

Material manipulativo vs GeoGebra en el estudio de semejanza y simetría

M.^a MACARENA FARIÑA
EDITH PADRÓN
M.^a JOSÉ GUTIÉRREZ
CRISTINA VAQUERO

El siguiente proyecto investiga los beneficios de usar materiales manipulativos y GeoGebra en la enseñanza y aprendizaje de los conceptos de semejanza y simetría en la Educación Secundaria. Para ello, se diseñó un material de trabajo en el cual se estudian estos conceptos a través del uso de pantógrafos y caleidoscopios de forma manipulativa y con GeoGebra. Tras llevar al aula dicho material, comprobamos su eficacia y reelaboramos este material para que pueda ser usado por cualquier docente.

Palabras clave: Innovación didáctica, Material manipulativo, GeoGebra, Geometría, Semejanza y simetría.

Manipulative Material vs GeoGebra in the study of similarity and symmetry

The following project investigates the benefits of using manipulative materials and GeoGebra in the teaching and learning of concepts of similarity and symmetry in Secondary Education. In order to do this, we have designed a working material in which these concepts are studied, using pantographs and kaleidoscopes in a manipulative way and with GeoGebra. After taking this material to the class, we confirmed its utility and we reworded this material to be able to being used by any teacher.

Keywords: Didactic Innovation, Manipulative Material, GeoGebra, Geometry, Similarity and symmetry.

Presentamos a continuación un proyecto de investigación enmarcado dentro de la realización del Trabajo de Fin del Máster en Formación del Profesorado de ESO, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas de la Universidad de La Laguna (Fariña, 2016).

En dicho proyecto nos proponemos confrontar el uso de un mismo material, el pantógrafo y el caleidoscopio, a través de dos recursos diferentes: material manipulativo y GeoGebra.

A continuación presentamos el marco teórico en el que desarrollamos este proyecto, especificamos los objetivos planteados y la metodología llevada a cabo, explicamos los materiales elaborados a priori y cómo fue su desarrollo en el aula. Terminamos exponiendo nuestras conclusiones y presentando un material elaborado tras la experiencia de aula que esperamos sirva de ayuda para el profesorado de 3.º de ESO de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas.

Marco teórico

Desde la época de los griegos era conocida la importancia de la geometría en la formación académica de los individuos. Basta recordar la fa-

mosa frase que figuraba en la entrada de la Academia de Platón: «Ἀγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσὶτω» («Aquí no entra nadie que no sepa geometría»). No obstante, en el actual sistema de enseñanza español se ha relegado la geometría a un segundo plano. El alumnado la concibe en muchas ocasiones como un conjunto de fórmulas para calcular perímetros, áreas, volúmenes..., y las ideas menos algebraicas, que implican un razonamiento visual, pasan desapercibidas (Barrantes y Blanco, 2004, 2005). De esta manera, el alumnado suele asociar la geometría con la memoria y no con la motivación y la creatividad.

Por ello, parece necesario usar otros tipos de recursos al tradicional lápiz y papel que atraiga al alumnado al mundo de la geometría. En este sentido, contamos con los *Software de Geometría Dinámica* (SGD), de gran utilidad para estudiar la geometría de manera dinámica en contraposición al estudio estático que se ha dado tradicionalmente. Entre ellos podemos destacar el software libre GeoGebra, de interfaz sencilla permite al alumnado aprender matemáticas de manera amena usando un recurso cercano a él como son los ordenadores (Argudo Ortiz, 2013). Una de las ventajas fundamentales de este tipo de software es que nos permite modificar algunos parámetros y el alumnado puede visualizar los resultados matemáticos invariantes frente a los valores de estos parámetros.

También es posible recurrir a recursos más tradicionales como el material manipulativo. Sin embargo, muy pocas veces se usa con verdadero sentido didáctico sino más bien como una manualidad, o al menos eso suele pensar el alumnado (Barrantes y Blanco 2004, 2005). Cuando este recurso se usa adecuadamente como material didáctico ha demostrado tener buenos resultados en el aprendizaje del alumnado desde la Educación Primaria (Martín Abad, 2012).

