver problemas, en primaria. En secundaria y bachillerato además se incluyen las calculadoras gráficas. Ahora bien, si miramos los libros de texto autorizados y utilizados de forma masiva, no suelen aparecer actividades con calculadora; es más, siguen proponiendo gran cantidad de actividades de mecanización mediante algoritmos estandarizados que poco aportan al pensamiento matemático.

La realidad es que en las aulas de primaria apenas hay presencia de actividades con la calculadora, y en la mayoría de escuelas el uso de la calculadora está prohibido incumpliendo el decreto que establece su currículum. En secundaria, encontramos muchos libros de texto que siguen incluyendo algoritmos que salen de la chistera, como el de la raíz cuadrada y parte del profesorado evalúa el uso de estos algoritmos prohibiendo el uso de calculadoras. Se repite una y otra vez la resolución de la ecuación de segundo grado mediante una fórmula que no se justifica, que el alumnado aplica como una receta sin saber ni entender por qué ni para qué.

La cuestión se agrava cuando cada año algunas universidades siguen prohibiendo y restringiendo el uso de la calculadora en las pruebas de acceso a la universidad. Hace unos años, no demasiados, en muchas comunidades autónomas estaban permitidas las calculadoras gráficas, pero poco a poco llegaron las prohibiciones. Ahora demonizan algunas calculadoras científicas porque son capaces de resolver

ecuaciones o determinantes de orden 3. ¿De qué miedo tienen los que las prohíben? Las calculadoras sin conocimientos matemáticos no sirven de nada, pensar lo contrario es un error que cometen aquellos que las prohíben. Es posible que desconozcan sus posibilidades, pero no es razonable prohibir por ignorancia.

En los años 70 Stuart Plunkett escribía «Descomposition And All That Rot» un artículo sobre el cálculo mental, los algoritmos estándar y el uso de la calculadora. En este artículo expone diez características de los algoritmos escritos estándar. Algunas de estas características se pueden extrapolar más allá de los algoritmos de las operaciones aritméticas y puede que sean la clave para entender por qué se prohíben las calculadoras en las aulas y pruebas de evaluación externas. 1. Los algoritmos son escritos, de forma tal que la operación es permanente y susceptible de corregirse. 2. Están estandarizados, por lo que es posible comprobar que todo el mundo hace lo mismo. 3. Están contraídos. 4. Son efectivos. 5. Pueden ser automatizados. Se pueden enseñar y practicar sin necesidad de entender el proceso o lo que se está haciendo. 6. Son simbólicos. Uno hace sus operaciones enteramente por medio de símbolos de manipulación, sin referencias al mundo real o cualquier otro modelo. En la fase final la respuesta aparece normalmente sin aproximaciones previas. 7. Son generales. 8. Son analíticos. 9. No se interiorizan fácilmente. 10. Favorecen la pasividad cognitiva o suspende la comprensión. Mientras se está operando no se piensa demasiado por qué se hace de esa forma. Además, hay que añadir que son tradicionales y enseñar con este método facilita el trabajo, dado que son fáciles de controlar y calificar. Pero en una enseñanza de este tipo, concepto y algoritmo se equiparan.

Las calculadoras representan una oportunidad para mejorar el aprendizaje de las matemáticas, prohibir o restringir su uso es un retroceso que no nos podemos permitir en la escuela del siglo XXI y si las pruebas externas las prohíben, su uso en la escuela prácticamente desparece .

Conscientes de la necesidad de establecer unas directrices claras sobre la utilización de cualquier tipo de calculadora en las pruebas de acceso a la universidad, y con la convicción basada en la práctica, que las calculadoras son un importante recurso en todos los niveles, desde la FESPM, queremos hacer las siguientes consideraciones:

Pensamos que las comisiones organizadoras de las pruebas de acceso y las comisiones de materia tienen que velar porque los exámenes sean coherentes con los correspondientes currículums de Bachillerato.

Pensamos que es una contradicción y un grave perjuicio para el alumnado ver limitadas sus posibilidades de utilizar libremente los diferentes recursos que ofrece la calculadora, en una prueba que tiene que evaluar los conocimientos adquiridos al cursar unos estudios que incluyen directamente entre sus objetivos curriculares la utilización de calculadoras.

Consideramos que el uso de una calculadora con prestaciones avanzadas (representación de funciones, cálculo matricial, cálculo estadístico…, e incluso, cálculo simbólico) representa una oportunidad para un mejor aprendizaje del alumnado en general. Es de gran utilidad en todas las materias para el alumnado con sufi-

cientes conocimientos matemáticos, y una ayuda para el aprendizaje matemático de todo el alumnado.

La FESPM ha impulsado y organizado numerosas iniciativas para fomentar el uso de las nuevas tecnologías y de la calculadora como recurso didáctico.

Los estudios sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas apoyan la utilización de las calculadoras científicas y gráficas desde la educación primaria hasta la universidad y garantiza la mejora de la comprensión matemática del alumnado.

Consideramos también que se han de hacer mayores esfuerzos que los realizados hasta ahora para conseguir un nivel de desarrollo tecnológico adecuado en el lugar que ocupa el Estado español en el contexto mundial. Instamos a las diferentes administraciones, a las autoridades económicas, industriales y educativas, a realizar una apuesta decidida por la utilización de las nuevas tecnologías en el mundo laboral y a preparar a la ciudadanía en la escuela para conseguir esta competencia.

Por tanto, la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas se sigue manifestando a favor del uso didáctico de las calculadoras en general, y de las calculadoras gráficas y simbólicas, en particular, en los diferentes niveles de enseñanza de las Matemáticas. Así mismo, considera que la utilización de la calculadora no debe tener restricciones en las pruebas de acceso a la universidad, ni en Matemáticas ni en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales.



Alumnos del instituto IES Abastos (Valencia)

En este número

Continuamos el ciclo de la revista publicando artículos, secciones, actividades de la Federación y el cuadernillo *Día Escolar de las Matemáticas*. En «Artículos» recogemos las aportaciones recibidas en <articulos@revistasuma.es> que han sido aprobadas por dos miembros del Consejo Asesor y también algún artículo solicitado desde el Consejo de Dirección en ocasión de alguna conferencia, charla o ponencia que hemos considerado de interés pera los lectores de *Suma*. Cada artículo lleva el pie de página que da razón de su procedencia.

En secciones se producen cambios. Carme Burgués Flamarich cierra el ciclo de la sección «Vale la pena» que nos ha acompañado durante seis años, desde marzo de 2012 y se despide así: «Espero haber sido útil a los *Suma*mente comprometidos con la educación matemática. Ha sido un placer y un reto contribuir en algo a aligerar la carga de los compañeros en esta maravillosa tarea. Sigan siendo IL-IL (ilimitadamente ilusionados) y gracias por su dedicación». Por nuestra parte le agradecemos las diversas ventanas que nos ha abierto, de aquí y de más allá, sobre cuestiones que vale la pena conocer y esperamos contar con ella de forma más esporádica a través de algún artículo.

La vida de la revista sigue, por eso estrenamos secciones en este número, exactamente tres. La primera, a cargo de Marta Macho Stadler, «Mujeres matemáticas: rompiendo moldes», que en cierta manera es el relevo de la de Antonio Pérez Sanz.

La segunda, «Del MMACA al aula», como su nombre indica corre a cargo del equipo del MMACA (Museu de les Matemàtiques de Catalunya). Ellos nos propondrán situaciones de aprendizaje para llevar al aula, partiendo de los módulos del museo.

La tercera, a cargo de Miquel Albertí Palmer, es doble. Después de seis años en el Consejo de Dirección de la revista, Miquel vuelve como autor de secciones: «Crónica de una clase no anunciada» para el formato en papel de la revista y «Vivencias matemáticas», una nueva sección de videos para la página web de *Suma*.

En «FESPM & Cía» crónica del VIII CIBEM que se celebró en Madrid el pasado mes de julio, una semblanza de Olimpia Figueras, premio González Sánchez Vázquez en su décima edición y también un crónica de jornadas de sociedades de la FESPM —la Sociedad Navarra de profesores de Matemáticas «Tornamira».

Como es habitual *Suma* del mes de marzo incluye el cuadernillo del XIX Día Escolar de las Matemáticas. Para la próxima edición (2019) hemos pedido con más antelación el cuadernillo a su autor y lo publicaremos en el número de *Suma* correspondiente al mes de noviembre, así se podrá preparar mejor el *DEM*.



COLABORAN:

GOBIERNO DE ESPAÑA
MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE

XUNTA DE GALICIA
CONSELLERÍA DE CULTURA, EDUCACIÓN E ORDENACIÓN UNIVERSITARIA

Deputación DA CORUÑA

Ayuntamiento de A Coruña
Concello da Coruña

artículos



suma+ 87
Artículos
Marzo 2018
pp. 11-19

La experiencia de JUMP Math en España

Andrés Bello de Haro
Carmen Castro Senra
Santi González González
Mireia Planas Dalmases
Carmen Salcedo Vereda
Ana Serena Murillo
José Luis Touron Rivadulla

JUMP Math es un programa de matemáticas que ofrece un itinerario cohesionado de aprendizaje desde Educación Infantil (5 años) hasta 2.º de ESO. Desde su primera aplicación en el aula en Canadá en 2004, su éxito probado en la mejora de la comprensión y la motivación del alumnado ha posibilitado su difusión. En España comenzó a implantarse en 2014, siendo en la actualidad 119 centros (1 400 docentes y 25 000 estudiantes) los que aplican el programa. En este trabajo se recoge la experiencia de implementación de cinco centros educativos de Barcelona y Madrid.

Palabras clave: JUMP Math, Itinerario de aprendizaje, Innovación, Motivación del alumnado, Mejora de la comprensión.

The experience of JUMP Math in Spain

JUMP Math is a mathematics learning program that offers a cohesive learning itinerary from Kindergarten (5 years old) to 2.º Secondary. Since the beginning of its implementation at schools in Canada in 2004, its success in improving student understanding and motivation has allowed its spread. In Spain it began to be implemented in 2014, currently 119 schools (1 400 teachers and 25 000 students) are applying the program. This article reflects the implementation experience of five schools in Barcelona and Madrid.

Keywords: JUMP Math, Learning Itinerary, Innovation, Student Motivation, Student Understanding Improvement.

JUMP Math fue impulsado en Canadá desde 2003 por el doctor en matemáticas John Mighton. Su objetivo era posibilitar un proceso de aprendizaje que guiara a los estudiantes de forma estratégica para descubrir, comprender y disfrutar de las matemáticas. Todo ello con la firme idea de romper el extendido mito de la habilidad innata como condición necesaria para dominar las competencias matemáticas (Mighton, 2003). El programa surgió de la propia experiencia de Mighton con estudiantes que tenían dificultades con la materia, un hecho que marcó el carácter inclusivo del programa desde su inicio.

Gracias a sus evidencias de éxito en la mejora de la comprensión y la motivación del alumnado (ver <https://www.jumpmath.org/jump/en/research_reports>), en Canadá y Estados Unidos la cifra de estudiantes que aprenden en la actualidad con el programa ha ascendido a 200 000.

El programa ofrece un itinerario de aprendizaje desde Educación Infantil (5 años) hasta 2.º de ESO, con una secuenciación de contenidos minuciosamente estudiada y probada, que se ajusta al proceso de maduración cognitiva y a la propia estructura lógica de las matemáticas. Propone para el aula un proceso de descubrimiento guiado del alumnado, que se desglosa en pequeños retos, favoreciendo un aprendizaje pausado y mo-

Artículo solicitado por *Suma* en mayo de 2017 y aceptado en enero de 2018

tivador, que le permite ganar confianza, experimentando el éxito en cada paso y desarrollando diferentes estrategias para abordar y aplicar conceptos abstractos complejos. La mejora de la comprensión se refuerza aún por dos claves más:

1. la conexión de todos los bloques de aprendizaje de la propia disciplina (por ejemplo, la geometría se aborda de forma transversal para la comprensión de las operaciones);
2. un tratamiento recursivo de contenidos a lo largo de los cursos, que retoma y profundiza los conceptos, evitando que se produzcan lagunas en el aprendizaje y que parte del alumnado se pierda en el proceso, teniendo así un gran potencial inclusivo.

Estas características han hecho que varios centros educativos de España hayan optado desde 2014 por JUMP Math para innovar sus proyectos de educación matemática. Actualmente, 119 centros (mayoritariamente de Baleares, Cataluña, Madrid y Murcia) están aplicando en el aula el programa, con el que trabajan ya 1 400 docentes y 25 000 estudiantes.

Hasta la fecha en España no se ha podido desarrollar una evaluación de impacto de esta innovación (se dispone tan solo de la evaluación de una experiencia piloto por CRECIM, 2015). Pero sí se puede ya identificar en la red de centros que implantan JUMP Math, procesos reveladores que arrojan respuestas a cuestiones de interés para cualquier estudio sobre innovación en educación matemática en nuestro contexto educativo: ¿qué razones motivan a los centros a adoptar innovación? ¿Qué logros constatan en el proceso? ¿Cuáles son los desafíos más relevantes en la implementación?



Figura 1. John Mighton, creador de JUMP Math

En el presente artículo se recoge la experiencia de adopción de JUMP Math de cinco centros educativos de Barcelona y Madrid, relatada por los propios representantes (y coautores del artículo) que han dinamizado este proceso de innovación en sus respectivas escuelas. Como se ve en la tabla 1, se trata de centros de diferentes tipologías que han optado por estrategias de implantación también diversas, ya que la puesta en marcha de JUMP Math no exige comenzar por los cursos iniciales, aunque sea la implementación más idónea y cómoda para el equipo docente.

¿Por qué lanzarse a innovar?

Al analizar la red de centros JUMP Math en España, podemos concluir que los centros educativos que se deciden por el programa disponen de una cultura institucional orientada a la innovación, con mecanismos sistemáticos de análisis, búsqueda e incorporación de nuevas metodologías para la mejora; o parten de una necesidad sentida y constatada de mejorar los resultados en educación matemática. En muchos casos estas dos condiciones convergen.

Fundació Collserola, que fue la institución pionera en España en la incorporación de JUMP Math en 2014, partía con una trayectoria de innovación desde su origen; pero se lanzaba a la experiencia a pesar de que sus alumnos obtenían buenos resultados en matemáticas, y con el material del programa sin traducir del inglés en su integridad. Como explica Mireia Planas Dalmases, coordinadora de JUMP Math en la institución, hubo razones sociales y pedagógicas:

> *Proyecto validado*: este proyecto había sido validado en aquel momento (curso 2014-15) por más de 500 colegios de Canadá, Reino Unido y Estados Unidos. El año anterior también se había empezado a aplicar en un conjunto de colegios públicos de la ciudad de Barcelona.
> *Evidencia*: tras el proyecto había una evidencia de impacto.
> *Repercusión en los alumnos*: el proyecto tenía y tiene una influencia directa en la motivación y en el rendimiento de los alumnos. Termina con los tópicos como: «Los alumnos que obtienen buenos resultados en matemáticas son solo los que tienen más facilidad en ellas», «Las matemáticas son abu-

FUNDACIÓ COLLSEROLA	
Ubicación	Barcelona, Bellaterra y Sant Cugat del Vallés
Tipo	3 centros concertados
Niveles educativos	Educación Infantil, Primaria, Secundaria y Bachillerato
Tamaño	4 600 alumnos
Proceso de implantación	Curso 2014-15: comienzan con JUMP Math en 1.°, 3.° y 5.° de Primaria. Curso 2015-16 : implantan el programa en toda Primaria. Curso 2016-17: amplían JUMP Math a 1.° de ESO. Curso 2017-18: JUMP Math se implanta también en 2.° de ESO. El número aproximado de alumnos que están trabajando con JUMP Math es de 1 800 en Primaria y casi 700 en primer ciclo de Secundaria, formando un total de 2 500 alumnos. 100 docentes aplican el programa: 80 en Primaria y el resto en el primer ciclo de Secundaria.
ESCOLA VIROLAI	
Ubicación	Barcelona (Distrito Horta-Guinardó)
Tipo	Centro concertado
Niveles educativos	Educación Infantil, Primaria, Secundaria y Bachillerato
Tamaño	Más de 1 000 alumnos
Proceso de implantación	Curso 2015-16 : comienzan con JUMP Math en toda Primaria. Curso 2016-17: amplían JUMP Math a 1.° de ESO. Curso 2017-18: JUMP Math se implanta también en 2.° de ESO.
COL.LEGI LA FARGA	
Ubicación	Sant Cugat del Vallès (Barcelona)
Tipo	Centro concertado
Niveles educativos	Educación Infantil, Primaria, Secundaria y Bachillerato
Tamaño	Más de 1 500 alumnos
Proceso de implantación	Curso 2016-17 : comienzan con JUMP Math en 3.° y 4.° de Primaria como prueba piloto para valorar y observar los resultados. Curso 2017-18: JUMP Math se amplía a toda Primaria ante los resultados positivos del piloto. 600 alumnos y 24 docentes trabajan con JUMP Math.
COLEGIO DULCE CHACÓN	
Ubicación	Fuenlabrada (Madrid)
Tipo	Centro público
Niveles educativos	Educación Infantil y Primaria
Tamaño	450 alumnos
Proceso de implantación	Curso 2016-17 : comienzan con JUMP Math en todos los cursos de Primaria. Curso 2017-18: mantienen JUMP Math en toda Primaria.
COLEGIO TRABENCO-POZO	
Ubicación	Madrid (Barrio del Pozo del Tío Raimundo)
Tipo	Centro concertado de integración preferente para alumnos/as con TEA
Niveles educativos	Educación Infantil, Primaria, Secundaria y Formación Profesional Básica
Tamaño	350 alumnos
Proceso de implantación	Curso 2016-17: comienzan con una experiencia piloto en 5.° de Primaria. Curso 2017-18: continúa el grupo anterior en 6.° y comienzan también en 1.° de Primaria, con la intención después de valorar resultados y continuar ascendiendo cada año en un curso. El próximo curso implantarían, pues, en 1.° y 2.° de Primaria y 1.° de Secundaria.

Tabla 1

> rridas», «Las matemáticas no tienen nada que ver con la vida diaria y son abstractas», «Soy malo en matemáticas y nunca se me darán bien», …
> *Estímulos de las vocaciones científicas*: JUMP Math potencia las áreas de conocimiento científico (STEM: ciencias, tecnología, ingenierías y matemáticas).
> *Origen del proyecto*: el proyecto nace de intentar ayudar a alumnos con dificultades, pero la metodología empleada y los resultados obtenidos han constatado que no solo ayuda a los alumnos con dificultades, sino que produce una mejora importante en el resto de alumnos. […]
> *Razones sociales*: estamos delante de una entidad sin ánimo de lucro. JUMP Math entiende todo el proyecto como una propuesta con un gran valor social, ya que genera confianza, aumenta la autoestima de los alumnos y disminuye el fracaso escolar, a la vez que estimula las vocaciones científicas y tecnológicas. Por esta razón quiere difundir su metodología sin tener ganancias económicas. Los ingresos que generan la venta de los cuadernos de trabajo de los alumnos sirven solamente para conseguir un proyecto sostenible. Disponen de gran cantidad de material que se puede bajar de forma gratuita en su página web. Desde Fundació Collserola compartimos con JUMP Math la convicción de que el proyecto puede tener una repercusión social positiva. Fuimos uno de los primeros centros en aplicar el método en 1.° y 3.° de Primaria, y por esta razón asumimos los costes de traducción de los libros de actividades de estos cursos.

José Luis Touron, coordinador del programa en la Escola Virolai, afirma que además de estas razones, también tuvo peso en la elección

> […] la constatación de que muchos alumnos que eligen itinerarios científico-tecnológicos para sus estudios de Bachillerato llegan a esa etapa con algunas lagunas, sobre todo en operatividad. No es inusual encontrar alumnos que no tienen claras las jerarquías de las operaciones, o que no sepan como aislar la incógnita de una ecuación de manera correcta. Contrariamente a lo que se podía esperar, en la etapa de Primaria estos alumnos obtenían buenos resultados, pero queda claro que el aprendizaje no se basó en la comprensión de los fundamentos, sino en la memorización de reglas que, con el tiempo, pueden olvidar y no son capaces después de volver a deducirlas.

En el Col.legi La Farga, como afirma Andrés Bello de Haro (que identificó JUMP Math y dinamizó su implantación en el centro), buscaban una secuencia didáctica cuidadosa y bien organizada, después de diversos años trabajando en matemáticas sin libros.

> Cuando empezamos a conocer el método, lo que más nos llamó la atención fueron sus bases. Sin lugar a dudas, fue un descubrimiento encontrar un método de matemáticas que se fundamentara en los principios de la ciencia cognitiva (memoria de trabajo, importancia de la práctica repetida y espaciada, valor de la instrucción explícita…), en la evaluación continua, en las dinámicas de participación y en el saber combinar el aprendizaje individual, el aprendizaje cooperativo, la instrucción a todo el grupo… Partiendo de la evidencia y de la investigación científica por lo que se refería a los resultados.
>
> Estas fueron las razones principales que nos llevaron a apostar por su implantación. Era un método que nos permitiría un cambio de 360° en la forma de enseñar matemáticas.

La realidad socioeducativa de los dos colegios madrileños mencionados en la tabla 1, presentaba otros matices más acuciantes. En el caso del Colegio Dulce Chacón, como confirma Ana Serena que coordinó el proceso, el leitmotiv era muy contundente:

> Una de las líneas prioritarias de trabajo es el dar respuesta a la pregunta: «¿son las matemáticas el ogro de la escuela?» Pues, tanto pruebas internas como externas, reflejaban unos resultados no satisfactorios.
>
> En este marco de búsqueda de soluciones conocimos la metodología JUMP Math y tras un intenso debate, el profesorado votó mayoritariamente su implantación en todos los niveles de la etapa de Primaria, y siendo conscientes de lo que ello podía suponer.
>
> Y es así como decidimos «lanzarnos de cabeza», convencidos de que la forma de presentar, de trabajar cada concepto, cada contenido era excelente.

En el Colegio Trabenco, situado en el barrio obrero del Pozo del Tío Raimundo, con integración preferente para alumnos/as con TEA, vieron en el enfoque inclusivo de JUMP Math y en el aprendizaje cooperativo una combinación idónea para afrontar el grado alto de diversidad de sus aulas. Como afirma Carmen Castro, una de sus impulsoras:

> Nuestros planes de trabajo cooperativos son una herramienta muy versátil que permite a los/as alumnos/as de un grupo clase con distintos niveles, trabajar con tareas iguales o distintas, realizar el trabajo de forma conjunta y, además, ser necesarios unos con otros para la consecución de los objetivos planteados en la tarea.
>
> Por otro lado, elegimos Jump Math buscando una metodología distinta para trabajar en matemáticas, con la finalidad de dar respuesta a esa diversidad tan grande que tenemos en el centro.

Así, por ejemplo, uno de los puentes a construir era el paso de lo concreto (lo manipulativo) a lo abstracto (al concepto).

Nos llamó la atención el hecho de que en esta metodología todo está muy secuenciado, se va paso a paso. Los escalones que los/as alumnos/as van subiendo, a través del descubrimiento guiado, son muy pequeños y, por tanto, fáciles de alcanzar.

A la hora de abordar los problemas en matemáticas, se trabajan previamente los patrones y las destrezas que van a necesitar para la comprensión y la resolución de los mismos.

Nos ha permitido utilizar el material manipulativo que se tiene en el centro de años anteriores. Así, hemos podido aprovechar el material elaborado por el propio centro como material de ayuda.

¿Qué logros se consiguen en el proceso?

Una percepción unánime es que, si se sigue el planteamiento didáctico que se recoge en la Guía para Docentes de JUMP Math, la mejora de la compresión de todo el alumnado se evidencia en el aula. Esta mejora de la comprensión se traduce, a su vez, en un aumento de la confianza del alumnado y en el desarrollo de diferentes habilidades y estrategias del alumnado. Jose Luis Touron (Escola Virolai) apunta estos ejemplos concretos:

> Durante el primer año de implantación ya pudimos experimentar algunas satisfacciones. Un ejemplo que podemos exponer es el de la resta por descomposición (*llevando*) que siempre fue un hueso duro en 2.° y que aún en 3.° se seguía arrastrando porque no se terminaba de entender. Durante el curso los alumnos habían pasado mucho más tiempo en entender la importancia posicional de los números y se dedicaron más clases a entender la descomposición de las decenas. Llegado el momento de introducir el concepto, los alumnos ya habían trabajado lo suficiente los elementos necesarios como para poder deducir ellos cómo se podía hacer una resta, como por ejemplo 48 – 35. Dejándoles el tiempo suficiente, ellos solos concluyeron que se podía hacer y dedujeron el algoritmo de la resta por descomposición.
>
> En otro caso, esta vez en 3.°, una alumna llamada Ariadna descubrió por sí sola la propiedad conmutativa de la multiplicación y las compañeras la terminaron llamando la *propiedad de Ari*.
>
> Ejemplos como estos se dan con asiduidad, y tampoco resulta extraño que, delante de un problema propuesto por la maestra, encontremos que el grupo de una misma clase utiliza más de cinco estrategias diferentes para resolverlo. Esto evidencia que detrás hay una comprensión de lo que se está haciendo y que no se está recurriendo al método de resolución *canónico* dado por el docente. Ver un concepto desde muchos enfoques diferentes es una característica del método y es lo que les permite aprender con mayor profundidad.

Mireia Planas (Fundació Collserola) señala cómo el método proporciona herramientas que ayudan a estructurar el pensamiento matemático y evitar la mecanización en la resolución de algoritmos (que puede dar problemas a partir del segundo ciclo de Secundaria).

> Podemos afirmar, también, que cada alumno va adquiriendo una manera propia de resolver distintas situaciones. En una misma clase, y dado un problema concreto, podemos observar muchas formas distintas de afrontarlo e intentar resolverlo. A medida que los alumnos van creciendo disponen de más herramientas: dibujos, esquemas, operaciones, series, tablas, etc. Es curioso y gratificante constatar como alumnos de primer ciclo de Secundaria utilizan esquemas y dibujos para representar situaciones. Antes de utilizar JUMP Math observábamos que a partir



Figura 2. 10 claves para vencer las barreras de aprendizaje de las matemáticas

de esta edad los dibujos quedaban en segundo plano muchas veces. Estas distintas maneras de encarar un problema o situación nos permite comentarlas en clase y que los mismos alumnos las expliquen a los compañeros. Y eso no solo pasa en los problemas, también puede ocurrir en algunas operaciones. En tercero de Primaria, por ejemplo, cuando se trabaja la suma por reagrupación, al plantear una suma los alumnos escogen directamente si utilizar el algoritmo o la representación gráfica.

Ana Serena (Colegio Dulce Chacón) hace hincapié en el impacto emocional en el alumnado, concretamente en la generación de la confianza, que es uno de los lemas del programa.

No obstante queremos remarcar algo que para nosotros es clave. Los alumnos son auténticos captadores de emociones, auténticas esponjas capaces de absorber conocimientos, sentimientos y emociones, y ello conlleva que si tiene a su lado un adulto que le acompañe en su camino de construcción de aprendizajes, emocionado con su trabajo, con la metodología que utiliza..., irradiará una energía, una magia especial que hará fácil cualquier camino.

Y esto es lo que nos ha proporcionado esta metodología: una forma de hacer, de construir, de fomentar la confianza y descubrir, que permite a todos los alumnos aprender escalonadamente, con seguridad y motivados.

Como señala Carmen Castro (Colegio Trabenco) al principio la puesta en marcha generó cierta inseguridad en los docentes. Esta sensación, que han expresado sobre todo docentes que empezaron a implantar a partir de 3.º de Primaria y que afrontan pruebas por competencias, se ha ido disipando en la mayor parte de los casos con la Guía para Docentes de JUMP Math. Tal como apunta José Luis Touron (Escola Virolai):



Figura 3. JUMP Math propone retos incrementales que van de lo concreto a lo abstracto

Las Guías para Docentes de JUMP Math contienen toda la información que necesita el maestro para desarrollar la clase: cómo introducir un concepto, qué pasos dar para que el alumno pueda dar el siguiente paso conceptual, generando esos momentos en los que el alumno dice: «¡Ah!¡Ahora entiendo!»[...]

Al ser una guía paso a paso la guía del docente, que no baja de las 800 páginas por curso, representa un material formativo muy valioso para el mismo docente. Docentes que se incorporan a la enseñanza tienen condensada en la guía la experiencia de muchos años de investigación didáctica, que muchos docentes solo han adquirido después de muchos años de dedicación.

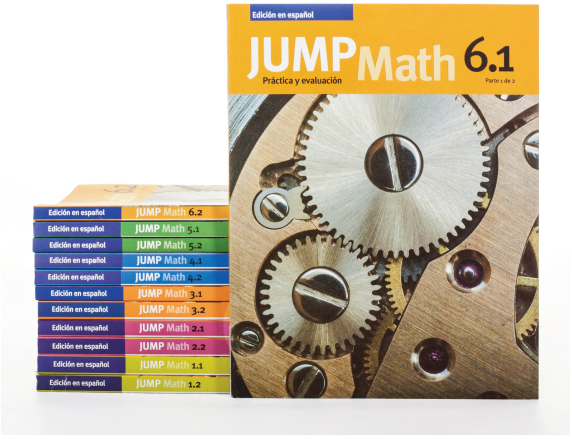


Figura 4. Los libros facilitan la práctica y la evaluación continua

Para Andrés Bello (Col.legi La Farga), la forma de enseñar matemáticas con JUMP Math ha generado un cambio considerable y positivo en la experiencia de aula.

En primer lugar, supone un cambio radical en la forma de enseñar matemáticas. Cada clase está diseñada de forma cuidadosa, paso a paso, y requiere mucha implicación, tanto de los alumnos como del profesorado. En cada clase se combinan ratos de instrucción a todo el grupo, de aprendizaje cooperativo, de juegos matemáticos, de trabajo individual... Esto hace que cada clase sea diferente y las matemáticas dejen de ser la típica asignatura en la que simplemente se resuelven operaciones de cálculo y problemas.

Un factor sobre el que el programa incide de forma especial es el de la motivación. Busca conseguir que todos los alumnos tomen conciencia de que son capaces de entender y dominar las matemáticas. Es un método que *rompe la jerarquía* en el aula, ya que todos pueden obtener éxito.

¿Qué desafíos quedan pendientes?

Sin duda, el desafío que señalan de forma unánime todos los centros españoles a la hora de aplicar JUMP Math es la que resume Andrés Bello (Col.legi La Farga):

> Las principales dificultades en el proceso de implantación están relacionadas con la cantidad de material que JUMP Math ofrece. El programa te da muchísimos más recursos de los que podrías agotar en el aula. Esto provoca que sea importante seleccionar, saber por dónde van los alumnos, dónde conviene pararse más y dónde menos... Hay profesores a los que esto les cuesta.

Este reto, como señalan varios de los autores, ha producido preocupación por no abarcar toda la programación, o por los procesos de ralentización del ritmo de los grupos clase, al intentar hacer todos los contenidos y ejercicios.

Para Ana Serena (Colegio Dulce Chacón) las dificultades eran sobre todo las siguientes:

> La primera, la adaptación al currículo de la Comunidad de Madrid; la segunda..., esa minoría no convencida al cien por cien de un cambio radical en toda la etapa de Primaria; la tercera, algunos padres acostumbrados a otras formas de trabajar («como siempre se había hecho»).

Sin duda, la complicidad de toda la comunidad educativa es uno de los factores cruciales para convertir la innovación en un proyecto de centro sostenible. Para Fundació Collserola o la Escola Virolai, que han abordado desde el principio una implementación transversal y completa, la coordinación del equipo docente ha sido una clave. Así lo afirma José Luis Touron, de la Escola Virolai:

> Creemos que la ventaja de haberlo aplicado en todos los cursos de Primaria de una vez, ha permitido al profesorado hacer equipo, crear complicidades y sentirse todos en el mismo barco. Si se comienza aplicándolo en un curso y el maestro no tiene una buena experiencia, podría peligrar su continuidad. También pensamos que lo mejor, aunque no es excluyente, es que la aplicación del método sea una política de centro y no que se aplique en cursos aislados como iniciativa individual del profesor. Para conseguir esto, lo ideal es que haya un acuerdo de consenso dentro del claustro.

A esta cohesión hay que añadir la necesaria implicación individual de cada docente. En palabras de Mireia Planas de la Fundació Collserola

> El proceso de implementación ha supuesto un cambio de mentalidad en la enseñanza de las matemáticas y ha conllevado un esfuerzo de cohesión y coordinación entre todo el equipo docente. A la vez, ha supuesto un esfuerzo individual muy importante para cada docente, con el estudio detallado de las guías docentes (donde se detallan los aspectos más importantes de cada micro-lección, lo que queremos trabajar y la forma de hacerlo), la selección de los ejercicios de las pizarras y del libro a realizar (no hace falta realizarlos todos y tenemos que escoger los que más significativos o relevantes son) y la búsqueda continua de un ritmo adecuado en las clases (regulando la participación individual en clase o explicitando el tiempo para realizar algunos ejercicios) para mantener la motivación del alumnado.

En muchos centros cabe todavía reforzar la comunicación a las familias, para que comprendan y acompañen el método y el ritmo de aprendizaje que propone JUMP Math. Para las familias y algunos docentes, al principio este ritmo es percibido como lento, como indica José Luis Touron (Escola Virolai):

> Un aspecto que a veces produce cierta desazón en los docentes es que sus alumnos avanzan más lento de lo que lo hacían antes, y llegar a los resultados les lleva más tiempo. Esto es normal ya que el método no alienta el aprendizaje de las tablas de multiplicar memorizándolas, sino a través de patrones y regularidades que, con el uso continuado, se terminan interiorizando. El uso de los dedos para contar tampoco está desalentado. El método basa su eficacia en el aprendizaje profundo de los conceptos y no en la rapidez, y eso a veces se puede interpretar como una debilidad del método porque los resultados no se ven tan rápido.

Esta percepción tiene relación directa con la preocupación que señala Andrés Bello (Col.legi La Farga):

> Otra dificultad es la atención a los alumnos más talentosos. El programa es muy profundo, y permite llegar a un dominio a fondo de las matemáticas, pero la atención en el día a día de los alumnos de más nivel es una de las cuestiones que exige preparación y que es necesario tener en cuenta, para que no se *aburran* en el trabajo diario.

Para José Luis Touron (Escola Virolai):

> Otro aspecto que produce temor en los maestros cuando comienzan a aplicar el método, son las dudas en la capacidad del mismo en preparar a los alumnos para superar las pruebas externas de competencias básicas. Lo cierto es que la realidad nos dice que los alumnos demuestran tener recursos

para poder superarlas con éxito. De todos modos, tenemos que esperar a tener más participaciones para poder extraer datos significativos.

La fase aún inicial de implantación que JUMP Math está teniendo en nuestro contexto educativo, deja tareas o mejoras por desarrollar, tanto para los equipos docentes de los centros, como para el equipo de formadores JUMP Math:

— ¿Cómo proceder de forma eficiente a la corrección de ejercicios en el aula para asegurar la evaluación continua? Teniendo en cuenta el esquema temporal y organizativo de nuestro marco educativo, es un reto que se plantea en centros como Fundació Collserola.
— ¿Cómo extender o vincular JUMP Math a los cursos del segundo ciclo de ESO? Recordemos que el programa solo abarca hasta 2.º ESO.
— La incorporación de aplicaciones digitales adaptadas al método.
— La integración pautada (para docentes no expertos) de JUMP Math con dinámicas de aula y enfoques ya instaurados en los centros educativos, como el aprendizaje cooperativo o el aprendizaje basado en proyectos. Por ejemplo, como señala Jose Luis Touron, incorporando actividades más *competenciales* en la mejora del programa.

Por supuesto, a estos desafíos o tareas pendientes, cabe aún la evaluación de impacto que, tal como se ha realizado en EE.UU. y Canadá, con muestras aleatorias, permita evidencias de éxito consistentes.

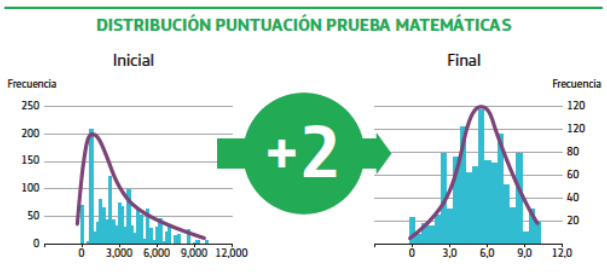


Figura 5. Informe de impacto sobre JUMP Math realizado por el CRECIM, centro de investigación STEM de la UAB

Consideraciones finales

Ante la experiencia de implantación de JUMP Math en España, es pertinente señalar:

1. La acogida de JUMP Math en España evidencia que hay una demanda y percepción positiva de la innovación en educación matemática. Pero que las mismas comunidades educativas (docentes y familias) valoran que se traten de iniciativas probadas y fundamentadas, por lo que hay que hacer un esfuerzo en evaluar debidamente el impacto de estas innovaciones.
2. El impacto de estas innovaciones será el esperado, siempre y cuando estas se conciban e implanten como proyecto de centro. Esta premisa conlleva una adecuada formación y coordinación del equipo docente, que refuerce la implicación de cada docente, pero no se base solo en la voluntariedad de cada individuo.
3. El proyecto de centro en educación matemática debe aspirar a un itinerario cohesionado de aprendizaje para todas las etapas educativas. Este planteamiento no solo exige una metodología como JUMP Math, sino un trabajo coordinado entre los docentes de las diferentes etapas a la hora de atender la transición de cada grupo clase.
4. Es necesario replantear en el marco legislativo de cada comunidad autónoma, así como en el planteamiento de cada centro, las horas de dedicación a matemáticas. Tanto para el caso de JUMP Math, como para otras innovaciones internacionales que están respondiendo al éxito educativo en matemáticas, es necesario ampliar la dedicación de horas que en varios centros resulta insuficiente (con 3 horas semanales a efectos reales).
5. Para apoyar los procesos de innovación, los docentes y los equipos directivos valoran el apoyo de otros centros educativos que ya han implantado. Hay que fomentar, como en el caso de JUMP Math, la creación de redes de aprendizaje y trabajo colaborativo entre escuelas. Este punto es crucial para la investigación aplicada del propio programa y, por ende, para su mejora continua.



Figura 6. La comunidad de 1 400 docentes que implantan JUMP Math comparte experiencias y recursos

Para concluir, podríamos preguntarnos si los logros que se consiguen en los procesos de innovación, compensan el esfuerzo de los centros, así como los desafíos que hay que afrontar. Tal vez la respuesta deba cuestionar a cada centro y docente sobre el sentido que le confiere a la propia formación matemática de su alumnado, tal como enuncia José Luis Touron (Escola Virolai):

> No dudo en asegurar que JUMP Math es una de las mejores noticias que ha tenido la enseñanza de las matemáticas en los últimos años. Esperamos que cada vez más escuelas se vayan incorporando a su utilización y que abandonemos de una vez por todas el fracaso escolar, dando paso a la formación de ciudadanos preparados para enfrentar los grandes retos que se le presentan en una sociedad altamente tecnológica.

Referencias bibliográficas

CRECIM (2015), *Evaluación de impacto.* Laboratorios educativos de JUMP Math. Curso 2014/15, Fundación Telefónica, Madrid.

JUMP Math Canadá, Research Reports about JUMP Math. <https://www.jumpmath.org/jump/en/research_reports>.

Mighton, J. (2003), *The Myth of Ability: Nurturing Mathematical Talent in Every Child*, Anansi, Toronto.

Andrés Bello de Haro
Col.legi La Farga
<abello@jumpmath.es>

Carmen Castro Senra
Colegio Trabenco
<ccastro@jumpmath.es>

Santi González González
<sgonzalez@jumpmath.es>

Mireia Planas Dalmases
Fundació Collserola
<mplanas@jumpmath.es>

Carmen Salcedo Vereda
<csalcedo@upsocial.org>

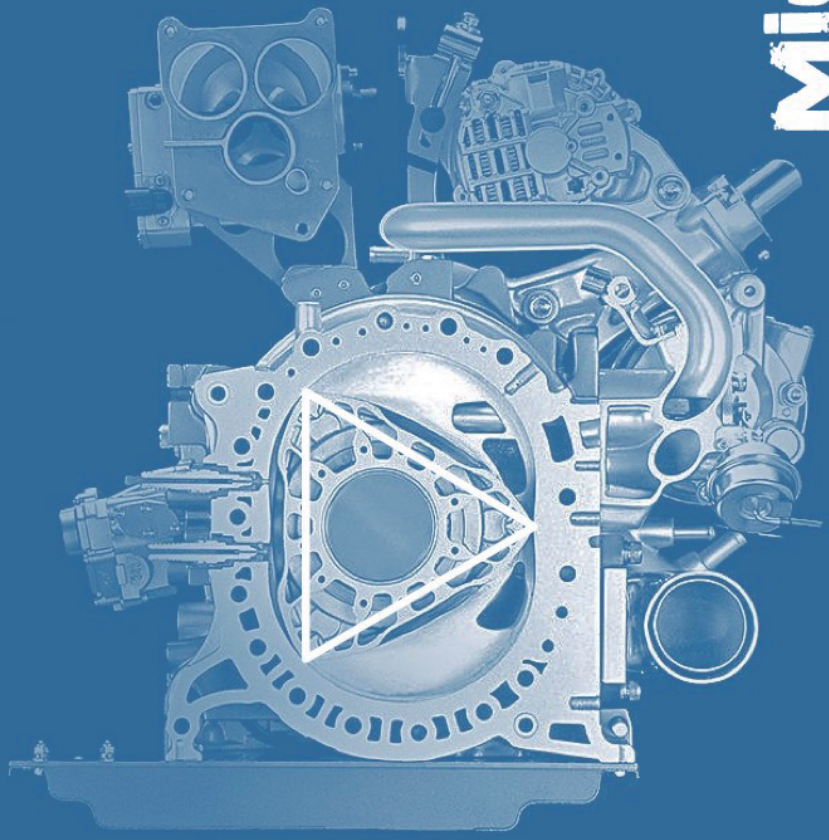
Ana Serena Murillo
Colegio Dulce Chacón
<aserena@jumpmath.es>

José Luis Touron Rivadulla
Escola Virolai
<ltouron@jumpmath.es>

X Escuela de Educación Matemática

Miguel de Guzmán

federación española de sociedades de profesores de matemáticas fespm
real sociedad matemática española rsme



2018

11, 12 Y 13 DE JULIO

Sección de matemáticas
Facultad de ciencias
Universidad de La Laguna

20 horas 2 créditos
inscripción hasta el 20 de junio
www.fespm.es

la resolución de problemas como parte esencial del quehacer matemático

suma+ 87
Artículos
Marzo 2018
pp. 21-29

Pero... ¿quién encarceló a Sally?

Raúl Ibáñez Torres

La probabilidad y la estadística son potentes herramientas matemáticas con importantes aplicaciones en nuestra vida, pero cuya mala utilización, así como una mala interpretación de su significado, puede tener graves consecuencias. Así mismo, con frecuencia son utilizadas para manipularnos y modificar nuestras opiniones.

Con el objetivo de ilustrar las anteriores afirmaciones, en este artículo se van a analizar algunos ejemplos reales, y en algunos casos dramáticos. Falsos positivos en medicina, inocentes que acaban en prisión, estudios científicos paradójicos, manipulación de informaciones periodísticas o el estudio estadístico de la vacuna de la polio.

Palabras clave: Estadística, Probabilidad condicional, Falso positivo, Paradoja de Simpson, Ensayo clínico.

But... who put Sally in prison?

Probability and Statistics are powerful mathematical tolos with important implications in daily life, but misuse of them has negative consequences. Moreover, usually they are used to manipulate and to modify our opinions.

In order to illustrate this, we are going to analyze son real examples. False positives in medicine, innocents who end up in prison, paradoxical scientific reseraches, manipulation of information in nespapers, or the medical experiment of the Salk vaccine for Polio.

Keywords: Statistics, Conditional probability, False positive, Simpson's paradox, Medical experiment .

La probabilidad y la estadística son potentes herramientas matemáticas con importantes aplicaciones en nuestra vida, pero cuya mala utilización, así como una mala interpretación de su significado, puede tener graves consecuencias. Así mismo, con frecuencia son utilizadas para manipularnos y modificar nuestras opiniones.

Con el objetivo de ilustrar las anteriores afirmaciones, en este artículo, que recoge la conferencia *Pero… ¿quién encarceló a Sally? Las matemáticas en el banquillo de los acusados*, impartida en el CIBEM-Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (Madrid, 2017), se van a analizar algunos ejemplos reales, y en algunos casos dramáticos. Falsos positivos en medicina, inocentes que acaban en prisión, estudios científicos paradójicos, manipulación de informaciones periodísticas o el estudio estadístico de la vacuna de la polio.

Falsos positivos en medicina

Para explicar qué son los falsos positivos y la importancia de los mismos, no vamos a mostrar exactamente un caso real, sino un ejemplo clásico de la divulgación matemática extraído del exce-

Artículo solicitado por *Suma* en julio de 2017 y aceptado en enero de 2018

lente libro *El hombre anumérico* (Tusquets, 1990) del matemático y divulgador estadounidense John Allen Paulos. Se plantea la siguiente cuestión:

> Supongamos que existe una prueba médica para detectar si una persona padece una cierta enfermedad (por ejemplo, cáncer o SIDA), cuya fiabilidad es del 98 %, y que dicha enfermedad la sufren 1 de cada 200 personas. Un día nos hacemos esta prueba y nos da positiva... ¿hasta qué punto nos debemos de preocupar? ¿qué probabilidad existe de que tengamos dicha enfermedad?

El problema es ciertamente importante, puesto que de la comprensión del mismo dependen tanto aspectos relacionados con la comunicación entre el equipo médico y el paciente, el primero debe trasmitir al paciente una gravedad en consonancia con la probabilidad mencionada, como aspectos médicos, es decir, la gestión médica de la situación.

En la literatura científica existen estudios en los que se intenta ver el grado de comprensión de la anterior cuestión por parte del personal médico. Por ejemplo, en el artículo *Interpretation by physicians of clinical laboratory results*, sus autores preguntaron a un grupo de 60 personas, entre estudiantes y profesores de la Escuela de Medicina de la Universidad de Harvard, una cuestión similar a la planteada y la mayoría de las personas pensaba que la respuesta era, más o menos, la fiabilidad de la prueba, en el caso anterior, del 98 %. Algo similar comenta el sicólogo alemán Gerd Gigerenzer en su libro *Calculated risks: how to know when numbers deceive you*.



Figura 1. Fotografía de Tom Mallinson.
Fuente: Wikimedia Commons

Este es un ejemplo de lo que se conoce como probabilidad condicionada. No nos estamos preguntando cuál es la probabilidad de que una persona cualquiera tenga dicha enfermedad, sino la probabilidad de que esté enferma sabiendo que ha dado positivo en el análisis (esta es la condición). A continuación, calcularemos dicha probabilidad, pero sin adentrarnos aquí en la teoría de la probabilidad condicionada, ni en el teorema de Bayes que permite calcularla, sino que realizaremos un razonamiento más intuitivo.

Revisemos la información del problema. El primer dato es el número de personas que padecen dicha enfermedad, 1 de cada 200 personas. Cada enfermedad tiene un porcentaje específico de personas que la sufren. Por ejemplo, se estima que en España aproximadamente 1 de cada 300 personas tiene la enfermedad del SIDA. Y, en Europa, se suele considerar que las «enfermedades raras» son aquellas que hay menos de 1 enfermo por cada 2 000 habitantes.

El segundo dato es la fiabilidad de la prueba. Que esta sea del 98 %, es decir, que haya una probabilidad del 98 % de que «acierte» el análisis, significa que si una persona padece la enfermedad tiene una probabilidad del 98 % de que su prueba dé positiva y un 2 % de que dé negativa, a pesar de que realmente está enferma. Y, al contrario, si está sana, tiene una probabilidad del 2 % de que el test sea positivo y un 98 % de que dé negativo.

Calculemos ahora la probabilidad condicionada del problema. Imaginemos que se realizan 10 000 pruebas médicas a otras tantas personas. Dentro de ese grupo, como la enfermedad la padecen 1 de cada 200 personas, habrá unas 50 personas que padezcan la enfermedad y 9 950 sanas.

Ahora, si tenemos en cuenta la fiabilidad de la prueba, que es del 98 %, entonces:

a) De las 50 personas que padecen la enfermedad, la prueba les dará positiva a unas 49 (que es el 98 % de 50) y dará negativa a 1 (el 2 %).

b) De las 9 950 personas sanas, la prueba les dará positiva a unas 199 (que son el 2 % de 9 950), al resto les dará negativa (el 98 %).

	Enferma	*Sana*	*Total*
Prueba +	49	199	248
Prueba –	1	9 751	9 752
Total	0	9 950	10 000

Tabla 1

En conclusión, dentro de ese grupo de 10 000 personas, habrá alrededor de $49 + 199 = 248$ pruebas de detección de la enfermedad que han dado positivas. La mayoría de ellas, 199, serán de falsos positivos —la prueba es positiva, pero la persona no padece la enfermedad— y solo 49 serán positivos reales. Luego:

¡¡La probabilidad de tener realmente la enfermedad, habiendo dado positivo el análisis, es de 49/248, aproximadamente una probabilidad del 20 %!!

Por tanto, la probabilidad de que sea un falso positivo es del 80 %.

Y eso para una enfermedad que tiene una tasa alta de afectados, un enfermo por cada doscientas personas, pero si es una enfermedad con una incidencia menor ese porcentaje baja aún más. Por ejemplo, para una enfermedad tal que hay un caso por cada mil habitantes, si el test sigue teniendo una fiabilidad del 98 %, entonces habiendo dado positivo, solamente existe una probabilidad del 4 % de estar enfermo. Luego un 96 % de que sea un falso positivo.

Los falsos positivos no solamente afectan a los análisis médicos, sino que aparecen en diferentes situaciones de nuestra vida cotidiana, que van desde los tests de embarazo o los análisis de drogas, hasta los experimentos científicos.

El caso de Sally Clark, cuando el mal uso de la estadística te lleva a la cárcel

El siguiente es un ejemplo dramático de cómo el mal uso de la probabilidad y la estadística, en particular, en un juicio, puede tener muy graves consecuencias, como que una persona inocente acabe en la cárcel.

