

Leyendo problemas antiguos. Dos ejemplos del siglo XVII español

ANTONIO M. OLLER MARCÉN

Los problemas planteados en textos matemáticos antiguos solían ir acompañados de reglas aritméticas concretas para resolverlos que consistían en una descripción de las operaciones a realizar con los datos particulares del problema. La lectura de estos textos resulta complicada e implica soluciones que se alejan de las ideas utilizadas realmente por los autores. En este trabajo presentamos una serie de pasos según los cuales organizar la lectura de problemas antiguos y lo ejemplificamos a partir de dos problemas del Barroco. Este trabajo puede ser útil para la formación del profesorado.

Palabras clave: Historia de las matemáticas, Educación matemática, Siglo XVII, Formación de profesorado.

Reading ancient problems. Two examples from 17th century in Spain

The problems that can be found in ancient mathematical texts were usually accompanied with particular arithmetic rules that consisted of a description of the computations to be performed with the numerical data of the problem. Reading these texts is difficult and it often implies the use of ideas alien to those really used by the authors. In this work we present some steps to organize the reading of ancient problems and exemplify them with two problems from the Baroque. This work can be useful in teacher training.

Keywords: History of mathematics, Mathematics education, 17th century, Teacher training.

La lectura de textos antiguos de matemáticas puede tener interés para el profesorado de matemáticas desde múltiples puntos de vista (Lupiáñez, 2002). Existe indudablemente un interés histórico y humanístico, puesto que la lectura de textos antiguos muestra las matemáticas dentro de un contexto histórico y científico más amplio y como un constructo cultural humano. Existe también un interés puramente matemático, ya que no debe descartarse el hecho de que la lectura de ciertas obras antiguas, clásicas o no, pueda contribuir a aumentar los conocimientos matemáticos del lector. Finalmente, también tenemos un interés didáctico, puesto que la lectura de textos antiguos puede mostrar errores que algunos alumnos siguen cometiendo actualmente o ilustrar obstáculos para el aprendizaje de ciertos conceptos. Como consecuencia de este interés existe abundante literatura que, entre otros aspectos, muestra experiencias de aula basadas en el uso de fuentes antiguas para diseñar actividades con diversos objetivos (Jahnke y otros, 2000).

Muchos de los problemas que aparecen en textos antiguos (y que en muchas ocasiones siguen apareciendo en los libros de texto actuales) van acompañados de reglas aritméticas particularizadas a los datos concretos del problema en que se presentan y enunciadas sin justificación alguna.

Por ello, el uso de fuentes originales necesita de un intenso y, a veces complicado, trabajo de análisis previo. Parte de este trabajo previo supone tratar de entender cómo los autores resuelven los problemas que presentan puesto que, a menudo, las indicaciones que presentan son muy escasas. Así pues, la lectura de un problema antiguo de cara a su análisis y posible utilización en el aula podría realizarse según las siguientes fases:

1. Lectura detenida del enunciado, modernizando el lenguaje si es necesario.
2. Resolución del problema haciendo uso de las técnicas que se consideren más adecuadas y sin tener en cuenta la resolución original del autor.
3. Lectura detenida de la resolución original del autor, modernizando el lenguaje si es necesario.
4. Análisis de la solución original, tratando de ubicarla en el contexto histórico y matemático de la obra.
5. Comparación de la solución original con la actual.

Desde el punto de vista del docente de matemáticas, cada uno de estos pasos puede presentar distintas dificultades y supone, a su vez, oportunidades de aprendizaje y de puesta en juego de distintas competencias profesionales.

La lectura del enunciado puede ser difícil tanto por el lenguaje utilizado como por la tipografía del texto. La evolución en el idioma (ortografía y gramática) puede resultar interesante aunque no sea desde un punto de vista matemático. Por otro lado, el enunciado también puede proporcionar información histórica interesante sobre la época en la que se escribió el problema o sobre su autor.

La resolución personal del problema es interesante desde un punto de vista matemático. Su dificultad puede ser variable y al resolverlo enfrentamos las posibles dificultades que puede presentar y también comprendemos con mayor detalle el problema. Resulta conveniente tratar de resolver el problema de modo autónomo como si fuéramos estudiantes que están leyendo el libro.