En este trabajo de investigación hemos confrontado el uso de materiales manipulativos y el software GeoGebra en el estudio de los conceptos de semejanza y simetría del currículo LOMCE de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas (SSAA) en 3.º de ESO. Para ello, hemos recurrido en ambos formatos al uso de pantógrafos y caleidoscopios.

En este sentido, hay que destacar algunas experiencias previas usando estas herramientas. La primera experiencia la realizaron Vargas y Vargas (2011) con 25 estudiantes de entre 15 y 17 años de un colegio de la ciudad de Bogotá y consistió en copiar una figura utilizando un pantógrafo, describir el funcionamiento de esta máquina y descubrir que la figura inicial y la resultante se encontraban en escala. Con esta actividad quería evaluarse la argumentación del alumnado y se descubrió que sus primeras argumentaciones estaban basadas en la visualización y comparación de las figuras obtenidas. A continuación, el alumnado realizó acciones como medir o fijarse en el movimiento de la máquina para determinar la escala. Finalmente, desarrolló argumentaciones relacionadas con la estructura de la máquina, aunque estas últimas argumentaciones solo fueron posibles en la discusión final gracias a las sugerencias del docente al relacionar la estructura del pantógrafo con los triángulos semejantes.

La segunda experiencia la realizó Hoyos (2006) con estudiantes de entre 14 y 15 años de México y se estructuró en tres fases: en la primera se presentó el programa Cabri-II y se trabajó con algunas de sus herramientas la homotecia, la simetría, la reflexión y la traslación; en la segunda fase se trabajó con máquinas matemáticas como el pantógrafo la semejanza y la simetría; la última fase abordó la resolución de problemas. Según Hoyos (2006) es probable que el software y los pantógrafos satisficieran funciones complementarias en el desarrollo del aprendizaje y la comprensión de las propiedades de las transformaciones geométricas. No obstante, la percepción del alumnado de estos recursos como herramientas diferentes no permite confrontarlas adecuadamente.

En relación con el estudio de la simetría a través del caleidoscopio, Martínez (2008) propone una actividad para Bachillerato (que puede ser adaptada a la ESO) consistente en estudiar los 17 tipos de mosaicos de una manera sencilla. A partir de este estudio, se obtendrían 4 tipos de mosaicos especiales con los que se podría construir un caleidoscopio manipulativo. Martínez (2008) no concreta si llevó al aula dicho material ni cuáles fueron sus resultados.

Objetivos y metodología

El objetivo general de este trabajo de investigación es comparar el uso de materiales manipulativos y las TICs en la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Para ello, nos hemos propuesto los siguientes objetivos:

- Preparar un material didáctico que permita al profesorado y alumnado de 3.º ESO de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas (LOMCE) afrontar la enseñanza y aprendizaje de los conceptos curriculares de semejanza y simetría. Dicho material didáctico se desarrolla en torno al uso del pantógrafo y el caleidoscopio, tanto en su versión manipulativa como en su desarrollo en GeoGebra.
- Evaluar la eficacia del uso de materiales manipulativos como el pantógrafo y el caleidoscopio en el estudio de la semejanza y la simetría.
- Evaluar la eficacia del uso de GeoGebra a través del desarrollo de pantógrafos y caleidoscopios en el estudio de la semejanza y la simetría.
- Comparar la eficacia del uso de materiales manipulativos y GeoGebra.

En cuanto a la metodología elegida para llevar al aula el material elaborado y evaluar los objetivos establecidos, se ha optado por desarrollar una *Indagación Científica* (ICIE), caracterizada por «aprender Ciencias haciendo Ciencias».