En diciembre de 1996, la abogada británica Sally Clark, y su marido Steve, perdieron a su primer hijo cuando este tenía once semanas de vida. Se declaró que la muerte de su hijo se debía al «síndrome de la muerte súbita del lactante» (SMSL). El diagnóstico de muerte por SMSL se hace cuando se produce una muerte repentina e inesperada de un bebé menor de un año de edad y en la autopsia no se encuentra ninguna causa que explique la misma.

Al año siguiente, el matrimonio Clark volvió a tener un hijo. Este murió ocho semanas después de su nacimiento, en enero de 1998, y de nuevo se declaró que la muerte era debida al SMSL. En ambos casos, la madre se encontraba sola en casa y los cuerpos de los niños presentaban traumatismos, que podían explicarse como consecuencia del intento de reanimarles por parte de la madre. Un mes más tarde, Sally Clark fue detenida y acusada de asfixiar a sus dos hijos.

Durante el juicio, la acusación llamó a declarar a un profesor de pediatría de la Universidad de Leeds, sir Roy Meadow. Este declaró que «la probabilidad de que un bebé muera del SMSL es de 1 entre 8 543, luego si multiplicas esta por sí misma, obtienes que la probabilidad de que dos bebés mueran del SMSL es de 1 entre 73 millones», y que una doble muerte por SMSL no se producirá más que una vez cada cien años. A lo que el fiscal añadió que «esta [la probabilidad de dos muertes por SMSL] es extremadamente pequeña, lo que hace muy improbable que los bebés murieran de forma natural e implica poderosamente el asesinato».

La fiscalía no presentó más evidencias de la culpabilidad de Sally Clark que el argumento estadístico anterior, de hecho, no había ninguna evidencia de que fuese una mala madre, que hubiese desatendido a sus hijos o que fuera violenta. Fue declarada culpable del asesinato de sus dos hijos e ingresó en prisión en noviembre de 1999.

Sin embargo, varios fueron los fallos estadísticos en el argumento del pediatra y la fiscalía.

1. Para calcular esa probabilidad de «1 entre 73 millones» de que dos bebés murieran por el síndrome de la muerte súbita del lactante, el pro-

fesor Meadow multiplicó la probabilidad de que un bebé muriese de ese síndrome, 1 entre 8 543, por sí misma. Pero eso implica que dos muertes por SMSL en una misma familia son sucesos independientes (como tirar dos veces una moneda al aire), sin embargo, pueden existir factores genéticos y medioambientales que predispongan a algunas familias a que se produzcan este tipo de muertes, por lo que un segundo caso de SMSL sería en tales familias más probable que en otras familias.

El matemático británico Ray Hill, utilizando datos del CESDI, The Confidential Enquiry for Stillbirths and Deaths in Infancy, del año 2000, llegó a la conclusión de que dada una primera muerte por SMSL en una familia, la probabilidad de una segunda muerte se incrementaba entre 10 y 22 veces.

El segundo error tenía que ver con el dato ofrecido sobre la incidencia del síndrome de la muerte súbita del lactante. El profesor de pediatría tuvo en cuenta el dato genérico, que la probabilidad de que un bebé muera de SMSL es de 1 entre 8 543. Sin embargo, los niños tienen más probabilidades de morir por SMSL que las niñas, de hecho, esa probabilidad es de 1 entre 1 300, y precisamente los Clark tuvieron dos niños.

Por lo tanto, podríamos rehacer las cuentas del profesor Meadow. La probabilidad de que el primer hijo muriera de muerte súbita era de 1 entre 1 300 (1/1 300), mientras que para el segundo, atendiendo al análisis del profesor Hill, estaría en una horquilla de 1 entre 60 y 1 entre 130. En conclusión, la probabilidad de que dos niños (bebés varones) hubiesen muerto en una misma familia de SMSL podría ser tan pequeña como $(1/1\,300) \times (1/130) = (1/169\,000)$, es decir, 1 entre 169 000 (que es el 0,0006 %).

Esa probabilidad sigue siendo muy pequeña, pero si tenemos en cuenta la gran cantidad de bebés que nacen al año en Gran Bretaña, más de 700 000 bebés, se van a producir más casos de familias con dos muertes por SMSL, como así ocurrió. Algunas de ellas terminaron en la cárcel, como Donna Anthony —encarcelada en 1998 por el asesinato de sus dos bebés, un niño y una niña— o Angela Cannings —encarcelada en 2002 por el asesinato de sus dos hijos—, en cuyos juicios también intervino el pediatra sir Roy Meadow.

Más aún, el fiscal y el jurado interpretaron el valor de la probabilidad de que dos bebés de una misma familia murieran por SMSL como la probabilidad de que Sally Clark fuese inocente. Como esa probabilidad era muy pequeña, era bastante improbable que esa mujer fuese inocente. Este razonamiento es similar a considerar que una persona que ha acertado la combinación ganadora de la lotería primitiva ha hecho necesariamente trampas, puesto que la probabilidad de que toque el premio gordo es muy pequeña, del 0,000007 %.

Sin embargo, no era la probabilidad de que dos bebés de una familia murieran por el síndrome de la muerte súbita del lactante lo que importaba en el juicio, sino la probabilidad de que si dos bebés (en este caso niños) de una misma familia mueren, lo hagan por SMSL.

¿Cómo saber si esa probabilidad es grande o pequeña? Solo había dos posibles causas para explicar las muertes de los dos niños en esa familia, SMSL o asesinato. Por lo tanto, lo que necesitaba el jurado era comparar la probabilidad de que los dos niños murieran de muerte súbita con la probabilidad de que murieran asesinados. El matemático Ray Hill estimó que era 9 veces

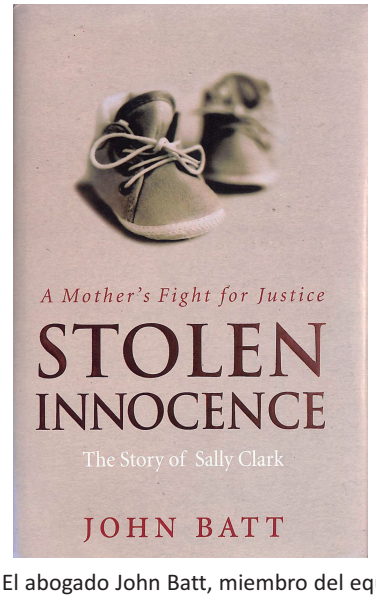


Figura 2. El abogado John Batt, miembro del equipo legal de Sally Clark, escribió el libro *Stolen Innocence* (Ebury Press, 2005), contando la historia de Sally Clark

más probable que dos niños, de una misma familia, fuesen víctimas del SMSL, que víctimas de asesinato.

Los Clark apelaron la sentencia, para lo cual contrataron a dos profesores de estadística, puesto que fue el mal uso de la misma lo que llevó a Sally a la cárcel. Sin embargo, perdieron la apelación. A pesar del revés, continuaron luchando. Entonces, descubrieron que el patólogo que había trabajado para la acusación había ocultado que su segundo hijo había sufrido una infección bacteriana en el momento de su muerte, y que podría ser la causa de la misma, por lo que habría sido una muerte natural. En consecuencia, se anuló su condena y, tras dos años y medio en prisión, Sally Clark fue puesta en libertad. Por desgracia, murió en 2007 por una intoxicación etílica.

A raíz de su caso, se revisaron los casos de otras mujeres en situaciones similares, como por ejemplo las dos citadas anteriormente, Donna Anthony y Angela Cannings, quienes fueron puestas en libertad.

La solución a un problema como este, que es la misma que para el caso de los falsos positivos, pasa por que las personas implicadas en estos juicios, abogados y jueces, tengan un mayor conocimiento de estos temas, pero también, y esto es esencial, por la contratación, siempre que sea necesario, de personas expertas en este tipo de temas, con formación matemática, y más concretamente, con formación en estadística y probabilidad.

La paradoja de Simpson

La conocida como paradoja de Simpson es otro ejemplo de la importancia que tiene el conocimiento de las herramientas matemáticas y la comprensión de la información que emana de un estudio estadístico. Esta paradoja pone de manifiesto que es posible que se produzca un comportamiento diferente en la información estadística de dos, o más grupos, cuando los datos de estos se combinan, o el revés, cuando los datos de la población de estudio se fragmentan en grupos. Esta situación se suele presentar en estudios estadísticos sociales y médicos, por lo que una lectura errónea de los resultados puede tener consecuencias muy negativas, lo cual obliga a un análisis detallado de la situación cuando esta se produce.

Mostremos un ejemplo. Imaginemos que el mismo día se publican en dos periódicos los siguientes titulares, «El parque automovilístico de Bilbao es más nuevo que el de Madrid» en *El periódico de Bilbao* y «El parque automovilístico de Bilbao es más viejo que el de Madrid», en el *Diario de Madrid*.

Si vamos al interior de *El periódico de Bilbao* para leer la noticia correspondiente, se cuenta que se ha realizado un estudio de la antigüedad del parque automovilístico de Bilbao y Madrid, dividiendo estas ciudades en dos zonas, los barrios del centro de la ciudad y el resto de barrios. El resultado del estudio se puede ver en la tabla 2.

Es decir, en el centro de Bilbao hay más coches nuevos (67 %) que en el centro de Madrid (64 %). Mientras que hay más coches nuevos en el resto de barrios de Bilbao (45 %), que en el resto de barrios de Madrid (42 %) (tabla 3).

Sin embargo, cuando vamos a la correspondiente noticia en el *Diario de Madrid*, se muestra la siguiente tabla con la antigüedad del parque automovilístico de ambas ciudades, pero en conjunto, sin separar el estudio por barrios (tabla 4).

	Centro Bilbao	*Centro Madrid*
Coches nuevos	67 %	64 %
Coches viejos	33 %	36 %

Tabla 2

	Resto B. Bilbao	*Resto B. Madrid*
Coches nuevos	45 %	42 %
Coches viejos	55 %	58 %

Tabla 3

	Bilbao	*Madrid*
Coches nuevos	55 %	57 %
Coches viejos	45 %	43 %

Tabla 4

Según los datos de este periódico, el parque automovilístico de Madrid es más nuevo que el de Bilbao. Esto nos puede llevar a pensar que una de las dos informaciones, o las dos, son falsas, puesto que llevan a conclusiones contradictorias. Sin embargo, veamos que esto no es así.

Miremos de nuevo a la información del estudio, pero no en porcentajes sino en número de coches (por supuesto, esta información es ficticia ya que me he inventado los números para el ejemplo). Expresaremos las cantidades en miles de coches (tablas 5 y 6).

Sumando las cantidades, se obtienen los resultados globales (tabla 7).

Como vemos, da la impresión de que la información por partes y junta es contradictoria, a este fenómeno es a lo que se llama la «paradoja de Simpson».

La paradoja de Simpson fue mencionada a principios del siglo XX por el estadístico británico George Udny Yule (1871-1951), por lo que se le suele llamar también «efecto Yule-Simpson», pero suele tomar su nombre del también estadístico británico Edward H. Simpson (1922), quien lo describió en detalle en 1951 en relación con ciertas pruebas médicas. Simpson fue uno de los matemáticos que estuvo trabajando como criptoanalista en los barracones de Bletchley Park, tratando de descifrar los mensajes que los alemanes mandaban codificados con la máquina Enigma.

	Centro Bilbao	*Centro Madrid*
Coches nuevos	60 000 (67 %)	90 000 (64 %)
Coches viejos	30 000 (33 %)	50 000 (36 %)

Tabla 5

	Resto B. Bilbao	*Resto B. Madrid*
Coches nuevos	50 000 (45 %)	30 000 (42 %)
Coches viejos	60 000 (55 %)	40 000 (58 %)

Tabla 6

	Bilbao	*Madrid*
Coches nuevos	110 000 (55 %)	120 000 (57 %)
Coches viejos	90 000 (45 %)	90 000 (43 %)

Tabla 7

Veamos un caso real relacionado con pruebas médicas, publicado en el artículo «Comparison of treatment of renal calculi by open surgery, percutaneous nephrolithotomy, and extracorporeal shockwave lithotripsy» (C. R. Charig, D. R. Webb, S. R. Payne, J. E. Wickham, *Br. Med. J. — Clin. Res. Ed.*—, 1986). En el estudio se trataba de comparar el comportamiento de dos tratamientos, que llamaremos A y B, para las piedras renales y se separaban los casos leves (pequeñas piedras) de los casos más graves (piedras grandes). Los resultados se pueden ver en la tabla 8.

Vemos que cuando separamos el estudio por grupos, dependiendo de su gravedad (piedras pequeñas y piedras grandes) el tratamiento más efectivo es el tratamiento A, mientras que cuando miramos los resultados con todos los casos (leves y graves) el tratamiento más efectivo es el B.

Curiosamente la razón matemática de esta aparente paradoja (que no es tal) es muy sencilla, tiene un origen aritmético. Cuando tomamos una proporción matemática de la forma a/b (como cualquiera de los porcentajes de los que estamos comentando) y otra proporción c/d, la suma de estas ($a/b + c/d$) no es igual a $(a+c)/(b+d)$, como bien estudiamos en la escuela, y por eso se produce la paradoja.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\neq\frac{a+c}{b+d}$$

Pero analicemos un poco más en profundidad el motivo por el que se produce la paradoja en este caso. Miremos de nuevo al esquema de los datos y porcentajes. Si nos fijamos bien descubrimos que la paradoja de Simpson se produce por dos hechos significativos:

a) Los tamaños de los grupos son muy diferentes. Los médicos han recomendado más el tratamiento B para los casos leves de piedras pequeñas (270 frente a 87), mien-

	Tratamiento A	*Tratamiento B*
Piedras pequeñas	93 % (81/87) [grupo 1]	87 % (234/270) [grupo 2]
Piedras grandes	73 % (192/263) [grupo 3]	69 % (55/80) [grupo 4]
Total	78 % (273/350)	83 % (289/350)

Tabla 8

tras que han recomendado más el tratamiento A para los casos graves de piedras grandes (263 frente a 80), por lo que el resultado total está dominado por los grupos grandes (en el esquema el grupo 2 —piedras pequeñas y tratamiento B— y el grupo 3 —piedras grandes y tratamiento A—-), y menos por los menos numerosos.

b) En el estudio anterior el éxito porcentual total que se observa está más basado en la gravedad de los casos, que en el tratamiento seguido. El porcentaje de éxitos en los pacientes graves (con piedras grandes), utilizando el tratamiento A (o el B, que es peor aún), es menor que el éxito en los casos leves, independientemente de que sean tratados con A o B.

La vacuna de Salk para la poliomielitis

Vamos a terminar este artículo con un ejemplo más positivo, el ensayo clínico realizado en 1954 para analizar la efectividad de la vacuna de Salk para la poliomielitis, y que ha sido uno de los mayores de la historia, el mayor hasta los años 80, en el cual participaron más de un millón de niños. Este estudio clínico nos sirve de ejemplo para ver qué cuestiones deben ser tenidas en cuenta a la hora de realizar una estadística médica para estudiar la efectividad de un medicamento o tratamiento, y que, en muchas ocasiones, demasiadas, no se tienen.

La poliomielitis, también conocida como polio, es una enfermedad infecciosa, producida por el virus *poliovirus*, y que afecta al sistema nervioso. No es una enfermedad común, como pueda ser el caso de la gripe, pero afecta principalmente a los niños (con edades entre 4 y 14 años) y aunque en la mayoría de los casos es asintomática, cuando afecta al sistema nervioso suele tener consecuencias muy graves, puede producir la muerte, pero también parálisis, atrofia muscular, deformidades o problemas del sistema respiratorio, que pueden llevar a terminar con un pulmón artificial para poder vivir. Además, el comportamiento de la enfermedad, o del virus que la genera, es muy variable, algunos años su incidencia es mayor que otros, o afecta a unas zonas y a otras no, lo cual dificulta en gran medida su análisis.

El presidente norteamericano Franklin D. Roosevelt (1882-1945) había sufrido esta enfermedad cuando era un joven político, lo cual le ocasionó una parálisis. Fueron los esfuerzos de Roosevelt y su socio, el abogado Basil O'Connor, por combatir esta enfermedad los que dieron las condiciones necesarias para que fuera posible uno de los mayores estudios clínicos de la historia, el estudio estadístico de la vacuna de Salk contra la polio, con más de un millón de niños.

En los años 30, del siglo XX, se habían desarrollado algunas vacunas contra la polio, con diferentes antígenos, e incluso dos de ellas se empezaron a suministrar durante un tiempo. Sin embargo, las vacunas no resultaron efectivas, y al menos una de ellas fue la causante de algunos casos de parálisis, por lo que se dejaron de utilizar. Este fracaso pesó en el ánimo de los investigadores, que suspendieron su trabajo durante algunos años, hasta que en la década de los 40, se retomaron las investigaciones, desarrollando vacunas con virus vivos de cepas más inofensivas y también con virus neutralizados.

El virólogo Jonas Edward Salk (1914-1995) trabajó con el virus tratado con formaldehído, es decir, se eliminó su capacidad infecciosa al acabar con él, pero se mantenía su capacidad antigénica, que desencadenaba la creación de anticuerpos en el individuo vacunado. Después de un gran trabajo científico llegó la hora de evaluar su efectividad, y sus potenciales efectos adversos. Se probó primero con unos pocos niños, comprobándose que había sido efectiva con ellos. Sin embargo, esos casos no eran científicamente concluyentes, solo la hacían una buena candidata a ser considerada una vacuna contra la poliomielitis. Llegaba entonces el momento de analizar su efectividad real con un ensayo clínico a gran escala.

Antes de empezar con el ensayo clínico en sí mismo, merece la pena reflexionar un poco sobre qué tipo de ensayo se tenía que diseñar para obtener la mejor información posible. Una posibilidad podía ser realizar una vacunación de todos

los niños (en este caso, de Estados Unidos) a través de las escuelas y ver cuál era el resultado de la misma, ver si de un año a otro había habido una variación significativa en el caso de casos. Este método de actuación, que se había llevado a cabo con otras vacunas, tenía varios problemas de tipo estadístico (además de alguna consideración médica).

a) *Variabilidad en el tiempo de la incidencia del virus*. El virus era muy irregular y la incidencia de un año a otro variaba mucho, con lo cual esa disminución en el número de casos podía no ser fruto de la vacunación, sino de la irregularidad de la enfermedad. Así, si nos fijamos en la gráfica del número de casos de polio en EE.UU. desde 1930 hasta 1956, veremos que es muy variable. De hecho, entre el año 1931 y 1932 disminuyó enormemente el número de casos, lo cual habría generado, de haberse realizado la prueba en 1931, un falso éxito. Al igual que en los años 1935, 1937, 1944, 1946, 1949, 1952, 1954 y 1955 (figura 4).

Otra alternativa podría haber sido administrar la vacuna en uno, o varios, estados y comparar los resultados con otro, y otros, estados en los que no se hubiese suministrado la vacuna.

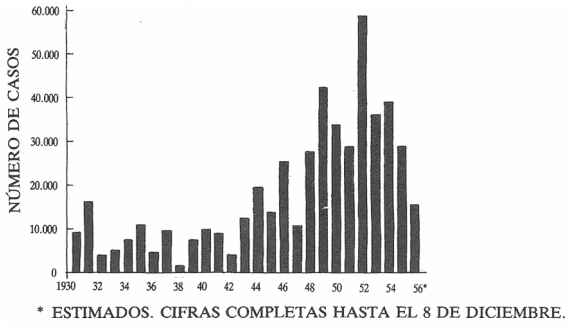


Figura 4. Poliomielitis en Estados Unidos en los años 1930-1956

b) *Variabilidad geográfica de la incidencia del virus*. Por desgracia, la enfermedad también tenía una gran variabilidad espacial, podía darse en un porcentaje alto en un estado y no en el vecino, lo que hacía que esta posibilidad, de nuevo, no fuese válida. Por ejemplo, en 1956 mientras que en Chicago hubo una epidemia de polio, en Nueva York había una baja incidencia de esta enfermedad.

Por lo tanto, no era posible la vacunación de todos los niños de Estados Unidos, o solo de algunos de los estados, para obtener conclusiones firmes sobre la eficacia de la vacuna, sino que había que realizar un estudio estadístico diseñado científicamente, con un grupo de niños vacunados, otro grupo de control y otras características importantes a tener en cuenta.

Se realizó un estudio estadístico de doble ciego, es decir, ni el sujeto ni los que realizan el estudio conocen que sustancia se ha suministrado a cada individuo. Los experimentos estadísticos médicos diseñados así son más complicados, y caros, de realizar, sin embargo, desde el punto de vista científico son más correctos, más fiables.

En ocasiones nos encontramos en los medios de comunicación estadísticas que han sido realizadas con 100, 1 000 o 10 000 individuos, como mucho. Por lo tanto, una cuestión interesante era cuántas personas se necesitaban para el estudio estadístico de la vacuna de la poliomielitis, para que este fuera fiable.

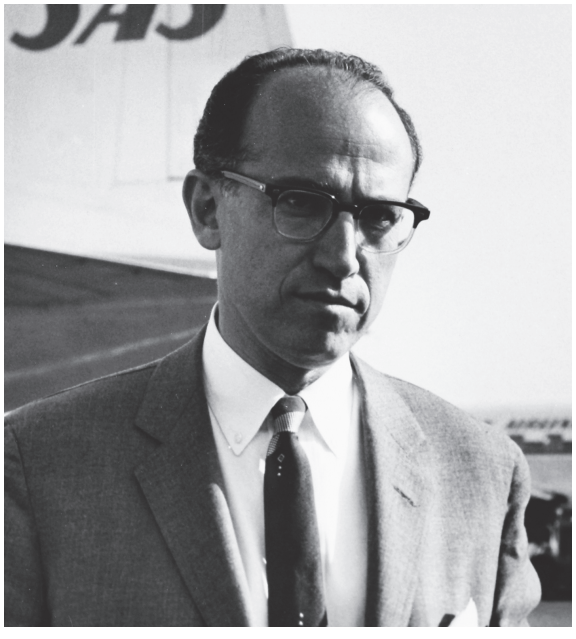


Figura 3. Jonas Edward Salk

Por ejemplo, nos puede parecer que una muestra de 40 000 niños podría haber sido más que suficiente para extraer conclusiones interesantes sobre la efectividad de la vacuna de Salk. Veamos si es así. La incidencia de la poliomielitis en Estados Unidos en los años 50, del siglo XX, era de 50 casos por cada 100 000 personas. En un estudio estadístico con 40 000 individuos, con 20 000 en el grupo de control y 20 000 en el grupo de vacunados, esa tasa de incidencia (recordemos, 50 casos por cada 100 000 personas) quería decir que a priori habría del orden de 10 casos de polio en el grupo de control, por lo que si hubiese 5 casos solo de polio en el grupo de vacunados tendríamos una tasa de éxito del 50 %. Pero una disminución en tan solo 5 personas puede deberse a causas aleatorias, y no a la vacuna, ya que como hemos comentado esta enfermedad era muy variable. En consecuencia, el resultado no sería para nada significativo.

Por otra parte, con 200 000 personas en el grupo de control y otras 200 000 personas en el grupo de los vacunados, la incidencia de la enfermedad en el grupo de control podría ser del orden de 100 casos (todo esto sin tener en cuenta el efecto placebo), lo que significaba que con 50 casos en el grupo de los vacunados se tendría un éxito, aparentemente, del 50 %. Con estas cifras se obtienen ya resultados convincentes. El ensayo clínico, que se realizó con más de un millón de niños involucrados (aunque no todos con un estudio doble ciego), fue todo un éxito.

En 1964 se autorizó otra vacuna contra la polio, del virólogo polaco nacionalizado estadounidense Albert Bruce Sabin (1906-1993), que se suministraba por vía oral, y que sustituyó en gran medida a la vacuna de Salk.

Desde que en 1988 la *Organización Mundial de la Salud* lanzara una campaña para erradicar la poliomielitis, se ha conseguido reducir en un 99 % el número de casos de polio. En 1994 el continente americano fue declarado libre de polio, en 2000 la región del pacífico occidental, incluida China, en el 2002 Europa, y así se ha erradicado de muchos lugares, aunque aún hay países donde permanece, como Pakistán, Afganistán, Irak, Siria, Nigeria, Guinea Ecuatorial, Camerún y Etiopía.

Referencias bibliográficas

Casscells, W., A. Schoenberger y T. B. Graboys (1978), «Interpretation by physicians of clinical laboratory results», *N. Engl. J. Med.,* n.º 229, 18, 999-1001.

Gigerenzer, G. (2002), *Calculated risks: how to know when numbers deceive you*, Simon and Schuster, Nueva York.

Ibáñez, R. (2015*a*), «Ébola, polio y estadísticas médicas», *Cuaderno de Cultura Científica* (blog), Bilbao.

— (2015*b*), «Falsos positivos o la importancia de comprender la información», *Cuaderno de Cultura Científica* (blog), Bilbao.

— (2015*c*), «La probabilidad en el banquillo de los acusados», *Cuaderno de Cultura Científica* (blog), Bilbao.

— (2016), «La probabilidad a juicio», en *El secreto de los números*, Universidad de Alicante, Alicante, 259-275.

Meier, P. (1992), «El mayor experimento de la historia en el campo de la sanidad pública: la gran prueba de la vacuna de Salk contra la poliomielitis (1954)», *La estadística, una guía de lo desconocido*, Alianza editorial, Madrid, 39-53.

Paulos, J. A. (1990), *El hombre anumérico: el analfabetismo matemático y sus consecuencias*, Tusquets, Barcelona.

Schneps, L., y C. Colmez (2013), *Math on Trial: How Numbers Get Used and Abused in the Courtroom*, Basic Books, Nueva York.

Raúl Ibáñez Torres
Universidad del País Vasco
<raul.ibanez@ehu.es >

MAT
RIX

III conferencia internacional

de museos y centros divulgación de matemáticas

Mathematics Awareness, Training, Resource & Information Exchange

29-31 de octubre de 2018 Cornellà de Llobregat - Barcelona



Compartiendo la divulgación matemática!

La III edición de MATRIX congregará a representantes de museos de matemáticas de todo el mundo; creadores y organizadores de exposiciones matemáticas; y personas dedicadas a la divulgación de las matemáticas para el público en general.

Las anteriores ediciones (Dresde 2014, Leeds 2016) han representado un momento importante de encuentro, generando proyectos compartidos, como Mathspaces, exposiciones y colaboraciones puntuales.

Queremos seguir en esta dirección, **compartiendo ideas, experiencias y buenas prácticas**, tratando temas candentes como la relación entre la educación formal y no formal, los museos y los centros de investigación, la formación del profesorado, la modelización de la realidad, la experimentación y la simulación virtual, la estadística en los museos (y para los museos), las matemáticas y otras disciplinas STEAM...

El objetivo final, sin embargo, es ayudar a **mejorar la percepción e implicación de la sociedad** con respecto a las matemáticas.

Más información escribiendo a **matrix@mmaca.cat**

mmaca
Museu de Matemàtiques de Catalunya

MOMATH
NATIONAL MUSEUM OF MATHEMATICS

CosmoCaixa
Obra Social "la Caixa"

Agbar
Museu de les Aigües

Ajuntament de Cornellà de Llobregat

Generalitat de Catalunya
Departament d'Ensenyament

Diputació Barcelona
#DibaOberta

Ajuntament de Barcelona

Fundació Privada CELLEX

hp

Societat Catalana de Matemàtiques
IEC

feemcat
Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya

suma+
Artículos
Marzo 2018
87
pp. 31-40

Destrezas de modelización en la formación inicial de maestros de Educación Primaria

Jesús Montejo Gámez
Elvira Fernández de Ahumada
Carmen León Mantero
Noelia Jiménez Fanjul
Natividad Adamuz Povedano

Se presenta una propuesta didáctica para trabajar la modelización matemática con alumnado del grado de Educación Primaria. La idea surge de una investigación en la que se observaron dificultades de los estudiantes para modelizar y resolver problemas presentados en contexto e interpretar los resultados obtenidos, así como algunas carencias al trabajar con unidades de medida y la noción de área. Este trabajo proporciona pautas para trabajar la modelización desde las necesidades observadas y da un ejemplo concreto de tarea de instrucción aplicable a maestros de matemáticas en formación inicial.

Palabras clave: Modelización matemática, Resolución de problemas, Formación de maestros.

Modelization skills in the initial formation of Elementary School teachers

A didactic proposal to teach mathematical modelling to preservice Elementary School teachers is proposed. The idea arises from an investigation which revealed students' difficulties to model and solve contextualized problems and interpret the obtained results, as well as lacks related to measure units and the notion of area. This paper provides guidelines to teach modelling from the observed needs and gives an example of learning task for preservice mathematics teachers.

Keywords: Mathematical modelling, Problem solving, Formation of elementary school teachers.

El debate sobre qué tipo de aprendizajes deben promover los currículos escolares de matemáticas está teniendo gran repercusión en los últimos años, debido a las normativas europeas y nacionales que impulsan el trabajo por competencias, las evaluaciones internacionales que miden capacidades matemáticas transversales a los contenidos (OECD, 2013) y algunas corrientes ya clásicas en educación matemática que consideran la resolución de problemas como un elemento fundamental de la educación matemática de los individuos (Polya, 1978; NCTM, 2000) y que subrayan la necesidad de presentar matemáticas contextualizadas (Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2014). Este tipo de ideas contrastan con planteamientos fundamentados en contenidos que pueden verse reducidos a la reproducción de procedimientos fuera de contexto, dejando así en el aire la relevancia de las destrezas matemáticas para comprender otras disciplinas y, en general, el mundo que nos rodea. En el ámbito de la formación inicial del profesorado, el trabajo con matemáticas contextualizadas conlleva múltiples beneficios. No solo refuerza los significados de las nociones matemáticas escolares, sino que contribuye a que los futuros docentes identifiquen situaciones y fenómenos que permitan presentar estas nociones de forma adaptada al conocimiento e intereses

Artículo recibido en *Suma* en noviembre de 2017 y aceptado en enero de 2018

de sus alumnos. También contribuye al pensamiento crítico de los profesores en formación, ya que el contexto obliga a estructurar y describir la realidad en forma matemática y a interpretar resultados matemáticos dentro de situaciones reales. Asimismo, la resolución de problemas es la forma más natural de introducir matemáticas contextualizadas, aunque no está claro qué contenidos deben reforzarse a través de esta vía en los grados de educación primaria. En muchos casos, este tipo de grados alberga tan solo una asignatura orientada al desarrollo matemático de los maestros en formación inicial. En la Universidad de Córdoba, además, el alumnado del grado en Educación Primaria presenta gran diversidad de bagajes matemáticos, lo que condujo a proponer una evaluación inicial que permitiera conocer qué matemáticas debían tener prioridad en su instrucción matemática. El resultado de la evaluación dejó en evidencia carencias a la hora de abordar cuestiones abiertas o que no eran explícitas respecto al contenido matemático necesario para ser resueltas (figura 1). Estas carencias apuntaron hacia destrezas asociadas a la modelización matemática, lo que motivó el desarrollo de una investigación para analizar las estrategias seguidas por los estudiantes ante problemas abiertos y profundizar en las dificultades subyacentes a las carencias observadas (Montejo-Gámez y otros, 2017).

El resultado de la evaluación dejó en evidencia carencias a la hora de abordar cuestiones abiertas o que no eran explícitas respecto al contenido matemático necesario para ser resueltas.

El presente trabajo expone las necesidades formativas que se desprenden de la investigación y proporciona pautas y una propuesta didáctica para cubrir estas necesidades de los maestros en formación inicial a través del desarrollo de habilidades de modelización.

Modelización en educación matemática

Durante las últimas décadas la modelización ha adquirido especial relevancia en el ámbito de la educación matemática (Blum y Borromeo, 2009). Son diversos los autores que han abordado la discusión sobre qué debe entenderse por modelización matemática, llegando a definiciones que presentan tanto analogías como diferencias en algunos matices. Blum (2002) se refirió a la modelización matemática como el proceso que transforma una situación problema en un modelo matemático. Lesh y Doerr (2003), a su vez, consideraron la modelización como el conjunto de procesos que el estudiante utiliza y desarrolla en su esfuerzo por resolver un problema del mundo real. Por su parte, Blomhøj (2004) la definió como una práctica de enseñanza que centra el aprendizaje en la relación entre el mundo real y la matemática. Más adelante, Blum y Borromeo (2009:1) se refirieron a la modelización como «el proceso de traducción entre el mundo real y las matemáticas en ambos sentidos» y Niss y Hojgaard (2011) la definieron como una competencia del individuo para estructurar y matematizar una situación real, trabajar con un modelo de la misma y analizar críticamente tanto los resultados como el proceso seguido. En esta línea, Blum (2002) había planteado que la modelización conlleva la matematización de una situación real, seguida de una interpretación y validación en la realidad de los resultados matemáticos obtenidos. Más recientemente, Ferrando y otros (2017:222) señalaron que la modelización matemática implica «un tipo concreto de tareas de re-

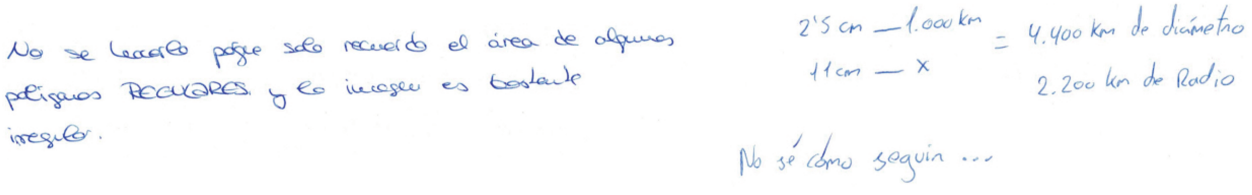


Figura 1. Muchos alumnos no supieron cómo aproximar el área de una figura irregular presentada a escala, a pesar de conocer procedimientos matemáticos necesarios

solución de problemas contextualizados en las cuales es indispensable crear una representación matemática de una realidad o fenómeno, lo que llamamos un modelo». En este trabajo, con el fin de facilitar la detección de las habilidades asociadas a la modelización que deben trabajarse en la formación inicial de maestros, se adoptó la interpretación de modelización como el conjunto de procesos que se activan para construir un modelo matemático, extraer conclusiones a partir del mismo y discutir la validez tanto de dichas conclusiones como del modelo completo.

Son numerosos los trabajos que presentan el planteamiento de tareas de modelización, su análisis y resultados en niveles de secundaria (Gallart y García-Raffi, 2013; Gallart, Ferrando y García-Raffi, 2014; Gallart, Ferrando y Navarro, 2015; Socas, Ruano y Hernández, 2016; Ferrando y otros, 2017). A nivel de primaria, también existen trabajos que exploran el desarrollo del conocimiento matemático y los procesos de razonamiento de los niños, al trabajar con problemas de modelización (English y Watters, 2005; English, 2006; Ulu, 2017), siendo diversos los autores que defienden que la modelización matemática puede y debe comenzar en la escuela primaria donde los niños y niñas ya tienen las competencias básicas sobre las cuales se puede desarrollar la modelización (NCTM, 2000; Diezmann, Watters y English, 2002; Lehrer y Schauble, 2003). En cuanto a la importancia de abordar la modelización matemática en la formación inicial del docente, Mathews y Redd (2007) y Ortiz, Rico y Castro (2007) la consideran esencial porque resulta una herramienta dinámica que moviliza conceptos y procedimientos matemáticos para la resolución de problemas, además de invitar a la reflexión sobre lo que significa enseñar matemáticas. Según Mora Zuluaga y Ortiz Buitrago (2014), la modelización ayuda al profesorado en formación a tomar conciencia de que las matemáticas escolares pueden resultar útiles para comprender, describir, interpretar y modificar la realidad. Por su parte, Doerr (2007) señaló la necesidad de que los profesores en formación tengan experiencias sobre modelización que les permitan disponer de contextos y herramientas para la enseñanza, y English (2006) considera las tareas de modelización como experiencias desafiantes y estimulantes para los maestros mientras exploran la naturaleza de las ideas matemáticas que se quieren trabajar, consideran estrategias de implementación apropiadas y promueven equipos de aprendizaje dentro de sus aulas. Entre las investigaciones empíricas que han analizado las destrezas de modelización en formación inicial del profesorado destacan los trabajos de Bukova-Güzel (2011) que examinó los enfoques que plantearon los estudiantes en el diseño de problemas de modelización matemática y en qué medida implementaron procesos de modelización al resolver los problemas que proponían, y de Hıdıroğlu, Dede, Kula-Ünver y Bukova-Güzel (2017) que analizaron las soluciones que estudiantes para profesores de secundaria daban a un problema concreto diseñado para trabajar la modelización matemática.

Dada la complejidad de procesos que involucran las actividades de modelización, se plantea el interrogante acerca de qué características debe tener una tarea de modelización matemática. En este trabajo se siguieron los principios propuestos por Lesh y otros (2000). Para diseñar actividades que estimulan la modelización (AEM), estos autores centraron su atención en dos dimensiones: características de las tareas y características de las soluciones. Respecto a las características de la tarea, el *principio de realidad* marca que esta debe ser significativa para los estudiantes, es decir, ser acorde a sus diferentes niveles de habilidad matemática y en general, a sus conocimientos. Además de ser significativa, la actividad debe ser lo más sencilla posible, según el *principio de prototipo efectivo*. También es necesario que incluya criterios que los estudiantes puedan usar para revisar sus modelos y crear documentación para revelar cómo resolvieron la tarea, según establecen los *principios de autoevaluación y de documentación*, respecti-

En este trabajo [...] se adoptó la interpretación de modelización como el conjunto de procesos que se activan para construir un modelo matemático, extraer conclusiones a partir del mismo y discutir la validez tanto de dichas conclusiones como del modelo completo.

vamente. Respecto a las características de las soluciones que deben fomentarse, el *principio de construcción del modelo* afirma que los estudiantes deben proporcionar una explicación o modelo explícito. Por último, *el principio de habilidad compartida y reutilización* establece que debe estimularse la producción de soluciones compartibles y reutilizables. El proceso de resolución de estas tareas de modelización abarca distintas fases que pueden interpretarse como un ciclo. Uno de los más utilizados como referencia es el propuesto por Blum y Leiss (2007), el cual constituyó el marco teórico de la investigación desarrollada y cuyo esquema puede verse en la figura 2. Este modelo se articula en torno a siete fases de forma que (1) la situación-problema tiene que ser entendida, es decir, se tiene que construir un modelo de la situación (*fase de comprensión y construcción*); (2) la situación tiene que ser simplificada, estructurada y precisada (*fase de simplificación y estructuración*), dando lugar a un modelo real de la misma; (3) la *fase de matematización*, donde se transforma el modelo de la situación en un modelo matemático; (4) la fase de *trabajar matemáticamente* produce resultados (matemáticos) que (5) se interpretan (*fase de interpretación*) y (6) validan en el mundo real (*fase de validación*). El ciclo finaliza con (7) la *fase de exposición* de los resultados obtenidos.

Dado que la trayectoria que sigue un individuo o grupo de individuos al resolver un problema no sigue linealmente las fases de Blum y Leiss (2007), Borromeo (2007, citado por Blum y Borromeo, 2009) asocia las estrategias de resolución de un problema con diferentes formas de pensar.

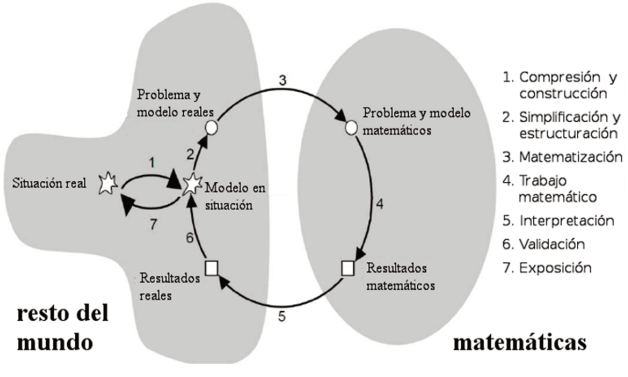


Figura 2. Esquema del ciclo de modelización.
Fuente: Blum y Leiss (2007)

Así, define tres estilos de pensamiento matemático que resultaron especialmente útiles en el estudio realizado:

a) pensamiento visual, mediante el cual el individuo suele razonar sobre la realidad más que sobre el modelo matemático, muestra tendencia a abordar los problemas de forma global y prefiere las representaciones pictóricas,
b) pensamiento analítico, mediante el cual el individuo suele razonar sobre el modelo matemático más que sobre la realidad, muestra tendencia a utilizar representaciones simbólicas o verbales y prefiere estructurar paso a paso el procedimiento seguido, y
c) pensamiento integrado, en un punto intermedio entre ambos extremos, mediante el cual el individuo es capaz de combinar elementos de los otros dos tipos de pensamiento.

Resultados de la investigación y necesidades formativas encontradas

En la investigación desarrollada se propuso a 227 estudiantes del grado de Educación Primaria el problema de estimar el área de la Antártida a partir de un mapa a escala dado y se analizaron las soluciones que dieron al problema cada uno de los participantes del estudio. El análisis atendió a las estrategias empleadas para resolver el problema, el tipo de pensamiento que cada estrategia manifestaba y la identificación e interpretación de errores (pueden consultarse los detalles en Montejo-Gámez y otros, 2017).

El primer resultado relevante de la investigación es la gran cantidad de alumnos que no fueron capaces de afrontar el problema: más del 70% de los participantes del estudio (159) no dejaron evidencias de haberlo abordado.

En cuanto al tipo de estrategia empleada por los alumnos que sí trataron de resolver el problema, se encontró cierta variabilidad de enfoques. Las estimaciones más comunes aproximaron el área de la isla por el de una única figura plana. Quince alumnos utilizaron un rectángulo

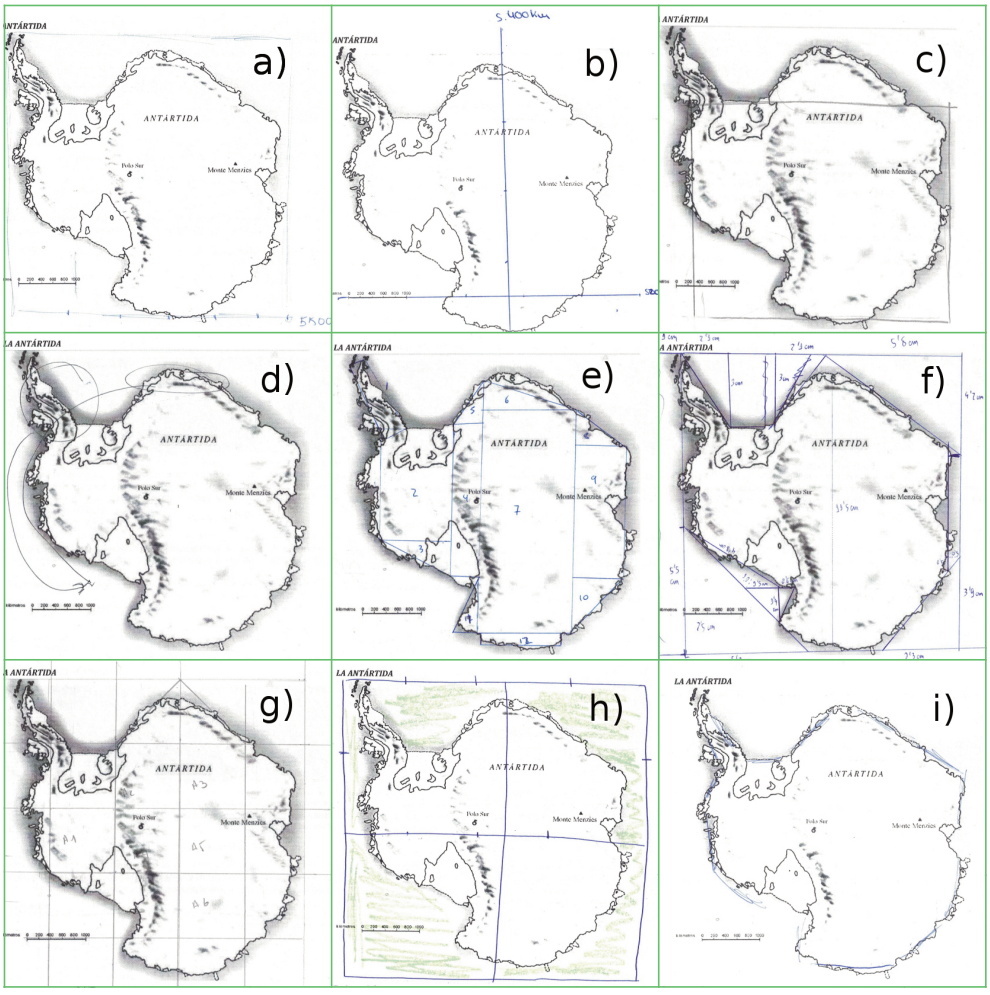


Figura 3. Ejemplos de las estrategias aplicadas por los estudiantes.
El alumno del dibujo f) no ha hecho ningún cálculo

que contenía completamente la isla, algunos lo hicieron circunscribiendo este rectángulo a la isla (figura 3a) pero otros utilizaron un polígono algo más amplio (figura 3b). A su vez, 14 participantes usaron un rectángulo que compensaba las zonas de mar que dejaba en su interior con zonas de tierra que quedaban fuera del polígono, mientras que otros 12 alumnos hicieron el mismo tipo de estimación pero tomando un cuadrado (figura 3c). Otros 5 estudiantes llevaron a cabo un procedimiento similar, pero eligiendo un círculo (figura 3d). Por otra parte, también se observaron estrategias de mayor complejidad: 6 individuos descompusieron la isla en diferentes polígonos y sumaron las áreas de los polígonos (figura 3e). De forma análoga, 5 participantes incluyeron la isla en un cuadrado y descompusieron en polígonos la zona de mar que quedaba fuera de la isla (figura 3f). Se observaron también otras estrategias minoritarias: 2 alumnos trazaron una retícula de lado igual a la escala gráfica, contabilizaron los cuadrados interiores a la isla y trataron de descomponer los cuadrados que tenían trozos de isla y de mar en otros polígonos (figura 3g). Otro estudiante dibujó un rectángulo que incluía a la isla y estimó el área de la zona de mar que contenía este rectángulo por la cuarta parte del área del mismo, aproximando así el área de la isla mediante las tres cuartas partes restantes (figura 3h). Por último, hubo 8 participantes que utilizaron longitudes para dar la estimación pedida. En particular, dos de ellos estimaron el área por medio de la longitud del perímetro (figura 3i) y otros dos se limitaron a medir un *diámetro* de la isla y proporcionaron el resultado de esta medición como solución al problema.

En relación al tipo de pensamiento mostrado por los participantes en el estudio, se observó predominio de pensamiento de tipo analítico (34 alumnos) sobre el integrado (20 alumnos) y el visual (14 alumnos). En particular, la mayoría de los estudiantes que aplicaron estrategias de estimación basadas en el área de una única figura plana (figuras 3a-3d) exhibieron un pensamiento más analítico, limitándose a mostrar cálculos o texto y sin dejar evidencias de trabajo sobre la imagen (no trazaron la figura). Por su parte, las estrategias de descomposición en polígonos de la isla (figura 3e) o de la zona marítima circundante (figura 3f) están mayoritariamente asociadas a un pensamiento integrado y denotan mayor complejidad de razonamiento.

El análisis de los errores cometidos por los estudiantes dejó entrever dificultades en relación a ciertos contenidos. En primer lugar, se encontraron errores asociados a la medida, como el uso incorrecto de las unidades de medida (error más común, figura 4a) o la realización de mediciones con resultados significativamente inexactos. También se observaron errores relacionados con la noción de área, además de la ya comentada estimación de áreas a través de longitudes de perímetros o de diámetros. Algunos de ellos son el cálculo de áreas de rectángulos sumando las dimensiones de dicho rectángulo, la aplicación de fórmulas no válidas, o la utilización de que un cuadrado de dimensiones $n \times n$ tiene área n. Por otra parte, el uso de la escala también generó errores entre los alumnos. El que más se repitió incide de nuevo en el uso de las unidades de medida como son identificar con 1 cm la longitud total de la escala gráfica (2,5 cm) o la partición más pequeña de la misma (0,5 cm). Este tipo de errores puede verse ilustrado en las figuras 4b y 4c, respectivamente. También se observaron estudiantes que calcularon correctamente el área utilizando las mediciones directas (sin cambiar de escala) y transformaron de manera errónea las unidades: bien multiplicando por 1 000 o utilizando el factor de escala lineal (cm–km) en lugar del cuadrático (cm^2–km^2), como en la figura 4d.

El análisis de los errores encontrados fue útil para profundizar en las fases del ciclo de Blum y Leiss (2007) en las que los alumnos presentaban mayores dificultades. En este sentido deben destacarse aquellos alumnos que proporcionaron una solución con orden de magnitud poco realista, que incurrieron en errores de validación del modelo u otros que propusieron planteamientos de alta complejidad pero no los materializaron, habiendo casos en los que no hicieron cálculo alguno (figura 3f), mostrando debilidades en la fase de trabajo matemático.