La lectura de la solución del autor comparte con la lectura del enunciado las dificultades lingüísticas. A ellas hay que añadir la posibilidad de

que la solución dada por el autor sea incompleta, poco clara o, a veces, incorrecta. En cualquier caso, desde el punto de vista del profesor de matemáticas, resulta interesante observar el modo en que un profesor de otra época presentaba la solución de un problema a sus eventuales alumnos.

La solución dada por el autor debe ser considerada dentro de un contexto histórico y matemático concreto. Debe evitarse proyectar sobre los textos conocimientos actuales y también considerar como inferiores soluciones que con ojos actuales parezcan incompletas o incorrectas. Tratamos de resolver el problema con las herramientas que pensamos que pudo haber tenido el autor en el momento de escribir el texto. Esto implica ponernos en el lugar del autor retrocediendo en el tiempo y olvidar parte de nuestros conocimientos matemáticos más *avanzados*. Aunque esto conlleva dificultades, puede suponer un ejercicio interesante.

Finalmente, al comparar la solución que el autor consideraba correcta con nuestra propia solución, y al analizar y comprender el origen de la solución original, podemos apreciar el carácter histórico y evolutivo del conocimiento matemático. Nuevamente hay que realizar esta labor de comparación de la forma más neutra posible evitando llevar a cabo juicios de valor sobre la superioridad de uno u otro enfoque. Desde el punto de vista docente tiene mucho más interés comparar las distintas soluciones a un problema en base a las ideas que se ponen en juego, a los sistemas de representación utilizados o a las dificultades y obstáculos que puede suponer cada una de ellas.

En este trabajo presentamos dos ejemplos de lectura de problemas antiguos según los pasos anteriores. Ambos provienen de textos españoles del siglo XVII disponibles digitalmente en la red. En cualquier caso, para el lector interesado, proporcionamos algunos breves apuntes bio-bibliográficos de los autores de las obras a las cuales pertenecen los problemas escogidos.

Estos ejemplos fueron utilizados en un taller impartido por el autor en las V Jornadas de Enseñanza de las Matemáticas en Navarra. En dicho taller se resolvieron y analizaron estos problemas y se discutieron algunas ideas a partir del trabajo realizado. En la conclusión, comentaremos algunas

ideas sobre las que reflexionar a partir de estos problemas, así como algunas líneas en las que se podría continuar el trabajo con este tipo de materiales.

Un problema astronómico del valenciano Jerónimo Cortés

Jerónimo Cortés fue un autor valenciano, quizás de Gandía, que vivió entre finales del siglo XVI y principios del XVII. No solo escribió sobre matemáticas y astronomía, sino también sobre ciencias naturales. (Picatoste, 1891: 57-61). De hecho, de las seis obras que se le conocen, solo dos son de contenido puramente matemático: el *Compendio de reglas breves* (Cortés, 1594) y la *Arithmetica practica* (Cortés, 1604). Se conoce muy escasa información sobre su vida y la que se dispone proviene casi exclusivamente de los prólogos y dedicatorias de sus obras. Fue maestro de contar, probablemente sin formación universitaria, tuvo al menos cinco hijos y sufrió diversos problemas económicos durante su vida. En 1591 publicó su primera obra,

el *Tratado del cómputo por la mano* (Cortés, 1591) y la última, *Libro y tratado de los animales terrestres y volátiles* (Cortés, 1613), apareció ya de forma póstuma en 1613. Sus obras más conocidas no fueron las de carácter matemático. Por ejemplo, su libro *Fisonomía natural y varios secretos de naturaleza* (Cortés, 1599) fue editado más de 100 veces, mientras que su *Lunario nuevo, perpetuo y general, y pronóstico de los tiempos universal* (Cortés, 1596) se editó unas 70 veces. Respecto a su obra matemática, el texto más importante es su *Arithmetica practica* (Cortés, 1604) que supone, en cierto modo, la culminación de una vida dedicada a las matemáticas. En el prólogo de dicha obra el propio autor dice sobre la matemática que «ha muchos años que la profeso y enseño, trabajo y deprendo». Esta obra (Salavert i Fabiani, 1979), fue reeditada póstumamente dos veces, primero en 1659 y de nuevo, casi un siglo después del fallecimiento de su autor, en 1724 (figura 1).