Se ha intentado llevar una investigación guiada con el alumnado en la que, partiendo del uso del pantógrafo y el caleidoscopio manipulativos, ha establecido diferentes conjeturas e hipótesis que ha podido comprobar o refutar al implementar este mismo material en GeoGebra. De esta forma, el alumnado ha podido llegar por sí mismo a las definiciones de las transformaciones estudiadas y sus propiedades.

Para realizar esta indagación científica optamos por un trabajo cooperativo del alumnado puesto que los estudiantes que trabajan juntos se implican más activamente en el proceso de aprendizaje. En otras palabras, las técnicas de aprendizaje cooperativo permiten a los estudian-

tes actuar sobre su propio proceso de aprendizaje, implicándose más con la materia de estudios y con sus compañeros (Domingo, 2008). Por ello, decidimos trabajar con grupos de tres miembros a los que se les asignó diferentes roles en las distintas actividades que desarrollamos. Elegimos trabajar con grupos de tres miembros por la facilidad para distribuir el trabajo. Además, se buscó que los grupos estuvieran equilibrados y sus miembros poseyeran diferentes aptitudes para las matemáticas.

También es importante destacar lo provechoso que resulta para una indagación científica que surjan debates supervisados por el docente, tanto en los pequeños grupos como en el gran grupo.

Materiales

Como decíamos, uno de los objetivos de este trabajo de investigación es la elaboración de un material didáctico que ayude al profesorado y al alumnado de 3.º de ESO de SSAA en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los conceptos de semejanza y simetría. Dicho material consta de dos partes: una *Guía del profesorado*, que sirve de ayuda para el docente que implemente en el aula el material de trabajo, y las *Fichas del alumnado*, que recogen las preguntas que guiarán al alumnado en su indagación científica.

La guía del profesorado se estructura en cuatro epígrafes: el primero es una introducción donde se exponen los objetivos, la justificación del proyecto, la metodología, los contenidos y la evaluación del mismo; el segundo y el tercero recogen cómo se estructuran las sesiones destinadas al trabajo con pantógrafos y caleidoscopios de forma manipulativa y con ayuda de GeoGebra; el último epígrafe recoge cómo será la evaluación del alumnado.

Los epígrafes 2 y 3 de la guía del profesorado detallan cuáles serán las actividades que deberá ir realizando el alumnado durante las cuatro sesiones para las que fue diseñado el material así como la actuación del docente que lleve al aula el material. También recoge una serie de materiales que se elaboraron para este proyecto: un

pantógrafo construido en GeoGebra para manipulación del alumnado, unos vídeos tutoriales para el docente sobre las sesiones de GeoGebra, la base para construir un caleidoscopio manipulativo y un mosaico sin colorear que el alumnado usará en el estudio con el caleidoscopio.

Es importante indicar que antes de comenzar la primera sesión de trabajo, el alumnado debe elaborar, con ayuda del profesorado, un pantógrafo manipulativo usando varillas de madera o un material similar. También será el alumnado el encargado de diseñar en GeoGebra un caleidoscopio como una de las actividades finales de su cuarta sesión de trabajo.

El último epígrafe de evaluación consta de un *Kahoot!* con dieciocho preguntas de las cuales doce están destinadas a evaluar la adquisición de conocimientos del alumnado durante las cuatro sesiones de trabajo. Las otras seis fueron incluidas para conocer su opinión sobre el proyecto.

Las cuatro fichas del alumnado recogen las preguntas que el alumnado debe ir haciéndose y respondiendo para avanzar en su investigación científica. Además, las fichas correspondientes a las sesiones de GeoGebra cuentan con indicaciones que ayuden en la realización de las actividades previstas con este software.

Hay que destacar que estos son los materiales que se realizaron en un principio. Tras la experiencia de aula, que se detalla a continuación, se modificaron dichos materiales atendiendo a los resultados obtenidos en nuestra investigación con la intención de diseñar un marco de trabajo que pudiera aprovechar cualquier docente.

Experiencia de aula

El material antes descrito se llevó al aula en dos grupos de 20 y 15 estudiantes de 3.º de ESO de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas en el IES Sabino Berthelot (Tenerife). De esta manera, hemos podido hacer algunas correcciones a lo largo de la experiencia al plan de trabajo inicial.