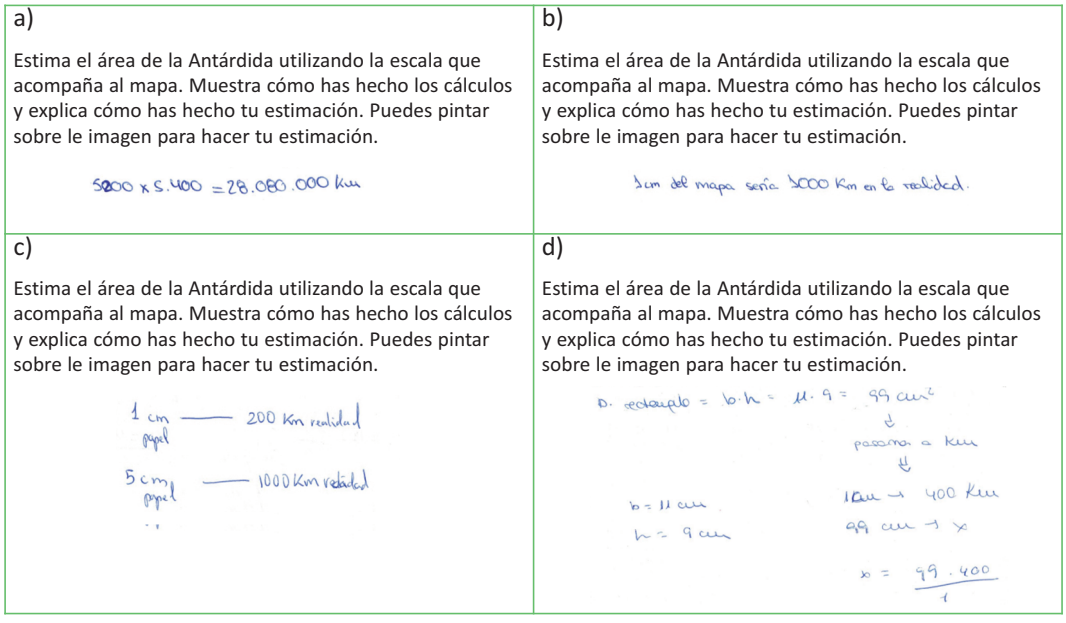


Figura 4. Ejemplos de errores asociados al uso de la escala gráfica

Los resultados expuestos anteriormente permitieron trazar un perfil de las necesidades formativas de los participantes en el estudio. En primer lugar, la gran cantidad de respuestas en blanco encontradas puso de manifiesto que los estudiantes no comprendieron lo que se les solicitó o no tuvieron recursos para aplicar contenidos matemáticos estudiados cuando se les presentaron fenómenos asociados a esos contenidos en situaciones realistas. La existencia de planteamientos complejos que no condujeron a respuesta porque no se hizo ningún cálculo (figura 3f) reforzó esta interpretación, que hizo explícita la primera necesidad formativa relevante: trabajar la conexión entre las ideas matemáticas y los fenómenos del mundo real. Por otra parte, la gran cantidad de alumnos que expresaron áreas en unidades erróneas y los que mostraron resultados muy alejados de la realidad describen a un alumnado que no fue consciente de cómo debía de ser aproximadamente la solución al problema planteado. Surgió así la segunda necesidad formativa destacable: reflexionar sobre los resultados obtenidos, en el sentido de interpretar los resultados y validar, al menos, su verosimilitud. La existencia de alumnos que utilizaron de forma inadecuada la escala gráfica, junto con los errores en el cambio de unidades cuadráticas y el ya mencionado uso de unidades lineales para expresar áreas apuntaron hacia dificultades en la comprensión de lo que es una unidad de medida, situación que define la tercera necesidad a tomar en consideración: reforzar la noción de unidad de medida. Por otra parte, la alta variabilidad de cálculos de áreas planteados de forma errónea unida a la baja incidencia de alumnos que evidenciaron pensamientos de tipo visual invitó a pensar que los participantes del estudio no tenían asentada la noción geométrica de área, lo que condujo a la cuarta necesidad formativa a tener en cuenta: reforzar el área como medida de magnitud de superficies planas. Igualmente, los errores encontrados en el uso de la escala hicieron pensar que la aparición de contenidos interrelacionados generó dificultades a los alumnos a la hora de aplicar conocimientos relacionados ya conocidos. Esta situación determinó la quinta necesidad formativa que se apunta: trabajar diferentes contenidos de forma integrada.

Implicaciones para la formación inicial de maestros de matemáticas

Las necesidades formativas reveladas por el análisis de los resultados de la investigación pueden ser cubiertas trabajando tareas de modelización matemática. La comprensión de estas necesidades junto con los principios del diseño de AEM (Lesh y otros, 2000) permitieron establecer características útiles que debe tener una propuesta de instrucción adecuada al contexto formativo de la investigación desarrollada:

— Dada la gran cantidad de alumnos que dejaron en blanco la tarea de la investigación, y de acuerdo al principio de realidad de las AEM, debe hacerse una propuesta que no condicione a aquellos estudiantes que sí son capaces de desarrollar ideas propias pero a la vez proporcione pautas suficientemente concretas para aquellos que tienen dificultades para abordar cuestiones abiertas. Con esta intención se pueden plantear cuestiones a tres niveles: en el primero, inicial y más complejo, la tareas deben consistir en preguntas abiertas; en el segundo se tienen que incluir preguntas que inviten a la reflexión y cierren parcialmente las dificultades a resolver, pero sin llegar a condicionar al alumnado; en el tercer nivel se hacen interpretaciones parciales y se proponen reflexiones y cuestiones totalmente estructuradas.

— Debido a la baja capacidad de interpretación de resultados encontrados en la investigación se tienen que incluir cuestiones destinadas a interpretar las soluciones obtenidas y validar el modelo matemático obtenido. En este sentido, se debe pedir a los alumnos que expliquen razonadamente la solución que dan, según el principio de construcción del modelo de las AEM. También se pueden incluir algunas preguntas de réplica, según el principio de reutilización, para incidir en la interpretación de sus propios resultados y que los alumnos se vean obligados a reutilizar el modelo.

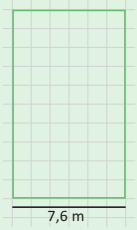
— Dadas las necesidades tercera y cuarta, que están asociadas a contenidos, las tareas de modelización deben trabajar las unidades de medida y las áreas desde su significado como medida de magnitud de superficies. Además, para responder a la quinta necesidad es necesario que estos contenidos se trabajen de forma integrada y tratando de no hacer alusión explícita a los mismos.

— Es adecuado proponer tareas que partan de una situación contextualizada. Particularmente, y siguiendo el principio de realidad de las AEM, debe buscarse que la tarea sea interesante para los futuros maestros, centrando el contexto en su futura labor docente.

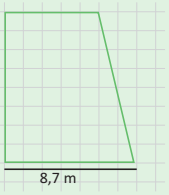
La figuras 5, 6 y 7 presentan un ejemplo de tarea que satisface las características señaladas a los niveles indicados. Para implementarlas en el aula, se recomienda trabajar en pequeño grupo, comenzando con la tarea más abierta y proporcionando las versiones más estructuradas a los grupos que evidencien incapacidad para abordar el problema.

El director de CEIP Europa desea habilitar una ludoteca en un aula de infantil. La normativa indica que las ludotecas deben ocupar *exactamente la cuarta parte del aula* y estar delimitadas con una valla especial.
El colegio dispone de 10 m de esa valla, pero no puede gastar dinero en más, por lo que ha pedido a los maestros de infantil que le expliquen si se puede habilitar la ludoteca en su aula y cómo hacerlo.

a) El maestro de los niños de 3 años cree que la ludoteca podría estar en su aula (tenéis debajo un plano del aula a escala), pero no sabe cómo podría situarse la valla y cuánta valla sobraría.



b) Aplicad el método obtenido en a) para saber si se puede habilitar la ludoteca en el aula de infantil de 4 años con los diez metros de valla y cuánta valla sobraría. El plano a escala de este aula lo tenéis a continuación:

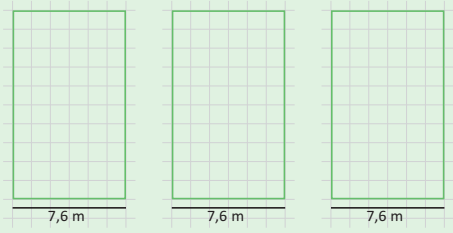


c) Si el método aplicado en a) no funciona en el aula de 4 años, decid por qué e inventad uno nuevo que si funcione en las dos aulas. Usadlo para explicar cómo habría que situar la valla en cada una de las aulas y cuánta valla sobraría en cada caso.

Figura 5. Ejemplo de tarea de modelización para responder a las necesidades formativas encontradas. Primer nivel (abierto)

El director de CEIP Europa desea habilitar una ludoteca en un aula de infantil. La normativa indica que las ludotecas deben ocupar *exactamente la cuarta parte del aula.*

a) A continuación tenéis copias a escala del aula de infantil (3 años). Representad la ubicación de una posible ludoteca en cada una de ellas.



Justificad razonadamente por qué los dibujos hechos podrían ser ludotecas según la normativa.

b) La normativa también obliga a delimitar las ludotecas con una valla especial. El colegio dispone de 10 m de esa valla, pero no puede gastar dinero en más. ¿Alguna de las ludotecas hechas antes se puede delimitar con 10 m de valla? Justificad vuestras respuestas.

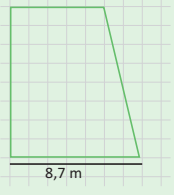
c) El maestro de los niños de 3 años cree que en su aula se podría habilitar la ludoteca usando solo los 10 m de valla, pero no sabe cómo situarla. Para ayudarle, podéis empezar por alguna de las que ya tenéis y, si no es solución, buscad alguna que necesite menos valla. Podéis completar la siguiente tabla:

Intento	1	2	3	4	
Valla (m necesarios)					

AYUDA: *Puede ser útil ir cambiando la forma de la ludoteca. Detrás tenéis papel cuadriculado.*

d) En vista del trabajo hecho, ¿es posible habilitar una ludoteca en el aula de infantil (3 años)? Si creéis que sí, explicad cómo podría situarse la valla y cuánta valla sobraría.

e) Repetid el proceso hecho en c) para saber si se puede habilitar la ludoteca en el aula de infantil de 4 años con los 10 m y cuánta valla sobraría. El plano a escala está debajo:

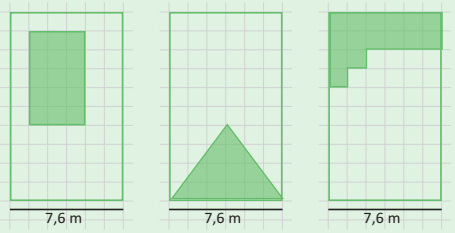


f) Explicad cómo se puede saber si la ludoteca se puede situar en un aula cualquiera (usando solo los 10 m de valla).

Figura 6. Ejemplo de tarea de modelización para responder a las necesidades formativas encontradas. Segundo nivel (intermedio)

El director de CEIP Europa desea habilitar una ludoteca en un aula de infantil. La normativa indica que las ludotecas deben **ocupar exactamente la cuarta parte del aula**.

a) A continuación tenéis diferentes espacios marcados en el aula de infantil (3 años). ¿Cuáles podrían representar la ludoteca? Justificad vuestra respuesta.



b) La normativa también obliga a delimitar las ludotecas con una valla especial. ¿Cuántos metros de valla harían falta para delimitar los espacios en gris?
AYUDA: *En el primer dibujo cada uno de los dos tramos de valla horizontales miden la mitad de la clase. En el segundo dibujo, puede venir bien dibujar una altura del triángulo y ver qué tipo de triángulos salen.*
¿Cuál necesita más valla y cuál menos? ¿Por qué creéis que ocurre eso?

c) El colegio dispone de 10 m de esa valla, pero no puede gastar dinero en más. ¿Alguno de los casos trabajados representan la ludoteca? ¿Por qué?

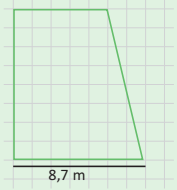
d) El maestro de los niños de 3 años cree que en su aula se podría habilitar la ludoteca usando solo los 10 m de valla, pero no sabe cómo situarla. Para ayudarle, podéis empezar por alguna de las anteriores y si no es solución, buscar alguna que necesite menos valla. Podéis completar la siguiente tabla:

Intento	1	2	3	4	
Valla (m necesarios)					

AYUDA: *Puede ser útil ir cambiando la forma de la ludoteca. Detrás tenéis papel cuadriculado.*

e) En vista del trabajo hecho, ¿es posible habilitar una ludoteca en el aula de infantil (3 años)? Si creéis que sí, explicad cómo podría situarse la valla y cuánta valla sobraría.

f) Repetid el proceso hecho en d) para ver si se puede habilitar la ludoteca en el aula de infantil (4 años) con los 10 m y cuánta valla sobraría. El plano a escala está debajo:



g) Explicad cómo se puede saber si la ludoteca se puede situar en un aula cualquiera (usando solo los 10 m de valla).

Figura 7. Ejemplo de tarea de modelización para responder a las necesidades formativas encontradas. Tercer nivel (estructurado)

Conclusiones

El análisis de los resultados de una investigación basada en la observación de las estrategias empleadas por maestros en formación inicial ante problemas abiertos presentados en contexto puso de manifiesto la necesidad de trabajar la conexión entre matemáticas y el mundo real y de reflexionar sobre los resultados que arroja el trabajo matemático, además de reforzar las nociones de unidad de medida y de área. Todas estas necesidades pueden ser atendidas a través de actividades que estimulen la modelización. La propuesta que se ha presentado es un ejemplo de tarea de instrucción diseñada para este fin. El potencial formativo de este tipo de propuestas didácticas, sin embargo, debe ser aún analizado por investigaciones futuras.

Referencias bibliográficas

Blomhøj, M. (2004), «Mathematical Modelling. A theory for practice», *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics*, National Center for Mathematics Educations, Suecia, 145-159.

Blum, W. (2002), «ICMI STUDY 14: Applications and modeling in mathematics education-Discussion Document», *Educational Studies in Mathematics*, n.º 51, 149-171.

Blum, W., y R. Borromeo (2009), «Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt?», *Journal of Mathematical Modelling and Application*, n.º 1(1), 45–58.

Blum, W., y D. Leiss (2007), «How do students' and teachers deal with modelling problems?», *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics*, Horwood Publishing,Chichester, 222-231.

Bukova-Güzel, E. (2011), «An examination of pre-service mathematics teachers' approaches to construct and solve mathematical modelling problems», *Teaching Mathematics and Its Applications*, n.º 30, 19-36.

Diezmann, C., J. J. Watters y L. D. English (2002), «Teacher behaviours that influence young children's reasoning», *Proceedings of the 26th International PME Conference*, University of East Anglia, Norwich, 289-296.

Doerr, H. (2007), «What Knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modelling?», *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study*, Springer, New York, 69-78.

English, L. D. (2006), «Mathematical modeling in the primary school», *Educational Studies in Mathematics*, n.º 63, 303–323.

English, L. D., y J. Watters (2005), «Mathematical modeling in the early school years», *Mathematics Education Research Journal*, n.º 16, 59–80.

Ferrando, I., L. Albarracín, C. Gallart, L. M. García-Raffi y N. Gorgorió (2017), «Análisis

de los Modelos Matemáticos Producidos durante la Resolución de Problemas de Fermi», *Bolema, Rio Claro (SP)*, n.º 31(57), 220-242.

Ferrando, I., y B. Navarro (2015), «Un viaje de fin de curso y tres tareas de modelización. Una experiencia en un aula de secundaria», *Modelling in Science Education and Learning*, n.º 8(2), 79-92.

Gallart, C., y L. M. García-Raffi (2013), «Primeros pasos con las tareas de modelización en secundaria», *Modelling in Science Education and Learning*, n.º 6(1), 49-60.

Gallart, C., I. Ferrando y L. M. García-Raffi (2014), «Implementación de tareas de modelización abiertas en el aula de secundaria, análisis previo», *Investigación en educación matemática, SEIEM*, Salamanca, 327-336.

Hidiroğlu, Ç. N., A. T. Dede, S. Kula-Ünver y E. Bukova-Güzel (2017), «Mathematics Student Teachers' Modelling Approaches While Solving the Designed Eşme Rug Problem», *Mathematical Thinking and Learning*, n.º 10(3), 293-304.

Lehrer, R., y L. Schauble (2003), «Origins and evolutions of model-based reasoning in mathematics and science», *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*, Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, New Jersey, 59-70.

Lesh, R., y H. M. Doerr (2003), *Beyond constructivism: A models and modeling perspective on mathematics problem solving, learning and teaching*, Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, New Jersey.

Lesh, R., M. Hoover, B. Hole, A. Kelly y T. Post (2000), «Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers», *Research Design in Mathematics and Science Education*, Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, New Jersey, 591-646.

Mathews, S., y M. Reed (2007), «Modelling for preservice teachers», *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics*, Horwood Publishing, Chichester, 458-464.

Montejo-Gámez, J., E. Fernández-Ahumada, N. Jiménez-Fanjul, N. Adamuz-Povedano y C. León-Mantero (2017), «Modelización como proceso básico en la resolución de problemas contextualizados: un análisis de necesidades», *Investigación en Educación Matemática XXI*, SEIEM, Zaragoza, 347-356.

Mora Zuluaga, A., y J. Ortiz Buitrago (2014), «Dificultades en el diseño de tareas con modelización», <http://funes.uniandes.edu.co/5304/1/MoraDificultadesALME2014.pdf>, accedido el 10 de octubre de 2017.

NCTM. (2000), *Principles and Standards for School Mathematics,* National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia.

Niss, M., y T. Højgaard (2011), C*ompetencies and Mathematical Learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*, Roskilde: IMFUFA/NSM, Roskilde University.

OECD (2013), *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012 Matemáticas, Lectura y Ciencias*, Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, Madrid.

Ortiz, J., L. Rico y E. Castro (2007), «Mathematical Modelling: A teacher's training study», *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics*, Horwood Publishing, Chichester, 441-249.

Polya, G. (1987), *Cómo plantear y resolver problemas*, Trillas, México.

Socas, M. M., R. M. Ruano y J. Hernández (2016), «Análisis didáctico del proceso matemático de Modelización en alumnos de Secundaria», *Avances de Investigación en Educación Matemática*, n.º 9, 21-41.

Ulu, M. (2017), «Examining the Mathematical Modeling Processes of Primary School 4th-Grade Students: Shopping Problem», *Universal Journal of Educational Research*, n.º 5(4), 561-580.

Van Den Heuvel-Panhuizen, M., y P. Drijvers (2014), «Realistic mathematics education», *Encyclopedia of Mathematics Education*, Springer, Amsterdam, 521–525, <https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8>.

Jesús Montejo Gámez
Universidad de Granada
<jmontejo@ugr.es>

Elvira Fernández de Ahumada
Universidad de Córdoba

Carmen León Mantero
Universidad de Córdoba

Noelia Jiménez Fanjul
Universidad de Córdoba

Natividad Adamuz Povedano
Universidad de Córdoba

suma+ 87
Artículos
Marzo 2018
pp. 41-48

Triángulos de MacMahon: del plano al espacio

José Luis Martín Montaño

En este artículo presento una propuesta educativa para introducir a nuestros alumnos en el proceso de la investigación matemática explorando las posibilidades de llevar al espacio el puzle de los veinticuatro triángulos y cuatro colores, ideado por el matemático británico MacMahon.

Palabras clave: Investigación didáctica, Materiales, Combinatoria, Poliedros, Calidociclos.

MacMahon's triangles: adding a new dimension

In this article an educational proposal is introduced to initiate our students in the process of mathematical research by exploring the possible ways of transporting to a tri-dimensional space the puzzle of the twenty four triangles and four colours, devised by the British mathematician McMahon.

Keywords: Educational research, Materials, Combinatorial, Polyhedra, Kaleidocycles.

Entre los numerosos puzles ideados por el matemático británico MacMahon (1854-1929) llaman la atención, por la cantidad de retos que se puede plantear con ellos y por su aplicación en el aula, el *puzle de los veinticuatro cuadrados y tres colores* (figura 1)[1] y el *puzle de los veinticuatro triángulos y cuatro colores* (figura 2).

Con el primer puzle ya se consiguió colocar los 24 cuadrados como caras de cuatro cubos de forma congruente, es decir, de manera que en cada arista los triángulos que confluyen de cada cara sean del mismo color, es el que se conoce como *puzle de Scout Nelson*.

Se trataba pues de hacer lo propio con el segundo puzle, guiando a los alumnos en la exploración de las distintas posibilidades que pueden existir de llevar los veinticuatro triángulos al espacio, a la vez que aprenden cómo se construye formalmente una teoría matemática.

Desde que leí en la sección de juegos de la revista *Suma* n.º 63 el artículo «MacMahon y las matemáticas en colores», escrito por el Grupo Alquerque de Sevilla, han sido muchas las horas que he dedicado a los puzles que allí se desarrollan, tanto en clase con mis alumnos como en solitario[2]. Hemos fabricado, después de haber estudiado todas las posibilidades de colorearlos con las más variopintas técnicas, tanto los cua-

Artículo recibido en *Suma* en noviembre de 2017 y aceptado en enero de 2018

drados como los triángulos de MacMahon y hemos jugado con ellos hasta conseguir completar todos los retos que se plantean y algunos otros que idearon los propios alumnos.

Pero la mayor satisfacción que he conseguido jugando con estos puzles la encontré cuando planteé en una clase, al empezar el tema de los poliedros, el reto de llevar los triángulos al espacio. En este artículo comento las distintas propuestas que fueron surgiendo y algunas otras que he desarrollado posteriormente.

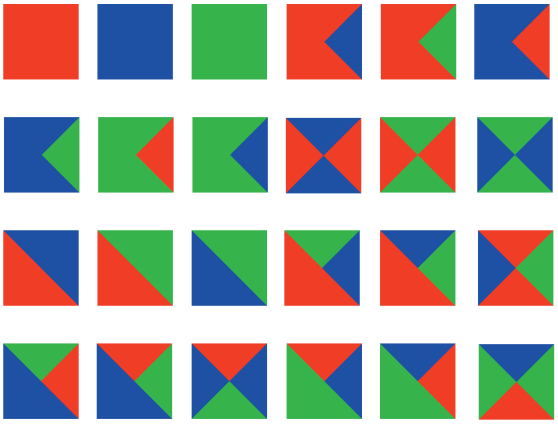


Figura 1

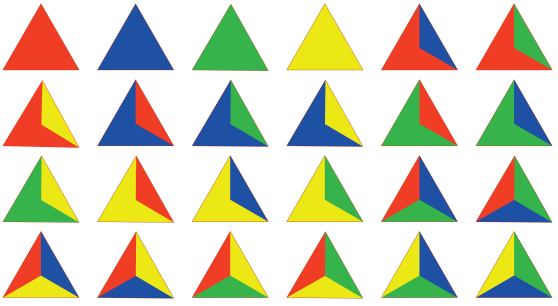


Figura 2

Los tres octaedros

La primera idea que surgió en clase fue construir, con los 24 triángulos, tres octaedros con sus caras congruentes de manera que después estos se pudiesen apilar también de forma congruente. No les fue complicado encontrar algunas soluciones para la construcción de los octaedros, aunque costó un poco más encontrar soluciones que después pudiesen apilarse. Lo primero que tuvieron que descubrir fue qué piezas pueden acoplarse para luego intentar colocar cada una en un octaedro diferente.

Se muestran aquí (figura 3) los desarrollos de una de las soluciones en la que cada octaedro se puede acoplar de forma única con cada uno de los otros dos. Se consigue así que todas las combinaciones sean posibles y cada octaedro pueda ir arriba, en medio o debajo de la pila.

Si se ha trabajado en la construcción de los octaedros, es fácil apilarlos después; pero he podido comprobar que si das los tres octaedros a alguien ajeno al trabajo realizado, para que los apile, le resulta algo más complicado encontrar la solución.

En la figura 4 se puede observar una de las soluciones de los octaedros apilados.

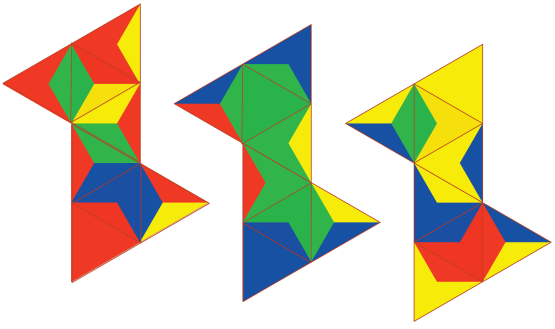


Figura 3

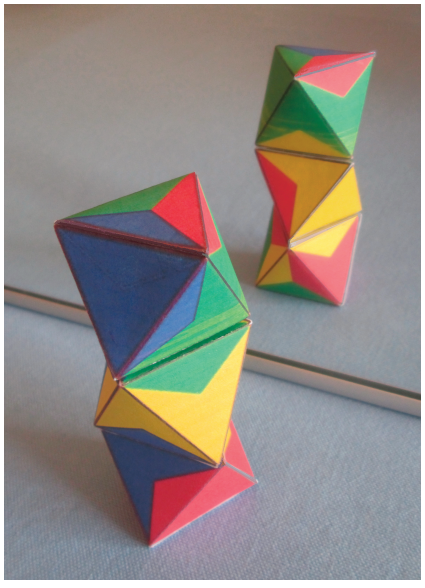


Figura 4

El icosaedro

El segundo planteamiento que surgió fue construir un icosaedro; aunque esto no genera ningún puzle, su propia elaboración fue un reto.

Empezamos dibujando una plantilla donde ir colocando los triángulos. Buscaron un desarrollo del icosaedro, exploraron qué triángulos se unen al pegarlo y elaboraron la plantilla de la figura 5 en la que los triángulos que aparecen con el mismo número han de ser de igual color, además, claro está, de los lados adyacentes de las piezas que se tocan.

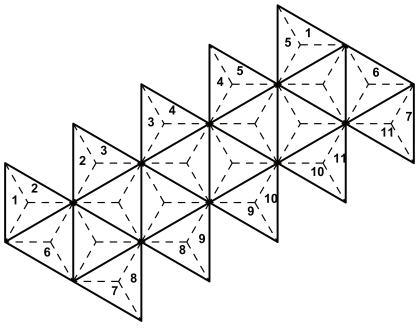


Figura 5

Obviamente para construir un icosaedro tenemos que prescindir de cuatro piezas, pero no podemos elegir aleatoriamente estas piezas y de esto los alumnos fueron dándose cuenta a medida que lo intentaban. Casi todos los alumnos tendían a desechar los cuatro triángulos de un solo color hasta que se fueron dando cuenta de que a la hora de encajar las últimas piezas les faltaban o sobraban triángulos de algún color. Después de muchas discusiones y un poco de ayuda, a la hora de redactar, consiguieron enunciar y elaborar una demostración de su primer teorema:

Teorema
Para construir un icosaedro congruente con los veinticuatro triángulos de MacMahon el número de triángulos de cada color, que tiene que haber entre las cuatro piezas que se han de desechar, tiene que ser par.
Demostración
En el desarrollo del icosaedro los triángulos de cada color van siempre emparejados formando rombos, por tanto el número de triángulos de cada color que hay que utilizar ha de ser par. Puesto que entre las veinticuatro piezas hay 18 triángulos de cada color, es decir, un número par, también ha de ser par el número de triángulos de cada color que se desechan.

A partir de esta conclusión se dedicaron a investigar qué cuatro piezas se pueden eliminar de manera que el número de triángulos de cada color que contienen sea par. Y de aquí surgió su segundo teorema:

Teorema
Existen solo seis posibilidades de eliminar cuatro piezas para construir un icosaedro con los veinticuatro triángulos de MacMahon y pueden agruparse de la siguiente forma dependiendo del número de triángulos de cada color que contienen:
Grupo I: ocho triángulos de un color, dos de otro color y dos de un tercer color.
Grupo II: seis triángulos de un color y seis de otro.
Grupo III: seis triángulos de un color, cuatro de otro y dos de un tercero.
Grupo IV: seis triángulos de un color y dos de cada uno de los otros tres colores restantes.
Grupo V: cuatro triángulos de tres colores.
Grupo VI: cuatro triángulos de dos colores y dos de los otros dos colores.
Además todas las posibilidades dan lugar a alguna solución.
Demostración
El problema se reduce a encontrar cuatro números pares, incluyendo al cero, que sumen 12 y desechar aquellas combinaciones que no pueden darse debido a cómo están construidas las veinticuatro piezas del puzle. Existen nueve posibilidades para conseguir esto: 12+0+0+0, 10+2+0+0, 8+4+0+0, 8+2+2+0, 6+6+0+0, 6+4+2+0, 6+2+2+2, 4+4+4+0 y 4+4+2+2.

Tan solo las tres primeras opciones no son válidas ya que es imposible reunir, con cuatro piezas, ocho o más triángulos de un color sin utilizar otros dos colores distintos.

A partir de esto se hicieron grupos para encontrar soluciones a las seis posibles combinaciones de cuatro piezas. En las siguientes imágenes se muestran las combinaciones de las cuatro piezas desechadas así como la solución encontrada del desarrollo del icosaedro (en los ejemplos R representa al rojo, A al amarillo, Az al azul y V al verde):

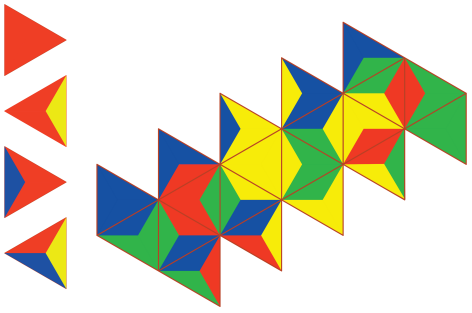


Figura 6. Grupo I: RRR, RRA, RRAz y RAAz

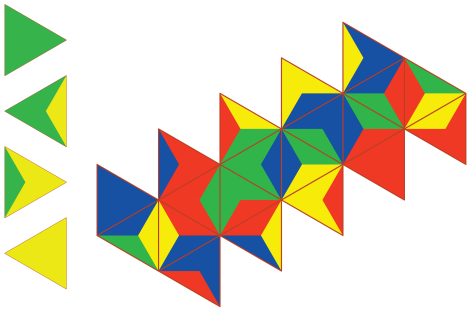


Figura 7. Grupo II: VVV, AAA, VVA y AAV

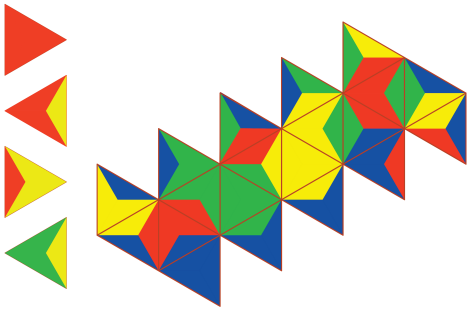


Figura 8. Grupo III: RRR, RAA, AVV y RRA

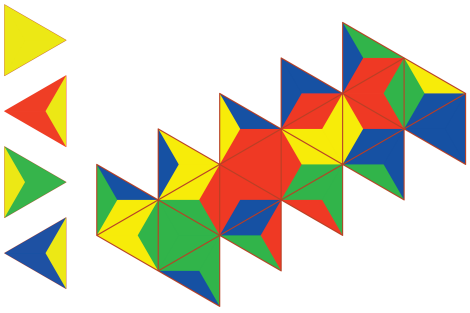


Figura 9. Grupo IV: AAA, AzAzA, VVA y RRA

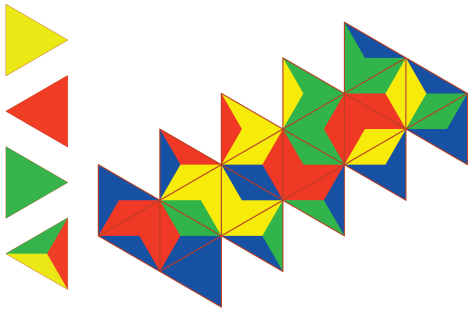


Figura 10. Grupo V: AAA, RRR, VVV y RAV

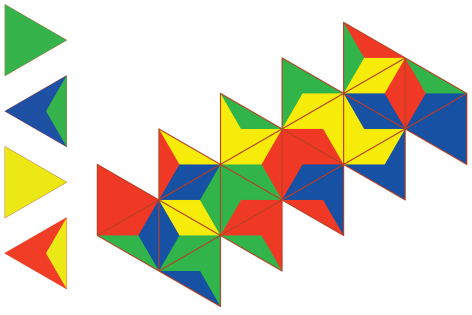


Figura 11. Grupo VI: AAA, RRA, VVV y AzAzV

La figura 12 muestra una fotografía del icosaedro construido con la combinación del Grupo VI apoyado sobre su cara de color azul.

Hasta aquí fue lo que dio de sí todo el proceso de investigación con los alumnos; pero, con posterioridad, se me fueron ocurriendo otras formas de llevar el puzle de los veinticuatro triángulos y cuatro colores al espacio.

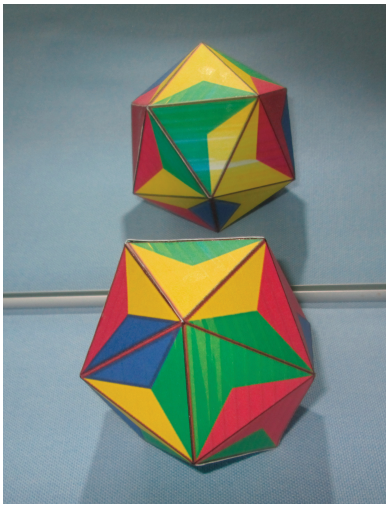


Figura 12

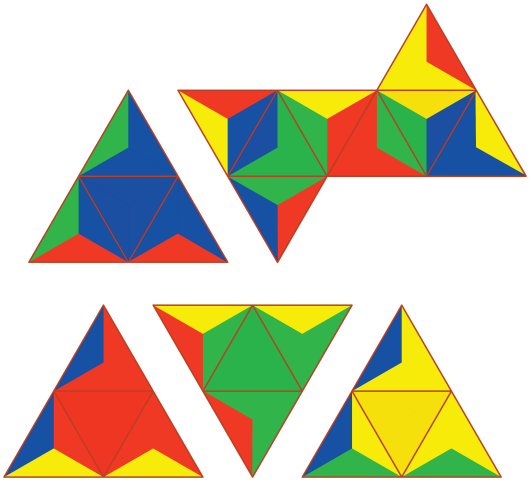


Figura 13

El gran tetraedro

Una de las posibilidades que exploré fue la de formar un tetraedro, cuya arista mida el doble que el lado de las piezas del puzle, utilizando un octaedro y cuatro tetraedros.

Después de haber trabajado con los alumnos el puzle de los tres octaedros me fue más fácil saber qué piezas de las veinticuatro debería de colocar, en los tetraedros y en el octaedro, y dónde hacerlo para que el puzle tuviese solución. Colocar el resto de piezas fue tarea algo más complicada. El desarrollo de la solución que encontré puede verse en la figura 13 y una imagen del gran tetraedro construido se puede observar en la figura 14.

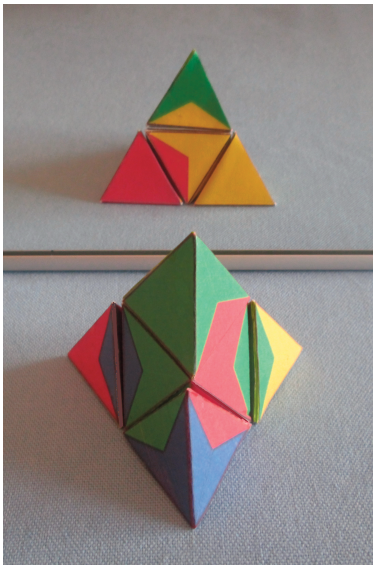


Figura 14

El calidociclo de MacMahon

Ni siquiera a los alumnos se les pasó por alto la posibilidad de poder construir, con las veinticuatro piezas, seis tetraedros, pero siempre terminábamos desechándola por no encontrar qué poliedro formar con ellos.

Por eso fue una revelación reencontrar en casa el libro de la matemática Doris Schattschneider y el diseñador gráfico Wallace Walker *M.C. Escher: Calidociclos*: ¡con seis tetraedros se puede construir un calidociclo!

Según la definición dada en este libro, un calidociclo es un anillo tridimensional compuesto de tetraedros idénticos que pueden girar continuamente en torno a su centro. El orden del calidociclo es el número de tetraedros que lo forman y este orden ha de ser par y mayor o igual que seis.

Con los 24 triángulos de nuestro puzle podemos hacer un calidociclo de orden 6; pero existe un problema ya que los tetraedros de un calidociclo de orden seis han de estar formados por triángulos isósceles y los triángulos del puzle de MacMahon son equiláteros.

Como pude descubrir en los trabajos de Julio Castiñeira *Poliedros y calidociclos* y *Calidociclos y anillos de tetraedros*, para que una cadena de seis tetraedros se pueda cerrar, el ángulo desigual de los triángulos isósceles ha de ser menor o igual a 53º 8', o lo que es lo mismo, la altura de estos triángulos isósceles ha de medir tanto o más que su lado desigual tomado como base. Por ello no puede existir un calidociclo de orden seis regular, es decir, construido con triángulos equiláteros. Si tomamos este ángulo exactamente igual a 53º 8' el calidociclo será cerrado (el agujero del anillo desaparece al girarlo).

Se puede resolver este problema rellenando la plantilla del calidociclo con los triángulos equiláteros hasta conseguir la congruencia y, después, con un programa de tratamiento de imagen aplicar un factor de expansión vertical del 87 % para conseguir que los triángulos sean los adecuados.

En la plantilla del calidociclo que se muestra en la figura 15 se han numerado las casillas de manera que las que tienen el mismo número han de ser del mismo color.

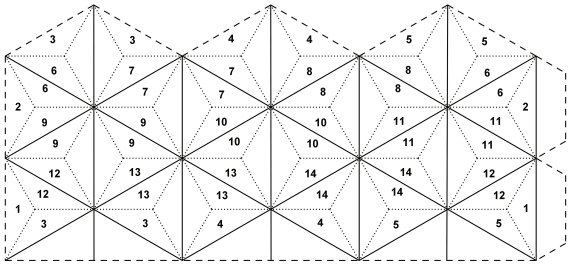


Figura 15

Si solo queremos que el calidociclo sea congruente al pegarlo es suficiente con que lo sean las casillas numeradas con 1, 2, 3, 4 y 5. En la figura 16 muestro una solución de este caso en la que además he conseguido, en la medida de lo posible, cumplir con la restricción que MacMahon ponía a sus puzles, a saber, que el contorno de la figura sea del mismo color.

Si además queremos que al girar el calidociclo los hexágonos que se forman cuando los tetraedros se unen, sean también congruentes, hay que conseguir esto con todos los números que aparecen en la plantilla. Debemos de tener en cuenta que esto solo se observará mirando el calidociclo desde uno de sus lados. Una solución a este caso se muestra en la figura 17. En las figuras 18, 19, 20 y 21 se pueden observar las cuatro posiciones que adopta el calidociclo cuando se gira.

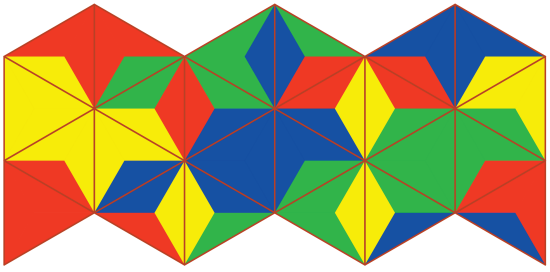


Figura 17

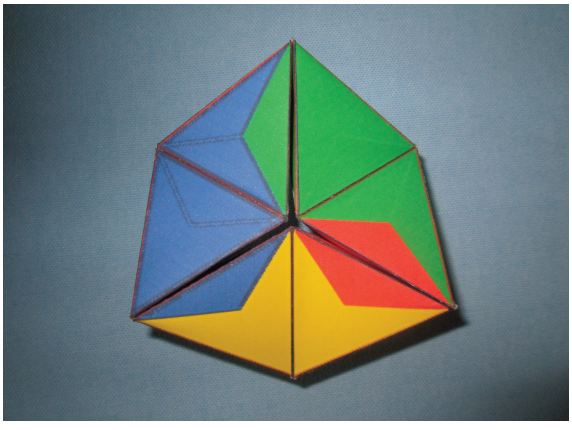


Figura 18

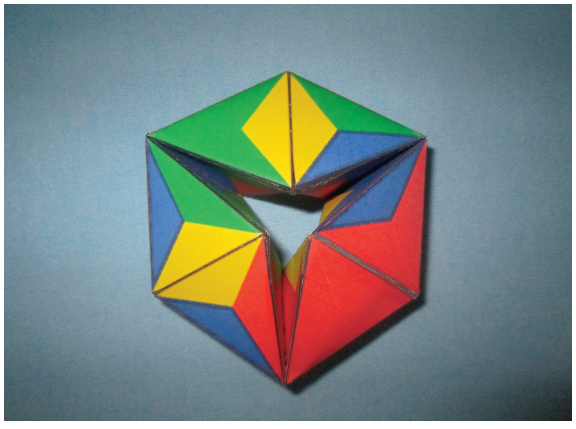


Figura 19

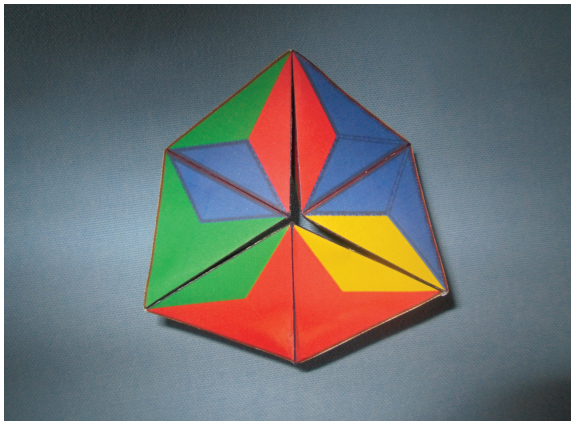


Figura 20

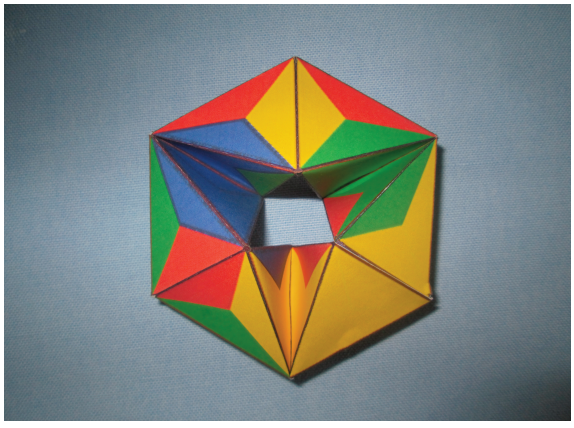


Figura 21

Resolver este puzle no es nada fácil. Para dar con una solución utilicé un procedimiento similar al que utilizaron los alumnos para construir el icosaedro, es decir, exploré las distintas posibilidades que se presentan en la distribución de los colores.

Si se observa la plantilla de la figura 15 se puede ver que en total aparecen doce rombos verticales (con su diagonal mayor vertical) formado cada uno por dos triángulos del mismo color y doce parejas de rombos, que llamaré horizontales, aunque realmente tienen su diagonal mayor inclinada; cada una de estas parejas ha de ser del mismo color. Además, entre las veinticuatro piezas del puzle hay dieciocho triángulos de cada color con lo que se pueden formar nueve rombos de cada color.

Por otra parte la pieza que tiene los tres triángulos de un solo color, al colocarla en la plantilla, genera necesariamente un rombo vertical y dos parejas de rombos horizontales (una en cada línea

horizontal) lo que supone un total de cinco rombos. Esto puede verse más claramente observando en la figura 17 la pieza que es toda azul o la que es toda verde; con la roja y la amarilla pasa lo mismo, pero es más complicado verlo porque están en el borde de la plantilla, pero hay que pensar que la parte de arriba de la plantilla se une con la de abajo y la parte derecha con la izquierda.

Por todo lo anterior podemos concluir que, el número de rombos verticales de un color ha de ser un número impar mayor o igual que uno y menor o igual que cinco y el número de rombos horizontales de cada color, tiene que ser un número par mayor o igual que cuatro y menor o igual que ocho.

Con estas restricciones se deduce que solo existen tres grupos de posibilidades a la hora de repartir los cuatro colores entre los treinta y seis rombos de la plantilla:

Grupo I: tres rombos verticales y seis horizontales de cada color (figura 22).

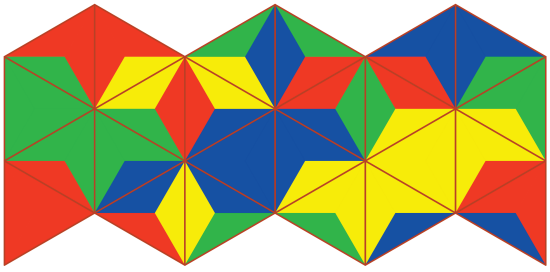


Figura 22

Grupo II: un rombo vertical y ocho horizontales de un color (en el ejemplo, verde), cinco verticales y cuatro horizontales de otro color (en el ejemplo, amarillo) y tres verticales y seis horizontales de los dos colores restantes (rojo y azul) (figura 17).

Grupo III: un rombo vertical y ocho horizontales para dos colores (en el ejemplo, rojo y verde) y para los otros dos, cinco verticales y cuatro horizontales (azul y amarillo) (figura 23).

Por esa tendencia natural hacia el equilibrio y la simetría, empecé a buscar una solución con la combinación del Grupo I. Llegué casi a medio centenar de intentos, consiguiendo en algunos casos colocar todas las piezas salvo una, debido a que el orden de los colores era distinto al del hueco que quedaba.

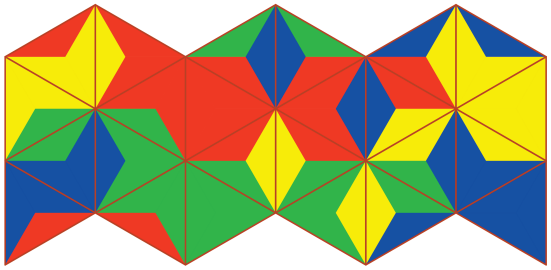


Figura 23

Desesperado por estos resultados, pasé a intentarlo con la combinación del Grupo II y resultó que, en unos cuantos intentos, encajé todas las piezas (figura 17).

Después me puse a probar con el Grupo III y, aunque este provoca muchas restricciones en la distribución de los triángulos horizontales de aquellos colores que solo disponen de un rombo vertical, lo conseguí después de algunos intentos más que con el Grupo II. Puede verse esta solución en la figura 23.

Por último se me ocurrió utilizar la solución del Grupo II para encontrar una solución al Grupo I y, efectivamente, apareció cambiando solo el color de una pareja de rombos horizontales. Esta solución se muestra en el figura 22.

En todo este proceso de encontrar una solución asocié, para llevar un control y no repetirme, cada uno de estos intentos a una matriz cuatro por tres, donde las filas representan las líneas de rombos horizontales y las columnas las parejas de estos rombos, y en la que colocaba en cada una de las cuatro filas las iniciales de los colores correspondientes a las parejas de rombos horizontales que contenían. Por ejemplo, las matrices asociadas a las soluciones de la figura 22, figura 17 y figura 23 serían, respectivamente:

$$\begin{pmatrix} R & V & Az \\ V & A & R \\ V & Az & A \\ R & Az & A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R & V & Az \\ V & A & R \\ V & Az & A \\ R & Az & A \end{pmatrix}$$

$$\text{y} \begin{pmatrix} R & V & Az \\ A & R & R \\ V & R & A \\ Az & V & V \end{pmatrix}$$

Posteriormente cambié estas iniciales por los números del uno a cuatro, con el objeto de no repetir la misma combinación con los colores intercambiados.

Cada matriz no genera una única plantilla pues, aunque sí determina el color de los rombos verticales, podemos variar la posición de estos; por ello, con cada matriz probaba las distintas combinaciones y anotaba aquella en la que el número de piezas que quedaban sin colocar era menor.

Hay que tener en cuenta también, que una permutación cíclica de las filas o columnas de estas matrices generan la misma plantilla, lo cual reduce considerablemente el número de posibilidades aunque siguen siendo muchas.

Para terminar quisiera hacer una reflexión acerca de lo que ha supuesto para mí, y para mis alumnos todo este trabajo desarrollado. Cuando empecé los estudios de Matemáticas una de las cosas que más me chocaba era que nuestros profesores nos hicieran aprender las demostraciones de todos aquellos teoremas que íbamos viendo, pensaba que solo el resultado era lo realmente importante. Pronto comprendí la finalidad de ello y entendí que en una obra de arte no solo importa el producto final, el proceso seguido por el artista hasta llegar a ella es igual de valioso.

De la misma forma solemos cometer este error con nuestros alumnos e intentamos transmitir la bondad de las matemáticas solo a través de sus resultados y a menudo nos olvidamos de los procesos. Por ello considero que con este tipo de actividades, en las que los resultados no son tan sorprendentes o útiles como aquellos que solemos enseñar en la clase ordinaria, pero en las que los alumnos se involucran en el proceso de construcción e investigación, contribuyen a que sepan reconocer lo valioso que es el trabajo que está detrás de cualquier resultado.

Referencias bibliográficas

Castiñeira, J. (2009), *Poliedros y calidociclos*, Centro de Formación del Profesorado e Innovación Educativa de Valladolid, <https://es.scribd.com/document/329934128/Calidociclos-y-Poliedros>.

— *Calidociclos y anillos de tetraedros*, IES Marqués de Lozoya de Cuéllar (Segovia), <http://studylib.es/doc/5599229/calidociclos-y-anillos-de-tetraedros-julio-casti%C3%B1eira-mer>.

Fernández-Aliseda, A., J. Muñoz y J. A. Hans (2010), «MacMahon y las matemáticas en colores», *Suma*, n.º 63, 51-57.

Schattschneider, D., y W. Walker (2015), *M.C. Escher: Calidociclos*, Taschen, Colonia (Alemania).

José Luis Martín Montaño
IES Mediterráneo, Salobreña (Granada)
<correo@electron.ico>

1 Todas las figuras de este artículo han sido realizadas con GeoGebra Clásico 5, (2017).

2 Puedes intentar resolver estos puzles visitando la web de GeoGebra y escribiendo, en la búsqueda de recursos, «MacMahon».

secciones



suma+ 87
Secciones
Marzo 2018
pp. 51-54

Tareas ricas para trabajar con decimales

David Barba Uriach
Cecilia Calvo Pesce

Ell@s tienen la palabra

Tal como comentamos en las entregas previas de esta sección dedicada a las matemáticas en primaria, nuestra intención es la de analizar dinámicas de clase centradas en la conversación y la comunicación. Nos interesamos especialmente por actividades ricas que podemos proponer para generar este ambiente de clase y por las preguntas que podemos formular a los alumnos durante la ejecución y discusión de estas actividades para fomentar conversaciones que les permitan construir nuevos conocimientos y los inviten a comunicar sus razonamientos.

En esta entrega propondremos analizar un conjunto de tareas ricas asociadas al estudio de los números decimales que permiten generar un ambiente de clase centrado en la comunicación y en la construcción del conocimiento a partir de la voz de los alumnos. Al igual que Afzal Ahmed en su libro *Better Mathematics: A Curriculum Development Study,* entendemos por tareas ricas aquellas que en un inicio son accesibles a todos los alumnos pero permiten plantear nuevos retos a partir del enunciado inicial. Aquellas que invitan a los alumnos a tomar decisiones, a que especulen, que formulen hipótesis, que justifiquen, que expliquen, que reflexionen, que interpreten…, que promuevan el debate y la comunicación, alentando preguntas del tipo «¿qué pasaría si?».

Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2017 y aceptado en enero de 2018

En esta entrega plantearemos nuestra preocupación por la manera en que habitualmente introducimos a los alumnos en el trabajo con números decimales, muy alejada de la atención y el mimo con que los introducimos en el trabajo con números naturales: aumentando el rango de números con los que trabajamos de manera gradual, combinando la manipulación con la representación simbólica, presentando las operaciones mucho antes que sus algoritmos, ofreciendo situaciones contextuales para dar soporte a las deducciones…

Estas reflexiones son aplicables tanto en el momento de trabajar la numeración decimal (representación sobre la línea numérica, redondeo…) como las operaciones con este tipo de números, la estimación de sus resultados y sus algoritmos asociados.

Es importante que los alumnos dispongan de oportunidades para hablar sobre nuevas propiedades de las operaciones que no se daban al trabajar con números naturales. Por ejemplo, con decimales ya no es cierto que el resultado de la multiplicación sea mayor que los factores (con los naturales eso sucede a menos que uno de los factores sea 1 o 0). Esta propiedad es evidente en el contexto del dinero: al comprar 6 panecillos a 70 céntimos cada uno debemos pagar menos de 6 euros ($6 \times 0{,}70 < 6$).

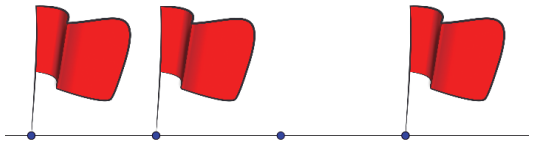
Ejemplos de tareas

Presentaremos a continuación una muestra de tareas que creemos que respeta el espíritu de lo comentado en los párrafos anteriores, reclamando de los alumnos que más allá de ejecutar unos procedimientos concretos apliquen estrategias de resolución de problemas como el pensamiento exhaustivo, busquen patrones que les permitan profundizar en sus conocimientos sobre este campo numérico y comuniquen y argumenten sus hallazgos.

Acompañamos cada tarea de un pequeño comentario, en ocasiones sobre la gestión, en ocasiones sobre la solución y en ocasiones sobre el lugar donde hemos conocido la propuesta, aunque haya sido modificada.

Tarea 1: Banderas

Sabemos que en la imagen los cuatro puntos son equidistantes y dos de las banderas están en los números 1,3 y 2,2. ¿En qué número está la otra bandera?



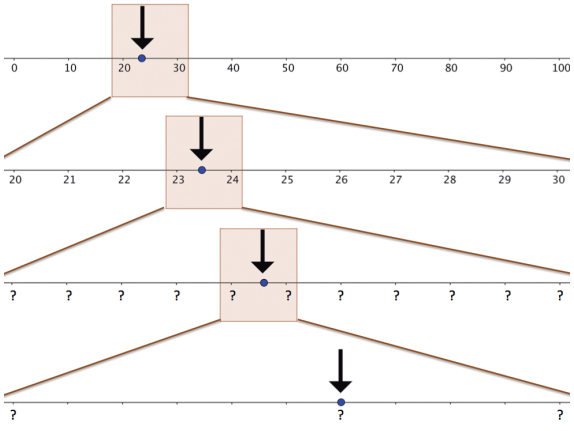
A diferencia de formulaciones similares, como la de la figura 1 que tiene una única solución, la tarea que planteamos aquí para trabajar la línea numérica tiene tres respuestas posibles ya que no se indica cuál es la bandera de la que no se conoce el número: puede ser 3,8, 1,6 o 0,85.



Figura 1

Tarea 2: Zoom

Interpreta la imagen y completa los valores indicados con "?"



En esta tarea, basada en la propuesta «Zoom»[1] del blog *Median* de Don Steward, se propone al alumno que interprete la colocación de números en la línea numérica en base al uso de ampliaciones de intervalos que se dividen en 10 partes iguales, como el nombre decimal indica. Enten-

demos que la noción de lupa, aquí involucrada y que también se recoge en el applet *Spaceflight* del Instituto Freudenthal[2], es central para comprender la existencia de décimas, centésimas, milésimas, etc.

Tarea 3: Dígitos y comas

Utiliza los dígitos 3, 4, 5, 6 y una coma para formar:

— el mayor número que se aproxime a 5

— el menor número que se aproxime a 4.

En esta tarea, basada en la propuesta «Nearest to» del blog *Median*[3], es importante dar a los alumnos oportunidad para explicitar la estrategia utilizada para encontrar las respuestas 5,463 y 3,546. Pretendemos así ir mucho más allá de incorporar «truquillos» de redondeo, para llegar a entender que los números que se aproximan a 5 son todos los del intervalo entre 4,5 y 5,5 (incluyendo el extremo izquierdo de este intervalo pero no el derecho, ya que 5,5 es el primer número que formalmente se redondea a 6) y con los dígitos 3, 4, 5 y 6 el mayor número que podemos construir en este intervalo es 5,463.

Tarea 4: Restas decimales

□,□□ – □,□□

Completa con dígitos diferentes las seis celdas de manera que el resultado sea el más grande o el más pequeño posible.

En esta tarea, inspirada en las muchas del estilo que se proponen en el portal <http://www.openmiddle.com/>, tiene mucho más interés la pregunta sobre el resultado más pequeño posible ya que para encontrar el mayor resultado basta con considerar que este se obtiene restando los números más grande y más pequeño posibles: 9,87 – 0,12 = 9,75. Sin embargo, para obtener el menor resultado hay que considerar que se deben restar números muy cercanos y ello es independiente de su parte entera. Valen pues restas del tipo ,01 – ,98 = 0,03 donde y pueden ser 2 y 3, 3 y 4, 4 y 5, 5 y 6 o 6 y 7.

Tarea 5: Sumas decimales

Completa las celdas, cada una con un dígito diferente elegido entre 1 y 9, de manera que

□□□ + □□ ,□ + □ ,□□

— tenga el mayor (o el menor) resultado posible

— tenga un resultado concreto, por ejemplo, 228,69

— tenga el resultado más cercano posible a 600.

Mientras que la respuesta a la pregunta de cuáles son el mayor y el menor resultado posible son únicas, las respuestas a cómo se obtienen tales resultados son variadas por lo cual podemos limitarnos a pedir un ejemplo o dos en cada caso (1 065,51 se obtiene, por ejemplo, con la suma 986 + 75,3 + 4,21 y 166,59 se obtiene, por ejemplo, con la suma 124 + 35,7 + 6,89). Lo mismo sucede con el resultado más cercano a 600 que es 599,76 (que se obtiene, por ejemplo, con la suma 521 + 73,9 + 4,86) seguido por 600,39 (que se obtiene, por ejemplo, con la suma 512 + 83,6 + 4,79).

En el caso del resultado 228,69 hay 48 soluciones posibles pero en todo caso es interesante que los alumnos descubran que cuando tienen una solución (153 + 67,2 + 8,49 o 135 + 86,2 + 7,49) de inmediato tienen otras 23 variando de lugar los dos dígitos que ocupan las décimas (2 y 4), los tres que ocupan las unidades (3, 7 y 8 en un caso y 5, 6 y 7 en el otro) y los dos que ocupan las decenas (5 y 6 o 3 y 8).

Tarea 6: Multiplicaciones decimales

Elige dos números ▲ y △ que sumen 1 y calcula

▲ x ▲ + △

△ x △ + ▲

¿Qué observas?

Esta tarea, pensada para practicar multiplicaciones y sumas entre números decimales, invita a descubrir la regularidad de que las dos operaciones combinadas propuestas tienen siempre el mismo resultado, lo cual se justifica en la figura 2.

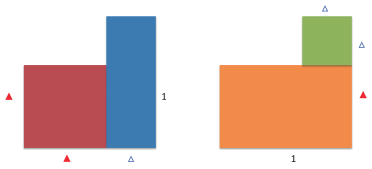


Figura 2

Tarea 7: Dígitos repetidos

Completa las celdas □□ : □ de manera que el resultado que se obtenga al realizar la operación con la calculadora sea un número decimal formado por un único dígito repetidamente. Por ejemplo: 20:9=2,222222 o 44:5=8,8

¿Cómo varía la cantidad de soluciones si el dividendo pudiera tener tres cifras? ¿Y si el divisor pudiera tener dos cifras?

Esta tarea sobre divisiones entre dos números naturales y resultado decimal[4] está inspirada en la propuesta «Noodle Whack» del portal *Transum*[5] y permite familiarizarse con la existencia de números con infinitas cifras decimales y en el tratamiento que hacen las calculadoras de este tipo de números.

Para el caso de un dividendo de 2 cifras y un divisor de una única cifra, las soluciones son: 10:9, 20:9, 30:9, 40:9, 44:8, 20:6, 33:6, 11:5, 22:5, 33:5, 44:5, 22:4, 10:3 y 11:2. Vale la pena observar que, por ejemplo, 20:3 no sirve porque la mayoría de las calculadoras ofrecen como resultado 6,666667 (figura 3) lo que da origen a una interesante discusión para plantear a los alumnos.

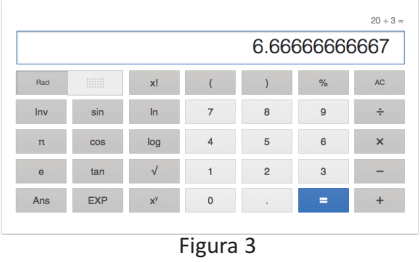
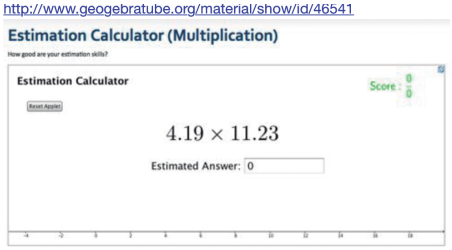


Figura 3

Tarea 8: Estimar

http://www.geogebratube.org/material/show/id/46541



La tarea «Estimation Calculator»[6] es una de aquellas tareas en que su carácter virtual es importante debido al *feedback* que da al alumno cuando este propone un valor aproximado para el resultado. Más allá de dar por válida o no su respuesta le informa sobre el error que ha cometido. Pero que sea virtual no la restringe a ser una tarea individual, creemos que la discusión colectiva sobre las estrategias utilizadas para dar buenos resultados es un elemento central en el trabajo con multiplicaciones decimales.

Reflexión final

En esta entrega nos hemos centrado en tareas para trabajar con decimales, buscando dedicarles el tiempo y esfuerzo que dedicamos cuando trabajamos con números naturales.

Creemos que debemos aprovechar la oportunidad que nos brinda la necesidad de dedicar tiempo a la práctica de procedimientos con decimales, para ir más allá de la mera práctica repetitiva: atendiendo a la representación de números en la línea numérica, al cálculo aproximado, a la búsqueda de patrones y regularidades en los resultados del cálculo y también al fomento de una actitud básica en la resolución de problemas: el interés por encontrar todas sus soluciones y no únicamente la primera que aparece.

David Barba Uriach
Universitat Autònoma de Barcelona

Cecilia Calvo Pesce
Escola Sadako (Barcelona)
<tienenlapalabra@revistasuma.es>

1 <http://donsteward.blogspot.com.uy/2017/05/zoom.html>.
2 <http://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/03127/task2.html>.
3 http://donsteward.blogspot.com.uy/2013/12/nearest-to.html>.
4 Encontrareis más información en: <https://puntmat.blogspot.com.es/2018/01/practica-de-divisions-decimals.html>.
5 <http://www.transum.org/software/SW/Starter_of_the_day/starter_January3.asp>.
6 <https://www.geogebra.org/m/pYzZ8eU6>.

suma+ 87
Secciones
Marzo 2018
pp. 55-58

Usar las soluciones de los alumnos

Carme Burgués Flamarich

Preparar a nuestros alumnos para un mundo complejo y cambiante exige de nosotros una constante puesta a punto. Cada vez más, los docentes tratamos de encontrar soluciones a los problemas de la educación matemática de niños y jóvenes y, cada vez más, buscamos la ayuda de nuestros compañeros en vivo y en directo o en los medios digitales. En el segundo caso, el alud de información no seleccionada y la falta de tiempo hace que desistamos de la búsqueda o bien que elijamos con poco acierto.

El sentido de esta sección ha sido seleccionar información que he creído que podía interesar a los sumamente comprometidos con la educación matemática. En el caso del tema que he pensado para este número es igualmente cierto pero con algunos inconvenientes que detallaré mas adelante.

Vayamos al tema. ¿Qué hace con las soluciones de sus alumnos en las tareas que propone?

Cuando planifica la actividad, ¿puede prever qué soluciones aparecerán?

En caso afirmativo, ¿usa este conocimiento para planificar el soporte que necesitarán? Por ejemplo, ¿qué preguntas planteará durante su resolución?

Cuando encuentra actividades interesantes, ricas, abiertas, etc., ¿se ocupa de conocer qué so-

Vale la pena

Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2017 y aceptado en enero de 2018

luciones han obtenido otros alumnos al realizarla?

Cuando ensaya una actividad que no había propuesto anteriormente, ¿qué hace para planificar su evaluación?, ¿y para el soporte?, ¿piensa en ampliaciones?

¿Usa las respuestas para aprender a analizar el tipo y complejidad de conocimientos de sus alumnos? En caso afirmativo, ¿lo hace conjuntamente con otros docentes?

¿Necesita planificar actividades de evaluación o bien usa las actividades usuales de clase?

Estas y otras cuestiones están relacionadas con las resoluciones de nuestros alumnos a las tareas que les planteamos. Entenderemos como resoluciones algo más que un par de palabras o cantidades, es decir, implican exponer cómo y por qué se ha optado por ese método, cómo sabe que la solución es válida, etc. Todo ello sobre papel (o en un archivo digital), usando representaciones de las ideas matemáticas, frases, números…

Excepto para los más pequeños, que pueden explicar su resolución solamente a nivel oral, el registro escrito permite volver sobre él para profundizar, revisar las representaciones y, muy especialmente hace posible la evaluación formativa. Aunque se compartan con la clase las resoluciones a nivel oral, el registro escrito lleva al alumno a organizar su pensamiento y a revisar las representaciones.

Vean el artículo «Pupils' Recording or Pupils Recording» en <https://nrich.maths. org/5451> sobre la necesidad y la utilidad de hacer que los alumnos registren sus hallazgos.

Hay algunas situaciones en las que un docente agradecería poder tener diferentes soluciones de los alumnos a tareas que considera interesantes. Por ejemplo si se trata de actividades no experimentadas, tanto si es un profesor novel como si se trata de uno que quiere cambiar su metodología, introduciendo por ejemplo actividades ricas y abiertas.

Y no digamos en el caso del diseño de actividades de evaluación, donde hay que prever indicadores para la evaluación.

Tener soluciones diferentes también permite planificar tareas para sus alumnos. Para intentar comprender soluciones de otros, compararlas, ver alternativas, valorarlas…

Si encontramos soluciones a tareas, que estén comentadas, relacionando las representaciones o razonamientos con niveles de adquisición, comprensión de la estructura detrás de la situación, etc.

Aquí tienen algunos lugares donde encontrar actividades y soluciones, algunas veces comentadas.

En *Enriching Mathematics* (NRICH), página que comenté en *Suma* 72 de marzo de 2013 encontrarán cientos de actividades de todos los niveles con las soluciones que han enviado alumnos, grupos o clases. Se trata de actividades ricas y que tienen mucho potencial. En la presentación de la actividad para el maestro/profesor se justifica su interés para la clase, se dan indicaciones para su gestión, preguntas relevantes a hacer a sus alumnos y se proponen ampliaciones. Si se trata de actividades que ya fueron propuestas hace un cierto tiempo, se ofrece una selección de soluciones. Se elijen las que son distintas, ya sea por su planteamiento, interpretación o por el nivel de complejidad que implica la respuesta.

En la misma web encontramos artículos sobre qué podemos hacer con nuestro alumnado con las soluciones.

Ver <https://nrich.maths.org/12939>, <https://nrich.maths.org/12986>, <https://nrich.maths.org/12988>.

Del mismo proyecto «Millenium» de *Nrich*, tenemos otra página *Wild Maths* (figura 1). <https://wild.maths.org/showcase>.

Se trata de actividades para desarrollar la creatividad dirigida a niños de 7 a 16 años que exploran las matemáticas más allá del aula.

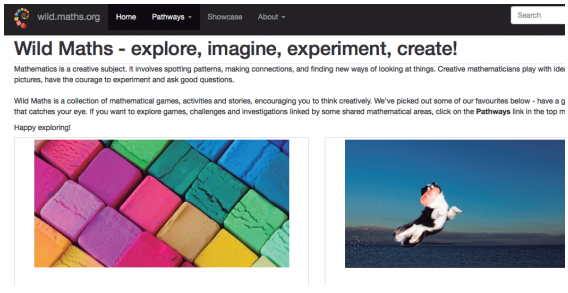


Figura 1. *Wild Maths*

Proporcionan juegos, investigaciones, historias y espacios para explorar dónde hay descubrimientos por hacer. Las actividades se han diseñado para alentar a los chicos y jóvenes a ser más matemáticamente creativos al tomar decisiones, desarrollar sus propias ideas y usar todo lo que quiera para ayudarlo. En este caso, en el apartado *showcase* encontramos soluciones seleccionadas.

En la página de la *Nuffield Foundation* dedicada a actividades sobre procesos matemáticos, <http://www.nuffieldfoundation.org/applying-mathematical-processes/nuffield-amp-practical-explorations> accesibles a los alumnos de ESO, hay 20 actividades. Las notas del maestro para cada actividad incluyen ejemplos anotados del trabajo de los alumnos, el equipo requerido, las características matemáticas principales, la idoneidad para el trabajo en grupo y las oportunidades de extensión.

En el blog *Banc de Recursos del Fem Matemàtiques*, <http://bancfm.blogspot.com.es>, (figura 2), encontramos los problemas de *Fem Matemàtiques* que son un buen recurso para los profesores de matemáticas que quieran trabajar actividades competenciales en sus aulas. De hecho, ha sido una demanda hecha por los mismos profesores en la asociación ABEAM que históricamente han pedido las soluciones, resoluciones, pautas e indicaciones para trabajar los problemas de la actividad en las aulas más allá del concurso. Además de la solución dan orientaciones relacionadas con el propósito con que puede abordar cada problema, los contenidos, conceptos y procesos que se ponen en juego al trabajarlo, las competencias que se ven más implicadas y propuestas de una evaluación competencial y valoraciones de los niveles mostrados por los alumnos a partir de respuestas enviadas en los trabajos de la primera y segunda fase del concurso.

Se muestran respuestas diversas extraídas de los informes de los alumnos participantes en el concurso, así se da una visión del amplio abanico de respuestas, estrategias y procesos que el alumnado de este nivel puede mostrar, muchas veces sorprendentes y diferentes a lo que nuestra visión de adulto daría.

Fem Matemàtiques es un concurso que tiene la finalidad de contribuir a desarrollar la competencia matemática en todo el alumnado de sexto de primaria y primer ciclo de la ESO. También permite intercambiar experiencias y compartir propuestas por parte del profesorado de las diferentes comarcas de Cataluña.

Se trata de una actividad organizada anualmente por la FEEMCAT con el apoyo del Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya. Está dirigida a todos los alumnos de sexto de primaria y primero y segundo de ESO de los centros escolares de Cataluña. Se organiza en forma de concurso y se desarrolla en tres fases. Los alumnos de segundo de ESO, mejor clasificados en la última fase, son los representantes de Cataluña en la Olimpiada matemática anual que se organiza desde la FESPM.

La página *Bowland Maths Assessment tasks*, (figura 3) <http://www.bowlandmaths.org.uk/index.html> incluye una colección de más de treinta tareas con guías de progresión para apoyar la evaluación formativa de la mejora en razona-



Figura 2. *Fem Matemàtiques*

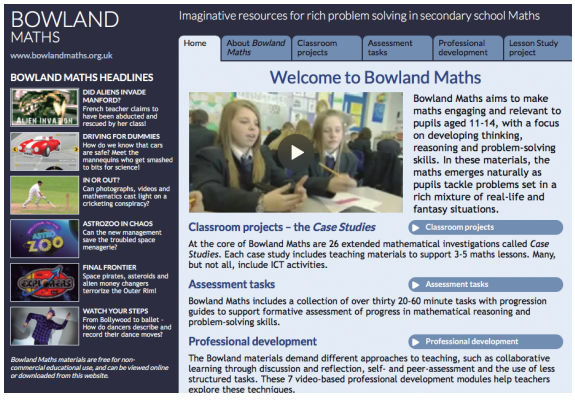


Figura 3. *Bowland Maths Assessment tasks*

miento matemático y habilidades para resolver problemas.

Para ayudar con esta evaluación, cada tarea incluye un trabajo de muestra de alumnos y una «tabla de progresión» que muestra cómo el trabajo de los alumnos en esta tarea puede proporcionar evidencia de su progreso con los cuatro procesos clave. Aunque se etiqueten como tareas de evaluación, están diseñadas como actividades ricas y pueden ser usadas en la actividad normal del aula. Al descargar la guía de la actividad para el profesor se obtienen además algunas soluciones a la tarea de los alumnos.

En *K-5 Math Teaching Resources*, <https://www.k-5mathteachingresources.com/> hay una sección muy interesante dedicada a los diarios de clase «Math Journals» en la que describe los beneficios de registrar las tareas en diarios de clase. Además proporciona ejemplos de producciones de alumnos, en respuesta a tareas interesantes, organizadas por cursos.

Algunas webs dedicadas a la evaluación contienen ejemplos de respuestas de alumnos:

Inside Mathematics <http://www.insidemathematics.org/performance-assessment-tasks> de segundo de Educación Primaria hasta ESO.

Mathematics Assessment Resource Service <http://map.mathshell.org/lessons.php?unit=6300&collection=8&redir=> para ESO.

Y, finalmente, la página de *Math Mistakes* (figura 4), <http://mathmistakes.org/>, donde se publican los errores que mandan los docentes con comentarios sobre posibles causas del error. Están clasificados por temas y edades.

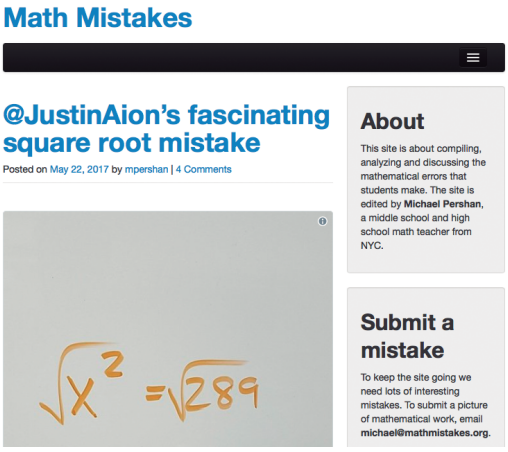


Figura 4. *Math Mistakes*

Al inicio he comentado el interés para todos los docentes de disponer de respuestas posibles de los alumnos a actividades de interés. Este tipo de recurso solo es posible si se canaliza a través de una web especializada en educación matemática, como las páginas de las sociedades de profesores de matemáticas o de la administración educativa, o aquellas que proponen actividades para el aula. También sería importante para la mejora del diseño e interpretación de pruebas de evaluación, ¡cuando sean necesarias!

Desde hace mucho tiempo, maestros y profesores reclaman este tipo de recurso que sería un importante soporte para los que se quieren lanzar a cambios metodológicos profundos. Queremos alumnos IN-IN, intelectualmente independientes y sean ustedes IL-IL, ilimitadamente ilusionados.

Carme Burgués Flamarich
Universidad de Barcelona
<valelapena@revistasuma.es>

suma+ 87
Secciones
Marzo 2018
pp. 59-69

GeoGebra con un dedo

3D en Educación Infantil

Bernat Ancochea
Isabel Sorigué
José Luis Muñoz Casado (coordinador)

El alumnado de Educación Infantil, niñas y niños de 3 a 5 años, aprenden los conceptos matemáticos tocando, mirando y jugando. Manipulan los objetos (lo más reales posible) para discriminar su forma, observan sus características (si giran y qué trayectoria siguen, si tienen «puntas» …) y las relaciones que pueda haber entre ellos (si se pueden poner unos dentro de otros, si son más grandes o más pequeños…) y hacen razonamientos y pruebas de las que deducen unas conclusiones que pueden ser más o menos acertadas o ciertas.

También aprenden con las imágenes: dibujos y fotografías de lo que ven en la calle, en la escuela o en los libros, presentadas por el profesorado o en un ordenador con diferentes herramientas incluyendo GeoGebra.

Os podéis preguntar qué hace una profesora de infantil hablando de GeoGebra si este programa se utiliza básicamente en secundaria y la universidad (y cada vez más en primaria). ¿Qué pueden hacer con él unos niños y niñas tan pequeños? ¿Qué habilidades tienen para utilizar un programa en principio tan complicado?

Hay que aclarar que nosotros utilizamos GeoGebra por los conceptos geométricos, no los algebraicos o los de cálculo.

Las actividades que presentamos son fruto de una colaboración pedagógica y técnica de una

CreoGebra

Artículo solicitado por *Suma* en julio de 2017 y aceptado en septiembre de 2017

profesora de educación infantil y de un profesor de secundaria. Las diferenciamos en tres grandes bloques:

1. *Bloque de actividades libres.* Son las que tienen la vista gráfica en blanco y las herramientas para dibujar figuras, tanto en 2D como en 3D. Decimos dibujar y no construir puesto que esto último lo dejamos para niveles superiores. En este bloque el alumnado experimenta dibujando, pero, como GeoGebra no es un programa de dibujo, estamos trabajando la geometría y, por tanto, representando la realidad con líneas, figuras geométricas y cuerpos.

   Cuando quisieron dibujar un cohete utilizaron un cilindro y pusieron encima un cono. Como se trata de un programa dinámico y lo que dibujan se puede mover y modificar, lo que inicialmente era un cohete se convirtió, modificando la altura del cilindro y su radio, en una carpa de circo y luego en un *plastidecor*.
2. *Bloque de actividades guiadas.* Son las que proponemos nosotros, con una consigna determinada. Son siempre actividades que hemos hecho y cuyos conceptos hemos trabajado previamente en el aula con material o con imágenes y que nos dan la posibilidad de trabajarlas a continuación con herramientas como GeoGebra.

   Por ejemplo, ver la simetría de una silla, mover un coche para verlo desde diferentes puntos de vista (desde arriba, desde abajo, de lado), jugar con las baldosas en forma de rombo que hay en la estación de metro próxima a la escuela incluyendo fotografías, ayuda mucho a que los conceptos que aprenden estén lo más próximos de la realidad que sea posible.
3. *Bloque de actividades personales.* Son el resultado de la experimentación y de las reflexiones que hacen. A menudo, explican al resto de la clase lo que descubren y pensamos que sería una buena idea reproducir sus descubrimientos utilizando el programa. Por ejemplo, si cortamos un plátano por la mitad sale un círculo y si juntamos varios círculos acaba saliendo un plátano. También utilizamos el libro de los espejos para ver cuántos botones se ven a medida que vamos abriendo o cerrando el libro. Observaron cómo gira sobre sí mismo un cornete de un helado y que una barra de cola gira generando una línea recta.
4. *Bloque de actividades para resolver dudas,* las que expresan por su cuenta o las que nosotros detectamos. Por ejemplo, para ver la diferencia entre un prisma y una pirámide creamos una animación en la que la superficie superior del prisma se hacía cada vez más pequeña hasta convertirse en un punto.

Estos son solo algunos de los ejemplos de lo que puede llegar a hacer el alumnado de Infantil de 3, 4 y 5 años y se puede decir que está garantizada la motivación porque es como si estuvieran jugando, como es el caso de una alumna que movía una pirámide en la pantalla digital y expresó que estaba jugando con una pirámide.

El uso de las herramientas del programa (eliminando, si es necesario, las que no se hacen servir) no representa ninguna dificultad motriz porque han nacido en la era digital y están muy acostumbrados a vivir en el entorno tecnológico actual y ver imágenes continuamente. Nos encontramos con el hecho curioso de que un alumno de 3 años, en la pizarra digital, quería hacer un círculo más grande y para ello utilizó las dos manos imitando los dedos cuando los usamos en el móvil. En resumen, se trata de una experiencia muy gratificante y estimulante tanto para el alumnado como para el profesorado.

Otro aspecto a tener muy en cuenta es el hecho de que la utilización de GeoGebra a edades tan tempranas facilita que lo puedan seguir utilizando en etapas posteriores y, muy especialmente, en la Educación Primaria.

Advertencia previa

GeoGebra es un programa de descarga gratuita que ha ido ampliando su rango de posibilidades

desde que fue creado por el profesor Markus Hohenwarter hace ya unos quince años. Como ya se explicó en un artículo anterior, se trata de un programa que está en constante evolución. Ahora mismo dispone de aplicaciones para toda clase de dispositivos móviles y ya se está elaborando una versión para pizarra digital. También hay dos clases de versiones denominadas «clásicas», la 5 y la 6. El objetivo final es unificar al máximo los formatos de manera que un usuario se encuentre con el mismo aspecto de la interfaz del programa tanto si trabaja en un ordenador como si trabaja con un móvil. También se trata de delimitar las vistas del programa con las que se quiere trabajar: una aplicación para gráficas, otra para geometría, otra más específica para geometría 3D e incluso una de realidad aumentada. De esta manera se pretende no dispersar al usuario y que este se aplique en lo quiere hacer y no tener un gran número de vistas abiertas.

Una de las dificultades mayores con la que nos encontramos es que el profesorado no se acaba de decidir por el uso de estas nuevas tecnologías en el aula

Advertimos al lector que hemos intentado simplificar al máximo los procedimientos utilizados con el programa de manera que no es necesario tener un conocimiento exhaustivo del mismo para llevar a la práctica las actividades que proponemos. En cualquier caso, hemos incluido un apartado más técnico para los más atrevidos. Una de las dificultades mayores con la que nos encontramos es que el profesorado no se acaba de decidir por el uso de estas nuevas tecnologías en el aula por la dificultad que comporta habituarse a un programa informático, con sus menús, herramientas, comandos… Los ejemplos que mostraremos son muy sencillos de llevar a cabo en el aula y no requieren conocer a fondo el programa. En cualquier caso, en la bibliografía, incluimos enlaces a cursos sobre GeoGebra pensados para cualquier persona que quiera adentrarse en el mismo.

Marco educativo

Las capacidades que queremos que desarrollen son:

— Pensar, crear, elaborar explicaciones e iniciarse en las habilidades matemáticas básicas.
— Progresar en la comunicación y la expresión, tanto en el lenguaje verbal como en el matemático.
— Observar y explorar el entorno inmediato con actitud de curiosidad.
— Progresar en la autonomía cognitiva que genera el trabajo de investigación.
— Disfrutar con las matemáticas.

Como objetivos nos proponemos:

— Identificar las figuras tridimensionales que forman parte de elementos del entorno.
— Diferenciar las superficies planas de los objetos geométricos.
— Dibujar un cuerpo geométrico partiendo de una figura plana.
— Modificar las medidas (longitud y anchura) y ver que se transforma lo que se ha dibujado.
— Ver los objetos desde diferentes puntos de vista: encima, debajo, de lado.

En relación con estas capacidades y estos objetivos quisiéramos destacar dos frases de dos alumnos de 2.º de Bachillerato con resultados brillantes en relación al tema de la geometria analítica en tres dimensiones del currículo de este curso:

> Lo sé hacer, pero no lo sé ver (en referencia a los cálculos que se hacen con métodos analíticos).

> Me he estado mirando lo que he hecho, pero entre superfície, volumen y «otras historias» no lo tengo nada claro.

El problema pues está en el hecho que los objetivos que enunciamos ni tan solo están asumidos por el alumnado doce años más tarde.

Por otro lado, los resultados de la evaluación diagnóstica de las competencias básicas que se hace al alumnado de 4.º de ESO en Cataluña, muestran que los resultados del apartado «Espacio y forma» del currículo están por debajo de los del resto. Precisamente los resultados son

aún más bajos si se incluye algún problema de geometría 3D. ¡Hay que trabajar pues desde la base!

Descripción de la experiencia y materiales

Antes de describir la experiencia hemos añadido un conjunto de actividades previas que hay que tener en cuenta. Son actividades con materiales para observar y experimentar con ellos sus propiedades, cuestión de gran importancia en esta etapa educativa.

Las actividades que presentamos a continuación son actividades realizadas con alumnado de último curso de educación infantil (tienen entre 5 y 6 años), han trabajado con el programa en los 3 cursos anteriores aunque en mayoría de actividades de 2D.

Programamos actividades de matemáticas, aunque no tenemos sesiones programadas específicas para utilizar GeoGebra, sino que lo utilizamos como una herramienta más de las que disponemos en la clase, del mismo modo que utilizan el ordenador para buscar una imagen de una palabra que desconocen o los lápices para dibujar lo que han observado.

Realizamos las actividades con todo el grupo de alumnos (26 alumnos) en la mayoría de los casos, pero si los recursos humanos nos lo permiten es preferible con grupos reducidos de 13 alumnos. Siempre partimos de las observaciones de los alumnos, ya sean espontáneas (observar la forma de los alimentos del desayuno…) o provocadas por los maestros (clasificar objetos según su forma o propiedades).

La experiencia consta de tres tipos de actividades:

— Para conocer el programa.
— Para dibujar libremente.
— A partir de las observaciones del alumnado.

Actividades previas antes de empezar a utilizar el programa

Pedimos a los niños y niñas que traigan objetos que tienen en casa. Después de observar sus propiedades los clasifican (figura 1).

También observan lo que traen para el almuerzo identificando los cuerpos geométricos (figura 2).

Finalmente, hacemos referencia a los juguetes que hay en el aula: construcciones, bloques lógicos…

Actividades dirigidas

Las aplicaciones que hemos hecho en 3D han contado con el apoyo de Mathieu Bloissier, desarrollador de la versión 3D. Todos los materiales se pueden compartir en la web de materiales del programa que ya cuenta con miles de usuarios



Figura 1



Figura 2

repartidos por todo el mundo. Aunque en este artículo nos centraremos en el uso de la versión 3D, necesariamente tenemos que trabajar también con la vista gráfica 2D. En la bibliografía, incluimos también enlaces a aplicaciones para dicha vista.

Empezamos con actividades dirigidas de manera que el alumnado conozca las herramientas que pueden utilizar.

La plantilla con las herramientas se halla en la parte superior de la ventana del programa. En ella, contamos con herramientas para dibujar diferentes tipos de figuras: polígonos, circunferencias y elipses, y tenemos, además, dos ventanas gráficas para trabajar.

Dibujamos, por ejemplo, un rectángulo con la herramienta Polígono. Se ve en la vista gráfica 2D y también en la 3D (como si estuviera *sobre una mesa*).

Clicando en la vista gráfica 3D las herramientas cambian. Para dibujar, por ejemplo, un prisma, clican en la herramienta correspondiente y, después, *hacen subir* la base del rectángulo.

Con la herramienta Elige y mueve podemos modificar las propiedades de los objetos (color, base y altura, forma…), ya sea a partir de la barra de estilos o bien señalando algún punto del objeto y desplazándolo.

Con la herramienta Rota mueven la imagen y la ven desde diferentes puntos de vista: por encima, por debajo, y por cualquier lado. Una vez probadas las herramientas dibujarán cuerpos geométricos como los que tienen en el aula.

— Prisma: como la caja de cereales.
— Pirámide: como la que trajo una alumna.
— Cilindro: como la barra de pegamento.
— Cono: como el del juego de Playmobil.

Actividades libres

Después de ver las herramientas que se pueden utilizar proponemos al alumnado que piensen qué quieren dibujar. Vamos a mostrar algunos ejemplos.

Un tipi[1]

El proceso del dibujo del *tipi* se puede ver en la figura 3; una vez dibujado lo mueven para verlo en diferentes posiciones.

Una alumna comentó que «¡estaba jugando con una pirámide!».

Luego construyeron una casita combinando prisma y pirámide.

Un cohete como el que han construido en clase con los materiales que han traído

Dibujan el cohete, modifican la altura y la anchura y descubren que puede ser un circo o un lápiz. Todo tiene la misma forma, pero las medidas no son las mismas (figura 4).

Dibujo sin ninguna idea previa, solo experimentando con las herramientas

Un alumno consigue dibujar Saturno y lo muestra muy satisfecho a sus compañeros y compañeras

mientras que otro se levanta de su silla entusiasmado para ver cómo gira.

Un elemento muy importante de la experimentación es poder ver las reacciones del alumnado al hacer las construcciones e interactuar con ellas. Solo hay que ver cómo observan los objetos que se generan con la aplicación informática y cómo los manipulan. Es un elemento añadido a la realidad que conocen pero que no interfiere necesariamente con ella.

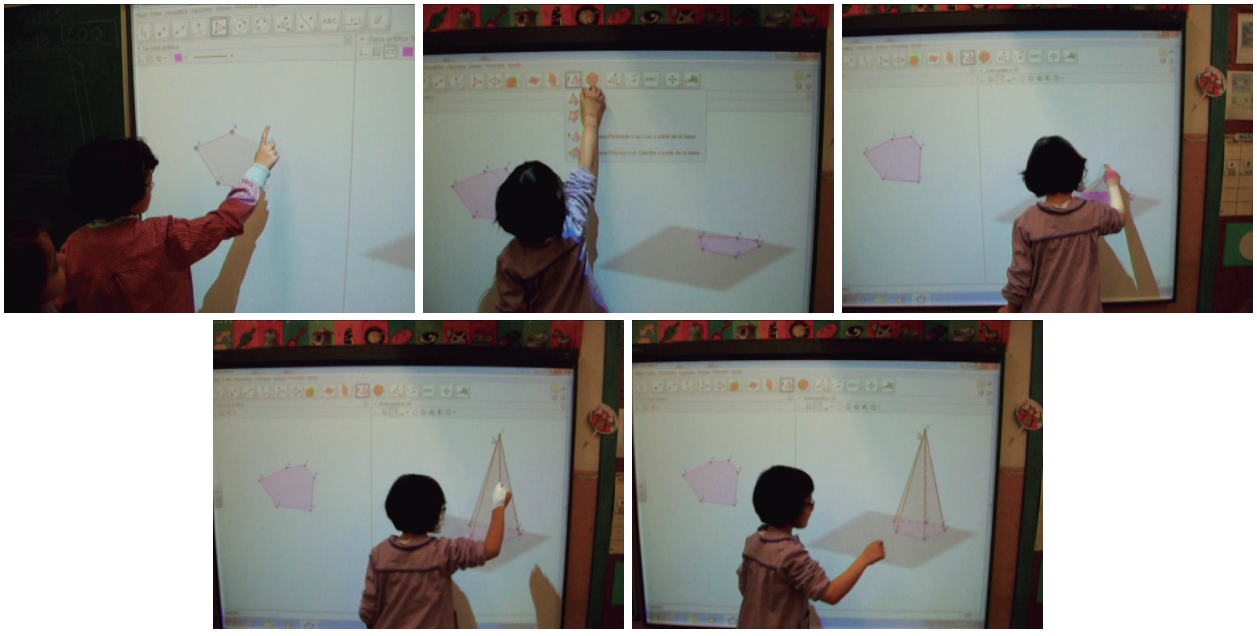


Figura 3. Proceso de dibujo del tipi

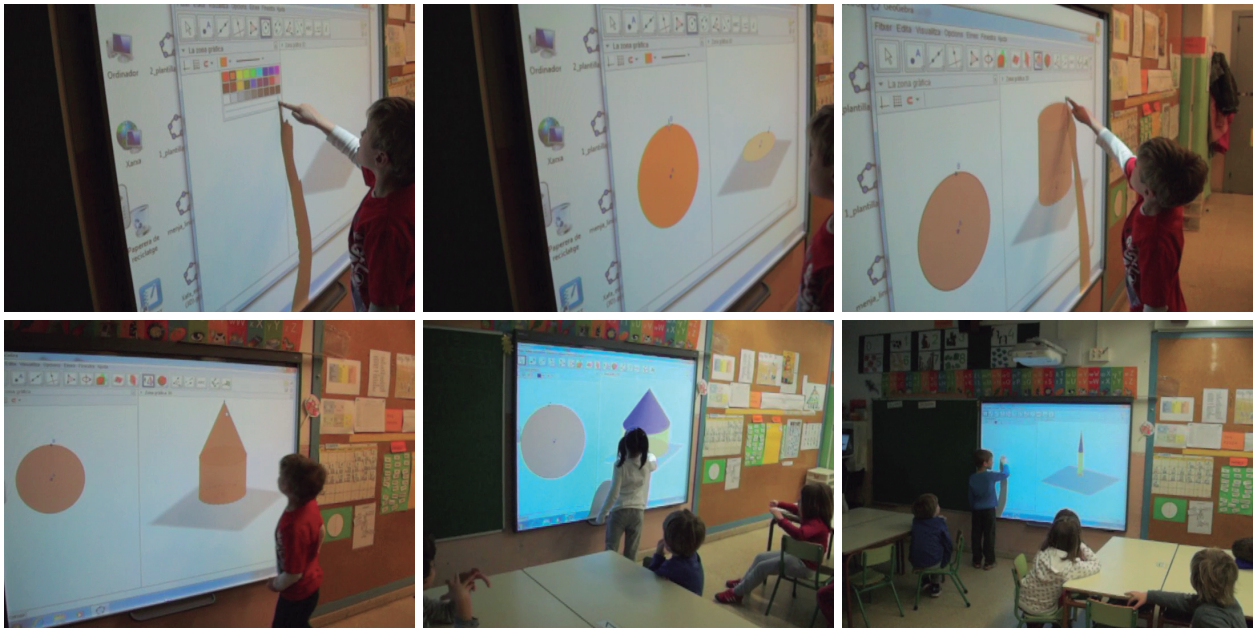


Figura 4. Proceso de dibujo del cohete

Un gorro de bruja

Mientras una alumna va subiendo y bajando el vértice del cono, el resto del grupo descubre y verbaliza que el gorro de bruja se convierte en el cucurucho de un helado, en un gorro chino y en muchas cosas más…

Actividades fruto de las reflexiones del alumnado

Cuando descubren alguna propiedad característica de las figuras con las que trabajan les creamos aplicaciones para que puedan visualizar lo que han aprendido. Aunque ya están hechas, el alumnado observa y conversa sobre lo que ve y se abre la posibilidad de que puedan crearlas. Estas aplicaciones incluyen unas herramientas que permiten el movimiento del cuerpo geométrico, ya sea para ver cómo se desplaza o para ver cómo se construye.

Diferentes maneras de rodar

En el momento de clasificar los objetos que habían traído dudaban en qué recipiente tenían que poner el cono: decían que, si rodaba, como lo hacen los rollos de papel higiénico, no lo hacían de la misma manera, sino que daban vueltas, como un reloj.

Prismas «enroscados»

Una alumna descubrió que el vaso que había traído era como un prisma como los que habían dibujado en la pizarra digital pero que se había «enroscado».

Observando lo que comemos

Un grupo de alumnos y alumnas observaron que, cuando mordían el *donut* o el *croissant* se veía un círculo.

Con los juguetes

Otro alumno descubrió que juntando dos piezas de las construcciones que había en el aula se creaba un cubo.

Concretamente decía que si juntaba dos pirámides formaba un cubo pero después de manipular cada pieza y ver sus propiedades se dio cuenta que eran dos prismas.

Geogebra es una herramienta que permite hacer construcciones que no podemos hacer con material manipulativo

Con GeoGebra podemos convertir un prisma en una pirámide o un cilindro en una esfera.

Y también podemos construir otras formas existentes… ¡o no!

Haciendo girar curvas (de Béziers[2], elípticas, media circunferencia), el alumno puede controlar la forma de la curva al girar (con solo mover unos puntos) o cambiar las dimensiones.

El comando Superficie que GeoGebra ha introducido desde hace algún tiempo permite modelizar de manera diferente estas construcciones. Se pueden generar superficies de revolución a partir de una función que gira respecto del eje de abscisas o de una curva respecto de *cualquier* eje (incluso en el espacio y no solo en la vista 2D). En nuestro caso hemos utilizado trazas de objetos o bien listas de curvas con el comando Secuencia, pero con las superficies podemos obtener un resultado más espectacular, aunque pensamos que lo mejor es alternar uno y otro procedimiento. Es importante que la acción que deba realizarse no sea siempre el uso del deslizador porque creemos que el alumnado de infantil no asocia correctamente el movimiento de un punto sobre una recta con la generación de una figura por revolución de una curva.

El taller de los inventos

En este curso hemos iniciado una nueva actividad, que habría que situar en el marco de las ac-

tividades libres, a la que hemos puesto por nombre «El taller de los inventos». Se trata de que el alumnado se dedique a crear objetos y a explicar cómo funcionan.

Es una actividad de iniciación al 3D pensada para educación infantil por lo que las construcciones son muy sencillas.

Aunque hemos comenzado hace poco, el alumnado está muy motivado.

Veamos un par de ejemplos.

La caja para guardar juguetes

Los alumnos crean un prisma a partir de la base que será una caja para guardar los juguetes que tienen encima de la mesa.

Para recoger los juguetes basta con ponerlos dentro de la caja y después ponerla debajo de la mesa. Comentan que es como si hubiera un ascensor. Esta posibilidad que nos ofrece GeoGebra de que los objetos geométricos se puedan crear hacia arriba o hacia abajo (que se denomina extrusión) es una herramienta muy potente para el alumnado de infantil.

El trono de la reina

Crearon una pirámide a partir de la base para hacer el trono y, como le faltaba la silla, dibujaron un polígono entre dos caras de la pirámide (figura 5).

Cuando la reina se cansaba de escuchar a la gente o quería ir a dormir, desplazaban un punto de manera que la pirámide se cerraba y el polígono de partida dejaba de ser cóncavo.

Giraba el trono de manera que los asistentes no la veían.

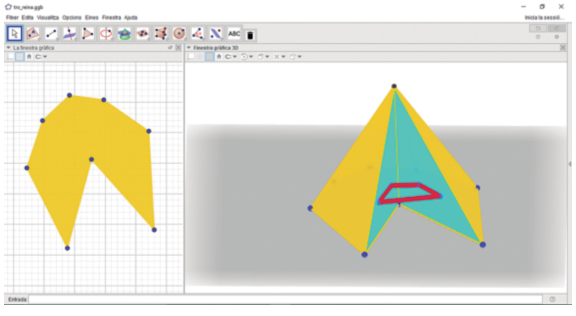


Figura 5

La lámpara estrella

Crean una pirámide en forma de estrella y un segmento para fijarla al techo.

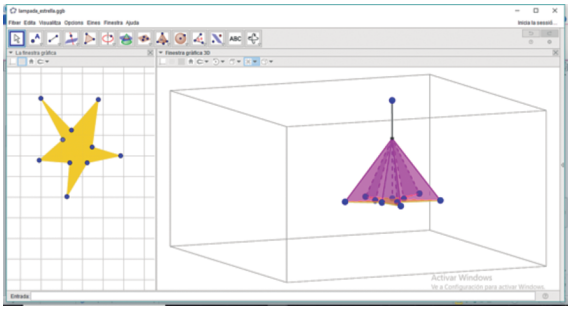


Figura 6

La caja de recuerdos de Laia

Prisma creado a partir de una base.

Pueden modificar la forma y las medidas de la caja según su contenido.

Hay que tener en cuenta la metodología. En primer lugar, los alumnos crean la figura observando alguna propiedad de la misma, a continuación, expresan qué podría ser (lo que llama-

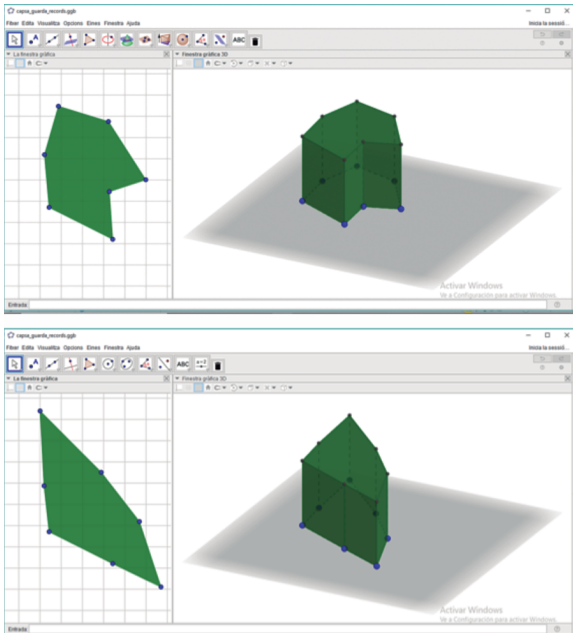


Figura 7

mos «invento») y, finalmente, la modifican (si es necesario).

Este procedimiento tiene una razón de ser: el alumnado tiene mucha más imaginación que dominio del programa. Si dejamos pensar primero el invento es muy difícil conseguir crearlo tal y como se lo han imaginado.

Un poco de *técnica*

Hemos mostrado algunos ejemplos de cómo podemos utilizar GeoGebra en el aula de infantil en los que no es necesario un dominio de la técnica del programa. De todos modos, un conocimiento de los entresijos del mismo nos puede permitir obtener resultados que pueden ser muy efectivos a la hora de potenciar la manipulación virtual de objetos por parte del alumnado. No nos extenderemos demasiado aquí sobre este punto, aunque sí quisiéramos destacar algunas cuestiones:

— La paleta de herramientas de las vistas gráficas se puede diseñar de acuerdo a nuestras necesidades. Es decir, podemos incluir en las mismas solo aquellas que interesen y obviar el resto, aunque es cierto que nuestros *clientes* aprenden rápidamente a discernir cuáles son las que deben usar. Existe un menú específico para ello denominado Herramientas, y dentro del mismo, la opción Personalizar la barra de herramientas (figura 8).

Como puede apreciarse, resulta muy sencillo añadir y quitar herramientas y ordenarlas como nos convenga. Siempre podemos restaurar la Barra original si no estamos satisfechos con el resultado.

En las nuevas versiones se puede incluso arrastrar y soltar las herramientas en lugar de utilizar los botones de Insertar y Borrar.