En la página 456 de la *Arithmetica practica* (figura 2) encontramos un problema clásico relacionado con la astronomía. En concreto se trata de estudiar la conjunción de Júpiter y Saturno; es decir, estudiar el tiempo que tardan dichos planetas en volver a estar alineados con el Sol. Desde un punto de vista histórico, es posible encontrar problemas semejantes a este en textos de distintos orígenes y tradiciones (Meavilla y Oller, 2015). Se trata, en realidad, de un problema de móviles en el que la astronomía proporciona únicamente un contexto en el que plantear el problema.



Figura 1

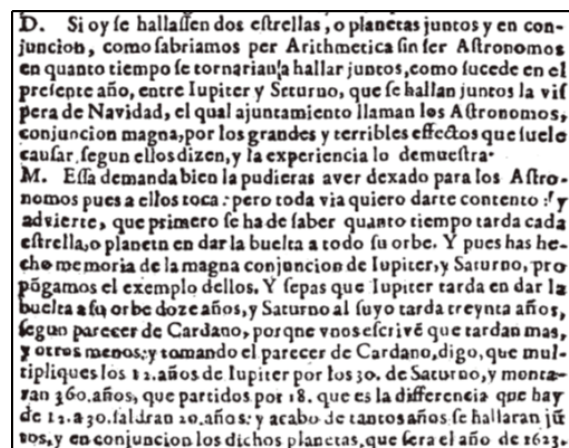


Figura 2

La lectura del problema proporciona información interesante. Además de los datos astronómicos sobre la rotación de Júpiter y Saturno en torno al Sol, muy ajustados a la realidad, se habla de Cardano y, además, podemos descubrir el año de escritura del libro; puesto que se dice que dentro de 20 años será 1623. Pese a tener casi 400 años, la lectura del problema no es complicada, aunque la ortografía y gramática varía mucho de las actuales. En cualquier caso, el enunciado del problema expresado en lenguaje moderno y de forma concisa sería el siguiente:

Saturno tarda 30 años en completar su órbita en torno al Sol, mientras que Júpiter lo hace en 12. Si hoy ambos planetas están alineados con el Sol, ¿cuándo volverán a estarlo?

Una posible solución a este problema, tal y como podría encontrarse en cualquier libro de texto actual y utilizando lenguaje algebraico, es la siguiente. Si llamamos x al tiempo que tardarán en volver a encontrarse ambos planetas, el planeta más rápido (Júpiter) habrá dado exactamente una vuelta más que el más lento (Saturno) en ese tiempo. Por tanto se debe cumplir que

$$\frac{x}{12} = \frac{x}{30} + 1$$

Resolviendo la ecuación se obtiene la respuesta buscada: 20 años.

La solución original de Cortés, como se corresponde con un texto de aritmética, no involucra ningún uso de lenguaje algebraico. De hecho, la respuesta del autor es meramente descriptiva:

Multiplica los 12 años de Júpiter por los 30 de Saturno, y obtendrás 360 años, que partidos por 18, que es la diferencia de 12 a 30, saldrán 20 años.

Como es habitual en textos de la época, el autor no da ningún tipo de indicación sobre las ideas subyacentes al proceso que describe. Si retomamos la solución algebraica moderna y detallamos los pasos necesarios para resolver la ecuación anterior, obtenemos una secuencia de operaciones como la siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{x}{12} &= \frac{x}{30} + 1 \Rightarrow \frac{x}{12} - \frac{x}{30} = 1 \Rightarrow \\ \left(\frac{30-12}{30 \times 12} \right) x &= 1 \Rightarrow x = \frac{30 \times 12}{30-12} = \frac{360}{18} = 20 \end{aligned}$$

En el último paso de esta secuencia de operaciones aparecen las operaciones que Cortés proponía como solución al problema. El producto de 12 por 30 dividido entre la diferencia de esos mismos dos números. Sin embargo, no debemos pensar que el autor, al dar esta solución, estuviera llevando a cabo las operaciones que acabamos de mostrar. De hecho, en toda su obra no aparece ningún contenido relacionado con el álgebra. Así pues, si queremos entender realmente la solución original de Cortés, hemos de tratar de dar una interpretación a esas operaciones que involucre únicamente ideas aritméticas. Podemos encontrar, al menos, dos posibles interpretaciones.