El IES Sabino Berthelot se halla situado en el municipio de El Sauzal, en el pueblo de me-

dianías de Ravelo. Es un municipio eminentemente rural, y constituye una de las áreas más deprimidas cultural y económicamente de la isla. Se trata de un centro público donde se imparte ESO, Bachillerato, un Ciclo Formativo de Grado Medio un programa de Cualificación Profesional Inicial y un Aula Enclave.

El proyecto se distribuyó en cuatro sesiones de 55 minutos más una sesión de 20 minutos. Previo a estas sesiones se desarrollaron algunas actividades fundamentales: el alumnado elaboró junto a sus docentes de matemáticas unos pantógrafos manipulativos usando varillas de madera (figura 1), se trabajó el teorema de Tales con el alumnado y se crearon grupos de trabajo heterogéneos.

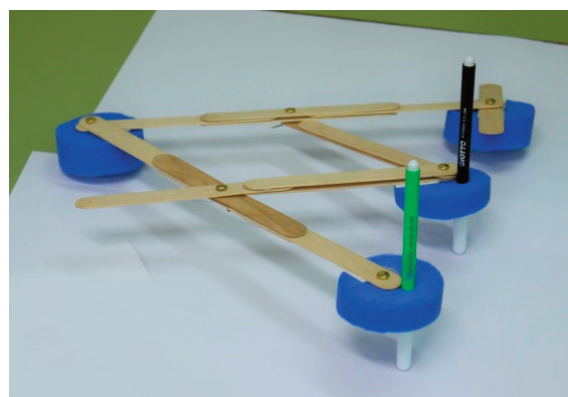


Figura 1. Pantógrafo elaborado por el alumnado

A continuación se comenta cómo se llevaron a cabo las cinco sesiones de trabajo y cómo fueron los resultados que se obtuvieron.

1.ª Sesión

La primera sesión estaba destinada a conocer el funcionamiento del pantógrafo y establecer hipótesis sobre las propiedades de las figuras que este material creaba con la intención de descubrir cuándo dos figuras son semejantes y por qué. Se esperaba que el alumnado conjeturara que el pantógrafo creaba figuras paralelas de lados proporcionales y ángulos iguales. Se comenzó probando el pantógrafo para reproducir cualquier tipo de figura y, a continuación, se centró en el uso de figuras geométricas simples como el triángulo.

El alumnado debía dibujar un triángulo con el pantógrafo (figura 2) y estudiar la relación entre los lados y ángulos del triángulo original y el que dibuja el pantógrafo. Se pretendía que el alumnado descubriera y entendiera la noción de figuras semejantes y razón de semejanza. Más tarde, debía encontrar en la construcción del pantógrafo una relación entre las varillas que produjera dicha razón

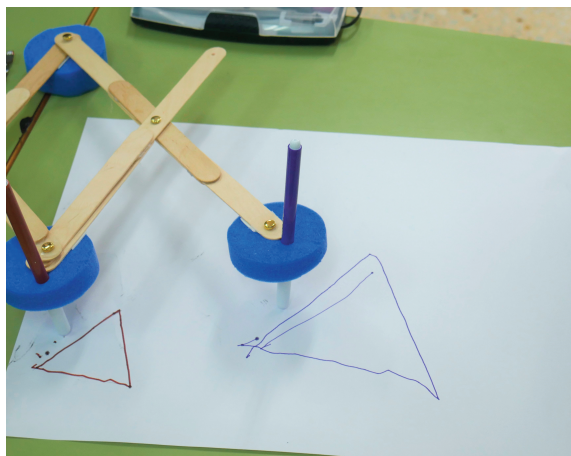


Figura 2. Trabajo del alumnado con el pantógrafo

de semejanza. Para ello, es conveniente disponer de pantógrafos con diferentes razones de semejanza para poder detectar mejor qué varillas son las que determinan la razón de semejanza.