— La mayor parte de herramientas son relativamente fáciles de usar y muy intuitivas. Hay un grupo que nos interesa especialmente para trabajar con el alumnado de infantil y que incluye cuatro cuerpos geométricos que se pueden construir bien por extrusión, «estirando» la base del objeto, un polígono que habremos construido previamente en la vista gráfica o en la vista gráfica 3D, o bien a partir de dos puntos.

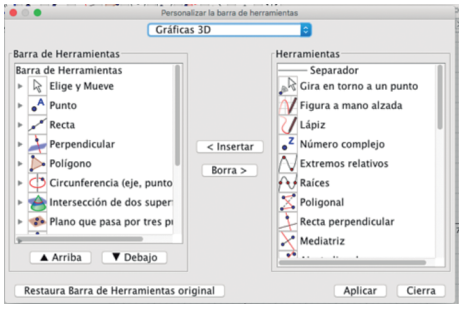


Figura 8

Como ya hemos ido recalcando todas las construcciones se pueden hacer con un dedo, sin necesidad de usar un ratón, y máxime ahora que el programa está disponible para tabletas y teléfonos móviles.

Muchas de las aplicaciones que reseñamos en la bibliografia no están siempre en castellano. Básicamente se trata, para su uso en el aula, de cambiar algunos textos o de modificar el nombre de las herramientas. El procedimiento es sencillo. En el caso de los textos:

— Clicamos con el botón derecho del ratón encima del texto y luego en Propiedades.
— Nos colocamos en la pestaña Texto y ya podemos cambiarlo. ¡No olvidéis pulsar en el OK!

Para las herramientas:

— Clicamos en el Menú Herramientas y en Gestión de herramientas.
— Os aparecerá una ventana con la lista de herramientas. Basta con ir cambiando el nombre de cada una en Nombre de la herramienta. *En ningún caso* cambiéis el Nombre del comando aunque lo haga el programa (tendréis que recordar el original antes del cambio de nombre de la herramienta).

Con estas indicaciones podréis utilizar muchos materiales disponibles en la web del programa. Si publicáis alguna aplicación no olvidéis reseñar el nombre del autor.

En cuanto a la barra de estilo para modificar algunas propiedades de los objetos, esta se activa en cuanto clicamos en un objeto concreto. Podemos modificar el color de un punto o bien su grosor y su forma.

En el caso de una figura como un polígono o una circunferencia, es algo diferente. Se puede incluso definir el grado de opacidad con el deslizador que aparece debajo de la paleta de colores y podemos definir también el grosor de las líneas (también con el deslizador) y su aspecto.

Recalcamos que todas las acciones necesarias para definir las propiedades de los objetos se pueden hacer con un dedo. Para desplegar las paletas de colores y de formas basta con clicar en la flechita que aparece junto al texto Vista Gráfica. El procedimiento es exactamente el mismo en el caso de la ventana 3D.

Creación de herramientas con GeoGebra

En relación con las herramientas existe la posibilidad de diseñarlas para que podamos construir objetos de un color determinado, por ejemplo, o adecuados a nuestras necesidades. En la figura 9 vemos algunos ejemplos que utilizamos con el alumnado de la Escola Diputació.

El problema está en definir unos puntos del mismo color que la figura porque los puntos iniciales, que son el objeto de partida de la herramienta, siguen las pautas establecidas para el objeto punto en las opciones del programa y hay que crear otros encima de estos del color de la figura y que los «tapen». Existen otras posibilidades, pero son más complejas de llevar a cabo.

Con este procedimiento podemos crear también esferas, tetraedros y otros cuerpos geométricos rojos, verdes, azules, naranjas, aunque requiere un poco más de técnica porque no es lo mismo mover un objeto en el plano que en el espacio y no podemos olvidar (y esto el alumnado

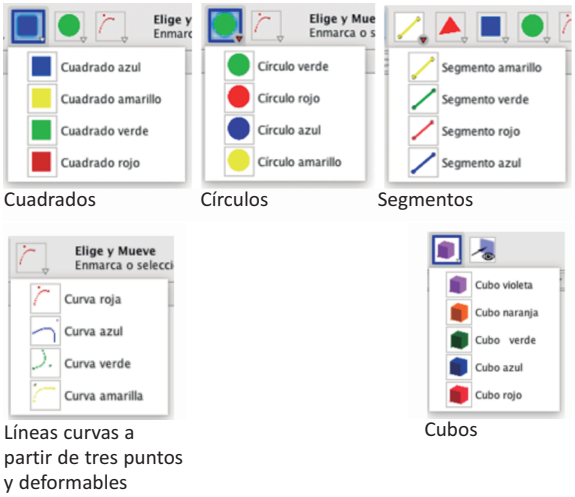


Figura 9

lo sabe muy bien) que representamos el espacio sobre un plano.

Conclusión

Hay cosas que solo podemos hacer con un programa como GeoGebra que complementa el material manipulativo existente con unas posibilidades que parece que tienen como único límite la imaginación. Se establece una duplicidad que el alumnado hace suya de manera que las puede diferenciar perfectamente y que son complementarias la una de la otra. Es un proceso fascinante ver cómo las ideas surgen de forma espontánea cuando se acostumbran a trabajar con esta dinámica.

No siempre gustan las actividades que proponemos y las tenemos que modificar o substituir. Hay un constante *feedback* con el alumnado al que, a veces, llamamos «nuestros clientes».

Otro aspecto interesante de esta colaboración entablada entre profesorado de etapas tan dispares es la de contemplar actividades de «largo recorrido», más concretamente, desde los 3 a los 19 años. Se trata de visualizar de manera conjunta y global el proceso de aprendizaje de las matemáticas del alumnado en general. GeoGebra dispone de una ventana algebraica que, al abrirla, nos ofrece un amplio abanico de posibilidades puesto que aparecen las expresiones algebraicas o bien las dimensiones de los objetos geométricos que se uti-

lizan en la aplicación. Con este fin, hemos empezado a trabajar con el ejemplo del principio de Arquímedes con un conjunto de aplicaciones con GeoGebra a las que vamos añadiendo información a medida que tratamos con un alumnado de más edad. El alumnado de infantil trabaja experimentando con objetos que caen dentro de un vaso con agua o aceite y, a continuación, se les muestra la simulación con GeoGebra. Pasamos luego al tratamiento del tema en el laboratorio de Física de un grupo de 4.º de ESO y seguimos mostrando la simulación, ahora con más información sobre la dinámica del problema. Finalmente proponemos un estudio pormenorizado para alumnos de grado de Física y Matemáticas con ecuaciones diferenciales. ¡El problema no es trivial!

Los alumnos han logrado los objetivos que nos habíamos propuesto y han desarrollado con creces las capacidades que pretendíamos que desarrollaran, pero, lo más importante, es ver la expresión de sus miradas y ver cómo han disfrutado de las matemáticas… ¡con un solo dedo!

Nos podéis hacer consultas[3], plantear dudas y/o proponer actividades escribiéndonos a nuestras direcciones de correo.

Material complementario y referencias

Actividades con GeoGebra 3D para Educación Infantil:
<https://ggbm.at/tkdC27mf>.
Curso de GeoGebra 3D:
<https://ggbm.at/wHQRSeg7>.
Isometrías:
<https://ggbm.at/uTUjQXk9>.
Come líneas
<https://ggbm.at/MT2V5UMG>.
Comamos geometría
<https://ggbm.at/NJepREm4>.
Líneas
<https://ggbm.at/rBEhta37>.
Puzles geométricos
<https://ggbm.at/QNtbFmgy>.
Situación espacial
<https://ggbm.at/hc2MJaGB>.
Aplicación de recubrimiento del currículo (en catalán)
<http://apliense.xtec.cat/arc/user/52>.
Vídeos con ejemplos y explicaciones
<https://www.youtube.com/channel/UC19a64MG-K5_mmDBSRN7BEg>.
GeoGebra con un dedo [en construcción]
<https://ggbm.at/afTzm2Aj>.

Bernat Ancochea
<bancoche@xtec.cat>

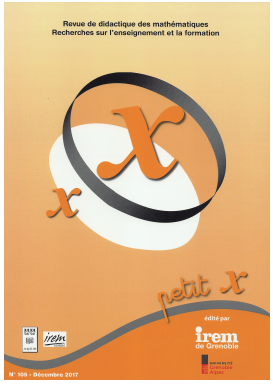
Isabel Sorigué
Escola Diputació de Barcelona
<isorigue@xtec.cat>

1 <https://es.wikipedia.org/wiki/Tipi>.
2 <https://es.wikipedia.org/wiki/Curva_de_Bézier>. Una explicación muy técnica para ver de qué se trata.
3 Foro de consultas. Escribid TCXV8 en: <www.geogebra.org/groups> para uniros al grupo.

Publicaciones recibidas

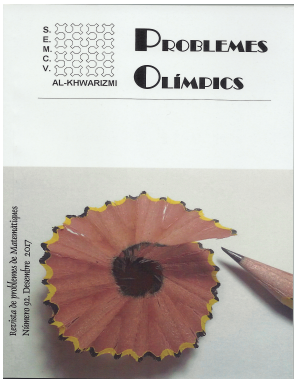
SCM/Notícies
Societat Catalana de Matemàtiques
N.º 42, desembre 2017
ISSN: 1696-8247

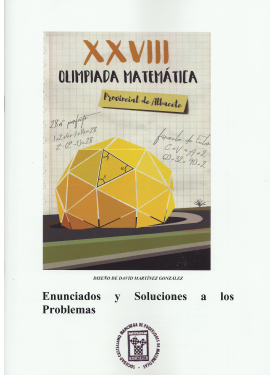




PETIT X
Irem de Grenoble
N.º 105, Décembre 2017
Saint Martin d'Heres, Cedex
ISSN: 0759-9188

PROBLEMES OLÍMPICS
SEMCV Al Khwarizmî
n.º 92, desembre 2017
València
ISSN: 1578-1771

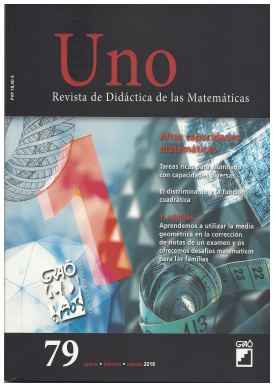




XXVIII OLIMPIADA MATEMÁTICA
Sociedad Manchega de Profesores de Matemáticas
Mayo 2017
Albacete

INVESTIGACIÓN Y CIENCIA
Prensa cientifica, S.A.
n.º 497, febrero 2018
Barcelona
ISSN: 02210136X





UNO
Revista de Didáctica de las Matemáticas
Ed. Graó
Nº 79, enero-febrero-marzo 2018
Barcelona
ISNN : 1133-9853

suma+ 87
Secciones
Marzo 2018
pp. 71-75

Maryam Mirzakhani: curiosidad, talento y humildad

Marta Macho Stadler

La belleza de las matemáticas sólo se muestra a sus seguidores más pacientes.
Maryam Mirzakhani



© Pelopantón <http://pelopanton.com/>[1]

Mujeres matemáticas: rompiendo moldes

Recuerdo con especial emoción el mes de agosto de 2014. Una gran noticia llegó desde el *International Congress of Mathematicians*[2] (ICM2014) que se celebraba en ese momento en Seúl. Me enteré de ella a través de un mensaje en redes sociales de Manuel de León que asistía a ese evento como miembro del Comité Ejecutivo de la Unión Matemática Internacional (IMU[3], por sus siglas en inglés). Era un 13 de agosto; en este caso, este número primo tan *temido* fue portador de muy buenas nuevas.

Esa gran noticia a la que me refiero era el anuncio de que, por primera vez en la historia, una mujer había ganado la prestigiosa Medalla Fields[4]. Recuerdo que me emocioné con el relato de Manuel, que hablaba de la intensa ovación que recibió «la matemática Maryam Mirzakhani al anunciarse su nombre como merecedor del galardón». Ella no solo era la primera mujer premiada, también era la primera persona iraní en recibir tal distinción. Ingrid Daubechies, presidenta de la IMU, declaraba con entusiasmo:

> Es una grandísima noticia. Las mujeres siguen sin estar lo suficientemente presentes en la investigación matemática, y Mirzakhani es un modelo para atraer a más mujeres a los primeros puestos. Encarna una rara combinación de habilidad técnica, gran ambición, una visión a largo plazo, una curiosidad profunda.

Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2017 y aceptado en enero de 2018

Nacida en Teherán, Maryam Mirzakhani (1977-2017) era en ese momento profesora en la Universidad de Standford (EE. UU.) e investigadora en el campo de la geometría y los sistemas dinámicos[5]. El comité del premio destacaba «sus importantes aportaciones en el estudio de los espacios de moduli[6] de las superficies de Riemann[7]».

Las mujeres siguen sin estar lo suficientemente presentes en la investigación matemática.

Curtis McMullen, de la Universidad de Harvard (EE. UU.), el director de tesis de Maryam, apuntaba que los logros de Mirzakhani «combinan una soberbia capacidad de resolución de problemas, una visión matemática ambiciosa y fluidez en muchas disciplinas, lo cual es inusual en la era moderna, cuando a menudo se requiere una especialización considerable para alcanzar la frontera».

Numerosos medios se hicieron inmediatamente eco de esta extraordinaria noticia. En todos ellos se destacaba su aspecto tranquilo, seguro y su gran humildad. En alguna de las entrevistas que le realizaron, la premiada comentaba que, cuando en febrero de 2014 le llegó un correo electrónico de Ingrid Daubechies anunciándole que había sido premiada con la Medalla Fields, ella pensó que «la cuenta desde la que se envió el correo electrónico había sido pirateada».

Una niña apasionada por la lectura… y el *flechazo* por las matemáticas

Cuando Maryam era solo una niña viviendo y creciendo en Teherán, no tenía las matemáticas en su horizonte. Le gustaba leer y *devoraba* todos los libros que caían en sus manos. Cuando veía la televisión, se inclinaba por las biografías de mujeres famosas, como la química Marie Curie o la escritora Helen Keller. Más tarde leyó *Anhelo de vivir*, una novela de Irving Stone sobre el pintor Vincent van Gogh. Todas estas historias de personas admirables le inspiraron el deseo de hacer algo destacado con su vida:

> De niña, soñaba con ser escritora y mi pasatiempo favorito era escribir novelas. Leía todo lo que caía en mis manos. De hecho, nunca imaginé lanzarme a las matemáticas antes de mi último año de instituto.

Mirzakhani terminó la escuela primaria justo cuando la guerra entre Irán e Irak[8] estaba llegando a su fin y se abrían oportunidades para estudiantes motivados. Consiguió un puesto en la escuela secundaria *Farzanegan* para niñas en Teherán, centro administrado por la Organización Nacional para el Desarrollo de Talentos Excepcionales de Irán. Maryam afirmaba:

> Creo que pertenecía a una generación afortunada. Era una adolescente cuando las cosas se volvieron más estables.

En su primera semana en esa nueva escuela, Maryam hizo una amiga muy especial, una amiga para toda la vida, Roya Beheshti, actualmente profesora de matemáticas en la Universidad de Washington en San Luis (EE. UU.). Las dos recorrían las librerías cercanas a su escuela y, como no estaba permitido ojear los libros y además eran extremadamente baratos, elegían al azar textos para comprar.

Aunque pueda parecer sorprendente, Mirzakhani no tuvo demasiado éxito en su clase de matemáticas durante ese año. Su profesora de matemáticas no la consideraba especialmente dotada para ellas, y esta actitud minaba la confianza de Maryam, que acabó perdiendo su interés por esta materia. Sin embargo, al año siguiente, cambió su profesora y mejoró notablemente en matemáticas, transformándose en «una estrella» según su amiga Roya Beheshti.

De hecho, su primera *seducción* matemática llegó cuando su hermano mayor le habló de un problema clásico de aritmética —el de sumar los números del 1 al 100— y de la solución propuesta por Carl Friedrich Gauss[9]. Maryam se refería a este suceso de la siguiente manera:

> La solución era tan fascinante… y era la primera vez que entendía una solución tan bella que no habría podido encontrar por mí misma.

En 1994, cuando Mirzakhani tenía 17 años, ella y Roya Beheshti formaron parte del equipo

iraní para asistir a la Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO[10], por sus siglas en inglés). La puntuación de Maryam en esta Olimpiada le valió una medalla de oro: fue la primera chica iraní en obtener tal galardón. Al año siguiente volvió a presentarse a ese concurso y logró la máxima puntuación: 42 puntos sobre 42, transformándose en la número uno mundial. Tras haber competido para descubrir sus capacidades, Mirzakhani descubrió su amor por las matemáticas.

De hecho, varios años más tarde, cuando Maryam era ya una investigadora formada, el matemático ruso Anton Zorich, afiliado a la Universidad de París 7 (Francia) y especialista en la misma área que Mirzakhani, comentaba sobre ella «parece una niña de 17 años que está completamente emocionada por todas las matemáticas que suceden a su alrededor».

parece una niña de 17 años que está completamente emocionada por todas las matemáticas que suceden a su alrededor

Los años en Harvard

Ganar una medalla de oro en una olimpiada matemática no implica necesariamente tener éxito años más tarde en la investigación matemática. Es cierto que los problemas propuestos en estos concursos son de alto nivel y requieren una solución inteligente; pero el alumnado que se presenta a estas competiciones recibe normalmente un entrenamiento concienzudo. Aunque, sin ninguna duda, el alumnado participante tiene un enorme mérito, el momento de la investigación es muy diferente, ya que los problemas planteados pueden no tener solución. Mirzakhani no solo era una buena concursante en estas olimpiadas, también poseía esa singular visión, esa percepción que hizo de ella una matemática extraordinaria.

Después de completar su licenciatura en Matemáticas en la Universidad de Sharif (Teherán) en 1999, Mirzakhani se desplazó a la Universidad de Harvard, donde comenzó a asistir al seminario sobre geometría hiperbólica[11] de Curtis McMullen[12]. En principio, no llegaba a entender del todo las matemáticas de las que McMullen hablaba. Pero, cautivada por el tema de aquellas disertaciones, no dudaba en ir a aclarar sus dudas al despacho del profesor. McMullen recordaba: «Tenía una especie de imaginación atrevida»; él recordaba cómo su alumna le consultaba, con una imagen formada en su mente de lo que pensaba que debía de estar sucediendo, y preguntaba a su profesor si estaba en lo cierto.

Mirzakhani comenzó a trabajar en superficies hiperbólicas, objetos centrales de la geometría y conectadas hoy en día con muchas ramas de las matemáticas e incluso de la física. En el momento de iniciar su postgrado, había muchas preguntas sobre estas superficies sin respuesta. Una de esas cuestiones abiertas se refería a sus curvas geodésicas[13], es decir, al camino más corto uniendo dos puntos sobre esa superficie hiperbólica. En una tal superficie, algunas geodésicas pueden tener una longitud infinita —como en el caso de las líneas rectas en el plano— pero otras se cierran formando circunferencias —como las circunferencias maximales en una esfera—. El número de geodésicas cerradas de una longitud determinada en una superficie hiperbólica crece exponencialmente a medida que aumenta la longitud de las geodésicas. La mayoría de estas geodésicas se cortan a sí mismas en repetidas ocasiones antes de cerrarse, pero una pequeña proporción de ellas —las llamadas geodésicas «simples»— nunca se autointersecan. Precisamente este tipo de geodésicas son la clave para entender la geometría de toda la superficie. Sin embargo, en aquel momento, no se sabía cuántas geodésicas cerradas simples de una determinada longitud podía tener una superficie hiperbólica. En su tesis doctoral —finalizada en 2004—, Mirzakhani respondió —entre otros— a esta pregunta, encontrando una fórmula describiendo cómo aumenta la cantidad de geodésicas simples de una longitud dada a medida que esa longitud crece.

Los resultados de la tesis de Mirzakhani se publicaron en tres artículos que se aceptaron en las tres principales revistas de investigación en matemáticas: *Annals of Mathematics*, *Inventiones Mathematicae* y *Journal of the American Mathematical*

Society. La mayoría de las personas investigando en matemáticas nunca conseguirán publicar en ninguna de esas revistas a lo largo de su carrera: ella lo hizo ya con su tesis, en los inicios de su investigación.

Y tras la tesis doctoral…

En alguna de las declaraciones que realizó Maryam Mirzakhani tras obtener la Medalla Fields, ella se describía a sí misma como «lenta». Los problemas a los que se dedicaba eran cuestiones profundas, problemas que desmenuzaba y analizaba durante meses e incluso años:

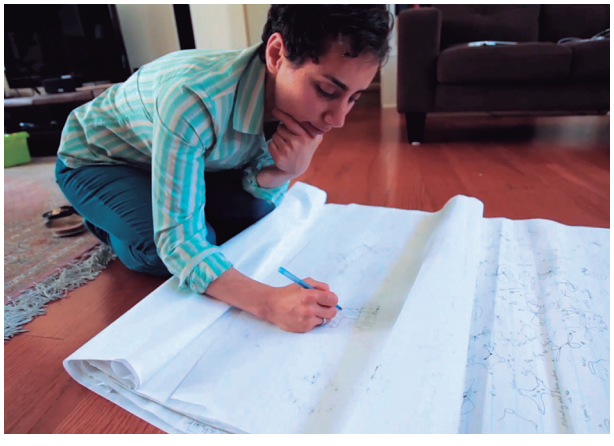
> Meses o años después, se ven aspectos muy diferentes [de un problema].

Tras haber estado pensando sobre algunos de ellos por más de una década, comentaba:

> Todavía no hay mucho que pueda hacer sobre ellos.

También decía de sí misma que no caía fácilmente en el desánimo; es cierto que cualquier persona no dedica tanto tiempo a intentar entender las claves de un problema matemático. Probablemente esa resistencia al desaliento la llevó a entender con lucidez la estructura de los espacios que estudiaba.

Maryam pensaba sus matemáticas en imágenes, dibujando sobre grandes trozos de papel. Estos bosquejos podían parecer siempre iguales, pero la ayudaban a concentrarse: «Cuando una piensa en un problema matemático difícil y no quiere anotar todos los detalles, dibujar garabatos ayuda a mantenerse conectada al problema», comentaba.



En 2006, Mirzakhani comenzó una fecunda colaboración con Alex Eskin, de la Universidad de Chicago (EE. UU.), que hablaba de este modo de ella:

> Es muy optimista, y eso es contagioso. Cuando trabajas con ella, sientes que tienes muchas más posibilidades de resolver problemas que al principio parecen imposibles.

Entre otros proyectos conjuntos, Mirzakhani y Eskin abordaron uno de los mayores problemas abiertos en su campo: el estudio del comportamiento de una bola rebotando en una mesa de billar con forma poligonal y de ángulos racionales, problema que se enmarca en el ámbito de los sistemas dinámicos. Aunque el comportamiento de una bola de billar podría parecer sencillo de determinar, resultó ser mucho más complicado de lo esperado. De hecho, el problema se propuso hace un siglo aproximadamente: comenzó con el estudio de una bola de billar rebotando en un triángulo… y aún se sigue pensando en él. Las posibles trayectorias de una bola evolucionando en un billar racional pueden «leerse» en una determinada superficie hiperbólica, más concretamente en sus llamados espacios *moduli*, a los que hemos aludido antes.

En 2003, McMullen estudió los billares racionales cuya superficie asociada es de género dos[14], y demostró que, en estos casos, la órbita de una bola no podía ser excesivamente complicada —por ejemplo, no podía ser un conjunto fractal[15]—. Entre 2012 y 2013, Mirzakhani y Eskin, junto a Amir Mohammadi, de la Universidad de Texas en Austin (EE. UU.), consiguieron generalizar el resultado de McMullen a las superficies de género arbitrario. De hecho, los resultados que obtuvieron sobre espacios *moduli* de estas superficies tienen muchas más aplicaciones que las de la dinámica de los billares.

Una muerte prematura… y ¿la gloria?

Mirzakhani ha sido la primera mujer en ganar una Medalla Fields. Este galardón se concede a

matemáticos menores de 40 años con aportaciones extraordinarias en la profesión. Muy pocas personas tienen el nivel científico suficiente para poder optar a una de ellas porque, y cada vez más, los grandes resultados en matemáticas requieren del conocimiento profundo de áreas muy diversas. Y esa capacidad la tienen muy pocas personas. Pero, es aún más difícil en el caso de las mujeres, ya que muchas de ellas con capacidades más que suficientes, probablemente realizan una parada en su carrera investigadora para cuidar a sus hijas e hijos justo en ese momento.

Ella, la única mujer por el momento en conseguir este galardón, ya estaba enferma cuando fue a recoger su medalla a Seúl. Un año antes le habían diagnosticado un cáncer. Iba a ser la primera mujer y la primera persona iraní en recibir la Medalla Fields; aunque por su problema de salud no atendió a los medios de comunicación ni impartió la *obligada* conferencia, la presión mediática seguramente fue tremenda. El premio de Maryam eclipsó en parte la hazaña de sus compañeros Artur Avila, Manjul Bhargava y Martin Hairer.

Maryam Mirzakhani falleció el año pasado, dejando un profundo sentimiento de tristeza en la comunidad matemática. Pero su memoria seguirá siempre viva.

En agosto de 2018 estaré pendiente de los nombres de las personas que recibirán una Medalla Fields. Confió en que habrá al menos una mujer entre ellos. Estoy segura de que muchas mujeres matemáticas la merecen.

Referencias bibliográficas

Ball, P. (2014), «Iranian is first woman to nab highest prize in maths», *Nature*, 12 de agosto de 2014, <https://www.nature.com/news/iranian-is-first-woman-to-nab-highest-prize-in-maths-1.15686>.

Carey, B. (2014), «Stanford's Maryam Mirzakhani wins Fields Medal», *Stanford News,* 12 de agosto de 2014, <https://news.stanford.edu/news/2014/august/fields-medal-mirzakhani-081214.html>.

Klarreich, E. (2014), «Fields Medal and Nevanlinna Prize Winners Announce: A Tenacious Explorer of Abstract Surfaces», *Quanta Magazine*, 12 de agosto de 2014, <https://www.quantamagazine.org/maryam-mirzakhani-is-first-woman-fields-medalist-20140812/>.

Marta Macho Stadler
Universidad del País Vasco
<marta.macho@ehu.eus >

1 Un especial agradecimiento a Pelopantón por permitirme usar una de las imágenes de su serie *Científicas*.

2 El *International Congress of Mathematicians* (ICM) es el congreso de investigación más importante organizado por la comunidad matemática. Se celebra cada cuatro años bajo los auspicios de la Unión Matemática Internacional.

3 Fundada en 1920, la Unión Matemática Internacional (IMU) es una organización internacional no gubernamental cuyo propósito es fomentar la cooperación en matemáticas.

4 La Medalla Fields es el premio más importante a escala mundial en el ámbito de las matemáticas. Solo se concede a personas que no superen los 40 años y se premian grandes descubrimientos en matemáticas. La IMU las otorga cada cuatro años durante los ICM. En los 78 años de existencia del premio, han recibido la Medalla Fields 55 hombres —aunque Grigori Perelman rehusó aceptarla en 2006— y una mujer, Maryam Mirzakhani.

5 Un sistema dinámico es un sistema cuyo estado evoluciona con el tiempo.

6 Un espacio *moduli* es un espacio geométrico cuyos puntos representan objetos algebraico-geométricos o clases de isomorfismo de tales objetos. Muchas veces provienen de soluciones de problemas de clasificación.

7 Una superficie de Riemann es una variedad compleja de dimensión (compleja) uno. Es decir, la variedad real subyacente es de dimensión 2.

8 La guerra Irán-Irak fue un conflicto bélico que comenzó en 1980, duró casi ocho años, y enfrentó a Irán e Irak por rivalidades regionales.

9 Se cuenta que la maestra de Gauss propuso a su alumnado sumar los números del 1 al 100, pensando que ese cálculo les llevaría tiempo. Gauss dio la respuesta al poco rato: 5 050. El niño explicó su estrategia de esta manera: «1 más 100 es igual a 101, como 2 más 99, 3 más 98 y así sucesivamente. Como hay 50 de estas sumas, en total tenemos 101 por 50, que es 5 050».

10 La Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO) es el campeonato mundial de matemáticas para estudiantes de secundaria que se desarrolla anualmente en un país distinto. La primera IMO tuvo lugar en 1959 en Rumanía, con la participación de siete países. Poco a poco ha ido creciendo hasta sobrepasar los cien países de los cinco continentes.

11 La geometría hiperbólica es un modelo de geometría que satisface solo los cuatro primeros postulados de la geometría euclidiana.

12 Curtis MacMullen fue Medalla Field en 1998.

13 Una curva geodésica se define como la curva de mínima longitud que une dos puntos en una superficie dada, y está contenida en esta superficie.

14 El género de una superficie se define como el máximo número de curvas cerradas simples que no se intersecan, y que se pueden dibujar sobre la superficie sin separarla.

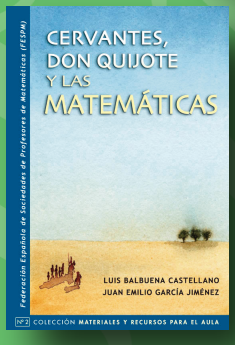
15 Un fractal es un objeto geométrico cuya estructura básica, aparentemente irregular, se repite a diferentes escalas.

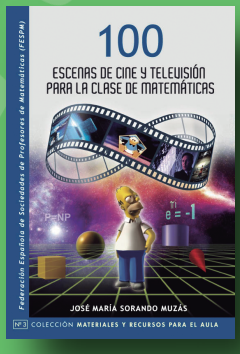
Servicio de Publicaciones de la FESPM











<www.fespm.es/-Servicio-de-publicaciones->

<publicaciones@fespm.es>

suma+ 87
Secciones
Marzo 2018
pp. 77-82

Desde un punto de vista no-formal

MMACA

Del MMACA al aula

La oferta de empezar una colaboración con *Suma*, aparte de colmarnos de alegría y responsabilidad, nos llega en un momento de gran debate sobre la contribución que las entidades educativas que operan fuera de la escuela pueden aportar, especialmente una vez aceptado el marco competencial del aprendizaje.

El MMACA está participando actualmente en varios ámbitos que focalizan su objetivo en la relación educación reglada/no-reglada, la que llaman también «educación no-formal» y de aquí el título dado a nuestra sección:

— El proyecto Erasmus+ «Mathspaces», en el que colaboramos con otros cuatro museos europeos dedicados a la divulgación de las matemáticas.
— La Comunidad de Prácticas «Patrimonio y Escuela», promovida por la Agència de Patrimoni de la Generalitat de Catalunya.

Además, el MMACA organizará la próxima Matrix Conference (octubre de 2018) en la que esta temática tendrá un gran protagonismo.

¡Qué no cunda el pánico! Nuestra intención no es la de contaros cómo avanzan estos proyectos, sino proponer algunas actividades y materiales que tiendan un puente entre las entidades de la educación formal y no-formal y las buenas

Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2017 y aceptado en enero de 2018

prácticas de esta colaboración, que pensamos es indispensable para incrementar la calidad del aprendizaje de las matemáticas.

Solo en esta primera entrega robaremos un poco de espacio para explicar brevemente el recorrido hecho como MMACA, porque pensamos que puede ser útil para situar el punto de vista que asumimos para avanzar en nuestras propuestas.

El MMACA nace como grupo de trabajo de la FEEMCAT, con representantes de las distintas entidades de esta Federación y de la Sociedad Catalana de Matemáticas.

Todas las personas que se suman al proyecto son docentes con una amplia experiencia en el uso de materiales en el aula o en los talleres de matemáticas. Estamos convencidos de que el uso de los materiales (*hands-on*) es fundamental para estimular el proceso de aprendizaje y llegar a la conceptualización (*minds-on*), así mismo, también estamos bastante desanimados por el poco impacto que estas ideas han tenido en el mundo de las aulas, si exceptuamos, claro está, a aquellos que estos años han participado en cursos, jornadas, como las JAEM, y, como no, el patrimonio indispensable que forman las Sociedades de Profesores de Matemáticas.

El objetivo que nos marcamos fue claro desde el principio: crear un museo de las matemáticas, con exposiciones que consiguieran estimular y emocionar (*hearts-on*) al público escolar (profesorado y alumnado) y al familiar, mostrar una imagen distinta de las matemáticas y comprobar, con la propia práctica, que solo hay dos tipos de personas en el mundo: aquellas a las que les gustan las matemáticas y las que no saben aún que les gustan.



Figura 1. Reunión de la CdP



Figura 3. El MMACA en la MathWeek



Figura 2. Reunión de Mathspaces

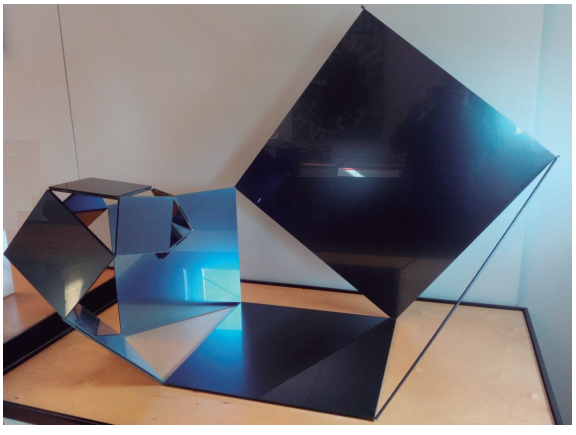


Figura 4. Pitágoras en el Giardino d'Archimede

El único equipaje que teníamos al empezar esta aventura eran nuestras experiencias con alumnos, las actividades y materiales que nos habían dado resultados positivos al generar aprendizaje duradero, significativo y consistente. Contábamos además con las experiencias de las exposiciones que se montaron en el año 2000, año internacional de las matemáticas, y de los pocos museos dedicados a la divulgación de las matemáticas (Giessen, Florencia o Nueva York): todos empezaron con una exposición itinerante exitosa para la que encontraron después una sede permanente.

Rápidamente nos dimos cuenta de que no todos los materiales escolares se podían transformar en módulos de una exposición. La calidad de los materiales, la duración de las actividades, las dinámicas de participación y el nivel de información necesaria eran distintos, así que, durante dos años, estuvimos proponiendo y seleccionando propuestas.

Nació así una exposición casi pirata en Alella —tan pobre que ahora nos daría hasta un poco de vergüenza— pero que tuvo éxito. Esto y la visita colectiva al Mathematikum, fueron suficientes para convencernos de que nuestro proyecto era posible o, más bien, necesario.

La experiencia consolidada después de treinta exposiciones itinerantes y cuatro años de la exposición permanente en Cornellá, nos ha hecho pensar que era necesario cerrar el círculo y concretar una propuesta para las aulas. De hecho, una parte importante del profesorado que ha acompañado a sus alumnos a nuestras exposiciones nos pide materiales para seguir trabajando en esa línea en sus clases. También, las conversaciones en el ámbito de los encuentros internacionales en los que participamos, nos empujan en esta dirección. En nuestra pequeña tienda vendemos unos pocos materiales, que no son suficientes para satisfacer la demanda real, y así nació el proyecto de los maletines didácticos.

Cuando se publique este artículo, habremos acabado la primera fase de pilotaje de los maletines, que representan una contribución directa

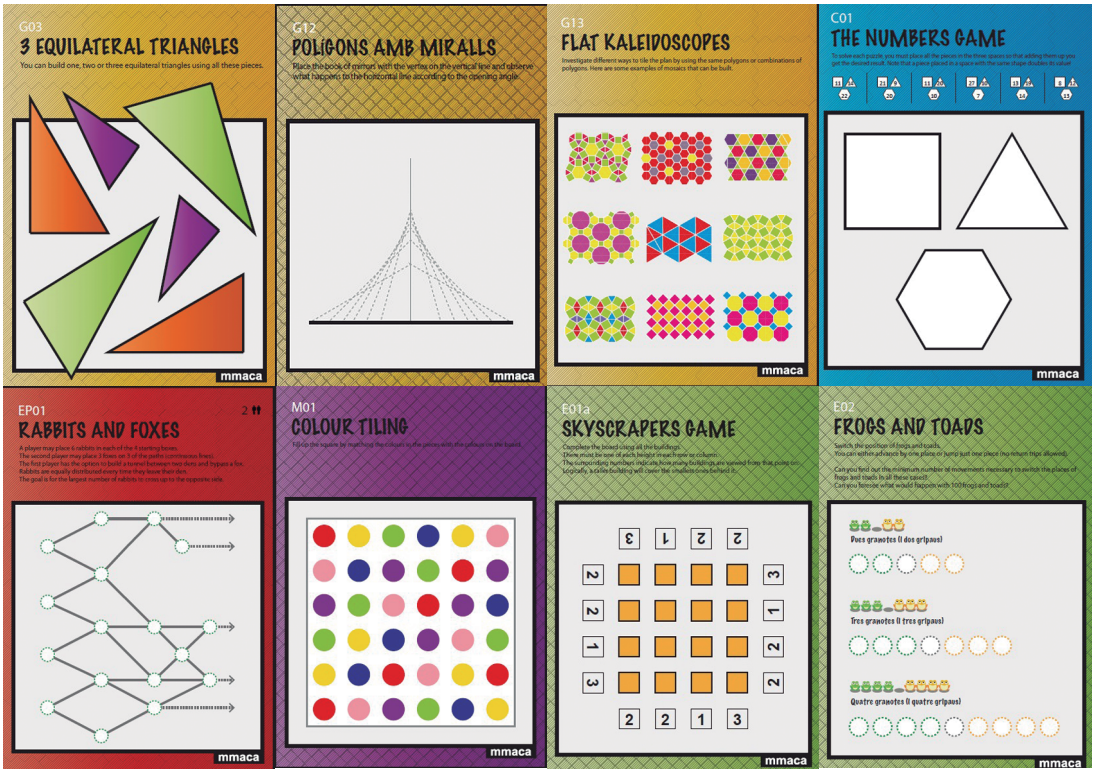


Figura 5. Ejemplo de materiales de los maletines didácticos del MMACA

del MMACA para las escuelas. Son unos cuarenta módulos de formato modesto (DIN A3 y DIN A4) y material poco costoso (PVC), una guía didáctica con cincuenta actividades complementarias para el aula, o un taller, 25 actividades para desarrollar con Geogebra u otros programas habituales además de *open source* y enlaces a los recursos que ofrece la red.

Una parte importante de las actividades que ofreceremos en esta sección de *Suma* tendrán este origen y serán escogidos para evidenciar que los materiales para una exposición son distintos de los que se pueden utilizar en un taller y en el aula.

Esperamos que os resulten útiles.

Los rascacielos

El primer encuentro con esta actividad fue un verano a través de un periódico italiano. Durante las vacaciones abunda el tiempo y las noticias escasean. Los periódicos adelgazan y proponen juegos y pasatiempos, alguno con carácter matemático.

Nos pareció fácil e interesante sacar este material del papel y darle dimensiones, color y el tacto de la madera: así nacieron varios de los módulos de nuestras exposiciones.

Tras unos años de intensa producción, análisis y discusión llegamos a la conclusión que la manipulación del material no se limita solo a cambiar el recorrido hacia la conceptualización de los usuarios. En este sentido, la investigación en neurociencias[1 y 2] parece afirmar que una actividad de investigación acompañada de la manipulación de objetos activa áreas distintas del cerebro. Esta manera distinta de pensar se activa también —y quizás más— cuando nos ponemos a diseñar los prototipos de nuestros módulos o a investigar distintas actividades, a veces años después de su estreno en las exposiciones.

El módulo de los rascacielos estaba ya disponible en las primeras exposiciones, llegando a ser de los más solicitados por parte del público que nos seguía en nuestro itinerario a través de Cataluña, cuando la reproducción de un librito italiano con unos veinte desafíos de rascacielos fue distribuido al profesorado de las pruebas Canguro.

No sabemos de nadie que lo haya utilizado en sus aulas, sí en jornadas matemáticas en su centro, pero en la exposición seguía siendo un éxito. Da igual si se reproduce en formatos distintos, siempre manipulativos, para diferentes usos: exposiciones, ferias, talleres, formación del profesorado, siempre funciona.

Los rascacielos en lápiz y papel seguían siendo nada más que un pasatiempo (como un *sudoku*[3]), pero las tres dimensiones y el tacto de la madera parecían estimular a otros receptores y provocar un mayor grado de satisfacción.

Las primeras variaciones que introdujimos se limitaban a incrementar la dificultad del desafío: tableros con menos datos y/o con más variables, y también un módulo gigante en colchoneta, para incrementar la participación y la discusión.

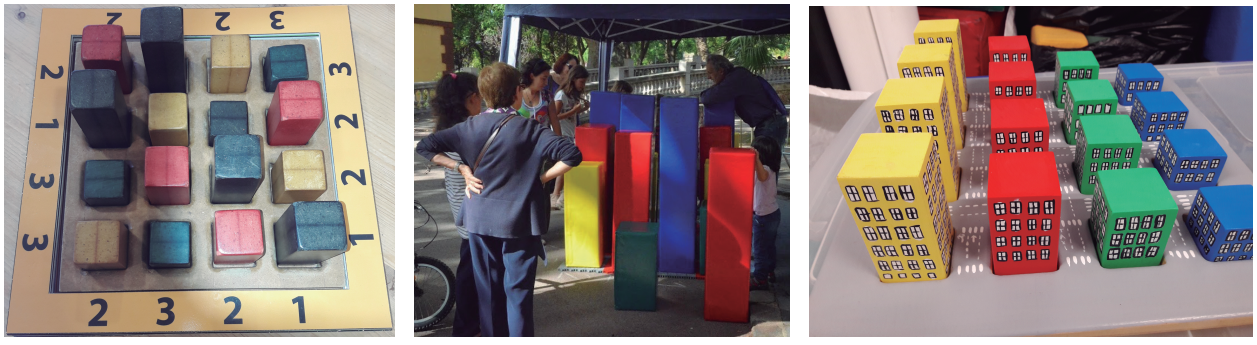


Figura 6.Distintos formatos del módulo: exposición, feria y exposición para niños

Más problemática parecía la colocación de este material (como de otras actividades del área «juegos de estrategia») en un taller, por lo menos hasta cuando no irrumpieron las competencias en el imaginario educativo y se empezó a valorizar el estímulo a la formulación/comprobación de hipótesis y el aspecto comunicativo.

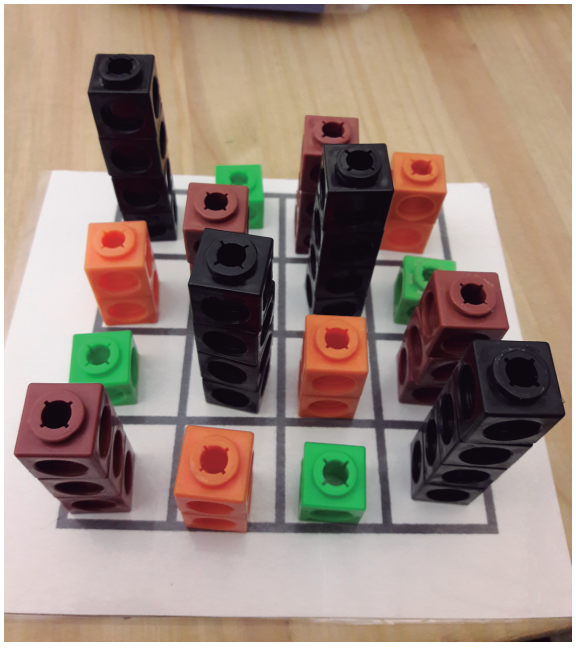
Por otro lado, las propuestas de talleres que estuvimos elaborando en un primer momento no nos parecían coherentes con la «filosofía educativa» que se iba desarrollando dentro del MMACA. El formato «tradicional» era demasiado parecido a unas actividades escolares, que están muy bien en una escuela, pero que resultan redundantes (= aburridas) en un museo. Ni, por otra parte, tenía sentido replicar el módulo y la actividad de la exposición, o sea tener como único objetivo la resolución del reto.

Decidimos que el objetivo de los talleres fuera la *construcción del módulo* o de la actividad.[4]

A cada pareja de alumnos[5] se les daba un tablero vacío y los rascacielos, que se podían hacer con piezas de *multilink* (incrementando aun el aspecto constructivo del taller).

Se trataba ahora de llenar el tablero con los rascacielos de diferente altura, con la única regla de no repetir altura/color de los edificios en ninguna de las filas horizontales o verticales. Después tenían que leer el número de rascacielos visibles desde cada posición marcada (los edificios altos cubren los más bajos) y escribir estos índices en los cuadrados oportunos.

Una vez vaciado el tablero, el reto estaba listo para ser suministrado a otra pareja de compañeros/as para que intentaran resolverlo.



	1	3	2	3	
1					3
3					2
2					2
2					1
	2	2	3	1	

Figura 7. Formato de los rascacielos para el taller (construcción del módulo)

Variables

a) Dimensiones del tablero

Según la edad de nuestro alumnado, podemos empezar por un tablero 3×3 o directamente 4×4 y llegar hasta un 5×5, fácil de construir, pero algo más complicado de resolver (y con el interés añadido que es más fácil que aparezcan distribuciones con varias soluciones).

b) Vaciado del tablero

Como en los sudokus, no es necesario que toda fila lleve la instrucción de cuantos rascacielos se ven desde cada punto de observación y se pueden escoger (y quitar) los índices redundantes.

Una actividad de este tipo es seguramente algo más compleja y necesita de un mayor dominio del material y un buen entrenamiento.

Tablero virtual: es posible conseguir un formato virtual de este módulo en la colaboración

sobre modelización que hizo el MMACA, en 2012, con Recerca en Acció:

http://www.recercaenaccio.cat/
jocs-i-recursos-educatius/gratacels/

Las discusiones posteriores sobre simetrías de los tableros, intercambios de filas o columnas y cambios en los índices laterales, etc., permiten trabajar aspectos complementarios sobre ordenación y combinatoria, si se quiere.

Conclusiones

Hemos testado este taller en diferentes situaciones (acompañando las exposiciones itinerantes o en jornadas de formación del profesorado) con una muy buena acogida. Es fácil controlar las pautas de la actividad mediante una presentación en power point que ayuda a visualizar las instrucciones y a respetar el tiempo de ejecución de las operaciones necesarias.

Por otro lado, todos hemos experimentado que la forma más efectiva de explicar un juego es… jugar. Puestas en su contexto y delante del reto preciso, la reglas se entienden (y aceptan) mejor. Esta fase previa, de construcción, ayuda a encontrar los elementos básicos para construir estrategias ganadoras.

Además, conseguir «crear» un reto resulta más satisfactorio que simplemente resolver el desafío propuesto por otra persona y mucho más motivador a la hora de seguir aventurándose hacia nuevas experiencias matemáticas.

MMACA
Museu de Matemàtiques de Catalunya, Cornellà de Llobregat (Barcelona)
<contacte@mmaca.cat>

1 Hermann, E. (2014), *The importance of hands-on learning and movement for English learners*, <http://exclusive.multibriefs.com/content/the-importance-of-hands-on-learning-and-movement-for-english-learners/education>.

2 Cleaver, S. (2018), *Hands-On Is Minds-On Want to Engage Every Student? Break out the Old-Fashioned Scissors and Glue*, <http://www.scholastic.com/browse/article.jsp?id=3751901>.

3 Hay varios módulos de nuestras exposiciones que se podrían considerar variantes del sudoku, des de los cuadrados —y triángulos— mágicos al cuadrado greco-latino. Pero en realidad, tanto los contenidos desarrollados como las habilidades requeridas son bastante diferentes. En el caso de los rascacielos, ni cálculo ni combinatoria juegan ningún papel. Tampoco se incentiva la búsqueda de un algoritmo que nos permita resolver retos parecidos o de mayor dificultad. Pero, su aspecto lúdico y la sencillez del reto que propone hacen que este módulo se preste muy bien a que públicos muy diferentes pasen de una primera fase de puro ensayo-error a elaborar una colección de estrategias que irán aplicando y refinando al enfrentarse a retos más difíciles.

También hay que resaltar el uso que le dan al módulo los niños muy pequeños, que acuden acompañados por las familias a las ferias de matemáticas que organizamos en los parques. Si te alejas un momento de tu sitio, es muy frecuente que al volver te encuentres con un niño muy orgulloso y los rascacielos ordenaditos por color y altura. Inútil decir que sobra todo comentario y solo procede cumplimentarse con el autor para la resolución del reto que él mismo se ha impuesto.

4 Propuesta por otro lado bastante poco original, ya que esta intención pedagógica nos acomuna a ilustres maestros y maestras (empezando por nuestra querida y nunca olvidada Emma Castelnuovo) y compañeros/compañeras, que no citamos para que nadie se nos olvide, pero que todo el mundo conoce porque han animado, animan y animarán las páginas de *Suma* y de las otras revistas y boletines de las Sociedades de Profesores de este país.

5 Siempre tendemos a estimular los aspectos colaborativos y comunicativos en todas las actividades.

suma+ 87
Secciones
Marzo 2018
pp. 83-95

Dos elevado a cero

Miquel Albertí Palmer

Crónica de una clase no anunciada

El tiempo es nuestro
(Proyecto L'INSiTU)

Llegué al aula y la encontré abierta. Algunos de mis alumnos estaban levantados y hablando a gritos entre ellos. Otros se empujaban y corrían entre las mesas golpeando las sillas. Cuando empecé a ser profesor, ante situaciones así, entraba en el aula gritando más que ellos y dándoles órdenes de que se sentaran cada uno en su sitio y se callaran. La contemplación del caos me generaba tensión y yo me imponía a él con más tensión y violencia sonora. Pero hace ya mucho que cambié mi modo de actuar y de enfrentarme al caos. Así que, como es ya mi costumbre, esperé en silencio apoyado en una jamba de la puerta a que el caos fuese diluyéndose por sí solo en un orden razonable.

Miles de millones de años de experiencia en el universo demuestran que el orden acaba imponiéndose, aunque dicho proceso requiera su tiempo. Mi presencia silenciosa aceleró el proceso, pues me respetaban más de lo que yo pensaba. Al cabo de un par de minutos pude contemplar cómo todos habían vuelto a sus sitios y habían sacado los apuntes, estuches y calculadoras de sus mochilas. Entonces sonreí, entré en el aula y les di los buenos días. Respondieron al unísono y, entre sonrisas, pudimos comenzar la clase de matemáticas de forma relajada.