1. Saturno da $1/30$ de vuelta al año, mientras que Júpiter da $1/12$ de vuelta al año. Así pues, al cabo de un año, el número de vueltas de adelanto de Júpiter sobre Saturno será:

$$\frac{1}{12} - \frac{1}{30} = \frac{30-12}{30 \times 12}$$

En consecuencia, para que el adelanto sea exactamente de una vuelta, deberá haber transcurrido un número de años igual a:

$$\frac{30 \times 12}{30-12} = 20$$

2. Supongamos que han transcurrido 360 años (producto de 30 y 12). En ese tiempo, Saturno habrá dado 12 vueltas en torno al Sol mientras que Júpiter habrá dado 30. Es decir, el adelanto de Júpiter sobre Saturno al cabo de 360 años es de 18 vueltas (resta de 30 y 12). Por lo tanto, si queremos saber el tiempo que debe transcurrir para que dicho adelanto sea solo de una vuelta, basta con dividir 360 entre 18.

Finalmente, para completar la lectura del problema, vamos a comparar las tres soluciones que hemos presentado para analizar las posibles fortalezas y debilidades de cada una de ellas.

- Como es habitual, la solución algebraica permite una resolución rápida y directa del problema, pero oculta el significado de las operaciones realizadas. Es muy difícil, por no decir imposible, proporcionar una interpretación, por ejemplo, al producto de 30 por 12 en este contexto. Además, el

planteamiento de la ecuación no es trivial y es necesario observar que en el momento del reencuentro el planeta más rápido habrá dado exactamente una vuelta más que el planeta más lento.

- La primera resolución aritmética implica la consideración de las velocidades de cada planeta. Esto aumenta la complejidad de esta solución puesto que debe construirse una nueva magnitud. Por lo demás, esta solución involucra ideas sencillas sobre proporcionalidad y razones inversas. Así, en el último paso se invierte la razón que representa el número de vueltas de ventaja al cabo de un año, para obtener el tiempo necesario para obtener una ventaja de una vuelta. En este caso, tampoco es fácil asignar un significado claro y sencillo al producto y a la diferencia de 30 y 12. Dichas operaciones surgen únicamente dentro de la aplicación de un algoritmo de operación con fracciones.
- La segunda resolución aritmética es un ejemplo de la llamada *regla de falsa posición*. Se trata de la solución conceptualmente más simple pues no requiere de la consideración de nuevas magnitudes. Además, las operaciones realizadas tienen un sentido claro y sencillo. El producto de 30 por 12 se toma para considerar un tiempo que es múltiplo de ambos. La diferencia entre 30 y 12 son las vueltas de adelanto del rápido sobre el lento en ese tiempo. El cociente se realiza para obtener un valor unitario, por lo que de nuevo aparecen ideas relacionadas con la proporcionalidad.

al menos en cuatro ocasiones más hasta mediados del siglo XVIII (León y Sanz, 1994).