Para terminar la sesión, nos propusimos entender mejor el funcionamiento del pantógrafo. Para ello es necesario usar el teorema de Tales aplicándolo a la estructura de la máquina (figura 3). Es importante que el docente ponga especial énfasis en esta parte de la sesión ya que la experiencia en el aula nos ha mostrado que es una de las actividades más difíciles de comprender.

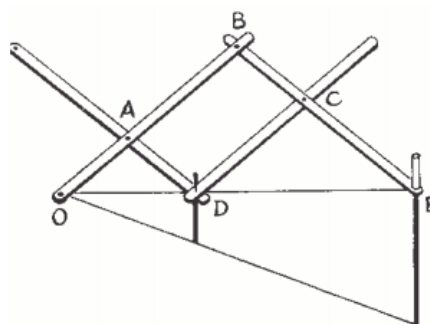


Figura 3. Aplicación del teorema de Tales al pantógrafo

	Grupo A				Grupo B			
	Respuesta y argumentos correctos	Respuesta correcta pero mal argumentada	Respuesta incorrecta	Respuesta en blanco	Respuesta y argumentos correctos	Respuesta correcta pero mal argumentada	Respuesta incorrecta	Respuesta en blanco
1. Una vez que has dibujado con el pantógrafo la imagen que has elegido, ¿puedes explicar qué hace el pantógrafo?	100%	–	–	–	100%	–	–	–
5. ¿Cuál es la relación entre las longitudes de los lados de ambos triángulos? ¿Cuál es la relación entre los ángulos de ambos triángulos?	86%	14%	–	–	100%	–	–	–
Dibuja un triángulo cualquiera con ayuda de la regla. Usa el pantógrafo para reproducirlo.	43%	57%	–	–	80%	20%	–	–
6. ¿Cómo son ambos triángulos? ¿Por qué?								
9. ¿Por qué funciona el pantógrafo así?								
i. Traza una recta que una los puntos O, D y E. Recuerda que estos tres puntos siempre están alineados.	29%	14%	14%	43%	–	–	100%	–
ii. Traza una recta perpendicular a ésta por D. ¿Cómo es la recta que traza E?								
9. iii. ¿Cómo están los puntos del otro extremo de las rectas trazadas por D y E? ¿Podemos trazar una línea que los una?	–	29%	57%	14%	–	–	100%	–
9. iv. Ayudándote de un dibujo explica cómo aplicas el teorema de Tales en la construcción que acabas de hacer con el pantógrafo.	–	14%	29%	57%	–	20%	60%	20%
9. v. Explica de qué forma aparece el teorema de Tales en el pantógrafo y relaciónalo con el funcionamiento del mismo.	14%	14%	43%	29%	–	80%	20%	–

Tabla 1. Resultados de la ficha del alumnado del pantógrafo

En la tabla 1 se encuentran los resultados de las fichas del alumnado de ambos grupos a aquellas preguntas en las que se pedía un razonamiento o justificación y no solo completar información o realizar medidas. Las respuestas se recogieron por grupos de trabajo del alumnado, siete en el grupo A y cinco en el B.

Como se aprecia en la tabla, el grupo A tuvo un mayor grado de éxito en las respuestas a las preguntas de esta primera ficha. Hay que destacar del alumnado que en el aula parecía comprender la investigación que se estaba llevando a cabo aunque sus respuestas escritas eran poco concretas, posiblemente por su falta de costumbre de redactar en matemáticas las justificaciones o argumentos de sus respuestas.

2.ª Sesión

La segunda sesión de trabajo estaba destinada a comprobar o refutar las hipótesis que el alumnado había elaborado en la sesión anterior sobre la construcción de figuras semejantes y su razón de semejanza, ayudándose de GeoGebra. Se proporcionó un fichero en GeoGebra con el diseño de un pantógrafo en el que se podían variar las longitudes de las varillas, estableciendo así diferentes razones de semejanza en contraposición a la herramienta manipulativa.