Artículo solicitado por *Suma* en julio de 2017 y aceptado en septiembre de 2017

La sesión estaba anunciada en el horario. Cada viernes a la misma hora nos reuniríamos las mismas 31 personas en el mismo espacio cerrado. Llevábamos haciéndolo ya un par de meses. Nos quedaban siete más. Las actividades a realizar en esa sesión también habían sido anunciadas en el dosier de matemáticas de 1.º de la ESO. Dentro del tema de divisibilidad, titulado «Coincidencias periódicas» se iban a resolver dos problemas de coincidencias que a lo largo de la hora de clase pretendía que ellos realizasen.

El primero consistía en averiguar cuántas veces coincidirían los destellos de dos faros cuyas luces se encendían a intervalos regulares. Para realizar esta actividad, debían buscar los datos necesarios en la web de *Fars de Balears*, donde se ofrecen, entre muchas otras informaciones, las fichas técnicas de todos los faros de las Islas Baleares. La actividad pedía:

> Si los destellos de los faros de Sa Mola, en Formentera, y el de Portopí, en Mallorca, coinciden al mismo tiempo, ¿cuándo volverán a coincidir?
> ¿Cuál será el período de esas coincidencias?
> ¿Con qué frecuencia coincidirán sus destellos?

La otra actividad trataba una situación matemáticamente similar, pero en otro contexto:

> En un hospital el personal de enfermería pasa por las habitaciones para tomar los valores de las constantes vitales de los pacientes (FC, FR, T y TA). La frecuencia cardíaca, se toma cada 24 h; la frecuencia respiratoria, cada 8 h; la temperatura, cada 10 h; y la tensión arterial, cada 12 h. A un enfermo se le ha tomado nota de las cuatro constantes vitales hoy a las 08:00 h. ¿Cuándo se le volverán a tomar las cuatro constantes vitales a la misma hora?

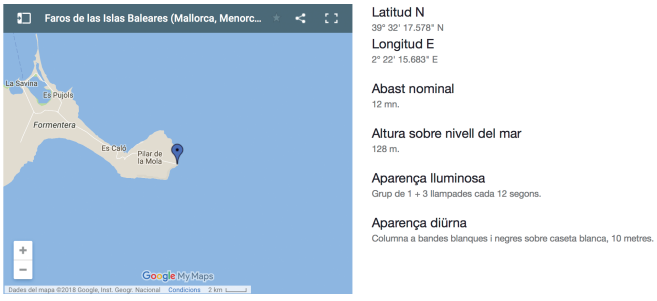


Figura 1. Datos técnicos del faro de Sa Mola (Formentera)

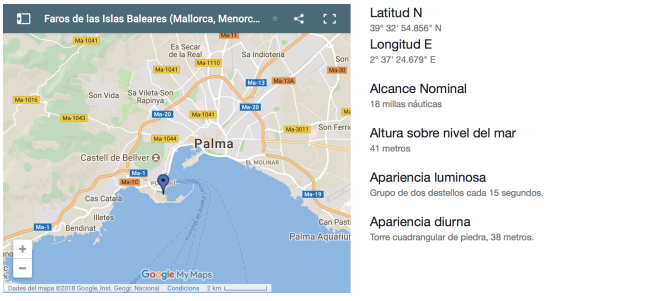


Figura 2. Datos técnicos del faro de Portopí (Mallorca)

Además, había un grupo de alumnas preparando un vídeo matemático sobre las coincidencias de los destellos de dos coches, una situación similar a la de los faros. Habían aprovechado el fin de semana para reunir en un mismo lugar dos vehículos de sus familiares y medir los períodos de los intermitentes: 0,8 s y 1 s.

Mientras me paseaba entre las mesas atendiendo dudas y dificultades, alguien reclamó mi atención. Para mi sorpresa, su consulta no estaba directamente relacionada sobre el problema de los destellos de los faros ni con el de los medicamentos. Su pregunta era más profunda matemáticamente y, en un principio, me pareció poco relacionada con la divisibilidad:

> —¿Por qué dos elevado a cero da uno? Mi profesor de primaria me lo explicó, pero no acabé de entenderlo. ¿Podrías explicármelo?

Su maestro se lo había explicado, pero no había acabado de comprenderlo. Al escucharle me sentí identificado con su maestro: ¿cómo podría explicarle yo a un crío de 12 años algo tan raro?

Ante una situación así tenemos varias opciones. Una es la huida: eludir el compromiso diciéndole que ya lo comprenderá más adelante, cuando esté en 4.º de la ESO o en 1.º de Bachillerato. Descarté esa salida porque me pareció impropia de un profesor. Otra opción es ofrecerle una respuesta a todas luces incomprensible desde su bagaje cultural, tanto lingüístico como matemático, mediante la cual pondremos en evidencia nuestra propia incapacidad para adaptarnos a su conocimiento, nuestras limitaciones como profesores y, seguramente, como matemáticos. Dicha opción pasaría por activar una respuesta formal y algebraica que podría desarrollase más o menos así:

$$\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0:$$
$$a^0 = a^{1-1} = a \cdot a^{-1} = a \cdot \frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1$$

Lo cierto es que esta no sería verdaderamente una demostración, pues daría por sentados otros conceptos sin definir.

La tercera opción consiste en ser conscientes de que una pregunta así requiere una respuesta en términos comprensibles para quien la formula. Si en ese preciso momento no se nos ocurre, hay que desarrollarla. Quería ser honesto y sincero y no banalizar una cuestión nada fútil. Los pensamientos que activan en la mente de un matemático la expresión «dos elevado a cero» son muy distintos de los que puede activar en una persona de 12 años.

Las buenas explicaciones no radican en el uso de un lenguaje exquisito ni en el uso de recursos tecnológicos o teatrales, artísticos o de cualquier otra índole. Una buena explicación es un modo de comunicación en el que importa más el receptor que el emisor. El obetivo de la cuestión no era explicarlo, sino explicárselo. Para ello mi explicación debía formularse en su lenguaje y limitándose, como máximo, a los conocimientos que se le suponen dada su edad y educación. Es decir, en base a su bagaje cultural. Opté por esa tercera opción y le pareció bien:

> —Deja que me piense cómo responderte este fin de semana y el lunes te lo explico.

Entretanto, algunos de los que habían terminado el problema de las constantes vitales me mostraron sus resoluciones. En una de ellas, reproducida y discutida en la pizarra (figura 3), se habían hecho listas de múltiplos hasta dar con la primera coincidencia: 120 h = cinco días.

Otra solución (figura 4) era prácticamente visual y no precisaba del cálculo del mínimo común múltiplo, aunque resultaba impracticable.

Otros que habían resuelto el de los faros también solicitaban mi ayuda. Me dirigí hacia ellos.

> —Hemos hecho el mínimo común múltiplo, pero no sabemos si está bien. Es un poco raro.

Miré sus apuntes y vi unos cuantos números decimales.

> —¿Habéis hecho el mínimo común múltiplo con decimales?
> —Sí. Mira…

Y partiendo de que el faro de Sa Mola, en Formentera, emite sus destellos cada 12 segundos; y que el de Portopí, en Mallorca, destella cada 15 segundos, me explicaron cómo habían hallado el período de las coincidencias:

> —15 segundos son 0,25 minutos, ¿no? Y 12 segundos son 0,2 minutos. Para buscar el mínimo común múltiplo de 0,25 y 0,2, hemos multiplicado por 100, y dan 25 y 20. Hemos buscado el mínimo común múltiplo de 25 y 20, que es 100, y luego lo hemos dividido por 100, por los decimales, y da 1 minuto.

Así que habían desarrollado un modo de calcular el mínimo común múltiplo de dos números decimales. ¡Jamás se me había pasado por la cabeza hacer algo así!

Expresado formalmente, habían hecho lo siguiente:

$$\text{mcm}(0{,}25,\ 0{,}2) = \frac{\text{mcm}(25,\ 20)}{100} = \frac{100}{100} = 1$$

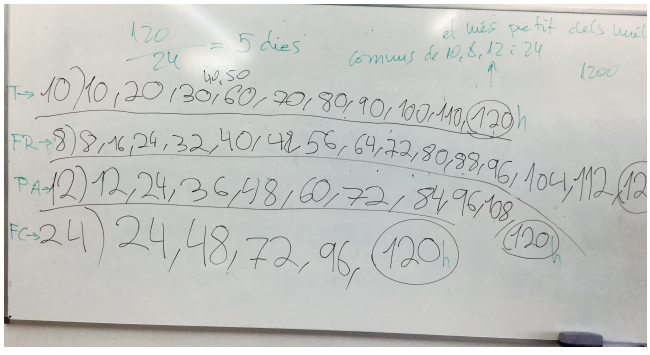


Figura 3. Solución del problema de las constantes vitales

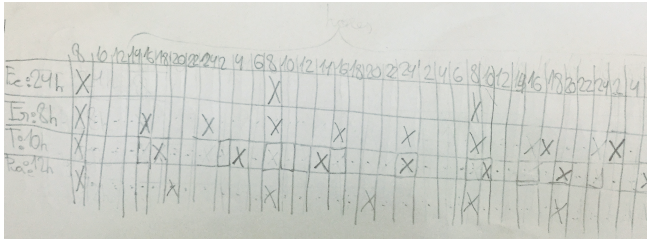


Figura 4. Otro modo de resolver el problema de las constantes vitales impracticable por su extensión

mcm de dos números decimales

Si yo a su edad hubiese hecho algo parecido, me habrían dicho que el mínimo común múltiplo solo estaba definido para números naturales. Esos decimales aparecían cuando en lugar de trabajar con segundos, la unidad de tiempo en la que se había planteado el problema, se había optado por trabajar con minutos. En un primer momento pensé que su cálculo reflejaba implícitamente ese cambio de unidades, pero no era realmente así, puesto que en la relación entre minutos y segundos el factor es 60 y no 100. Por tanto, su cálculo era numérico y no relativo a la equivalencia entre diferentes unidades de la misma magnitud: el tiempo.

Lo que había hecho ese grupo de alumnos podría expresarse así:

$$\begin{array}{ccc} \text{decimales} & \xrightarrow{\cdot 100} & \text{naturales} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{mcm}(\text{decimales}) & \xleftarrow[\div 100]{} & \text{mcm}(\text{naturales}) \end{array}$$

O formalmente:

$$\text{mcm}\left(\frac{a}{10^n},\frac{b}{10^n}\right)=\frac{\text{mcm}(a,b)}{10^n}$$

La generalización era, para mí, inmediata:

$$\text{mcm}\left(\frac{a}{p},\frac{b}{p}\right)=\frac{\text{mcm}(a,b)}{p}$$

Y si los denominadores son distintos:

$$\text{mcm}\left(\frac{a}{p},\frac{b}{q}\right)=\text{mcm}\left(\frac{a\cdot q}{p\cdot q},\frac{b\cdot p}{q\cdot p}\right)=\frac{\text{mcm}(a\cdot q,b\cdot p)}{p\cdot q}$$

Por ejemplo, tomando a=3/7 y b=5/4, tendríamos:

$$\text{mcm}\left(\frac{3}{7},\frac{5}{4}\right)=\text{mcm}\left(\frac{12}{28},\frac{35}{28}\right)=$$
$$=\frac{\text{mcm}(12,35)}{28}=\frac{420}{28}=15$$

¡El mcm de dos decimales puede salir entero! De hecho, esto nos lleva al problema visual del mcm que puede trabajarse con regletas. Y aunque las regletas suelen hacerse con un número entero de unidades de longitud, esa limitación no tiene por qué darse, pues incluso los múltiplos de las fracciones o números decimales acaban coincidiendo… casi siempre.

No lo harán si los números decimales son inconmensurables, esto es, cuando no exista un múltiplo común, como ocurre con las longitudes 1 y $\sqrt{2}$, por ejemplo. En cambio, de dos números enteros siempre existe un múltiplo común: al menos su producto lo es. Pero no así con números de infinitas cifras decimales sin fracción equivalente:

$$\text{mcm}\left(1,\sqrt{2}\right)=\nexists$$

Hemos llegado a un teorema que conecta dos temas matemáticos más concetados de lo que pueda parecer a primera vista como son la inconmensurabilidad y la divisibilidad:

a y *b* son conmensurables si y solo si existe su mcm

Me planteé llevar esas disquisiciones al aula. Pero pronto vi claro que debía limitar y mucho esas ideas para 1.º de la ESO. Decidí que lo mejor sería ofrecer la posibilidad de que el grupo que había desarrollado la idea de calcular el mcm de decimales expusiese su resolución a toda la clase y abrir un diálogo posterior sobre la aplicación de ese método al cálculo del mcm de dos números decimales cualesquiera. No plantearía siquiera la situación con fracciones, me limitaría a expresiones decimales sencillas.

Así lo hice y en la siguiente sesión expusieron su desarrollo. Fue muy bien acogido. No es de extrañar, pues la linealidad siempre se da por buena, sea en la situación que sea. Lo difícil es comprender que la gran mayoría de situaciones no son lineales o lo son a muy corto plazo o distancia o intervalo. Pero tampoco hay que tener prisa. Si la linealidad es tan bien acogida es porque las situaciones con las que uno se ha topado hasta ese momento son lineales y tiende a pensar que todo es lineal universalizando este tipo de relación. Ya habrá tiempo a lo largo de la ESO y más allá

para vivir otros fenómenos cuyas variables no estén relacionadas linealmente y ver que la no linealidad es más corriente que la linealidad.

La conclusión fue que como todo decimal finito se convierte en un entero multiplicándolo por 10, 100, 1 000…, para calcular el mcm de dos decimales basta multiplicarlos por un 1 seguido de tantos ceros como decimales tienen, luego calcular… En fin, el teorema que a modo de conclusión cerró el diálogo fue redactado así:

El mcm de dos decimales es el decimal del mcm

El grupo que preparaba el vídeo sobre las coincidencias de los destellos de los intermitentes de dos coches podría haber utilizado ese método para hallar el período de las coincidencias. Sin embargo, y teniendo en cuenta que se trataba de un video, optó por una versión visual y gráfica del cálculo de ese período (figura 5). Las figuras 6 y 7 muestran dos capturas del vídeo con destellos coincidentes y consecutivos en $t = -10$ s y en $t = -6$ s (período de 4 s).

Dos elevado a cero

Aquel fin de semana estuve pensando cómo explicar a una persona de 12 años por qué dos elevado a cero da uno. Lo primero que me vino a la cabeza fue la cadena de igualdades escrita más arriba en la que se relacionan las potencias con los exponentes negativos y las fracciones. Pero esta secuencia de igualdades algebraicas e implicaciones podría satisfacer a un adulto matemático, pero no a un niño matemático que requiere más significado y menos formalismo. Un significado del que el álgebra muy raramente nos provee.

De ahí que buscase una respuesta a la pregunta haciendo un ejercicio de situación mental por medio del cual me imaginaba a mí mismo con el bagaje cultural de quien me formulaba la cuestión. Así fue como llegué a la conclusión de que no debería utilizar el álgebra para desarrollar mi respuesta. No debería haber ninguna letra, solo cifras concretas, símbolos de operaciones elementales y el signo de igualdad. Tampoco usaría números negativos, y menos todavía exponentes negativos. A ser posible, tampoco debería utilizar fracciones.

También reconocí que, fuese cual fuese mi respuesta, la cuestión era traumática en sentido matemático, ya que el sentido y significado de dos elevado a cero es muy diferente del que tiene, por ejemplo, dos elevado a tres. Pero a eso volveré más adelante.

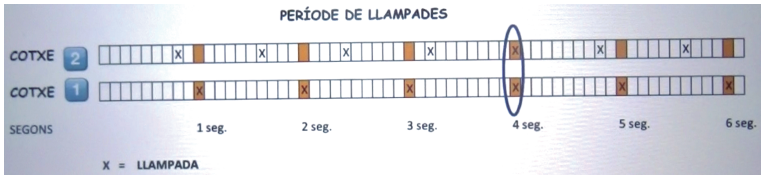


Figura 5. Captura del video sobre el período de coincidencias de los intermitentes de dos coches



Figura 6. Intermitentes encendidos en $t = -10$ seg



Figura 7. Intermitentes encendidos en $t = -6$ seg

Las bases aritméticas que sí podía dar por sentado que conocía el alumno eran que sabía realizar y escribir las operaciones elementales, incluida la potenciación con números naturales pequeños. Por lo tanto, podía basarme en que el alumno conocía el significado de un exponente y que, por ejemplo, tres elevado a cuatro, significa multiplicar el número tres por sí mismo cuatro veces, tantas como expresa el exponente de la potencia. De hecho, es así como se definen, se presentan y se da sentido a la potenciación con números naturales.

El quid de la cuestión era elaborar una respuesta de por qué 2^0 tiene que ser igual a 1 haciendo aparecer una potencia de exponente nulo en algún momento de la argumentación. Al final di con una explicación del problema que me pareció suficientemente satisfactoria y cuyo desarrollo no requería malabarismos algebraicos.

Llegado el lunes siguiente pregunté al alumno si le importaba que comentase la cuestión con todo el grupo de clase, pues me parecía importante que todos pudiesen conocer la pregunta y su respuesta. No tuvo inconveniente. Así que desarrollé el siguiente planteamiento:

—Alguien de vosotros me preguntó el viernes por qué dos elevado a cero da uno. ¿Hay alguien que sepa la respuesta?

Se mantuvieron en silencio.

—Bien, atendiendo la consulta de vuestro compañero voy a tratar de explicar por qué dos elevado a cero es igual a uno.

Comencé escribiendo dos igualdades que todos aceptaron y comprendieron sin dificultad:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$
$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

Tampoco planteó problemas la siguiente consecuencia:

$$2^3 \cdot 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

Ni esta:

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^7$$

En este momento les pregunté:

—¿De dónde sale el 7?
—De 3 más 4 (todos).

—Entonces, estaréis de acuerdo en escribir:

$$2^{3+4} = 2^7$$

Se aceptó sin protestas, con lo que me animé a escribir:

$$2^{3+0} = 2^3 = 8$$

Estuvieron de acuerdo y continué:

—Pero según lo dicho antes:

$$2^{3+0} = 2^3 \cdot 2^0$$

—Luego tenemos que:

$$8 \cdot 2^0 = 8$$

—¿Y qué número multiplicado por 8 da 8?
—¡El uno! (unanimidad).
—Por lo tanto, dos elevado a cero tiene que ser igual a uno, ¿no?

$$2^0 = 1$$

Y lo que acabamos de hacer con el 2 puede hacerse con cualquier otro número, con lo cual la conclusión es que cualquier número elevado a cero da uno.

Aceptaron los estadios, pero no se tragaron la conclusión. Aceptaban los peldaños, pero no a dónde les había conducido la escalera. Lo mismo me ocurre a mí: acepto y comprendo la lógica del razonamiento, pero no acabo de comprender la conclusión. La acepto y hace ya mucho que aprendí a vivir con ella, pero me supone un conflicto siempre que pienso en su significado. Lo mismo les ocurrió entonces a mis alumnos.

Si al principio la cuestión no me había parecido muy pertinente, pues surgió al tratar de resolver dos problemas contextualizados de divisibilidad, el alumno que la había planteado me confesó más tarde que la pregunta se le había ocurrido al calcular de forma mecánica el mcm.

En efecto, un modo de obtener el mínimo común múltiplo es factorizar los números para expresarlos como productos de potencias de números primos. Algo que, como ilustra la figura 8, puede tener algunos detractores.

Esta manera de calcularlo conlleva dos dificultades. Una es que suele olvidarse la norma (yo nunca la he recordado y siempre tengo que repensarla para expresarla correctamente). La otra, que permite calcular el mcm sin comprender absolutamente nada de lo que se está haciendo. Fue al calcular el mcm de este modo y ver las potencias de varios primos que esa persona recordó la existencia de potencias con exponente nulo acerca de las que había interrogado a su maestro en primaria. Por tanto, la cuestión sí que estaba relacionada con la divisibiidad y las coincidencias periódicas.

Esa forma de realizar el cálculo nunca puede preceder a la vivencia o experimentación de sus significados. ¿Quiere decir esto que la norma es vana e inútil? No, evidentemente es útil. Sobre todo, una vez se han efectuado extensas listas de múltiplos y divisores hasta dar con la primera coincidencia. Es entonces cuando uno acaba dándose cuenta de que la tarea se convierte en imposible por tediosa e impracticable, cuando los números involucrados son grandes o apenas poseen factores comunes. Es entonces cuando necesitamos un recurso más potente que la elaboración de una lista.

Pese a todo, yo no recomiendo la norma a mis alumnos. Una vez disponen de la factorización, suelo recomendar construir uno de los números y tomar del otro los factores que necesitemos para completarlos a todos.

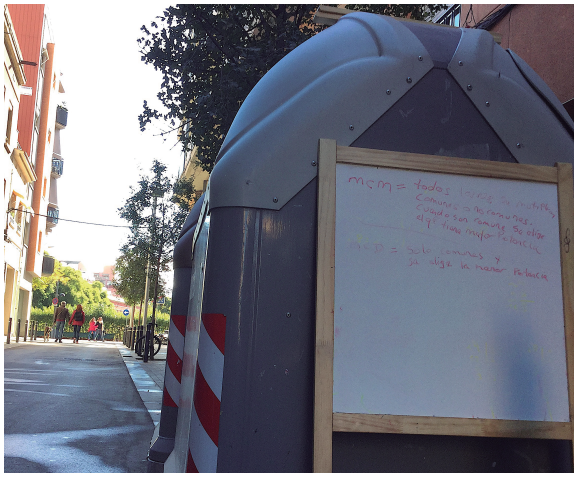


Figura 8. La norma de cálculo del mcm y del mcd en una calle de Barcelona esperando a ser reciclados

Por ejemplo, para hallar el mcm de 12, 15 y 25, primero tomamos la factorización del 12 ($2^2 \cdot 3$). Luego, nos preguntamos qué factores necesitamos tomar de la factorización del 15 para poder componerlo con los que ya tenemos: solo un 5, el 3 ya lo tenemos. Por último, ¿qué falta para componer el 25? De los dos cincos necesarios, ya disponemos de uno, solo falta otro:

$$\left.\begin{array}{l} 12 = 2^2 \cdot 3 \\ 15 = 3 \cdot 5 \\ 25 = 5^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{mcm}(12,15,25) = \\ = \left(\left(2 \cdot 2 \cdot 3\right) \cdot 5\right) \cdot 5 = \\ = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 300 \end{array}$$

Pero también esta norma se vuelve ineficaz cuando los números son mayores aún o se carece de referentes para determinar si son primos o no. En tal caso abandonamos los algoritmos manuales en beneficio de los recursos tecnológicos y digitales disponibles. Dudo que nadie se atreva a hallar el mcm (2018, 2019) mediante el único recurso del cálculo mental o manual.

Algunos cursos después volvió a aparecer la cuestión de $2^0 = 1$ con otro grupo de alumnos de una promoción distinta, estos ya de 2.º de la ESO. Los acontecimientos se desarrollaron de forma similar a la expuesta, aunque a partir de una causa diferente, pues la incitación partió de cuántos divisores tenía el ángulo de 360º.

La cuestión estaba relacionada con los recubrimientos regulares del plano y venía a colación de averiguar cuáles eran los polígonos regulares cuyos ángulos eran enteros, esto es, divisores de 360º. La cuestión volvía a estar relacionada con la divisibilidad, pero no a través de un problema de encuentros o de destellos periódicos de la vida real y cotidiana, sino relacionando dos contextos distintos de las matemáticas como son la divisibilidad y la geometría.

En esa clase de 2.º de la ESO se había deducido una fórmula para hallar el ángulo interior de un polígono regular de N lados distinta a la que alguien había encontrado en Internet (figura 9).

Tras encargar la tarea de aplicar la fórmula a mis 24 alumnos, cada uno de ellos con un valor de N distinto, desde ($N = 11$ hasta $N = 34$), se introdujo la fórmula en una hoja de cálculo de Excel para verificar los resultados obtenidos y

extraer conclusiones sobre ellos (figura 10). Fue una de dichas conclusiones la que inspiró una cuestión relacionada con la divisibilidad, pues alguien observó que había ángulos enteros y otros decimales y se preguntó por qué.

En esa clase de 2.º de la ESO se hizo una lista con todos los divisores de 360. Lo que incitó la cuestión sobre dos elevado a cero fue que alguien, al ver lo tediosa que era la tarea buscando uno a uno todos los divisores, preguntó cómo podía saberse cuántos divisores tiene un número sin tener que hacer la lista.

Los adultos matemáticos sabemos que el número de divisores de un número se obtiene precisamente de los exponentes de su factorización. Como $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, la cantidad de divisores de 360 es: $(3+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Ese +1 dentro de cada paréntesis se oculta en el exponente 0 de cada una de las potencias. De ahí que les propusiese buscar la descomposición factorial de 360. Y la encontraron.

A partir de aquí surgieron propuestas de combinar distintos factores presentes en la descomposición para construir productos. Alguien vio que si en 2^3 hay tres doses, en 3^2 hay dos treses, y solo tenemos un 5, la solución debería estar en cómo combinar tres doses, dos treses y un cinco. Es decir, $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Pero seis son tan solo la cuarta parte de los divisores de 360. Entonces les pregunté:

—El 1, ¿no es un divisor de 360?
—¡Claro! (unanimidad)
—Si solo combinamos doses, treses y cincos, jamás obtendremos el 1, ¿no?

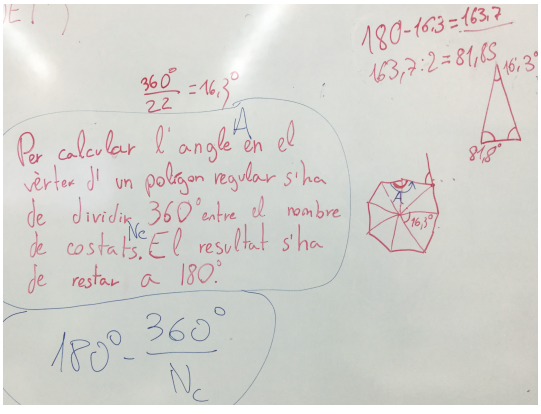


Figura 9. Fórmula deducida en clase para el ángulo interior de un polígono regular de N lados

Alguien preguntó:

—Pero, entonces, ¿de dónde sale el 1?

Fue entonces cuando otra persona dijo:

—Dos elevado a cero da uno.

Yo repliqué:

—¿Y dónde está el 2^0?

No respondieron mi pregunta, pero sus comentarios se iban acercando:

—No se ve, pero el 1 está en el 2, dijo uno.
—Y en el 3 y en el 5, dijo otro.
—¿Y entonces?, dije yo.
—Hay que contar con el 1 también.
—¿Y cuántas opciones supone el hacerlo?, pregunté.
—Una más para todos. Si antes eran seis, ahora serán..., quien hablaba se quedó en el aire.
—6 por 2 son 12, concluyó otra persona.
—Pero no son 12 los divisores, observé.
—No, son el doble todavía, dijo alguien.
—¡Claro! El 1 está en todos, en cada uno, está en el 2, en el 3 y en el 5.

Quien había hablado acababa de encontrar la clave de la respuesta. De nuevo, intervine:

—¿Cómo contamos las opciones?

La misma persona iluminó al resto:

—Si antes eran tres, dos y una, ahora son 4, 3 y 2.
—Sí, ahora sí: ¡4 por 3 y por 2 da 24!, expresó con júbilo otra persona.

Sabíamos que había que contar una opción más para cada factor primo de la descomposición. Sin embargo, la opción adicional que a cada factor aportaba el 1 no se había hecho todavía visible, seguía oculta. La argumentación se había desarrollado de forma dialogada.

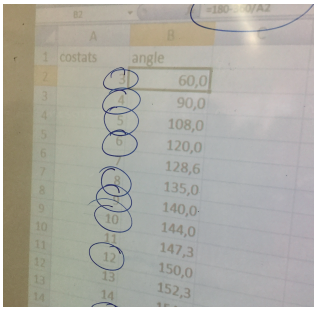


Figura 10. Hoja de cálculo para los ángulos interiores de un polígono regular

Yo sabía que había unos en el 2^0, en el 3^0 y en el 5^0, y que cuando se observan los exponentes de la descomposición factorial hay que considerar esos ceros ocultos que hacen que los divisores sean uno más de los que indican los exponentes:

$$\begin{array}{ccc} 2^3=8 & 3^2=9 & 5^1=5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2^0=1 & 3^0=1 & \\ 2^1=2 & 3^1=3 & 5^0=1 \\ 2^2=4 & 3^2=9 & 5^1=5 \\ 2^3=8 & & \end{array}$$

Así es como aparecen los cuatro divisores de 2^3 (1, 2, 4 y 8), los tres divisores de 3^2 (1, 3 y 9) y los dos divisores de 5^1 (1 y 5) que combinados en productos proporcionan las $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ combinaciones posibles que dan lugar a los 24 divisores de 360. Esa explicación fue la que expuse a la clase, pues no todos habían experimentado la iluminación de quienes más intervinieron en el diálogo. Pero la cuestión de por qué $2^0 = 1$ seguía en el aire.

Justifiqué esta igualdad reproduciendo la misma argumentación que unos años antes había presentado en 1.º de la ESO y que he reproducido más arriba. La gran mayoría parecieron comprender los motivos por los que dos elevado a cero tiene que ser uno, pero sus caras demostraban sorpresa y escasa credibilidad. Incluso hubo quien exclamó:

> —¡Esto es magia!
> —No, no es magia, intervine. Es lógica y es coherencia. El mismo razonamiento que nos ha llevado a que $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4}$ es el que nos conduce a que 2^0 se igual a 1. Y tenemos que aceptarlo porque este resultado es hijo de nuestra lógica, de nuestro pensamiento.

El trauma matemático

Su perplejidad era la misma con la que respondemos a un argumento incuestionable pero que nuestra mente no acaba de aceptar, que no acaba de acomodarse en nuestro bagaje cultural. Estaban viviendo su primer trauma matemático.

Un trauma matemático es fruto de una triple colisión producida por la lógica, la intuición y el significado. Del choque debe nacer un nuevo significado que resultará inaceptable si no encuentra acomodo en nuestra cultura, aunque lo cierto es que acomodarlo significa modificar nuestra cultura y aprender a convivir con él. De niños, se nos explica que la multiplicación de dos números consiste en la suma sucesiva de uno de ellos tantas veces como indica el otro:

$$3 \cdot 4 = 3+3+3+3$$
$$4 \cdot 3 = 4+4+4$$

Lo mismo ocurre con la potenciación, tal y como se ha comentado antes. Pero al llevar las cosas a casos patológicos con números menos naturales se pone a prueba nuestra intuición y, como consecuencia de ello, nuestra comprensión. Cinco elevado a tres significa multiplicar cinco por cinco tres veces. Pero desde esta perspectiva, cinco elevado a cero carece de sentido, pues no podemos multiplicar un número por sí mismo cero veces. Este shock afecta nuestra concepción, tanto de lo que hasta ahora significaba multiplicar como de lo que significaba el número cero.

De hecho , el número cero no es de los más naturales, ni en un sentido literal del término (es mucho más joven que sus colegas 1, 2, 3, 4…), ni en un sentido matemático, pues hay quienes lo excluyen del que toman como auténticamente matemático conjunto de números naturales.

En cualquier caso, nuestra reacción a ese sinsentido que es dos elevado a cero es la resignación. La lógica de la aritmética nos ha conducido a una igualdad monstruosa ($2^0 = 1$) que pone de manifiesto las consecuencias aberrantes que puede generar y que pone a prueba nuestro entendimiento. Estamos viviendo una contradicción, pues la consecuencia de nuestro pensamiento lógico es un resultado que se nos antoja absurdo. Parece como si la lógica nos dijese: ¿no querías una nueva operación basada en otra más elemental? ¡Atente a las consecuencias!

¿Comprendemos realmente que $2^0 = 1$? Cada lector puede analizar sus reflexiones, pero en un adulto matemático ese análisis quizá llegue tarde porque hace ya mucho que esa igualdad halló acomodo en su bagaje cultural. Incluso puede consi-

derarla indiscutible. Sin embargo, tal vez queden algunos resquicios que nos induzcan a pensar que la hemos aceptado y asimilado demasiado a la ligera, sin profundizar lo suficiente como para comprenderla del todo. Demostramos que la igualdad es cierta, y nos la creemos. Vemos que la calculadora también da como respuesta 1 cuando le ponemos el cero a una potencia, y nos la creemos. Como se la creyeron los alumnos de mi clase. Mis alumnos entendieron los razonamientos, pero no aceptaban ni entendían la conclusión porque trastocó el modo que tenían hasta entonces de comprender la multiplicación de dos números y el modo en que comprendían el número 0. El cero conlleva dificultades y la dificultad de 2^0 no está en el 2, sino en el 0.

Cero por cero igual a cero

Dos elevado a cero da uno, pero el cero provoca problemas en todas las operaciones que no sean la suma. Incluso en multiplicaciones elementales como $0 \cdot 12 = 0$.

Nadie discute esa igualdad, pero si volvemos a traer a colación el significado de la multiplicación, ¿cuál sería el significado de $0 \cdot 1$? Sería equivalente a sumar cero veces uno. ¿Tiene sentido eso? Más sentido tiene sumar una vez cero. Y dicho cálculo, $1 \cdot 0$, sí que da 0. Por tanto, podemos aceptar que $0 \cdot 1 = 0$ en base a la conmutatividad de la multiplicación. Pero, ¿acaso la multiplicación es conmutativa? Vemos y comprendemos que lo es siempre que uno de los dos números involucrados en ella no sea precisamente 0. Y ello es consecuencia de la conmutatividad de la suma. Por lo tanto, para que el producto sea conmutativo basta con aceptar que $1 \cdot 0 = 0 \cdot 1$.

Exponentes negativos

Otra de las consecuencias que se derivan del hecho de que 2 elevado a 0 sea 1 es la del significado que deberemos dar a las potencias de exponente negativo. Aprovechando la misma argumentación que nos ha conducido a que $2^0 = 1$, podemos hacer lo siguiente:

$$1 = 2^0 = 2^{3-3} = 2^3 \cdot 2^{-3}$$

Luego si aceptamos que también para los números negativos es verdad que $2^{3-3} = 2^3 \cdot 2^{-3}$, entonces tenemos:

$$1 = 8 \cdot 2^{-3}$$

Puesto que el número que multiplicado por 8 da 1 es 1/8, deberá ser:

$$\frac{1}{8} = 2^{-3}$$

Si elevar un número a 0 era monstruoso, ahora resulta que, según el significado original del producto de números, ¡un número multiplicado por sí mismo una cantidad de veces negativa, ¡da su recíproco!

De nuevo estamos ante un shock de significado. Esos traumas van forjando la mente matemáticamente adulta y ponen de manifiesto las consecuencias imprevistas que tiene el pensamiento lógico sobre la aritmética. Unas consecuencias derivadas de las operaciones con números naturales y que dieron lugar a la creación de las fracciones, los irracionales, los enteros y los complejos (citados por orden epistemológico).

Aproximaciones visual y lingüística

Meses después de aquella clase no anunciada, la cuestión volvió a mi cabeza. Entonces me planteé otro modo de enfocarla que quizá podría resultar incluso más comprensible para un alumno de primer curso de la ESO que la que expuse en clase. Ese nuevo enfoque se basaría en el lenguaje.

Efectuar una potencia de 2 no es otra cosa que multiplicar por 2 varias veces, es decir, duplicar tantas veces como indica el exponente de la potencia. Si vuelve a multiplicarse por 2, la estamos cuadruplicando, y así sucesivamente. Esto puede representarse del modo siguiente:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 2 & & 4 & & 8 & & 16 & & 32 & & \dots \\ & \cdot 2 & & \cdot 2 & & \cdot 2 & & \cdot 2 & & \cdot 2 & \end{array}$$

De forma resumida:

$$2^1 \quad 2^2 \quad 2^3 \quad 2^4 \quad 2^5 \quad \dots$$

De este modo, a medida que continuamos la secuencia vamos obteniendo las sucesivas duplicaciones o potencias de 2. Desplazándonos en sentido contrario, lo que estaremos haciendo es la operación inversa a la multiplicación, es decir, en lugar de multiplicar por 2, dividir por 2. Si antes duplicábamos, ahora partimos en mitades:

$$\begin{array}{ccccccccc} 32 & & 16 & & 8 & & 4 & & 2 & \dots \\ & \div 2 & & \div 2 & & \div 2 & & \div 2 & & \div 2 \end{array}$$

Resulta tentador ir más allá en la secuencia. Si la secuencia anterior estaba compuesta por las sucesivas duplicaciones, ahora lo está por las sucesivas mitades:

$$2^5 \quad 2^4 \quad 2^3 \quad 2^2 \quad 2^1 \quad 2^{¿?}$$

Cada mitad rebaja en una unidad el exponente precedente. La cuestión de qué número cabe poner en el interrogante tiene solución evidente. No queda otra alternativa que el cero: 2^0. Y de nuevo concluimos que 1 tiene que ser igual a 2^0. Además, llevando las cosas más lejos todavía entramos en la serie de las potencias de exponente negativo. Tras 2^0 vendrían 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3} y así, sucesivamente:

$$\begin{array}{cccccccccc} 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 2^5 & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 & 2^{-1} & 2^{-2} & 2^{-3} \end{array}$$

Hemos completado la serie. Sin embargo, no evitamos la sorpresa de los significados de 2^0 y de 2 elevado a un exponente negativo. Este enfoque se basa en la percepción visual de una secuencia, en un patrón, y no tanto en el cálculo de una operación matemática. Por esto no lo considero tan adecuado matemáticamente como aquel. Con todo, el trauma permanece, aunque ya resulta menos doloroso. Nos vamos acostumbrando a él.

Conclusiones y reflexiones teóricas

Según la leyenda, Pierre de Fermat anotó en el margen de un libro una demostración maravillosa del teorema que lleva su nombre y que tardaría más de tres siglos en ser demostrado. Lo que ocurre en los márgenes no es banal, conviene prestarles atención porque también forman parte del todo.

Una clase anunciada no suele contemplar los márgenes. Suele regirse por un guion preestablecido sin planes para abordar situaciones imprevistas. En una clase así, probablemente, las cuestiones de por qué dos elevado a cero da uno y el cálculo del mínimo común múltiplo de decimales, se habrían mantenido al margen sin ser tratadas.

Actuando así cercenamos la libertad y la creatividad, no solo de nuestros alumnos, sino la nuestra como profesores. Partiendo de que las matemáticas no están en los libros, sino que se hacen y construyen cuando uno desarrolla nuevas ideas y de que, al menos en un primer estadio, es la práctica la que las valida, un grupo de alumnos construyó un teorema: el mínimo común múltiplo de dos decimales es el decimal del mínimo común múltiplo.

Más adelante ya formalizarán ese teorema de modo más riguroso (si alguien les deja margen para hacerlo en una clase más o menos anunciada). Pero esa generalización y demostración que un matemático formal considerará todavía pendientes no les aportará más significado y conocimiento que el que adquirieron cuando osaron hacer algo que a mí, como profesor y como matemático, me impiden hacer las definiciones, los desarrollos formalistas y los prejuicios de mi conocimiento. Yo no podía ni imaginar siquiera el mcm de decimales, pues tengo grabada a fuego la definición del mcm única y exclusivamente para números naturales. Gracias a mis alumnos sé que hay más vida para los decimales en cuestiones de divisibilidad de la que les atribuía.

En cuanto a la cuestión de dos elevado a cero, me alegro de haber adoptado la decisión que tomé y adaptarme al bagaje cultural del alumnado de 1.º de la ESO. Se puso de manifiesto, además, la relevancia que pueden tener las potencias de exponente nulo en la divisibilidad y, en una clase

de 2.º, en la geometría. Dado que la pregunta me pareció de gran importancia y que representaba un primer pequeño trauma matemático, creí conveniente adentrarme en los márgenes de mis clases y ofrecer un tiempo para que toda la clase pudiese reflexionar sobre esa rareza no anunciada ni prevista por mí en las actividades que la inspiraron.

Esa rareza carece de sentido desde la perspectiva clásica con la que aprendemos a calcular y a escribir las potencias, pero a la que nos conduce el ansia de coherencia en el razonamiento lógico. Hemos de tragarnos las consecuencias de nuestro propio modo de razonar, aunque esas consecuencias residan en los márgenes menos frecuentados de nuestros pensamientos. Son, de hecho, estas consecuencias las que alumbran esos márgenes. En eso consiste aprender: en asimilar la vida en los márgenes y en aprender a convivir con las crisis que esa integración supone.

Ante una situación así muchos adoptarán una posición que Eduardo Mendoza (1982) expresa claramente en boca de un personaje de su novela *El laberinto de las aceitunas*: «la memoria almacena lo que el intelecto rechaza». Pero las matemáticas se enfrentan al intelecto, a la comprensión y al razonamiento. No hay asimilación matemática, eso a lo que Piaget (1970) se refería como proceso de acomodación, sin comprensión ni razonamiento. Lo que ocurre es que a veces uno puede seguir el hilo del razonamiento, como en este caso, sin comprender su conclusión. La lógica tiende caminos y autopistas seguros que nos conducen a lugares imprevistos al inicio del viaje. ¿Quién iba a esperar que el camino o la autopista acabase súbitamente en un precipicio, en la jungla o en el mar?

Entonces vemos que los conceptos a los que Vygotsky (1978) calificaba de científicos y que, según él, se construían de arriba hacia abajo en contraposición a los conceptos espontáneos, construidos de abajo a arriba, no se desarrollan verdaderamente de arriba hacia abajo, sino que, en mi opinión, todos van de abajo a arriba. Entendiendo por abajo la parte práctica y tangible, y entendiendo por arriba la parte conceptual y abstracta del conocimiento matemático. En efecto, dos elevado a cero no es que sea uno, sino que tiene que ser igual a uno por una cuestión práctica y de coherencia lógica. Se trata de un invento humano que no tiene nada de divino. Tal vez Vygotsky pensase que los conocimientos científicos se elaboraban de arriba hacia abajo porque su percepción de las matemáticas se acercaban más a los cálculos y resultados que no a los procesos de su creación.

[...] dos elevado a cero no es que sea uno, sino que tiene que ser igual a uno por una cuestión de práctica y de coherencia lógica.

El proceso se desarrolló mediante episodios dialogados en los que intervine más de lo que ahora considero que debería haber intervenido. El diálogo es un recurso fundamental en matemáticas que deberé utilizar más en mis clases. El diálogo incitó la participación del alumnado y la exposición pública y sincera de cuestiones matemáticas que a menudo se barren debajo de la alfombra.

La importancia del diálogo basado en la argumentación irá creciendo a lo largo de esta sección. Resulta inevitable porque es así como se han desarrollado gran parte de las matemáticas desde sus orígenes. Célebres son los diálogos de Platón (1960) y los de Galileo (1994). El matemático necesita el diálogo para validar o rechazar sus intuiciones, sus demostraciones, sus ideas inspiradas o no en la práctica: necesita al otro. Galileo plantea un diálogo a tres bandas sobre los sistemas cosmológicos vigentes en el siglo XVI. Dos mil años atrás, Platón actúa como el moderador sabio en un diálogo con más participantes y en el que el conocimiento matemático no se aísla del filosófico. El papel del diálogo en el ámbito científico fue destacado por Popper (1994) y en el matemático por Lakatos (1978) a través de conjeturas y refutaciones de cuyo desarrollo emerge el conocimiento validado. El diálogo es, por lo tanto, causa y medio de aprendizaje.

Suele atribuirse al cálculo un mero papel mecánico como medio para obtener resultados. El cálculo se situaría en los márgenes de aquello a lo que Lave y Rogoff (1984) se refieren como práctica en la vida cotidiana. Sin embargo, dentro del ámbito matemático el cálculo juega un papel práctico si su praxis no se reduce, como suele ser común en otros ámbitos como el científico y el de la

vida cotidiana, al de medio sobre el que no cabe la reflexión. Los científicos y los consumidores conocen que dos elevado a cero es igual a uno y quizá con esto les baste para desenvolverse bien en sus tareas. Pero los matemáticos deben saber el motivo y los educadores matemáticos deben fomentar la reflexión sobre los motivos del cálculo porque no es la calculadora lo que debe gobernar nuestro pensamiento. Fuera de las matemáticas, el cálculo es un medio técnico; dentro de las matemáticas, el cálculo es un modo de pensamiento.

Fuera de las matemáticas, el cálculo es un medio técnico; dentro de las matemáticas, el cálculo es un modo de pensamiento.

Los procesos de cálculo matemático merecen más reflexión, sin que eso represente más práctica. En lugar de realizar, como era corriente décadas atrás, mil cálculos sin reflexión alguna, planteemos la realización de diez cálculos con tres o cuatro reflexiones. Entonces convertiremos el cálculo en una práctica vital de las matemáticas a partir de la cual será posible el aprendizaje en un sentido parecido a aquel con el que Lave y Rogoff se refieren a la práctica en la vida cotidiana.

Mis alumnos desarrollaron métodos de cálculo (mcm) y plantearon cuestiones sobre un cálculo concreto (2^0). Fue la reflexión sobre dichos cálculos lo que facilitó el aprendizaje matemático, pues aprender el mcm no se reduce a saber calcularlo ni escribir $2^0 = 1$ es conocer esta igualdad.

Esta ha sido la primera entrega de una sección que hablará de cuestiones reales ocurridas en el aula de matemáticas. La escribo porque mis alumnos me hacen aprender y revivir en los márgenes de clases anunciadas situaciones imprevistas como las descritas. Aprenden ellos y aprendo yo. A diferencia de la muerte anunciada novelada por Gabriel García Márquez (1981) y que acaba por consumarse, es en lo imprevisto de lo no anunciado donde con los alumnos podemos vivir procesos matemáticos creativos de gran riqueza. Y eso es excelente, tanto para el aprendizaje del alumnado como del profesorado. Quizá pueda objetarse que para ello hace falta tiempo. Sin embargo, el tiempo existe y somos nosotros, el profesorado, quienes lo distribuimos. El currículo orienta, pero no obliga. Debemos sentirnos obligados por lo que realmente importa: ser honestos con lo que supone hacer matemáticas y con su historia.

A lo largo de esta sección pretendo mostrar lo que puede ocurrir en los márgenes de algunas clases de matemáticas. Unos márgenes que irán agrandándose hasta no merecer dicha denominación, pues con los años (el tiempo) han pasado a ser el centro y el eje de mi tarea como profesor. No quiero ni puedo renunciar a esas orillas, pues en ellas vive el aprendizaje. Ello supone asumir que el tiempo, como expresa la cita inicial de este artículo, no lo distribuyen ni el sistema ni el currículo, lo distribuimos nosotros. He ahí la esencia de una clase no anunciada y esta la primera de sus crónicas.

Referencias bibliográficas

Galilei, G. (1994), *Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo ptolemaico y copernicano*, Edición de Antonio Beltrán Marí, Alianza Editorial, Madrid.

García, G. (1981), *Crónica de una muerte anunciada*, Editorial Bruguera, Barcelona.

Lakatos, I. (1978), *Pruebas y refutaciones*, Alianza editorial, Madrid.

Lave, J., y B. Rogoff, (1984), *Everyday Cognition: Its Development in Social Contex*t, Harvard University Press, Cambridge.

Mendoza, E. (1982), *El laberinto de las aceitunas*, editorial Seix Barral, Barcelona.

Piaget, J. (1970), *The Science of Education and the Psychology of the Child*, Grossman.

Platón (1960), *Diálogo VII: Felebos, Timaios, Kritias*, Ediciones Ibéricas, Madrid.

Popper, K. B. (1994), *Conjeturas y refutaciones: el desarrollo del conocimiento científico*, Editorial Paidós, Barcelona.

Vygotsky, L. S. (1978), *Mind in Society*, Harvard University Press, Cambridge.