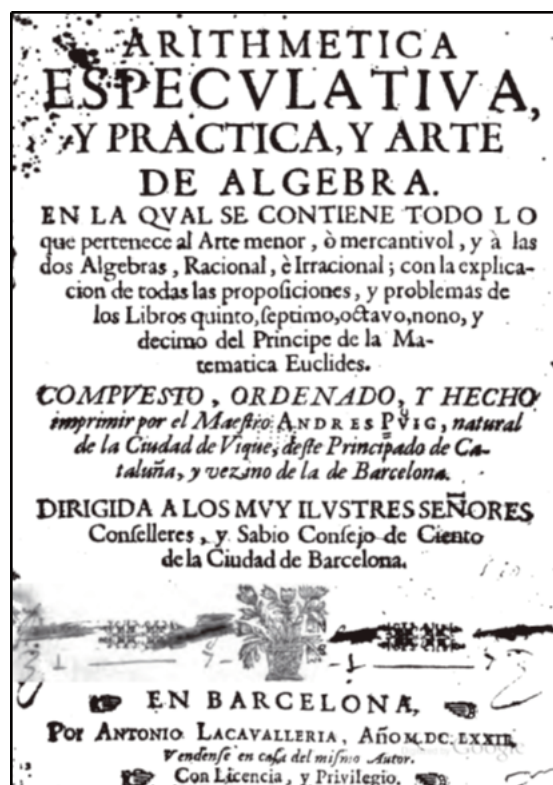


Figura 3

En la página 246 de esta obra (figura 4) encontramos un curioso problema de herencias. Estos problemas de herencias son muy comunes en las aritméticas de la época y tienen un claro origen musulmán. Este problema en concreto se encuentra en multitud de textos anteriores como, por ejemplo, el *Libro primero, de Arithmetica Algebratica* de Marco Aurel (1552).

Un problema de herencias de Andrés Puig de Vic

De la vida de Andrés Puig sabemos incluso menos que de Jerónimo Cortés. Nació en Vic, según los datos que leemos en su obra, estudió en Valencia y vivió en Barcelona (Rodríguez Vidal, 1980). Su única obra conocida es la *Arithmetica especvlativa y practica y arte de algebra* (Puig, 1672) que se publicó por primera vez en 1670 (figura 3) y fue reeditada,

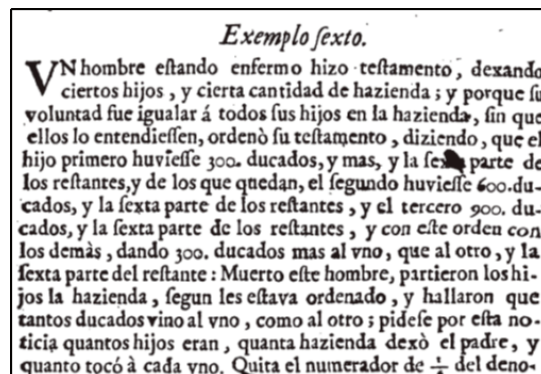


Figura 4

La escritura es muy similar a la de la obra de Cortés analizada anteriormente y su lectura resulta sencilla. En este caso la información histórica es escasa más allá de la aparición de una unidad monetaria antigua, los ducados. La adaptación del problema al lenguaje moderno, manteniendo el uso de los ducados como unidad monetaria es la siguiente:

Un hombre hace testamento, dejando ciertos hijos, y cierta cantidad de hacienda. Ordenó que el hijo primero tuviese 300 ducados y la sexta parte de los restantes, que el segundo tuviese 600 ducados y la sexta parte de los restantes, y el tercero 900 ducados y la sexta parte de los restantes, etc. De este modo, resultó que todos los hijos recibieron la misma herencia. ¿Cuánta fue la herencia y cuánto tocó a cada hijo?

A continuación proponemos una posible solución a este problema. Supongamos que H es el importe de la herencia, y que x_k es la parte de la misma que recibe el k -ésimo hijo. Entonces, tenemos que

$$x_k = 300k + \frac{1}{6} \left(H - 300k - \sum_{i=1}^{k-1} x_i \right)$$

En particular, se tiene que

$$\begin{aligned} x_1 &= 300 + \frac{1}{6}(H - 300) \\ x_2 &= 600 + \frac{1}{6}(H - 600 - x_1) \end{aligned}$$

y como todos los hijos deben recibir la misma herencia (es decir, $x_1 = x_2$), se obtiene que

$$300 + \frac{1}{6}(H - 300) = 600 + \frac{1}{6}(H - 600 - x_1)$$

de donde se deduce que $x_1 = 1500$ y, consecuentemente, que el padre tenía 5 hijos y que su herencia fue $H = 7500$.