Miquel Albertí Palmer
INS Vallès (Sabadell)
<clasenoanunciada@revistasuma.es>

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Comisión Ejecutiva

Presidente: Onofre Monzó del Olmo
Secretario General: Agustín Carrillo de Albornoz Torres
Vicepresidente: Juan A. Martínez Calvete
Tesorera: Encarnación Amaro Parrado

Secretarías

Técnica adjunta: Bienvenido Espinar Cepas
Revista *Suma*: Lluís Albarracín Gordo, Miquel Albertí Palmer y Iolanda Guevara Casanova
Relaciones internacionales: Mª Claudia Lázaro del Pozo
Servicio de publicaciones: Juan Martínez Tébar Giménez
Actividades y formación del profesorado: Juana M.ª Navas Pleguezuelos
Actividades con alumnos: Luisa Almazán Álvarez

Sociedades Federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT)
Presidente: Manuel Sol Puig
C/St Ramon 29. 08340 Vilassar de Mar

Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas
Presidente: Daniel Sierra Ruiz
Instituto Universitario de Matemáticas y Aplicaciones
Edificio de Matemáticas, 1.ª planta. Universidad de Zaragoza
C/Pedro Cerbuna s/n. 50009 Zaragoza

Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas
Presidente: Juan Agustín Noda Gómez
C/ La Isa, 33, Cercado Mesa, 38205, La Laguna, S/C de Tenerife

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García Cuesta
IES Universidad Laboral, Avda de la Mancha sn, 02006 Albacete

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira»-Matematika Irakasleen Nafar Elkartea
Presidente: J. Javier Jiménez Ibáñez
IES *Alhama,* Avda. Villar, 44. 31591 Corella (Navarra)

Sociedade de Ensinantes de Ciencias de Galicia (ENCIGA)
Presidente: Paulino Estévez Alonso
Apdo. de Correos 103. Santiago de Compostela

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»
Presidente: Juan A. Martínez Calvete
IES Villablanca. C/ Villablanca, 79. 28032 Madrid

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidente: Jesús Diego Rodríguez García
IES Enrique Nieto. Departamento de Matemáticas
C/ Avenida de la Juventud, 4. 52005 Melilla

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas «A prima»
Presidenta: Elena Ramírez Ezquerro
Facultad de Ciencia y Tecnología Edificio Científico Tecnológico, CCT; C/ Madre de Dios, 53. 26006 Logroño

Societat Balear de Matemàtiques SBM-XEIX
Presidente: Daniel Ruiz Aguilera
C/ Miquel Capllonch, 30, 3A. 07010 Palma. Illes Balears

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»
Presidente: Salvador Guerrero Hidalgo
Facultad Matemáticas. Apdo. de Correos 1160. 41080 Sevilla

Sociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de Pedrayes»
Presidente: Rubén Pérez Zamanillo
Apdo. de Correos 830. 33400 Avilés (Asturias)

Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática «Miguel de Guzmán»
Presidentea: M.ª Encarnación Reyes Iglesias
IES Comuneros de Castilla. C/Batalla Villalar, s/n. 09006 Burgos

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidente: Bienvenido Espinar Cepas
Facultad de Matemáticas. Universidad de Murcia.
Campus de Espinardo. 30100 Murcia

Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»
Presidente: Antonio Molano Romero
Apdo. de Correos 590. 06080 Badajoz

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: Carmen Espeso Ortiz
Avda. del Deporte s/n. 39012 Santander

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Facultad de Educación. (Sec. Deptal. Álgebra). Despacho 3005
C/ Rector Royo Villanova, s/n. 28040 Madrid

Asociación Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)
Presidente: Julio Rodríguez Taboada
CPI Dos Dices
C/ Dos Dices, s/n. 15911 Rois (A Coruña)

Societat d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»
Presidente: Onofre Monzó del Olmo
Departamento de Didáctica de la Matemática.
Apdo. 22045. 46071 València

Euskadiko Matematika Irakasleen Elkartea «EMIE 20+11»
Presidenta: Ana Fernández de Betoño Sáenz de Olamendi
Berritzegune de Vitoria-Gasteiz
Avda. Gasteiz, 93. 01009 Vitoria-Gasteiz (Araba)

suma+ 87
Secciones
Marzo 2018
pp. 97-102

Jugar, cantar y vigilar la salud

Joan Jareño Ruiz

El juego en la enseñanza de la matemática

La relevancia del juego, como parte esencial del proceso educativo en las primeras edades, no tiene en estos momentos discusión posible. Como mínimo en lo que podríamos denominar «educación informal». Poco a poco el juego se ha ido abriendo paso también como recurso para la educación formal y, por tanto, ha ido entrando en las escuelas. En matemáticas, a menudo, esta incorporación del juego ha quedado reducida a «juegos matemáticos» entendidos como «recreaciones matemáticas», utilizando un sentido ciertamente reducido y sesgado de la propia palabra «juego». Por supuesto, el juego tiende tristemente a limitar su presencia, llegando incluso a su desaparición, en las clases de matemáticas de secundaria. Si partimos de la idea de que una de las condiciones fundamentales para que los alumnos construyan sus propios aprendizajes, incluidos los matemáticos, es que se sientan comprometidos en esta construcción, que se impliquen en las actividades que realizan, veremos que el juego nos proporciona un contexto de primer orden para conseguirlo en cualquier edad. Compartimos en su totalidad lo que las autoras mani-

Reseñas

Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2017 y aceptado en enero de 2018

fiestan sobre el juego y la enseñanza de la matemática:

> Como contexto para el aprendizaje matemático, los juegos nos brindan una oportunidad para resolver problemas, para crear y probar estrategias, para utilizar distintas representaciones, para discutir con otros sobre la pertinencia de una decisión o procedimiento, para analizar diferentes maneras de descifrar una misma situación, para encontrar relaciones, pensar sobre el propio pensamiento y aceptar críticas u otros puntos de vista.

Existen muchas maneras de clasificar los juegos, desde el tipo de actividad que los caracteriza (carreras, de posición, de «guerra»...), por el grado de intervención del azar, por los contenidos matemáticos que trabajan, por la cantidad de participantes (solitarios, para dos jugadores…).

Una clasificación sencilla, pero ya clásica, es la propuesta por Fernando Corbalán en su libro *Juegos matemáticos para Secundaria y Bachillerato* en la que solo forma dos grupos:

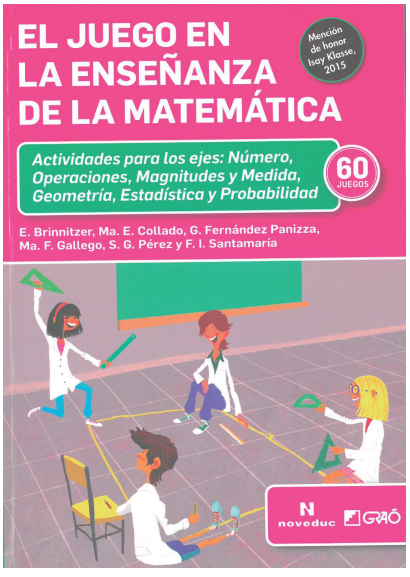
— Juegos de conocimientos, que se orientan a los tópicos de la educación matemática.
— Juegos de estrategia, relacionados con la resolución de problemas o con las formas de pensamiento matemático.

Los juegos presentados en este libro son, prácticamente en su totalidad, del primer tipo, ya que se orientan a la iniciación, reutilización o evaluación de contenidos matemáticos generales de la educación infantil y primaria, juegos que Corbalán definiría como pre, co o post-instruccionales. Aparecen algunos juegos de estrategia como *el molino* (un tipo de tres en raya), *punto y línea* (el clásico de cerrar cuadraditos), o *cierre de triángulos* (también conocido como sim), pero no se habla para nada sobre tácticas o estrategias, por otro lado complejas en estos juegos concretos. La ausencia del «pequeño juego de estrategia» (juegos que se pueden analizar estratégicamente en una o dos sesiones clase) en el planteamiento del libro queda parcialmente paliada por la gran abundancia y variedad de los juegos de conocimientos planteados.

El libro clasifica los juegos según el material utilizado: con movimiento (del propio cuerpo), rompecabezas, fichas y tablero, dados, naipes y cartas, lápiz y papel. Cada uno de los 60 juegos propuestos tiene una ficha completa en la que constan los contenidos matemáticos que se trabajan, características como el material necesario, la edad recomendada o la cantidad de jugadores, una descripción del juego, posibles variantes, recomendaciones sobre organización o de carácter práctico, así como orientaciones sobre los temas matemáticos tratados.

También encontraremos ideas generales sobre cómo trabajar el juego en el aula, una tabla que relaciona cada juego concreto con los principales ejes temáticos del currículum (numeración, operaciones, magnitudes y medida, geometría y estadística y probabilidad), así como subtablas donde se especifican, para cada eje, los contenidos concretos que se tocan. Y completa el libro un anexo con parte de los materiales necesarios para ser fotocopiados.

Hay que destacar el esfuerzo realizado por atender gran parte del currículo general de matemáticas, sin dejar de lado aspectos a menudo



El juego en la enseñanza de la matemática
Autoras: Evelina Brinnitzer, Gabriela Fernández Panizza, Silvia Pérez, María Fernanda Gallego, María Edith Collado, Flavia Santamaría
Editorial: Graó
Año de edición: 2017
ISBN: 987-987-538-433-0
Páginas: 272

olvidados como la combinatoria o la probabilidad.

Si bien hay una cierta preponderancia de los juegos en los que la numeración y el cálculo ocupan un papel destacado, también se ha de destacar que son abundantes las propuestas relacionadas con la geometría. En cierta manera es lógico que sea así en la educación primaria. Los juegos relacionados con patrones no son demasiado explícitos, pero estos subyacen de forma indirecta en muchos de ellos.

Es un libro que ha nacido, de forma evidente, para ser útil en el aula. Se nota que muchos de los juegos han sido experimentados con alumnos y la guía que los acompaña, las orientaciones para su puesta en práctica, pueden ser de gran utilidad cuando intentemos transferirlos a nuestras propias clases. Muy recomendable, en fin, para poder disponer de él en la biblioteca del centro y que nos ayude en la preparación de actividades.

Els números canten

Si en la reseña del libro sobre juegos se comentaba que nadie duda ya del valor educativo de la incorporación del juego en las aulas, ahora añadiremos que tampoco se duda de la importancia de los cuentos o la música, y en concreto las canciones, como recurso para trabajar aspectos relacionados con lo que se narra o con lo que se canta. En esta sección ya se han comentado algunos textos dedicados a cuentos y narraciones matemáticas como «Cuentos para aprender y enseñar matemáticas en educación infantil» (*Suma* 78) «Relatemáticos» (*Suma* 83) o «La superMATEsobrina y el enigma del gran astrolabio» (*Suma* 86). Pero no se había tocado el tema de las canciones. Seguramente porque no hay muchas publicaciones didácticas que hayan abordado el tema. Un precedente en castellano, citado en la propia bibliografía de *Els números canten*, es *Las matemáticas de los cuentos y las canciones* de María Dolores Saá Rojo y publicado en el 2002. De esta escasez de publicaciones deriva lo bienvenida que puede ser una obra como la que comentamos ahora y que aparece para llenar un vacío existente. Pero, por si alguien no está convencido de la importancia de las canciones en la educación, reproducimos un fragmento de la presentación del libro:

> La canción no es tan solo una dimensión del ser humano (todo el mundo canta, aunque sea por dentro, y tiene una biografía musical en su vida), sino que también es una categoría epistemológica propia, una manera de captar la realidad, una forma de conocimiento y concebir el mundo que une letra (dimensión cognitiva: razón, cognición, acto mental), música (dimensión emocional: emoción, sentimiento, acto afectivo) y voz (dimensión fisiológica: expresión, timbre, acto expresivo y comunicativo) formando un todo que es más que la suma de las partes.

Es un libro dirigido específicamente a las primeras edades escolares. Se recogen 65 canciones y «cantarelles» en catalán de diferentes orígenes. Como aclaración una «cantarella» se queda a medio camino entre un recitado y una canción. Por ejemplo aquellas medio-canciones que se utilizan para escoger a alguien antes de empezar un juego y que en este libro se califican como «cadenas enumerables».



Els números canten
Autoría: Maria Bras-Amorós y Toni Giménez Fajardo
Editorial: Boileau
Año de edición: 2017
ISBN: 978-84-15381-73-0
Páginas: 92

La gran mayoría son tradicionales, pero también encontramos de diferentes compositores, originarias de otros países y traducidas e, incluso, algunas compuestas por los propios autores. La gran mayoría están acompañadas de las partituras correspondientes y, en internet, son accesibles los audios de más de una cincuentena de melodías, así como una veintena de canciones cantadas por el propio Toni Giménez, uno de los autores.

Si el libro se limitara a ser una recolección de canciones «numéricas» su valor quizás se vería limitado a los territorios de habla catalana (que en el ámbito del estado no es poco, ya que representan mucha población y muchas escuelas). El interés añadido está en el marco teórico presentado y la clasificación realizada a partir de este marco, ya que puede invitar a iniciar una búsqueda personal de canciones similares a las que aquí se muestran. Invitación, por otra parte, que puede ayudar a la conservación del patrimonio músico-numérico propio.

Observar los criterios de clasificación del libro, en los que no podremos entrar en detalle, nos puede ayudar a ver su utilidad didáctica. Las canciones y «cantarelles» se agrupan en tres ámbitos principales:

— Diferentes significados del número (secuencial, conteo, cardinal, ordinal, medida, operacional y no numérico).
— Elaboración de una secuencia numérica (subdividida según las diferentes etapas de asimilación de esta en su proceso de aprendizaje).
— Herramientas para el cálculo mental (contar de uno en uno, de dos en dos, contar hacia atrás, descomposiciones…).

Y para acabar, además de destacar el valor del libro para su uso escolar, solo quedaría reproducir una cita de Pere Puig Adam que abre uno de los capítulos del libro. Puig Adam, al que conocemos por su importante contribución en la didáctica de la matemática de nuestro país, fue además un gran músico que llegó a armonizar para piano algunas canciones populares: «Tal vez sea la música la matemática del sentimiento y la matemática la música de la razón».

Las matemáticas vigilan tu salud

Existen muchas obras de divulgación matemática general. En ellas, a menudo, los temas se repiten. Visitamos librerías o bibliotecas, ojeamos diferentes libros, y no es raro reconocer imágenes recurrentes: un concha de Nautilus, un mapa con los puentes de Königsber, algún fractal…

Está bien, porque los libros cada vez tienen una vida más efímera y se ha de renovar el stock. Pero es evidente que cada vez son más necesarios los que traten temas específicos de las relaciones de las matemáticas con otros ámbitos de la cultura y el conocimiento y que nos hablen de su utilidad, por no decir de su necesidad, en ellos. Y estamos hablando de libros especializados pero no siempre orientados a especialistas. Libros que podamos leer todos, matemáticos o no.

Todo un reto al que han decidido enfrentarse, hablándonos de matemáticas, epidemias y vacunas, Clara Grima, conocida y reconocida divulgadora matemática, y Enrique F. Borja, no menos conocido y reconocido divulgador de física. Sin duda han salido más que airosos del desafío, consiguiendo una obra absolutamente recomendable.

El libro, muy bien secuenciado, tiene dos partes claramente divididas. En la primera se nos exponen las herramientas matemáticas que vamos a necesitar para «vigilar nuestra salud» en lo que respecta a la propagación de epidemias y al, para algunos controvertido, tema de las vacunaciones.

La primera herramienta es una introducción a la teoría de grafos, que nos hablará de relaciones entre individuos y que se amplía en un capítulo aparte orientándose al análisis y caracterización de redes complejas.

La segunda viene de un campo diferente, la teoría de juegos que, quizás, podríamos denominar más acertadamente «teoría de toma de decisiones».

La tercera y última es el estudio de funciones y, más específicamente, el de crecimientos y decrecimientos.

De la elección de estos temas matemáticos se intuye cómo se va a desarrollar el resto del libro, en el que se nos hablará sobre la evolución de

las epidemias, de cómo pueden limitar estadísticamente su propagación las campañas de vacunación y algunos de los aspectos a tener en cuenta para decidir si vacunarnos o no. Acertadamente todo el libro tiene un planteamiento muy didáctico y no se explica mucho más de lo que se va a necesitar (¡Qué buen criterio sería para utilizarlo en las decisiones sobre el nivel de dominio algorítmico de nuestros alumnos!). Pero, además de explicar prácticamente solo lo que se va a utilizar, se explica muy bien. De una forma genérica, con más ideas, conceptos y observaciones que fórmulas, aunque «haberlas también haylas».

La segunda parte, en la que se aplican las matemáticas explicadas anteriormente en el terreno de la epidemiología y la vacunación, también está muy bien graduada. En primer lugar se proponen diferentes modelos de estudio, progresivamente más complejos, de la afectación en la población de situaciones de posible transmisión de enfermedades. Como en cualquier modelo matemático que se cree será la elección de las variables a tener en cuenta y los parámetros que las afectan, los que harán que el modelo se ajuste mejor o peor a situaciones reales y que nos permitan mantenernos, al mismo tiempo, en unos márgenes, también reales, de usabilidad. La presentación que hacen los autores de los diferentes modelos, introduciendo nuevas variables paulatinamente, es de una claridad casi diáfana. El «casi» es porque hay momentos que la lectura reclama más atención, no porque no pierda su carácter divulgativo. En un nuevo capítulo se introduce en estos modelos la variable «vacunación» y vemos como los crecimientos y decrecimientos de población infectada varían, así como el análisis de si son necesarias, y con qué parámetros, las campañas de vacunación. Hasta aquí habremos estado hablando de funciones.

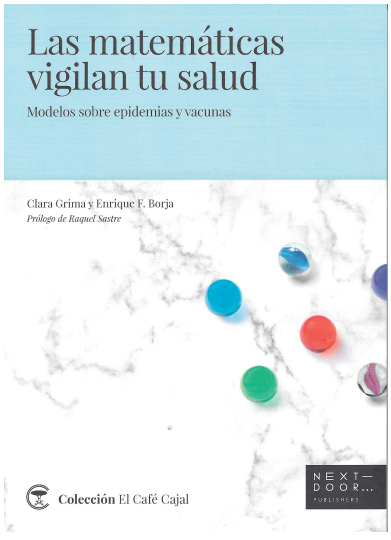
Es en el siguiente capítulo que se introduce como nueva variable el estudio de grafos y redes, que nos esclarecerá todo lo relativo a «contactos» que se había obviado prácticamente en los modelos anteriores. Y es en el último que entra la teoría de juegos, en lo relativo a la mejora en la toma de decisiones sobre la vacunación.

Es importante destacar el tono del libro y hacerlo, como mínimo en un par de aspectos de diferente grado (o no) de importancia. Uno de ellos se refiere a la posición de ambos autores respecto a la controversia sobre el tema de la conveniencia o no de vacunarse. Durante toda la obra nos están hablando de cómo los modelos matemáticos nos ayudan a interpretar la realidad y nos proporcionan conocimiento y argumentos razonables y razonados en los que basar nuestra propia toma de decisiones. En el capítulo 6 se afirma que:

> Las matemáticas en sí mismas carecen de características ideológicas o sesgos. Son las interpretaciones que hacemos de las matemáticas a los distintos ámbitos del conocimiento las que se pueden ver sesgadas o dotadas de un sentido ideológico u otro.

En el último capítulo añaden que «informarse como es debido implica un esfuerzo activo que raramente realizamos». Y es aquí cuando, después de habernos proporcionado todos los elementos de análisis «neutros», que acaban apuntando una posición:

> Que la mayoría de nosotros estemos vacunados, sobre todo gracias a nuestros padres, es un increíble



Las matemáticas vigilan tu salud
Autoría: Clara Grima y Entique F. Borja
Editorial: Next-Door
Año de edición: 2017
ISBN: 978-84-946669-6-4
Páginas: 185

acto de altruismo social, por muy tentador que resulte a nivel individual traicionar al grupo en este aspecto.

La otra cuestión de tono a señalar es el estilo de escritura, de una cercanía y amenidad más que conseguidas. Todo ello acompañado de una certera elección de ejemplos para acercarnos a los conceptos que se presentan.

A todo lo dicho solo se ha de añadir que la lectura de *Las matemáticas vigilan tu salud* tendrá como valor añadido que nos puede sugerir ideas para aplicar en las aulas y mostrar la utilidad de las matemáticas, tantas veces cuestionada.

Joan Jareño Ruiz
CESIRE-Creamat
<reseñas@revistasuma.es>

FESPM & Cía



Crónica del VIII CIBEM

Concepción Toboso Nieto

> Los diseños del matemático como los del pintor o poeta han de ser bellos: las ideas, como los colores o las palabras deben relacionarse de manera armoniosa.
>
> G. H. Hardy (1940)

Del 10 al 14 de julio de 2017 profesores de 16 países de Iberoamérica, en la Universidad Complutense de Madrid «Miramos con ilusión el futuro de la educación matemática». La Sociedad Madrileña de profesores de matemáticas «Emma Castelnuovo» (SMPM) aceptó en el año 2013 la propuesta que desde la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) se nos hizo para organizar el VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. La FESPM había aceptado convocar dicho congreso a propuesta de la Federación Iberoamericana de Educación Matemática (FISEM). El congreso ocuparía el lugar de nuestras entrañables JAEM, a las que correspondería en el año 2017 su XVIII edición. Pensamos que sería una perfecta mayoría de edad para las Jornadas, esta ampliación al ámbito iberoamericano que nos permitía la celebración del VIII CIBEM.

Para nosotros fue un gran honor que se pensara en nuestra Sociedad para la organización del que es considerado como el tercer congreso en orden de importancia de los dedicados a educación matemática y también un gran reto.

Sin pensarlo dos veces nos pusimos manos a la obra, lo primero fue la elección del logo del congreso, que surge de la observación de varias esculturas que tienen como motivo de inspiración

superficies regladas; fue difícil la elección pues había diseños basados en diagramas y teselaciones de Voronoi que nos tentaron mucho.

Desde el primer momento contamos con el apoyo incondicional de todas las universidades públicas madrileñas, que nos ofrecieron sus espacios para ser sede del congreso. Tras analizar las diferentes posibilidades se decidió llevarlo a cabo en instalaciones de la Universidad Complutense de Madrid, en las Facultades de CC Matemáticas, CC Físicas y Medicina. Otras instituciones públicas como el Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMAT), Instituto Universitario de Ciencias de la Educación (IUCE), UNED, Fundación Carolina, OEI, Junta de Andalucía y la Universidad de Córdoba, respondieron afirmativa y rápidamente a nuestra petición de colaboración. Fueron las únicas de una larga lista con las que contactamos y en las que dejamos mucho tiempo y esfuerzo para no conseguir ningún tipo de apoyo. Con empresas y organismos privados el resultado fue aún más decepcionante y desalentador, incluso hizo que alguna de las personas que colaboraban con la organización abandonaran el barco totalmente abatidas. Agradecemos a CASIO, ANAYA y Materiales didácticos BEMAL (figura 1) que continuaran con su habitual apoyo a las actividades de la FESPM.

La presentación del congreso se realizó por primera vez en la clausura del VII CIBEM, en la ciudad de Montevideo en septiembre de 2013 y en España en la clausura de las XVII JAEM de Cartagena, donde presentamos el vídeo con el que invitamos a venir a todos los asistentes. Ante el gran reto que nos suponía superar la calidad de los vídeos de presentaciones de JAEM anteriores, nuestro grupo decidió cambiar el enfoque del nuestro uniendo la ciudad, la matemática y aquellos a los que van dirigidos todos nuestros esfuerzos educativos.



Figura 1. Materiales didácticos

La elección de los regalos a congresistas y ponentes invitados a conferencias generales nos la facilitó mucho la gran experiencia en este terreno de Luis Berenguer que hizo unas elecciones muy apropiadas. La escultura del hipercubo (figura 2) que se regaló a los conferenciantes de plenarias es obra de la artista Paz Santos Santiago que mantiene una larga relación de colaboración con nuestra Sociedad.



Figura 2. El hipercubo

Una especial mención merece la elección y formación de los alumnos de las diferentes universidades (figura 3) que nos ayudaron con su gran trabajo y siempre con una sonrisa en los labios a hacer posible este congreso. También la preparación de todas las actividades culturales realizadas el miércoles, su elección e implementación supuso un tremendo trabajo.

Eran muchos los temas en los que centrar nuestro trabajo: colaboradores, sedes, secretaría técnica, programa social, exposiciones, voluntarios, certificaciones, publicidad, actos previos… nos vimos algo agobiados en los momentos iniciales por la magnitud de la empresa. La organi-

zación en comisiones nos ayudó mucho y nos dio mucha tranquilidad la contratación por parte de la FESPM de una empresa especializada en la organización de congresos que enseguida nos puso en marcha la web. A través de ella se coordinaron los trabajos del comité científico, se realizaron los anuncios, las inscripciones y todo lo relativo a la secretaría técnica; aunque resultó ser un arma de doble filo por su falta de conocimiento en este tipo de formato de congreso, donde hemos llegado a tener 42 espacios trabajando en paralelo.

El resultado de tan intenso trabajo fueron cinco maravillosos y calurosos días de julio en los que casi 1500 personas entre asistentes y voluntarios nos divertimos aprendiendo de las experiencias compartidas a través de conferencias plenarias, ponencias, comunicaciones, talleres, minicursos, pósteres, ferias, visitas matemáticas y exposiciones, en total casi 1200 actividades realizadas.



Figura 3. Los voluntarios

El esfuerzo pensamos que mereció la pena a la vista de las numerosas felicitaciones que recibimos y de la excelente evaluación que se hizo del congreso.

La organización

El comité organizador

Hacemos un reconocimiento al extraordinario comité organizador formado por:

FESPM

— Agustín Carrillo de Albornoz-Torres
— Juana M.ª Navas Pleguezuelos
— Claudia Lázaro del Pozo
— Juan Martínez Calvete

OEI

— Juan Carlos Toscano Grimaldi

Comités: (SMPM)

— Concepción Toboso Nieto (Presidenta)
— Damián Valdelvira Gracia (Secretario)
— Rosa Forniés Rejas
— José Luis Muñoz Casado
— Lorenzo Lozano Jiménez
— Miriam Peña Romano
— M.ª Noemí Borobia Larrosa
— Vicente Riviere Gómez-Villaboa
— M.ª Carmen Escribano Ródenas

Apoyo a los diferentes comités: (SMPM)

— Purificación Llaquet Baldellou
— M.ª Jesús Luelmo Verdú
— Pilar Urgorri Rodríguez
— Carmen Calvo Aldea
— Aida Inmaculada Conejo Pérez
— M.ª Ángeles Pérez Rojo
— Carolina Hassmann
— Lorena Ramos San Millán
— Ana M.ª Ramos Centeno
— Blanca Souto Rubio
— Luna Gómez Martín
— Monserrat Diestro Tejeda
— Eva Aneiros Vivas

Y a otros muchos que en algunos momentos nos habéis ayudado en temas puntuales.

El comité científico

Estuvo formado por:

— Juan Martínez Calvete (FESPM, España) (Presidente)
— Agustín Carrillo de Albornoz Torres (FISEM) (Secretario)

— Eduardo Basurto Hidalgo (ANPM, México)
— María del Carmen Bonilla (APINEMA, Perú)
— Cecilia Calvo Pesce (SEMUR, Uruguay)
— Henrique M. Alonso da Costa Guimarães (APM, Portugal)
— Fredy Enrique González (ASOVEMAT, Venezuela)
— Claudia Lázaro del Pozo (FESPM, España)
— Patricia Lestón (SOAREM, Argentina)
— Juana María Navas Pleguezuelos (FESPM, España)
— Alessandro Ribeiro (SBE, Brasil)

Dado el ingente número de trabajos presentados contaron cada uno con un equipo evaluador propio, a los que agradecemos su labor.

El objetivo de este comité fue seleccionar propuestas que propiciaran la reflexión y a ser posible dieran respuestas, a los temas de interés actuales en investigación, enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, a través de los núcleos establecidos que fueron:

— Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.
— La Resolución de Problemas en Matemáticas.
— Aspectos socioculturales de la Educación Matemática.
— Formación del profesorado en Matemáticas.
— Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
— Matemáticas y su integración con otras áreas.
— Investigación en Educación Matemática.
— Historia social de la Educación Matemática en Iberoamérica.
— Comunicación y divulgación matemática.

Actos previos al congreso

La presentación de este congreso se realizó en todos los actos y actividades que han contado con la presencia de la FESPM y la SMPM.

Desde la OEI se realizó un ciclo de videoconferencias previas, en la comunidad IBERCIENCIA.

Desde la SMPM se programó la conferencia: *La geometría se hace Arte: tras las huellas de Escher,* de Antonio Pérez el 30 marzo de 2017 en el IES Beatriz Galindo de Madrid.

Se convocaron los concursos de arte con GeoGebra y fotografía de superficies regladas.

Se procedió a la selección y formación de voluntarios.

En la SMPM se desarrollaron una serie de nuevas actividades que surgieron al albur del congreso como *Entre Maestros*, *Matemáticas en la calle*, rehabilitación y ampliación de la colección de 2000 piezas, paseos matemáticos por la ciudad de Madrid…

El día 7 de julio de 2017 recibimos el reconocimiento al trabajo realizado en la preparación de este congreso cuando el Ayuntamiento de Madrid a través de Madrid Convention Bureau nombró a la presidenta del Comité organizador local embajadora de la ciudad de Madrid, en el ámbito del turismo congresual. En el acto de la X edición de Recognition night se proclamó el VIII CIBEM como uno de los 17 congresos internacionales más importantes celebrados en la ciudad de Madrid.

Resumen de actividades

Lunes 10, Inauguración

Tras el acto inaugural, magníficamente guiado por Agustín (secretario de la FISEM y de la FESPM) como maestro de ceremonias, tuvimos



Figura 4. La inauguración

la presentación de la guía de *Turismo Matemático por Madrid,* escrita por nuestro socio Ángel Requena y las dos primeras conferencias plenarias que corrieron a cargo de Claudi Alsina (España) y Cecilia Crespo (Argentina); finalizamos con la actuación del Ballet Folclórico de Madrid, que nos deleitó con una selección de danzas goyescas y danza bolera. Esa tarde el evento *#cibem2017* llegó al puesto cuarto del *trending topic* nacional.



Figura 5. Los asistentes

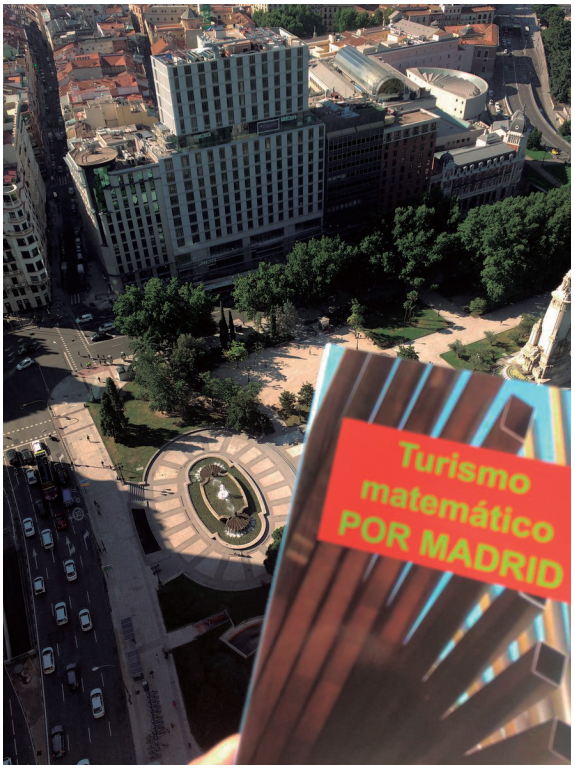


Figura 6. *Turismo matemático POR MADRID*



Figura 7. Markus Hohenwarter



Figura 8. Ballet Folclórico de Madrid

Martes 11, jueves 13 y viernes 14

Se llevaron a cabo las siguientes actividades:

- 2 conferencias plenarias impartidas por Joao Pedro da Ponte (Portugal) y Markus Hohenwarter (Austria).
- 4 mesas redondas.
- 36 conferencias regulares de 1 h de duración.
- 32 minicursos de 3h 30 minutos de duración repartidos en dos bloques entre el martes y jueves de 2 h y 1h 30 minutos.
- 122 talleres de 1h 30 minutos de duración.
- 865 comunicaciones breves de 15 minutos de duración, agrupadas en bloques de 3 por hora y con 15 minutos para preguntas.
- 19 ferias matemáticas.
- 54 pósteres.
- 6 presentaciones comerciales.

En paralelo tuvieron lugar 8 exposiciones que permanecieron abiertas durante los cinco días

del congreso. Estas fueron muy visitadas y elogiadas por parte de los asistentes:

— *Vamos a tener algo más que palabras* (SAEM Thales).
— *Patrimonio Iberoamericano en Matemáticas y Educación Matemática* (Luis Rico, Universidad de Granada).
— *Geometría proyectiva, una exposición* (Facultad de Matemáticas UCM).
— *Geometría natural* (grupo Enfoque Geométrico).
— *Ada Byron* (Capi Corrales y Amador Carvajal).
— *Tras los pasos de Cervantes, en clave estadística* (INE).
— *2 000 piezas* (SMPM).
— *Manos, mentes, corazones* (MMCA).



Figura 9. Conferencia de Antonio Pérez



Figura 10. *Role-Plays en clase de Matemáticas*

Es necesario destacar tres hechos importantes que tuvieron lugar el jueves. El primero la inserción de la celebración del «V día Iberoamericano de GeoGebra» dentro del CIBEM. La gran mayoría de actividades seleccionadas por el comité científico relativas a GeoGebra se llevaron a cabo este día, destacando entre ellas la conferencia de Markus y la entrega de premios del concurso de «Arte con GeoGebra».

El segundo, la entrega del premio Gonzalo Sánchez Vázquez, que recayó en la profesora Olimpia Figueras Mourut de Montpellier de Méjico.

El tercero, la celebración de la cena-cóctel del congreso en el espectacular salón de baile del Círculo de Bellas Artes.



Figura 11. Olimpia Figueras y Onofre Monzó

Miércoles 12

Este fue un día en el que pusimos mucha ilusión y cariño en su preparación y que nos dio mucho trabajo, pero también grandes alegrías. Las visitas y excursiones programadas.

Visitas culturales con contenido matemático

— Museo Naval: las Matemáticas y el conocimiento de la Tierra.
— Museo del Prado: un paseo con ojos matemáticos.
— Museo de Arte Reina Sofia: un paseo Geométrico.
— Monasterio de San Lorenzo de El Escorial: templo de sabiduría.
— Museo Arqueológico Nacional: Matemáticas en la vida cotidiana.
— Real Observatorio de Madrid: Astronomía, Cartografía y Geodesia.

— Aula-Taller-Museo de las Matemáticas de la Escuela de Caminos.
— Instituto de Educacion Secundaria San Isidro: tradición y modernidad.
— Toledo: Ciudad Imperial y Patrimonio de la Humanidad.



Figura 12. Escher y las matemáticas

Visitas culturales

— Alcalá de Henares: Patrimonio de la Humanidad.
— Segovia: Patrimonio de la Humanidad.
— Barrio de las Letras: paseo turístico.
— Madrid de los Austrias: el viejo Madrid.
— Madrid de los Borbones: visita turística por el siglo XVIII.

Visitas de contenido científico y tecnológico

— CEHIPAR: Canal de Experiencias Hidrodinámicas
— AIRBUS: Seguridad, Telecomunicaciones y Servicios
— SENER: Ingeniería y Tecnología
— INDRA: Consultoría y Tecnología

Clausura, viernes 14 tarde

Las dos conferencias plenarias impartidas por Rute Borba (Brasil) y por los matemagos Fernando Blasco y Nelo Maestre (España) pusieron el broche de honor al programa científico de este congreso.



Figura 13. Fernando Blasco y Nelo Maestre



Figura 14. Mujeres matemáticas



Figura 15. Los voluntarios

A continuación tuvo lugar el acto de clausura en el que se presentaron las 19 JAEM que se celebrarán en La Coruña en julio de 2019 y el reconocimiento a los que hicieron posible esta semana llena de ilusión matemática que fue el VIII CIBEM.

Un momento de especial emoción lo vivimos cuando, tras visionar el vídeo que recogía su labor, los 95 voluntarios, sin los que hubiera sido

imposible llevar a cabo el congreso, subieron al escenario; recibieron al aplauso más largo de la tarde.

Nos despedimos compartiendo unos momentos de charla en el cóctel celebrado en la Facultad de Matemáticas.

Reflexión final

Esos 4 años de preparación supusieron un gran trabajo, muchos momentos de desánimo, algún que otro enfado, pero fundamentalmente, muy buenos momentos donde, el hecho de compartir tan gran responsabilidad, ha ayudado a revitalizar y crecer a nuestra Sociedad.

Estamos seguros que el futuro real y plausible de la educación matemática está en nosotros, en manos de las sociedades de profesores de matemáticas, de las federaciones que las aúnan, de las asociaciones, grupos e instituciones matemáticas que trabajan en pro de su mejora continua tanto en educación como en investigación.

Animamos a todas las sociedades a promover momentos de encuentro entre profesores donde aprender desde la experiencia compartida. A más largo plazo os decimos que merece mucho la pena implicarse en la organización de futuras JAEM o congresos de este tipo, veréis como la Sociedad se dinamiza encontrando nuevos cauces y proyectos en los que desarrollarse y savia nueva que los lleve a cabo.

Concepción Toboso Nieto
Presidenta del comité organizador del VIII CIBEM
<ctnieto@hotmail.com>

Semblanza de Olimpia Figueras Mourut de Montppellier

Luis Puig Espinosa

La Junta de Gobierno de la Federacion Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) convoca bienalmente el Premio Gonzalo Sánchez Vázquez a los valores humanos en la educación matemática en homenaje a quien fue su presidente de honor.

El premio se libra durante la celebración de las correspondientes Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas. En esta ocasión las 18 JAEM quedaron incluídas en el Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (VIII CIBEM) celebrado en Madrid el pasado mes de julio.

La inclusión del premio dentro del CIBEM dio lugar a buscar un candidato en el ámbito iberoamericano y la decisón fue ortorgarlo a Olimpia Figueras Mourut de Montppellier, del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional de México (CINVESTAV) en México.

Luis Puig profesor del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universitat de València Estudi General expuso la semblanza que recoge este artículo, en el acto de entrega del premio que libró Onofre Monzó presidente de la FESPM.

Premio GSV

Conocí a Olimpia Figueras Mourut de Montppellier en 1980 en un encuentro de la Commission Internationelle pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement de la Mathématique[1] que se celebró en Oaxtepec, México. Hace de ello ya treinta y siete años. En la foto estoy sentado en el centro, a los pies de Emma Castelnuovo. Olimpia Figueras está de pie más a la izquierda, cerca de su maestro Eugenio Filloy (figura 1).

Desde entonces nos hemos visto en un sinnúmero de ocasiones, y hemos trabajado juntos en varios proyectos de investigación, de formación de profesores e investigadores y de desarrollo curricular, tanto en el Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional de México (CINVESTAV) en México, la institución de la que ella es Investigadora Cinvestav 3C, como en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universitat de València Estudi General en España.

Olimpia estudió matemáticas en la Universidad Nacional Autónoma de México en donde se licenció con una tesis titulada «Isomorfismos entre álgebras de grupos finitos» en 1966, formación matemática que completó con una maestría titulada «Campos cuadráticos con algoritmos de Euclides».

Sobre esta sólida formación matemática inicial, ha construido una larga y fecunda tarea en el campo de la matemática educativa, desde que entró a formar parte del grupo que echó a andar la sección de Matemática Educativa (actualmente Departamento de Matemática Educativa) del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional de México (el CINVESTAV).

Obtuvo allí el título de doctora en Ciencias, especialidad Matemática Educativa en 1988 con una tesis titulada «Dificultades de aprendizaje en dos modelos de enseñanza de los racionales», dirigida por Eugenio Filloy, que junto con Carlos Ímaz fueron los impulsores del establecimiento y de la creación de un sólido equipo de investigadores y del desarrollo del Departamento de Matemática Educativa.

La trayectoria académica de Olimpia desde que entró a formar parte de ese equipo se ha desarrollado siempre a partir de ese departamento del CINVESTAV, del que llegó a ser su jefe en el período 2003 a 2007.

Su curriculum vitae es amplio, de múltiples caras y continuado en el tiempo, y no le hace justicia una descripción con datos cuantitativos, que poco dicen de la función social de su trabajo, su implicación en el estudio y la intervención en los problemas reales de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en México, y en los problemas reales de quienes se dedican a su enseñanza en situaciones sociales, culturales y políticas diversas, desde las que se dan en la Ciudad de México hasta las específicas de comunidades indígenas.

Así, el primer proyecto de investigación en el que comienza a trabajar en 1979, es un proyecto dirigido por Eugenio Filloy y titulado «La problemática de la enseñanza y el aprendizaje de los números racionales», en el que estudia en detalle esa problemática, trabajando durante cuatro años en la Escuela Hermanos Revueltas con alumnos de secundaria. Ese proyecto iniciaría una segunda etapa en 1984, en la que Olimpia Figueras pasaría a codirigir el proyecto con Eugenio Filloy y continuaría el trabajo directo con estudiantes en la Escuela Hermanos Revueltas. Tras la presentación de su tesis doctoral en 1988, producto de su trabajo en este proyecto, el proyecto se continuaría con una tercera etapa en 1988, en la que ya recayó en ella la responsabilidad de su dirección.

Olimpia Figueras no ha abandonado nunca el estudio de la problemática tratada en ese proyecto inicial, en la que no solo ha profundizado, sino que ha extendido de forma natural para abarcar el campo de la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos de fracción, razón y proporción. En esa dirección se ha desarrollado en concreto su participación regular, desde 1996 hasta la actualidad, en proyectos de investigación de los que yo he sido investigador principal. Señalaré solo que el primero de ellos muestra en su título «La configuración histórica de las nociones de fracción, razón y proporción», otra de las preocupaciones que han sido constantes en la trayec-



Figura 1

toria intelectual de Olimpia: el interés por el estudio de la historia de las matemáticas desde el punto de vista de la matemática educativa, y que el segundo, titulado «Razón y proporción: Precursores de los conceptos, tendencias cognitivas de los alumnos, resolución de problemas y acercamientos metodológicos. Un estudio con alumnos de la Enseñanza Obligatoria», dio origen a la tesis doctoral «Precursores del razonamiento proporcional: Un estudio con alumnos de primaria» de Alejandro Fernández Lajusticia, que codirigimos ella y yo y se leyó en la Universitat de Valencia Estudi General en 2001.

Por otro lado, la extensión de su campo inicial de indagación se ha dirigido también a abarcar otros aspectos de la problemática de la enseñanza y aprendizaje de la aritmética y a tomar en consideración su especificidad en el contexto de comunidades indígenas.

A ello se dedicó en particular el proyecto titulado «Una investigación sobre el conocimiento etnomatemático de los conceptos de número y de las operaciones», desarrollado entre 1990 y 1992, del que fue responsable y en el que trabajó con un grupo de veintinueve personas en los estados de Nayarit, Oaxaca y Veracruz-Llave, y su participación en el proyecto financiado por la Secretaría de Educación Pública de México y el Instituto Latinoamericano de Comunicación Educativa, titulado «Fortalecimiento de los conocimientos matemáticos. Experimentación educativa en el Bachillerato Integral Comunitario Ayuujk Polivalente (BICAP)», desarrollado en comunidades mixe de Santa María Tlahuitoltepec, Oaxaca.

Además, le ha preocupado especialmente, no solo que sus proyectos de investigación estuvieran ligados a la práctica de la enseñanza de las matemáticas en los sistemas escolares, sino también el que los resultados de esas investigaciones puedan revertir también de forma concreta en la práctica de la enseñanza. Por ello, dedicó incluso un proyecto de investigación a estudiar cuáles son las características de los procesos que hacen posible esa transferencia, el proyecto que tituló «Procesos de transferencia de resultados de investigación al aula: El caso del bajo rendimiento escolar en matemáticas».



Figura 2. Luis Puig glosa Olimpia Figueras



Figura 3. Luis Puig, Onofre Monzó, Agustín Carrillo



Figura 4. Olimpia Figueras recoge el premio



Figura 5. Foto familiar con su hermana

En el mismo sentido de su interés por ligar la investigación a la innovación se sitúa su trabajo en la elaboración y en la revisión de currículos de matemáticas para la Secretaría de Educación Pública mexicana o los libros de texto que ha escrito, en particular, los escritos para las colecciones de libros gratuitos del sistema escolar mexicano, y, en su interés por ligar la investigación a la formación de profesores, el diseño, puesta en marcha y dirección de una Maestría en Educación en el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV.

Finalmente, añadiré que ha dirigido un gran número de tesis de maestría y doctorales, ha publicado en revistas y congresos de diversos ámbitos, y participado en la organización de congresos nacionales e internacionales, en particular la trigésima segunda International Conference on the Psychology of Mathematics Education, celebrada en Morelia, México, en 2008.

Pero además de todo lo expuesto, Olimpia tiene esa virtud para la enseñanza que Roland Barthes, en un texto precioso que escribió para la introducción de uno de sus cursos en el Collège de France[2] calificó con una palabra que en castellano traduciríamos por «maternaje»: más allá de las prácticas usuales de enseñanza y aprendizaje está, dice Barthes, la madre que, para que su hijo pequeño comience a andar, se pone delante de él, abre sus brazos y solo dice «ven»: la madre enseña exponiendo su deseo de que el niño aprenda[3]. Mostrar el deseo de que alguien aprenda convierte a quien lo muestra en un buen maestro, y en ello Olimpia es maestra.

Gracias, Olimpia por tu maestría.

Referencias bibliográficas

Barthes, R. (1984), *Essais critiques IV. Le bruissement de la langue,* Seuil, París.

Luis Puig Espinosa
Universitat de València
<luis.puig@uv.es>

1 La Comisión Internacional para el Estudio y la Mejora de la Enseñanza de las Matemáticas se fundó en 1950 por Caleb Gattegno, siendo en su comienzo Jean Piaget y Gustave Chuquet, junto a él, quienes marcaron el estilo de su trabajo. El encuentro de 1980 en México fue el trigésimo segundo y, para entonces, la orientación había cambiado, siendo Hans Freudenthal, Emma Castelnuovo, Anna Sofia Krygowska y Claude Gaulin, artífices de ese cambio.

2 El texto se titula «Au seminaire», apareció publicado por primera vez en la revista L'Arc, y está recogido en el volumen cuarto de la serie Essais Critiques, en la que han ido apareciendo recopilados sus escritos cortos. Este volumen cuarto se titula *Le bruissement de la langue* (Barthes, 1984).

3 Con palabras precisas, que no me resisto a citar, describe Barthes cómo la madre expone su deseo: «Ella contiene, anima, llama (retrocede y llama), incita y rodea» (Barthes, 1984: 375).

V Jornadas de la enseñanza de las Matemáticas en Navarra

Javier Bergasa Liberal

Los días 3 y 4 de noviembre de 2017 se realizaron las V Jornadas de la enseñanza de las Matemáticas en Navarra (Matematikaren Irakaskuntzarako V Jardunaldiak Nafarroan).

La Universidad Pública de Navarra (UPNA) acogió en las aulas de su sede de Pamplona estas Jornadas de enseñanza de las Matemáticas. Los actos se desarrollaron durante la tarde del viernes, día tres, y la mañana del sábado, cuatro de noviembre. Se trata de la quinta edición de esta actividad que organiza la Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira» y que una vez más ha contado con el patrocinio y colaboración de la Universidad Pública de Navarra y del Departamento de Educación del Gobierno de Navarra. Esta colaboración se formalizó en el momento de la inauguración, pues en la mesa de autoridades se contó con la presencia de David Fernández (asesor del Centro de Apoyo al Profesorado de Pamplona), Aitzol Lasa (profesor del Departamento de Matemáticas de la UPNA), Alfonso Carlosena (rector de la UPNA) y María Solana (consejera de Educación) y J. Javier Jiménez (presidente de Tornamira),

Si en la pasada edición —las IV Jornadas, realizadas en octubre de 2015—, ya se habló de que esta actividad se había consolidado, tanto en su carácter bianual como en la expectativa del

Sociedades federadas

profesorado, que espera con interés y curiosidad esta cita meses antes de su realización, esta nueva edición no ha hecho sino confirmar esa apreciación. Y el dato que lo avala es que la convocatoria tuvo una respuesta muy positiva, tanto en el número de inscripciones como en el interés con que se siguieron las conferencias, comunicaciones y talleres, así como en la valoración final de las mismas. Si en las anteriores Jornadas se rozaban los 150 participantes, en esta convocatoria de 2017 asistieron unas 200 personas, en su gran mayoría profesorado de todos los niveles educativos, pero con notables asistencia de quienes cursan el máster en Profesorado de Educación Secundaria y del alumnado del grado en Magisterio de Educación Primaria e Infantil.

V Jornadas La Enseñanza de las Matemáticas en Navarra. Matematikaren Irakaskuntzarako V Jardunaldiak Nafarroan

Viernes 3 de noviembre de 2017	
16:00	Recepción, acreditaciones, entrega de materiales
17:00	Acto de apertura
17:30	Conferencia Inaugural: *La seducción matemática.* Claudi Alsina
18:45	Universidad e investigación: *Aplicación de la clotoide en la resolución de problemas técnicos en la ingeniería civil* Educación Infantil y Primaria: *En Bilbao hay dibujos en las calles* Educación Secundaria: *Robótica con ARDUINO* Educación Secundaria: *¿A qué jugamos hoy en clase de mates?*
19:15	Universidad e investigación: *Evaluación de las necesidades matemáticas de los estudiantes del grado de Economía de la FCCEE de la UPNA* Educación Infantil y Primaria: *Autoestima, autonomía y matemáticas. Una propuesta educativa basada en el juego* Educación Secundaria: *Aprender matemáticas a través del juego: Scratch & Singapur* Educación Secundaria: *Experiencia práctica. Participación en la Incubadora de sondeos y experimentos con alumnado de primero de la ESO*

Sábado 4 de noviembre de 2017	
09:00	Talleres: *El ábaco japonés para mejorar el cálculo mental en el aula* *Ajedrez educativo* *Arqueología matemática. Analizando problemas antiguos* *¿Sobramos los profesores de matemáticas?* *Matematikak kalkulagailu zientifikoarekin*
10:20	Talleres: *Jugando con la intuición geométrica de todos los niños* *Jugando se aprenden matemáticas* *Juegos en clase de matemáticas* *Matemáticas con calculadora científica* *Matematika ikasteko testuinguruak GeoGebrarekin*
11:45	Educación Infantil y Primaria: *DUMAS proiektua: eskola txikiak sarean* Educación Infantil y Primaria: *De patos y globos* Cultura matemática e interdisciplinar: *Was David Coppperfield a son of the Industrial Revolution?* Educación Secundaria: *Matemáticas, pasatiempos y concursos* Educación Secundaria y Universidad: *EKI proiektua martxan*
12:15	Educación Infantil y Primaria: *Gorputz geometrikoen eta irudi lauen ikaskuntza: Esperientzia bat Peruko eskola txikietan* Educación Infantil y Primaria: *Matemáticas con Memory* Cultura matemática e interdisciplinar: *De navarros, matemáticas y algo más* Educación Secundaria: *¿Qué hacemos con el bloque I?* Educación Secundaria y Universidad: *N-erreginaren problema joko bezala planteatuz*
12:45	Sorteo del concurso de micro-relatos
13:00	Conferencia de clausura: *Un teorema llamado deseo.* Eduardo Sáenz de Cabezón
14:00	Cierre y despedida



Figura 1. Presentación de la Jornada

Aunque no se declarara expresamente en el programa ni el título de las Jornadas, esta quinta edición tuvo como principal hilo conductor el aspecto más lúdico y motivador de la actividad matemática, el juego, con la intención de mostrar una de las facetas más entretenida, seductora y divertida del trabajo en el aula sin perder por ello el rigor, la profundidad, la reflexión, la toma de decisiones y la búsqueda de estrategias que son ejes fundamentales en el progreso del aprendizaje de nuestra materia y para el desarrollo de la competencia matemática.

Para preparar el ambiente y predisponer favorablemente el ánimo de los asistentes, el profesor Claudi Alsina, abrió las Jornadas con una charla titulada *La seducción matemática*, en la que con la brillantez y energía a la que nos tiene acostumbrados hizo desfilar ante el auditorio cuentos, anécdotas, formas de presentar los contenidos matemáticos, canciones para hacerlos más familiares, buenos consejos sacados de su experiencia personal y de la de una multitud de matemáticos profesionales y profesores de la materia sobre cómo acercar conceptos, propiedades, métodos de trabajo, etc. Con el buen humor y la sabiduría de los que habitualmente hace gala recitó, tarareó y hasta leyó una carta que hace años escribió al trapezoide, abriéndonos así los ojos a las muy diferentes maneras de dar vida y hacer cercanos elementos, técnicas y resultados que son protagonistas habituales en nuestras clases. Finalmente nos recordó que no debería haber sitio para las matemáticas incompresibles, aburridas o carentes de significado si se pone «corazón» en su enseñanza, recordándonos así la misma afirmación que el propio G. H. Hardy hizo en 1940 sobre la matemática aburrida en su célebre *Apología de un Matemático*.

Tras este brillante comienzo, se iniciaron las actividades previstas en las que los juegos y las estrategias se mezclaron con la historia de las matemáticas, los recursos informáticos, los métodos innovadores de organizar el aula y el tiempo de clase, las propuestas de nuevos contenidos y de nuevas formas de trabajar en las clases de matemáticas. Hasta una treintena de comunicaciones y talleres se realizaron durante la tarde del viernes y la mañana del sábado, muchas de ellas de forma simultánea para acoger con la cercanía y la interactividad necesarias al elevado número de asistentes. En total nueve horas de trabajo continuado que como siempre permitieron reflexionar sobre nuestro quehacer como profesores y sobre los métodos de trabajos y contenidos matemáticos y además sirven como cita de un profesorado que disfruta reuniéndose con compañeros tras largo tiempo de separación y que gusta de conocer la forma en la que muchos de ellos desempeñan su actividad docente, to-



Figura 2. En la conferencia inaugural

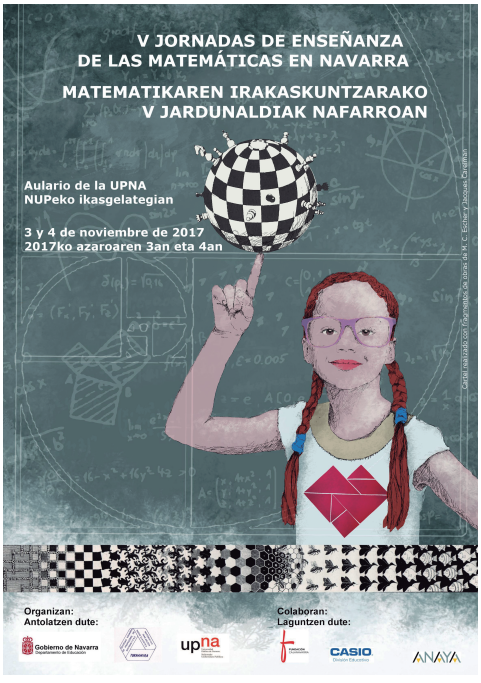


Figura 3. El cartel de la Jornada

mando buena nota de algunas alternativas a la hora de estructurar el currículo de nuestra materia, organizar las actividades de aula, incorporar recursos tecnológicos o introducir nuevos métodos de abordar, gestionar o evaluar los contenidos, métodos y técnicas de las matemáticas.

Hasta cuarenta ponentes tomaron la palabra durante las diferentes sesiones de trabajo, una buena mayoría de centros educativos navarros pero también de comunidades autónomas, como La Rioja, País Vasco, Aragón o más distantes, como Madrid o Melilla. Y, como ya se ha dicho, pertenecientes a los diferentes niveles educativos: infantil, primaria, secundaria y universidad. Querríamos subrayar y agradecer especialmente la presencia como ponentes de dos veteranos compañeros y reconocidos profesionales, Ana García Azcárate y Ángel Requena Fraile que durante años han simultaneado su actividad docente con la participación habitual en actividades de formación, congresos y simposios, tanto nacionales como internacionales. Sirvan estas líneas como reconocimiento a su trabajo y mucho saber mostrado durante años y que sigue vivo tras su jubilación como queda patente en su participación en estas V Jornadas matemáticas en Navarra.

El punto final estuvo a cargo de Eduardo Sáenz de Cabezón, profesor del Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja, que cerró las Jornadas con una brillante conferencia titulada *Un teorema llamado deseo.* En su charla presentó diferentes alegorías sobre la motivación como palanca para conocer las matemáticas y cómo estas cimentan multitud de aspectos, recursos e instrumentos de nuestra vida ordinaria y cómo pasan absolutamente desapercibidas para un ojo no avisado y preparado. Hizo especial hincapié en los algoritmos, como elemento inocuo e incluso aburrido en el trabajo matemático, pero que da soporte a la forma en la que los ordenadores o mejor a la relación que establecemos con las redes sociales, los buscadores, las aplicaciones, las compras telemáticas, etc., y la forma en la que una tela de araña se teje a nuestro alrededor de forma que el rastro que vamos dejando a través de móviles, tabletas y ordenadores en la red, le sirve a esta para conocernos, hacernos ofertas, proponernos compras o viajes, y en definitiva para disponer de una información de nuestros intereses e inquietudes que puede ponernos a merced de quien interesadamente acceda a esa información y la utilice. No dejó de lado la inteligencia artificial y sus progresos. Sus palabras sembraron bastante alarma, pero nos pusieron alerta sobre cómo proceder o qué hacer o no hacer en determinadas situaciones.

Quedó bien patente que nuestros deseos, reflejados a través de nuestras búsquedas y relaciones en la red, quedan registrados e incluso manipulados a través de soportes matemáticos, que pueden parecer ingenuos o anodinos pero que tiene en los algoritmos y en los *big data* un potencial enorme y aterrador.



Figura 4. *Ajedrez educativo*



Figura 5. *Jugando se aprenden matemáticas*

Si bien el mensaje de alarma terminó siendo sombrío, la presentación estuvo llena de anécdotas enriquecedoras, teoremas, situaciones estimulantes, nombres propios, imágenes, progresos matemáticos y sobre todo del buen humor y la fina e inteligente ironía que tanto caracterizan la forma de comunicar, oral o escrita, del ponente.

Para potenciar la interactividad de los asistentes y subrayar el carácter lúdico de este encuentro, se propuso a todos los inscritos en el evento, participar en un concurso de micro-relatos irracionales y momentos antes de la conferencia de clausura, se realizó el sorteo para elegir los ganadores.

Para concluir esta reseña, no queda sino agradecer a ponentes, comunicantes, autoridades asistentes, organizadores, colaboradores y, en especial a los participantes su presencia e interés, además de su enorme dedicación y esfuerzo. Nos unimos al deseo unánime de quienes se acercaron a estas V Jornadas de que dentro de dos años podamos hablar de una nueva cita. Para ello pondremos el máximo empeño y buscaremos la complicidad y ayuda de tantas personas como son necesarias para poner en marcha esta actividad y respaldarla en lo económico y en lo organizativo, de forma que sigan siendo un referente para la mejora de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y un punto de encuentro para quienes se preocupan por dicha mejora y por encontrar propuestas que hagan esta materia más atractiva, motivadora y, en la medida de lo posible, emocionante.

Javier Bergasa Liberal
IES Navarro Villoslada (Pamplona)
<jbergasl@educacion.navarra.es>

1 Cualquier información complementaria sobre las actividades y sus ponentes puede solicitarse, a través de su página web, a la Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira» / «Tornamira» Matematikako irakasleen nafar elkartean.

XX Jornada Didáctica Matemática de ABEAM

Cecilia Calvo Pesce

Como cada año, el primer sábado de noviembre más de doscientos cincuenta maestros y profesores de Matemáticas tuvimos oportunidad de reencontrarnos en la jornada anual de la «Associació de Barcelona per a l'estudi i l'aprenentatge de les Matemàtiques» (ABEAM). En esta ocasión se celebraba la vigésima de estas jornadas y el lema escogido «Emocionar para aprender y enseñar matemáticas» prometía grandes momentos.

Las primeras actividades de la jornada se realizaron en dos espacios en simultáneo. Mientras que en un aula se reunían los asistentes que tenían interés en reflexionar sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en las aulas de educación infantil y primaria, en otra sala se reunían aquellos asistentes interesados en hacer esta reflexión en relación a alumnos mayores de doce años.

En una de las dos aulas, junto con María Roca, presentamos la ponencia *El intercambio entre maestros de diferentes etapas: una oportunidad emocionante*, en la cual defendimos el trabajo en red de maestros de diferentes etapas educativas para ayudarnos a reflexionar sobre la transición del alumnado a lo largo de su escolarización y sobre la posibilidad de establecer puentes entre las experiencias de aprendizaje que les presentamos con aquellas vividas en etapas anteriores y las que tendrán en etapas futuras. A continuación, tuvimos ocasión de escuchar a Neus Suriñac de la escuela Bogatell, que acompañada de tres integrantes del CREAMAT, relató una experiencia conjunta muy interesante sobre conexiones entre aritmética y plástica, *¿Tienen forma las sumas?*. Una propuesta de integración de matemáticas y arte en educación primaria.

A la misma hora, Anton Aubanell presentó su ponencia *Contenidos, metodología y emociones en educación matemática* en la que defendió, con el entusiasmo contagioso que lo caracteriza, que la educación matemática en todos los niveles educativos debería tener un fuerte componente experimental, empleando recursos diversos para conectar con diferentes estilos de aprendizaje e invitar al alumnado a descubrir relaciones matemáticas, poner palabras a la idea y formalizarla. Durante su presentación Anton invitó a la audiencia a considerar los sentimientos y emociones como ingredientes esenciales de la enseñanza matemática en cualquier planteamiento didáctico.

A continuación, el Grup Cúbic invitó a los asistentes que estaban en la sala a salir al patio y allí montó una fiesta con su taller *Role-plays en educación matemática* que grabaron desde las alturas con un dron.

Después de una pequeña pausa para el desayuno los organizadores nos ofrecieron ocho opciones de talleres y comunicaciones de las cuales, por simultaneidad, solamente podíamos elegir dos.

— El grupo e[x]plorium propuso un taller sobre pensamiento computacional en el aula de matemáticas para infantil y primaria.
— SET, el grupo de Juegos de ABEAM, presentó un taller de juegos aplicables en el aula de Matemáticas.
— Montserrat Alsina e Imma Gilibets relataron su experiencia con proyectos como *7deMates*, la exposición *Las matemáticas y la vida* o el programa *Tiempo de… Matemáticas* que les significó ser finalistas en el certamen Ciencia en Acción 2017.
— Jordi Campos en el taller *Matemáticas por los aires!* compartió su experiencia con drones cuadricópteros en el aula de Matemáticas.
— Ricard Peiró vino desde Valencia para ofrecer un taller de resolución de problemas de matemáticas con la calculadora FX 570/991 CLASSWIZ.
— Santi Vilches y Maite Gorriz presentaron su experiencia *Aprendizaje creativo con fotografía matemática*.
— Bernat Ancochea impartió, en una aula de informática, el taller *GeoGebra 3D, una ventana abierta a la experimentación*.
— Abraham de la Fuente consiguió tratar un tema central como la evaluación en un formato de alta participación de los asistentes en el taller *Evaluar para aprender*.



Figura 1. Inauguración de la jornada



Figura 2. En la sala de actos de la FME



Figura 3. Anton Aubanell



Figura 4. Cecilia Calvo y María Roca



Figura 5. El grupo Cúbic



Figura 6. En el taller de e[x]plorium



Figura 7. En el taller de Ricard Peiró

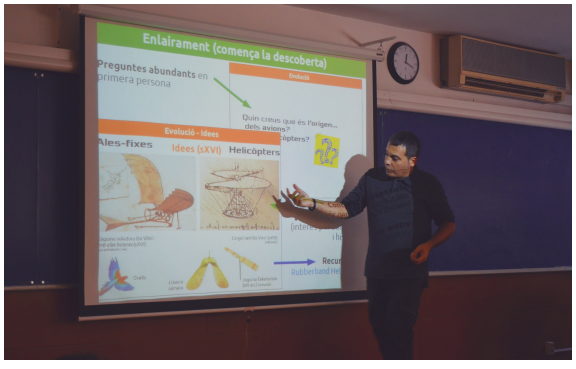


Figura 8. Jordi Campos



Figura 9. Ricard Peiró



Figura 10. Santi Vilches



Figura 11. Abraham de la Fuente



Figura 12. *El MMACA para los más pequeños*



Figura 13. *Cerveza y logaritmos*

La tarde comenzó con una actividad conjunta para todos los asistentes a la jornada. Allí la Comisión de Impulso de las Conclusiones del C2EM2016 (Congrés Català d'Educació Matemàtica realizado en julio de 2016) presentó la ponencia *De camino hacia el C2EM2020: ¿empezamos por compartir?,* durante la cual invitaron a la audiencia a poner en común qué actividades de su práctica cotidiana les interesaría compartir con sus colegas, promoviendo de esta manera el trabajo en red que las conclusiones del C2EM2016 destacaban como un camino a seguir en el futuro inmediato.

Para terminar la jornada, el programa nos ofrecía dos fantásticas propuestas para marchar con la mochila llena de ideas para llevar al aula el lunes siguiente. Por un lado, representantes del Museu de Matemàtiques de Catalunya, bajo el título *El MMACA para los más pequeños*, presentaron materiales, talleres y módulos de su museo dirigidos a niños de corta edad. Por otro lado, Manel Martínez, Roger Grau y Jordi Font, explicaron su experiencia en la puesta en funcionamiento de laboratorios de matemáticas como motor de conocimiento en dos centros educativos, uno en Barcelona y el otro en Vilanova i la Gertrú, ilustrando su relato con algunas actividades que han realizado en ese entorno: el experimento *Cerveza y logaritmos*, el juego *Cierra la caja* y el proyecto *Creando azulejos*.

Al acabar se notaba que se habían cumplido las expectativas con las que llegamos a la Facultat de Matemàtiques i Estadística de la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC), sede del encuentro. La jornada no decepcionó a los asistentes, tal como se pudo constatar a partir de las encuestas de opinión realizadas posteriormente.

Disponéis de más información sobre esta jornada (incluyendo el material presentado en las diferentes comunicaciones y talleres) en <http://abeam.feemcat.org/course/view.php?id=34> o rastreando la etiqueta *#20jabeam* elegida por los organizadores para el seguimiento del evento a través de las redes sociales.

Cecilia Calvo Pesce
Escola Sadako (Barcelona)
<ccalvo@escolasadako.com>

SUMA+
Recomendaciones a los autores

TÍTULO Deberá ser breve y evitar descripciones excesivas del contenido del artículo.

RESUMEN Presentará en no más de cinco líneas el contenido del artículo.

NIVELES No más de tres. Título aparte, tan solo apartado y subapartado.

INICIO No es conveniente iniciar el texto con un título de apartado. Conviene hacerlo con una introducción que no es necesario titular como «introducción», pues se sobreentiende.

TEXTO Procurar que la redacción sea directa y concisa. Evitar el uso innecesario y/o excesivo de oraciones subordinadas y paréntesis que puedan entorpecer tanto la lectura fluida como la comprensión del texto, sobre todo en una misma frase. Evitar redundancias, dequeísmos, el uso excesivo de las preposiciones «de» y «en» y la reiteración del pronombre relativo «que». Mientras sea posible, observar el mismo tiempo verbal a lo largo de todo el texto.

ORTOGRAFÍA Y SINTAXIS Uso apropiado de los signos de puntuación. En frases largas conviene que el lector respire.

SENSIBILIDADES Evitar comentarios políticamente incorrectos acerca de la facilidad o dificultad de comprensión de ideas, conceptos y argumentos. Usar expresiones neutras de tipo genérico para referirse a grupos de ambos sexos como, por ejemplo, alumnado, estudiantes, escolares, profesorado, docentes…

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Observar las pautas referidas en las *Normas de publicación* teniendo especial cuidado en que se trate exclusivamente de referencias citadas en el texto y de incluir en cada una de ellas el año, la editorial y la localidad de publicación.

ILUSTRACIONES Todas las imágenes, figuras, dibujos, fotografías y tablas deben ir acompañadas de un pie explicativo y estar referenciadas en el texto. Además, deberán tener la resolución señalada en las normas de publicación.

LECTURA Una lectura final y de un tirón del texto completo es de gran ayuda para mejorar su expresión y su puntuación.

Día Escolar
de las Matemáticas

12 de mayo de 2018

Matemáticas y el poder de los votos



Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Antonio Moreno Verdejo

Fotografía de portada de Teresa Graus Ros

Los sistemas electorales

Los procesos electorales, tal y como hoy los conocemos, se desarrollan a partir del siglo XVII. La ideología de ese momento histórico otorga al individuo la consideración de unidad. La democracia se construirá entonces desde el sufragio universal de los adultos.

Los sistemas electorales están en permanente debate porque no cierran la relación entre ideal democrático y realidad política. De hecho, traducen en representación política la voluntad popular expresada en el voto pero no existe una única fórmula para transformar votos en escaños. Por eso el objetivo es la búsqueda, no del sistema electoral perfecto sino del que mejor se adecúa a las condiciones históricas del momento.

El sistema electoral establece la solución en cada país del problema de la representación política. Es decir, determina el principio que la define (mayoritario, proporcional o mixto) y el procedimiento aplicado para alcanzarlo.

Todos los sistemas electorales incluyen un conjunto de requerimientos técnicos. Entre ellos, determinar el tamaño del parlamento; el número de circunscripciones y cómo se establece su tamaño; establecer la barrera electoral; la fórmula electoral que se utiliza para repartir los escaños; y en caso de que las listas estén desbloqueadas, el método de votación y escrutinio. A continuación, vamos a resolver dos problemas. Por un lado, cómo repartimos los votos y por otro, cómo elegimos representantes.

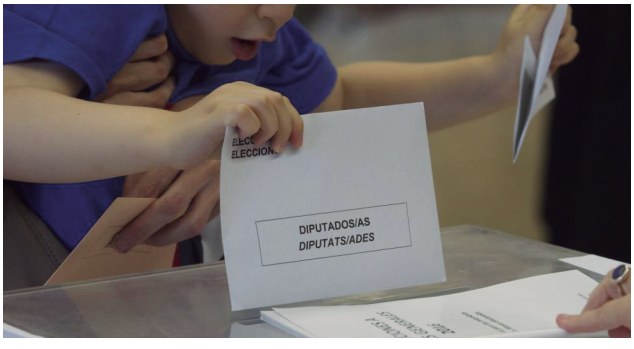


Figura 1.
Foto: Carles Ribas, El País

¿Cuántos votos cuesta un escaño de cada partido?

Esta frase hace referencia a la relación entre el número total de votos obtenidos en una elección y el número de escaños obtenidos. Después de cada elección suele escucharse que un partido obtuvo un número de escaños con tantos votos y otro, con menos votos, obtuvo más escaños. Al final serás capaz de comprender esta paradoja.

La distribución de los escaños a quien ha obtenido mayoría simple no supone un problema matemático. Sin embargo, repartir los escaños proporcionalmente al número de votos no es tan sencillo. Hay dos condiciones que se deben cumplir: el número de escaños que se asigna a cada partido tiene que ser un número entero y la suma de todos los escaños repartidos tiene que ser exactamente el número de escaños distribuidos.

Actividad 1

Unas elecciones arrojan el siguiente resultado:

Partidos	*Número de votos*
A	1577
B	1558
C	892
D	351

Reparte 13 escaños entre ellos.
Describe las decisiones que has adoptado.

Vamos a proponerte algunos métodos.

Método de Hamilton

Como el reparto es proporcional, calcula la parte proporcional que corresponde a cada partido. Es decir, el producto del número de escaños a repartir por la parte proporcional de los votos obtenidos.

Partidos	*Número de votos*	*Parte proporcional*
A	1577	4,6827
B	1558	4,6263
C	892	2,6481
D	351	1,0423

Apliquemos las dos condiciones que señalamos al inicio. Por un lado, hay que asignar un número entero de escaños así que podemos asignar la parte entera. Al descartar la parte decimal, estamos asignando un número menor de los escaños que hay que distribuir. Así que para cumplir la segunda condición, adoptamos el criterio de asignar los restantes escaños a los partidos cuyos restos sean mayores.

Partidos	*Número de votos*	*Parte proporcional*	*Escaños asignados*
A	1577	4,6827	5
B	1558	4,6263	4
C	892	2,6481	3
D	351	1,0423	1

Actividad 2

En la página web del Ministerio del Interior podemos encontrar los resultados electorales de las consultas realizadas en España:

<http://www. nfoelectoral. mir. es/infoelectoral/min/>

Así, por ejemplo, en las elecciones municipales de Granada del año 2011 se obtuvieron los siguientes resultados para repartir 27 concejales. ¿Podrías repartirlos siguiendo el método de Hamilton?

Partidos	*Número De Votos*
Partido Popular	60519
Partido Socialista Obrero Español	31736
Izquierda Unida Los Verdes-Convocatoria por Andalucía	9106
Unión Progreso y Democracia	6242
Los Verdes Andalucía Ecológica	3071
Partido Andalucista-Espacio Plural Andaluz	1065

El método D'Hont

Los métodos para asignar los votos obtenidos por cada partido en escaños no son todos iguales y la elección de uno u otro influye en los resultados electorales. El procedimiento D'Hont es uno de los métodos más utilizados. España lo emplea en la mayoría de sus procesos electorales. El objetivo es hacer que el mínimo número de votos que representa cada diputado sea el mayor posible.

Volvamos al ejemplo anterior en el que cuatro hipotéticos partidos, A, B, C y D obtenían respectivamente 1577, 1558, 892 y 351 votos. Dividimos el número de votos de cada partido entre 1, 2, 3, y así sucesivamente hasta el

número de concejales o escaños a repartir. En nuestro caso 13 (aunque por obtener mayor visibilidad hemos llegado solo hasta 7).

Partidos	*Número de votos*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
A	1577	1577	788,50	525,67	394,25	315,40	262,83	225,29
B	1558	1558	779,00	519,33	389,50	311,60	259,67	222,57
C	892	892	446,00	297,33	223,00	178,40	148,67	127,43
D	351	351	175,50	117,00	87,75	70,20	58,50	50,14

A continuación, asignamos los concejales a los cocientes mayores.

Partidos	*Número de votos*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
A	1577	1577	788,50	525,67	394,25	315,40	262,83	225,29
B	1558	1558	779,00	519,33	389,50	311,60	259,67	222,57
C	892	892	446,00	297,33	223,00	178,40	148,67	127,43
D	351	351	175,50	117,00	87,75	70,20	58,50	50,14

La asignación de concejales queda de la siguiente manera.

Partidos	*Número de votos*	*Escaños asignados*
A	1577	5
B	1558	5
C	892	2
D	351	1

¿Qué observas como diferencia con el reparto empleado en el método de Hamilton?

Actividad 3

Reparte los concejales de la actividad 2 anterior utilizando el método D'Hont.

Índices de poder

En una votación política, en el consejo de una empresa, en el Consejo Escolar de un centro educativo, se producen alianzas en favor de una propuesta o en contra. El voto de algunos colectivos o representantes es decisivo para oponerse o conseguir que la propuesta salga adelante.

Cuando uno o más grupos se unen para dar sus votos en la misma dirección se denomina coalición.

Las alianzas entre grupos o personas que pueden conseguir que una propuesta salga adelante se llama coalición ganadora. Cuando las alianzas se realizan para bloquear una propuesta se denomina coalición de bloqueo. El peso de la coalición es el número de votos que suman los miembros de la coalición.

Pero todos no tienen la misma capacidad para decidir o bloquear la propuesta. En general, cuanto mayor sea el número de votos que el votante posea el poder será mayor. Pero no siempre es así. En política, algunos grupos con un pequeño número de diputados tienen a veces mucho poder.

En el consejo de una empresa hay seis grupos, cada uno de ellos con los siguientes votos:{grupo A: 31 votos, grupo B: 31, grupo C: 28, grupo D: 21, grupo E: 2, grupo F: 2}. Por tanto 115 votos y la mayoría absoluta se consigue con 58 votos. Una coalición puede ser la formada por los grupos B, C y E. Además esta coalición es ganadora porque suman 61 votos y por tanto tienen mayoría absoluta. La coalición A, D, E y F es una coalición perdedora porque la suma de sus votos, 56, es inferior a la mayoría absoluta.

Actividad 4

a) Escribe todas las diferentes coaliciones que se pueden hacer con tres partidos P1, P2, P3. ¿Cuántas coaliciones diferentes has encontrado?
b) De forma similar, calcula cuántas coaliciones diferentes hay con 5 partidos.
c) Generaliza el recuento para N partidos y di cuántas coaliciones diferentes hay con N partidos.

Actividad 5

En un ayuntamiento en el que hay representados tres partidos (P1 = 5 concejales, P2 = 5 concejales y P3 = 4 concejales), la mayoría absoluta se consigue con 8 votos. Haz una lista con las posibles coaliciones que se podrían hacer e indica cuáles de ellas serían ganadoras y cuáles perdedoras. ¿Qué ocurriría si para conseguir un acuerdo se necesitasen 12 votos?

El poder de Banzhaf

El Consejo Escolar de un centro está constituido por grupos que representan a los padres, a los profesores, a los estudiantes y al PAS. En general, esperamos que todos los miembros del mismo grupo ideológico o de inte-

reses voten en la misma dirección. Pero no siempre ocurre así y se forman coaliciones para apoyar o rechazar las propuestas.

Supongamos un consejo formado por cuatro votantes que llamaremos A, B, C y P. Cada uno tiene un voto y el presidente (P) puede utilizar un segundo voto en caso necesario. Se formará una coalición ganadora si se consiguen al menos tres votos. La coalición PA es una coalición ganadora en la que P es fundamental. Es decir, la presencia de P garantiza la victoria de la coalición. Igual ocurre con la coalición PBC. Sin embargo, P no es fundamental en la coalición PABC.

Para medir el poder que tienen los grupos para formar coaliciones ganadoras o de bloqueo se utilizan algunos indicadores. El índice de Banzhaf es uno de ellos y se calcula sumando el número de coaliciones ganadoras en las que el votante es fundamental y el número de coaliciones de bloqueo en las que también es fundamental.

En el comité anterior, las posibles coaliciones son:{P, A, B, C, PA, PB, PC, AB, AC, BC, PAB, PAC, PBC, ABC, PABC}. De ellas, son ganadoras {PA, PB, PC, PAB, PAC, PBC, PABC}. Pero PABC es la única coalición en la que ninguno de los miembros es fundamental. Tampoco hay coaliciones de bloqueo. Por tanto, el poder de Banzhaf de P es:

I(P) = coaliciones ganadoras en las que P es fundamental = 6.
I(A) = coaliciones ganadoras en las que A es fundamental = 1.
I(B) = coaliciones ganadoras en las que B es fundamental = 1.
I(C) = coaliciones ganadoras en las que C es fundamental = 1.

Así que P tiene mucho más poder que el resto de los miembros del consejo.



Figura 2. John Banzhaf
Fuente: Alamy. *Times Higher Education*

Actividad 6 La composición actual del Ayuntamiento de Madrid es la siguiente:

PP, 21 concejales
AhoraMadrid, 20 concejales
PSOE, 9 concejales
C's, 7 concejales

Estudia el índice de poder de Banzhaf de cada uno de ellos.

Índice de Shapley-Shubik

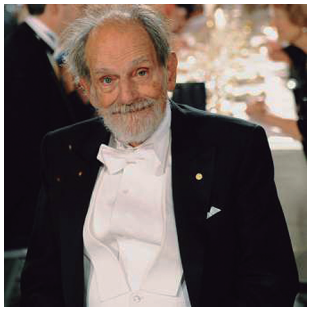


Figura 3. Lloyd S. Shapley
Fuente: UBS Together

Este índice mide el poder no en una coalición sino en una votación en la que todos participan aunque con distintos pesos. Es el caso de las votaciones en los Consejos de Ministros de la Unión Europea. El método de obtención del índice de poder para un miembro dado, P, consiste en obtener todas las permutaciones de los miembros o votantes en el juego y, en cada una de las permutaciones en las que figure P, observar si los partidos que le preceden en el orden que figura en esa permutación forman coalición no ganadora que, sin embargo, si se le sumara el votante P entonces tal coalición sí pasaría a ser ganadora. En este caso, tal permutación se denominará un pivote de P.

El índice de poder del miembro P se define como el cociente de dividir el número de pivotes de P por el número total de permutaciones.

Pensemos en el consejo de una empresa dirigido por cuatro familias con los siguientes porcentajes de representación:

Familias	*% representación*
Familia A	40
Familia B	5
Familia C	25
Familia D	30

Vamos a escribir todas las posibles permutaciones:

ABCD	ABDC	ACBD	ACDB	ADBC	ADCB
BACD	BADC	BCAD	BCDA	CABD	CADB
CBAD	CDAB	CDBA	BDCA	BDAC	CBDA
DABC	DACB	DBAC	DBCA	DCAB	DCBA

En verde están señaladas las permutaciones en las que C es pivote y en amarillo aquellas en las que D es pivote. El índice de poder de C es

I(C) = 8/24 = 1/3 y el de D, I(D) = 8/24 = 1/3. Si estudias las permutaciones para las que A y B es pivote obtendrás como resultado I(A) = 1/3 e I(B) = 0. Observa que aunque A tiene más acciones que C y D, sin embargo tiene el mismo poder.

Actividad 7

Estudia y explica las consecuencias, en términos de poder, de que A ceda el 5 % de sus acciones a alguna de las otras familias.

Elijamos delegado

Si queremos elegir el delegado de la clase podemos pedir que todos los estudiantes del aula recojan en una papeleta sus preferencias. Se cantan los votos y la alternativa que más votos tenga será finalmente el representante de la clase.

Si tenemos dos candidatos, el que más votos tenga resultará ganador. Este método se conoce como método de mayoría absoluta. Si el número de electores es par se podría producir un empate, pero si no hay empate, este método siempre proporciona un ganador.

Si hay más de dos candidatos este método no produce siempre un ganador *absoluto* y se han encontrado métodos que permiten aproximarse a ello.

Mayoría simple

Uno de los métodos más conocidos es el de mayoría simple. Cada estudiante deposita su voto en la urna en la que se incluye su preferencia y se cuentan los votos. El candidato con más votos será el elegido. Por ejemplo, si en una clase con 30 alumnos el candidato A tiene 12 votos y los candidatos B y C tienen 9 cada uno, no hay ningún candidato con mayoría absoluta (se necesitan 15 votos) pero por el método de mayoría simple, A sería el ganador. Sin embargo, podría ocurrir que ganara la más impopular de todas las alternativas. Para ello sería suficiente que todos los electores de B y C pensaran que estos dos candidatos están mejor cualificados para representar la clase que A. Así B o C serían preferidos por 18 votantes y A por 12.



Figura 4. Papeleta de Reino Unido empleada en los sistemas de votación por mayoría simple. Fuente: chalkdust. *A magazine for the mathematically curious*

El candidato que obtendría el mayor apoyo si confrontamos a los candidatos uno a uno, se denomina vencedor de Condorcet. En el método de mayoría simple se puede dar la circunstancia de que el perdedor de las elecciones, sería el vencedor de Condorcet.

Número de votantes y sus preferencias			
2	8	8	7
A	A	B	C
B	C	C	B
C	B	A	A

El método de mayoría simple determinará como ganador al candidato A con 10 votos frente a B, 8 votos, y C con 7 votos. Sin embargo, B y C serían los preferidos de 15 votantes mientras que A es preferido por 10 de los votantes. De hecho, si los comparamos uno a uno, el orden de elección sería C > B > A.

Segunda vuelta

Una técnica suele evitar el problema de la mayoría simple, la elección en segunda vuelta. Los electores se someten a una primera vuelta en la que se aplica el método de mayoría simple. Si el vencedor gana con mayoría absoluta de votos saldrá elegido. En otro caso, se seleccionan los candidatos más votados (generalmente dos) y se realiza una segunda vuelta. El vencedor de esta será la elegida.

Supongamos que se presentan tres candidatos A, B y C y las preferencias de los electores son las siguientes:

	Preferencias de los electores			
Número de votos	5	7	4	3
	A	B	A	C
	B	A	C	B
	C	C	B	A

En la primera vuelta, A recibiría 9 votos, B recibiría 7 y C recibiría 3. Como ningún candidato recibe los 10 votos necesarios para obtener mayoría absoluta, pasamos a la segunda vuelta con los dos candidatos con más votos. La descripción de las preferencias sería la siguiente:

	Preferencias de los electores			
Número de votos	5	7	4	3
	A	B	A	B
	B	A	A	B

Finalmente B, con 10 votos, gana a A con 9. Este sistema se utiliza en las elecciones presidenciales de Francia pero no se pueden mantener en el

modelo las preferencias de la primera vuelta porque la campaña electoral entre la primera y la segunda vuelta cambia el sentido del voto.

Método de Borba

Como vemos, sería interesante conocer las preferencias de los electores. El método de Borba permite al elector dar una ordenación completa de las alternativas. Después se asigna una puntuación fija al primero, al segundo, al tercero, y así sucesivamente.

Vamos a asignar los puntos 3, 2 y 1 en la siguiente elección.

	Preferencias de los electores			
Número de votos	5	7	4	3
	A	B	A	C
	C	C	C	B
	B	A	B	A

Por mayoría simple, C sería perdedor con tan solo 3 votos. Sin embargo, por el método de Borba sería el ganador con 41 puntos frente a los 37 de A y los 36 de B.

Lo más discutible de este método es la asignación de la puntuación porque los resultados pueden ser diferentes según los resultados. Si en el ejemplo anterior la puntuación asignada fuese 4, 2 y 1 entonces el ganador habría sido A con 44 puntos.

Este método suele utilizarse en competiciones deportivas. Por ejemplo para determinar el mejor país en la competición de los juegos olímpicos se asignan 3 puntos por cada medalla de oro, 2 por cada medalla de plata y 1 por cada medalla de bronce.

En las carreras de F1 cada posición de llegada tiene asignada una puntuación. Eso determina el ganador final de la temporada automovilística .

Voto Único Transferible

Este método, también conocido como método de Hare, ha sido utilizado en Australia y en Irlanda.

Si ningún candidato obtiene mayoría basada en los votos del primer lugar de preferencia, eliminamos al candidato con el menor número de votos y realizamos una nueva elección basada en votar solo para los candidatos que han quedado. Repetimos el proceso hasta que un candidato reciba la mayoría de votos en primer lugar de preferencias.

Las sociedades democráticas describen la votación y las elecciones como el resultado inevitable de la contribución de los votantes. El ganador

de las elecciones es, de alguna manera, la elección del pueblo. Sin embargo, los resultados de los métodos de elección anteriores aplicados al mismo ejemplo cuestionan esta afirmación. Los resultados de esta elección dependen de la selección del sistema utilizado para llevarla a cabo: las papeletas son las mismas en cada caso, solo el resultado es diferente. Así pues, quienes tienen el poder de seleccionar el método de elección pueden determinar el resultado. Solo se necesita acompañar cada uno de estos métodos de una explicación atractiva para respaldarlo.

Actividad 8

a) ¿Cuántos votos se necesitan para ganar por mayoría absoluta si hay 27 electores?

b) ¿De cuántas maneras posibles podemos ordenar los resultados de unas elecciones con seis candidatos suponiendo que el empate no es posible?

Actividad 9

a) Álex, Marta y Raúl se presentaron para delegado de la clase de sexto. De los 36 estudiantes, 16 votaron por Álex, 12 por Marta y 8 por Raúl. ¿Cuál fue la razón de los votos de Álex a los votos de Raúl? ¿Cuál fue la razón de votos de Marta a los votos de Raúl? ¿Cuál fue la razón de votos para Marta para los votos de Álex?

b) Debido a que nadie obtuvo la mitad de los votos, tuvieron que tener una segunda vuelta electoral. Marta se retiró y convenció a todos sus votantes a votar por Raúl. ¿Cuál es la nueva razón de votos de Raúl a los votos de Álex?

c) Álex y Raúl también se postularon para el Consejo Escolar. Hay 90 estudiantes votando en la escuela. Si la proporción de votos de Raúl a los votos de Álex sigue siendo la misma que en la parte (b), ¿cuántos votos más obtendrá Raúl que Álex?

Actividad 10

Considera los siguientes resultados de unas elecciones en los que se incluye la prioridad de los votantes.

Encuentra el vencedor de las elección utilizando:

	Preferencias de los electores					
Número de votos	18	12	10	9	4	2
	A	B	C	D	E	E
	D	E	B	C	B	C
	E	D	E	E	D	D
	C	C	D	B	C	B
	B	A	A	A	A	A

a) El método de mayoría simple.

b) El método de segunda vuelta.
c) El método de Borba. Asigna tú los pesos.
d) Por Voto Único Transferible.

Actividad 11

Los estudiantes de la clase de un instituto van a elegir a su delegado entre cuatro candidatos: A, B, C y D. Las preferencias de los estudiantes se reparten de la siguiente manera:

	Preferencias de los electores			
Número de votos	16	10	8	2
	A	B	C	B
	B	A	B	A
	C	D	A	C
	D	C	D	D

a) ¿Cuántos estudiantes hay en clase?
b) ¿Quién sería el delegado si lo elegimos por mayoría?
c) ¿Quién sería el delegado si lo elegimos por el método de Borba asignando los pesos (3, 2, 1, 0)?
d) ¿Quién sería elegido si la clase decide utilizar el método de Borba con pesos (5, 2, 1, 0)?

Actividad 12

Los 25 estudiantes de una clase tienen que elegir su delegado entre tres candidatos. La tabla con las preferencias es la siguiente:

	Preferencias de los electores			
Número de votos	8	6	7	4
	X	Y	Z	Y
	Z	Z	X	X
	Y	X	Y	Z

Han decidido utilizar un sistema de puntuación donde se asigna n puntos a la primera preferencia, 2 a la segunda y 1 a la tercera. Sabiendo que n es un número entero mayor que 2.

a) ¿Para qué valores de n, X es el vencedor?
b) ¿Para qué valores de n, Y es el vencedor?
c) ¿Para qué valores de n, Z es el vencedor?
d) ¿En algún caso no hay un vencedor?

Bibliografía

Moreno, A., y A. Villegas (2017), *Matemáticas electorales*, Catarata Ediciones, Madrid.
Ramírez, V. (2002). «Matemática electoral», *El lenguaje matemático en sus aplicaciones*, Ministerio del Interior, Madrid.
Wallis, W. D. (2014), *The Mathematics of Elections and Voting*, Springer, Nueva York.

suma+
revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

87
marzo 2018

Consejo de Dirección
<direccion@revistasuma.es>

Iolanda Guevara Casanova
Departament d'Ensenyament
de la Generalitat de Catalunya
Universitat Autònoma de Barcelona

Daniel Sierra Ruiz
IES El Picarral, Zaragoza

Administración
<administracion@revistasuma.es>

Miguel Latorre García

Edita
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM)

Web
<www.revistasuma.es>

Beatriz Rubio Serrano
Universidad de Zaragoza

Jorge Pinilla López
Universidad de Zaragoza

Cubierta

Mercè Cassanyes i Caballeria

Maquetación y corrección

Miquel Albertí Palmer
INS Vallès, Sabadell (Barcelona)
Universitat Autònoma de Barcelona

Ricardo Alonso Liarte
IES Salvador Victoria, Monreal del Campo (Teruel)

Iolanda Guevara Casanova

Julio Sancho Rocher
IES Avempace, Zaragoza
Universidad de Zaragoza

Daniel Sierra Ruiz

Consejo de Redacción

Miguel Barreras Alconchel
IES Matarraña, Valderrobres (Teruel)
<pelanium@yahoo.es>

Carme Burgués Flamarich
Universitat de Barcelona
<cburgues@ub.edu>

José María Muñoz Escolano
Universidad de Zaragoza
<jmescola@unizar.es >

Josep Rey Nadal
MMACA (Museu de Matemàtiques a Catalunya)
INS La Garriga, La Garriga (Barcelona)
<jrey@xtec.cat>

Montserrat Torra Bitlloch
CESIRE, Àmbit matemàtic CREAMAT
Departament d'Ensenyament, Generalitat de Catalunya
<mtorra@xtec.cat>

Consejo Editorial

Agustín Carrillo de Albornoz Torres
Universidad de Córdoba
<agustincarrillo@fespm.es>

Juan Martínez-Tébar Giménez
IES Alto de los Molinos, Albacete
<juanmtg1@gmail.com>

Tomás Queralt Llopis
IES Les Alfàbegues, Bétera (Valencia)
Universitat de València
<tomas.queralt@uv.es>

Onofre Monzó del Olmo
IES Veles e Vents, Torrent (Valencia)
Universitat de València
<onofre.monzo@uv.es>

Revista Suma
Apartado de correos 286
08911 Badalona (Barcelona)
Tirada: 6000 ejemplares
Depósito legal: Gr 752-1988
ISSN: 1130-488X
Twitter: @suma_fespm

Consejo Asesor

Amador Álvarez del Llano
IES La Marina, Santa Cruz de Bezana (Cantabria)
<aalvar29@hotmail.com>

David Arnau Vera
Universitat de València
<david.arnau@uv.es>

Carmen Azcárate Giménez
Universitat Autònoma de Barcelona
<carmen.azcarate@uab.es>

Javier Bergasa Liberal
IES Navarro Villoslada, Pamplona
<jbergasl@educacion.navarra.es>

Salvador Caballero Rubio
IES Gaia, Sant Vicent del Raspeig (Alicante)
<salvador.caballero@gmail.com

Encarnación Castro Martínez
Universidad de Granada
<encastro@ugr.es>

Abilio Corchete González
IES Suárez de Figueroa, Zafra (Badajoz)
<acorchete@gmail.com>

Olimpia Figueras Mourut de Montppellier
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados IPN México
México D.F. (México)
<figuerao@cinvestav.mx>

M.ª José Fuente Somavilla
IES Augusto González de Linares, Santander
<mj.fuente@yahoo.es>

Maria Luisa Girondo
Universitat Rovira i Virgili (Tarragona)
<marialuisa.girondo@urv.net>

Horacio Gutiérrez Álvarez
Profesor de matemáticas, Oviedo
<horag3@gmail.com>

Arturo Mandly Manso
IES José Manzano, Don Benito (Badajoz)
<armandly@gmail.com>

Rafael Martínez Calafat
IES La Plana, Castelló de la Plana
<rmartinez@vila-real.uned.es>

Ricardo Moreno Castillo
Profesor de matemáticas, Santiago de Compostela
<moreno_castillo@hotmail.es>

Maite Navarro Moncho
IES Veles e Vents, Torrent (Valencia)
Universitat de València
<Teresa.Navarro-Moncho@uv.es>

M.ª Jesús Palacios de Burgos
Profesora de matemáticas, Madrid
<mjpalaciosdeburgos@hotmail.com

Pascual Pérez Cuenca
IES Figueras Pacheco, Alacant
<pascual.prz@gmail.com>

Antonio Pérez Sanz
IES Salvador Dalí, Madrid
<aperez.sanz@gmail.com>

Ana Belén Petro Balaguer
Universitat de les Illes Balears, Palma
<anabelen.petro@uib.es>

Luis Puig Mosquera
IES Sofía Casanova, Ferrol (A Coruña)
<luispuig@edu.xunta.es>

Mariano Real Pérez
Centro de Profesorado, Sevilla
<mariano31415@gmail.com>

Francesc Andreu Rosselló Llompart
Universitat de les Illes Balears, Palma
<cesc.rossello@uib.es>

Manuel José Sastre Álvarez
IES La Corredoria, Oviedo
<mjsastre@telecable.es>

Manuel Sol Puig
Institut Vilatzara, Vilassar de Mar (Barcelona)
Universitat de Barcelona
<msol@xtec.cat>

Carlos Oswaldo Suarez Alemán
Universidad de Cádiz
<carlososwaldo.suarez@uca.es>

Francisco Villegas Martín
Centro del Profesorado, El Ejido (Almería)
<pvillegas@thales.cica.es>

Suma es una revista de didáctica de las matemáticas de periodicidad cuatrimestral cuyo objetivo es tratar sobre los aspectos relacionados con su enseñanza y aprendizaje y destinada, sobre todo, al profesorado que trabaja en educación infantil, primaria, secundaria y universitaria.

La revista SUMA se edita en
Badalona (Barcelona) — España

suma+

no se identifica necesariamente con las opiniones vertidas en las colaboraciones firmadas

Normas de publicación

1. Para el envío de artículos o cualquier consulta sobre su contenido se utilizará el correo electrónico de la redacción de *Suma* <articulos@revistasuma.es> o su dirección postal:

   Revista *Suma*
   Apartado de Correos 286
   08911 Badalona

2. Si los trabajos, imágenes incluidas, ocupan más de 5 Mb sólo se enviaran por correo postal en soporte magnético (CD-ROM, DVD-ROM o *pen drive*).
3. Los trabajos deben ser enviados como archivo en formato .TXT, .ODT, .RTF, .DOC, .DOCX, adjunto a un mensaje de correo electrónico en el que deben figurar:
   1) El título del trabajo, los nombres y apellidos de todos los autores, su lugar de trabajo y su dirección completa así como la sociedad federada a la que pertenecen (si se desea).

   Y a efectos de comunicación:

   2) El correo electrónico, teléfono y dirección postal del autor de contacto.
4. Se debe enviar una segunda versión del original en la que no aparezcan los nombres de los autores, ni información relativa a ellos o que pueda servir para identificarlos (por ejemplo, institución a la que pertenecen, citas y referencias bibliográficas propias, agradecimientos, datos del proyecto en el que se enmarca el trabajo). En esta versión se reemplazarán las citas y referencias bibliográficas por «Autor, 2012» o «Autor y otros, 2012». En las referencias bibliográficas propias se debe eliminar el título y el nombre de la revista o el título del libro donde se publica.
5. Se admiten diversos tipos de trabajos: teóricos, informes de investigaciones, divulgación, innovación didáctica…
6. Junto con el artículo se remitirá un resumen (máximo de 600 caracteres incluyendo espacios), una traducción del mismo y del título en inglés, y cinco palabras clave jerarquizadas (en castellano e inglés).

   Ejemplo: Investigación didáctica, Álgebra, Modelización y dificultades, Enseñanza y aprendizaje, Secundaria y bachillerato.
7. El texto irá una sola columna y tendrá una longitud máxima de 25 000 caracteres sin contar espacios pero incluyendo las tablas, las figuras y los anexos.
8. Los esquemas, dibujos, gráficas e imágenes serán enviados preferentemente en formato TIF o EPS, aunque será admisible el formato JPEG, de modo que, a una resolución mínima de 300 ppp, la imagen tenga un tamaño mínimo de 8 × 8 cm, y en color original. Se adjuntarán en una carpeta aparte del documento del texto, ya que las imágenes incrustadas en el texto no son válidas para su posterior edición. Cada archivo estará claramente identificado y se indicará en el texto el lugar donde se ubica. De igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.
9. Si alguna expresion no se puede escribir con los carácteres disponibles en la fuente Times New Roman, se incluirá, con un editor de ecuaciones, fuera del texto. Si esto no fuera posible, se incorporará como imagen. En tales casos se indicará el lugar que ocupan las fórmulas en el texto, haciendo referencia al nombre del archivo que las contiene.
10. Las referencias bibliográficas se dispondrán al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición.

    Ejemplos:

    Gómez, E. (1990), *Título,* Editorial, Lugar de edición.
    Gómez, E. (1990*a*), *Título,* Editorial, Lugar de edición.
    Gómez, E., y J. Pérez (1990), *Título,* Editorial, Lugar de edición.
    Gómez, E., J. Pérez y D. Hernández (1990), *Título,* Editorial, Lugar de edición.

    En los artículos de revistas y capítulos de libro se seguirá la pauta que se muestra a continuación:

    Gómez, E. (1990), «Título», *Revista,* n.° 31, 35-56.
    Gómez, E. (1990), «Título», en J. Pérez (ed.), *Título,* Editorial, Lugar de edición, 13-23.
11. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: «[…] supone un gran avance (Hernández, 1992)». Si el autor aparece explícitamente en el texto, tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: «[…] según Rico (1993)».
12. Si se cita una referencia de más de tres autores se puede citar el primero seguido de la expresión *y otros.* Por ejemplo: «Bartolomé y otros (1982)», «Gelpi y otros (1987)». Pero en la bibliografía deben aparecer todos los autores.
13. Todas las referencias bibliográficas deben corresponder a menciones hechas en el texto.
14. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente con superíndices a lo largo del artículo y se incluirán al final del texto.
15. A la recepción del trabajo se enviará un correo electrónico como acuse de recibo.
16. Cada trabajo será remitido a dos asesores para ser evaluado. Estos no serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo, aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo o recomendarán posibles modificaciones acordes con las normas y criterios de *Suma*.
17. Si los dos informes son positivos, el artículo será publicado. Si los dos informes son negativos, se desestimará su publicación. Si existe discrepancia entre los informes, se solicitará un tercer informe que decidirá su publicación o no.
18. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como —en caso afirmativo— la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido.
19. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

Boletín de suscripción

Tarifas	Suscripción anual	Número suelto	Monografía
Particulares	25 €	10 €	15 €
Centros	40 €	15 €	15 €
Europa	50 €	20 €	15 €
Resto del mundo	60 €	22 €	15 €

Fotocopiar esta hoja y enviar:

por correo a: Encarni Amaro Parrado (Tesorería de la FESPM)
C/ La Palma nº1, 1ºB,
23740, Andújar-Jaén.

por correo-e a: admin@fespm.es

Deseo suscribirme a la revista *Suma*:

Nombre y apellidos: NIF/CIF:

Dirección: Teléfono:

Población: CP:

Provincia: País:

Correo electrónico:

Importe (€)

☐ Suscripción a partir del año (3 números) _____

☐ N.os sueltos _____

Total

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto)

☐ Transferencia bancaria (IBAN ES79 2100 2153 3802 0010 9089)

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM

Fecha y firma:

Nombre y apellidos:

IBAN: ⌊⌊⌊⌊ Entidad: ⌊⌊⌊⌊ Oficina: ⌊⌊⌊⌊ DC: ⌊⌊ Cuenta: ⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊

Banco/Caja:

Agencia n.º: Dirección:

Población: Provincia:

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que, periódicamente, les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista *Suma*.

Atentamente (fecha y firma):

Conforme a lo establecido en el art. 5 de la Ley Orgánica 15/1999 de Protección de Datos de Carácter personal, le informamos que los datos de carácter personal que Usted ha facilitado de forma voluntaria se incorporarán a un fichero automatizado cuyo responsable es la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), con el fin de llevar a cabo la gestión integral de nuestra relación comercial, cobrar tarifas, contactarle y enviarle información que pueda ser de su interés, estando prevista la comunicación de los mismos a aquellos profesionales y/o empresas que intervienen en la gestión del servicio solicitado, descritos en el Documento de Seguridad. Si no nos manifiesta lo contario entenderemos que Usted consiente el tratamiento indicado. Puede ejercitar sus derechos de acceso, cancelación, rectificación y oposición, mediante escrito dirigido a la dirección postal de SUMA junto con una fotocopia del DNI.