Pese a que el texto de Puig presenta contenidos algebraicos, este problema aparece en una sección en la que no se hace uso de los mismos. De hecho, la solución dada por el autor es bastante esquemática y puramente descriptiva:

Quita el numerador de $1/6$ del denominador y quedarán 5 y tantos hijos dejó el padre; sabido cuántos hijos dejó. Multiplica por 300 ducados que se dan en principio, por 5 y montarán 1 500 ducados y tantos vinieron por cada hijo, y porque los hijos son 5 multiplica los 1 500 ducados por 5 y montarán 7 500 ducados por la hacienda que dejó el padre; pruébalo pues es fácil, y hallarás ser verdad.

Dar una interpretación de esta solución resulta algo más complicado que en el caso anterior, debido a que se trata de un problema más complejo que involucra múltiples cantidades desconocidas. Vamos a presentar un posible razonamiento que quizás permita comprender el origen de la solución dada por Puig. Para ello vamos a utilizar lenguaje simbólico (con la misma notación anterior), si bien todos los argumentos que presentaremos se podrían presentar retóricamente de un modo más historicista. Comenzamos calculando lo que recibe el primer hijo y reescribiéndolo adecuadamente:

$$x_1 = 300 + \frac{1}{6}(H - 300) = \frac{H}{6} + \frac{5}{6} \cdot 300$$

Es decir, el primer hijo recibe un sexto de la herencia y cinco sextos de 300. Esta manera de escribir la parte del primer hijo es interesante porque saca a la luz la resta de «el numerador de $1/6$ del denominador». Ahora, hacemos algo parecido con la parte del segundo hijo:

$$\begin{aligned} x_2 &= 600 + \frac{1}{6}(H - 600 - x_1) = \\ &= \frac{H}{6} + \frac{5}{6} \cdot 300 + \frac{5}{6} \cdot 300 - \frac{1}{6} x_1 \end{aligned}$$

En este caso, al escribir la parte del segundo hijo de esta forma, podemos compararlo muy fácilmente con la parte del primer hijo. Para que ambos reciban lo mismo se debe cumplir que

$$\frac{5}{6} \cdot 300 - \frac{1}{6} x_1 = 0$$

Y así se obtiene la solución buscada.

Como hemos dicho, en este caso el uso del lenguaje algebraico es meramente circunstancial y todo podría haberse llevado a cabo de forma verbal. Este enfoque se aproxima muy probablemente a la cadena de razonamientos usada por el autor ya que implica únicamente la manipulación de las cantidades involucradas descomponiéndolas de manera adecuada para permitir comparaciones. Además, estas manipulaciones ponen de manifiesto claramente el porqué de las condiciones del problema. Para que el procedimiento funcione es crucial que cada hijo reciba sucesivamente 300 ducados más que el anterior.

Terminamos la lectura del problema comparando ambas soluciones.

- El uso del lenguaje algebraico en la solución moderna permite escribir de forma clara la parte x_k de cada uno de los hijos. Sin embargo, solo son necesarias las partes de los dos primeros para resolver el problema. En este sentido un uso excesivo y acrítico del álgebra puede ocultar este hecho y complicar la resolución del problema innecesariamente. También surge la dificultad del excesivo número de incógnitas (por tanto de símbolos) que se deben utilizar, junto con el hecho de que se desconozca el número de hijos.
- En la posible solución del autor surge de forma muy natural la comparación entre los dos primeros hijos, lo que elimina la necesidad de usar una de las cantidades desconocidas del problema. Sin embargo, es necesaria una manipulación *ad hoc* y nada evidente de las cantidades implicadas. De hecho esta necesidad ilustra que el problema está planteado a partir de la solución. En todo caso, este tipo de manipulaciones son interesantes por sus similitudes con el tipo de transformaciones que se realizan al resolver ecuaciones y obliga a un manejo significativo de los significados de las operaciones.

A modo de conclusión

En este breve trabajo hemos presentado dos ejemplos de cómo leer un problema antiguo. Ambos problemas, sobre todo el primero, pueden resolverse con cierta facilidad utilizando técnicas algebraicas, sin embargo, en ninguno de los dos casos el autor hizo uso de dichas técnicas para su resolución. Es más, en ambos casos la solución dada por el autor se limita a enumerar las operaciones concretas que se deben realizar con los datos concretos del problema para obtener la solución.

La necesidad de considerar detenidamente los problemas estudiados y de buscar los argumentos subyacentes a las soluciones meramente descriptivas que presentaban los autores supone un ejercicio interesante para un docente, ya sea en formación o en ejercicio. Obliga, por ejemplo, a

considerar distintos niveles de razonamiento aritmético o algebraico para encontrar soluciones adecuadas desde un punto de vista histórico. También implica la comparación de distintos métodos de resolución, valorando ventajas e inconvenientes de cada uno de ellos.

En algunas ocasiones las soluciones originales, pese a tratarse de simples *recetas* son susceptibles de ser generalizadas para ser utilizadas en situaciones más generales. De hecho, algunos investigadores sostienen que ese era uno de los objetivos de los autores al plantear ese tipo de soluciones. De hecho, supone un ejercicio interesante, que podría completar el análisis realizado, plantear versiones generales no solo de los enunciados de los problemas, sino también de los métodos de resolución presentados.

En cualquier caso, pensamos que este tipo de trabajo con textos históricos es interesante para el profesorado y animamos a los lectores a que aborden este tipo de lecturas.

Referencias bibliográficas

- AUREL, M. (1552), *Libro primero, de Arithmetica Algebraica*, Ioan de Mey, Valencia.
- CORTÉS, J. (1591), *Tratado del computo por la mano*, Herederos de Joan Navarro, Valencia.
- (1594), *Compendio de reglas breves*, Herederos de Joan Navarro, Valencia.
- (1596), *Lunario nuevo, perpetuo y general, y pronóstico de los tiempos universal*, Herederos de Joan Navarro, Valencia.
- (1599), *Fisonomía natural y varios secretos de naturaleza*, Juan Crisostomo Garriz, Valencia.
- (1604), *Arithmetica practica*, Juan Crisostomo Garriz, Valencia.
- (1613), *Libro y tratado de los animales terrestres y volátiles*, Juan Crisostomo Garriz, Valencia.
- JAHNKE, H. N., A. ARCAVI, E. BARBIN, O. BEKKEN, F. FURINGHETTI, A. EL IDRISI, C. M. SILVA DA SILVA y CH. WEEKS (2000), «The use of original sources in the mathematics classroom», *History in mathematics education: the ICMI study*, 291-328, Kluwer, Dordrecht.
- LEÓN, F. J., y M. V. SANZ (1994), *Estética y teoría de la arquitectura en los tratados españoles del siglo XVIII*; CSIC, Madrid.

- LUPIÁÑEZ, J. L. (2000), «Reflexiones didácticas sobre la historia de la matemática», *SUMA*, n.º 40, 59-63.
- MEAVILLA, V., y A. M. OLLER (2015), «Problemas de relojes. Ejemplos históricos y consideraciones didácticas», *Boletim de Educaçao Matemática*, v. 29, n.º 51, 110-122.
- PICATOSTE, F. (1891), *Apuntes para una biblioteca científica española del siglo XVI*, Imprenta y fundición de Manuel Tello, Madrid.
- PUIG, A. (1672), *Arithmetica especulativa y practica y arte de algebra*, Antonio Lacavalleria, Barcelona.

- RODRÍGUEZ VIDAL, R. (1980), «Notas para una nómina de matemáticos españoles del siglo XVII», *El científico español ante su historia: la ciencia en España entre 1750-1850: I Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias*, 365-369, SEHCYT, Madrid.
- SALAVERT I FABIANI, V. (1979), «L'aritmética practica de Geronymo Cortes i la vida mercantil al país Valencia a les darreries del segle XVI», *Estudis. Revista de història moderna*, 8, 105-124.

ANTONIO M. OLLER MARCÉN
Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza
<oller@unizar.es>