Lo primero que hizo el alumnado fue investigar cómo funcionaba el pantógrafo y cómo podía variar la razón de semejanza en función de las longitudes de las varillas. A continuación, se realizó una actividad guiada para comprobar que el pantógrafo crea figuras paralelas, de lados proporcionales y ángulos iguales. El alumnado demostró ciertas dificultades al trabajar con este software seguramente debido a su falta de práctica con el mismo. Se había propuesto otras actividades para el alumnado como trabajar con algunas herramientas en GeoGebra la traslación, la rotación y la homotecia, pero no dio tiempo. También se pretendía grabar un vídeo usando el pantógrafo en GeoGebra para demostrar las hipótesis del día anterior, pero esta actividad solo se desarrolló con el grupo B tras hacer pequeñas modificaciones en el desarrollo de la sesión al comprobar con el grupo A que se precisaba de más tiempo.

El ejercicio que debía hacer el alumnado consistía en dibujar un triángulo que reprodujese con el pantógrafo diseñado en GeoGebra, comprobar que sus ángulos eran iguales y sus lados eran paralelos y proporcionales según la razón de semejanza elegida. A continuación se recogen los resultados que se obtuvieron de la grabación del vídeo por los quince estudiantes del grupo B (tabla 2).

Grupo B	% de vídeos
Realiza correctamente el ejercicio (corrige los errores que comete)	53%
Comete errores que no corrige al realizar el ejercicio	7%
No completa el ejercicio	27%
No realiza correctamente el ejercicio	13%

Tabla 2. Resultados del vídeo en GeoGebra del grupo B

Como se aprecia en la tabla, aproximadamente la mitad del alumnado realizó correctamente la actividad. Además, el alumnado de este grupo disfrutó más del trabajo de la sesión con esta actividad de grabación que el otro grupo, debido seguramente a la novedad de grabar un vídeo con el ordenador en la clase de matemáticas.

3.ª Sesión

La tercera sesión estaba destinada a construir un caleidoscopio y trabajar con él el concepto de simetría. Se proporcionó al alumnado el material necesario para construir un caleidoscopio triangular (cartulina y papel espejo) y, previamente, se le había entregado un dibujo en blanco de un mosaico geométrico para que lo coloreara y poder utilizarlo en esta sesión.

Cada estudiante construyó su caleidoscopio y a partir de él se pudo definir el concepto de figuras simétricas y de eje de simetría. El alumnado hizo hipótesis sobre las figuras que devolvía el caleidoscopio y si serían o no simétricas. Para comprobar dichas hipótesis, los estudiantes tomaron varias fotografías con sus móviles que usarían en la siguiente sesión de GeoGebra.



Figura 4. Uso del caleidoscopio y el mosaico

También se pudo investigar sobre una cualidad particular de nuestro caleidoscopio: cuando un eje de simetría del mosaico coincide con un eje de simetría de la base del caleidoscopio (una altura del triángulo equilátero), dicho eje se reproduce en las imágenes que nos devolvía el caleidoscopio como un nuevo eje de simetría.

Además trabajamos el concepto físico de reflexión de la luz para poder explicar el funcionamiento del caleidoscopio.

En la tabla 3 se recogen los resultados de las fichas del alumnado de ambos grupos, incluyendo una pregunta final que se realizó en la sesión si-

guiente. Las respuestas se recogieron de manera individual, veinte en el grupo A y quince en el B.

Como se aprecia en la tabla, la mayoría del alumnado respondió correctamente a las preguntas que se le planteaban aunque no siempre argumentó correctamente. De nuevo creemos que los resultados se deben más a una falta de costumbre en redactar sus justificaciones que a una falta de comprensión del resultado.

4.ª Sesión

Esta sesión estaba dedicada a trabajar la simetría con el alumnado en GeoGebra. Se comenzó comprobando con sus fotografías del día anterior que el caleidoscopio nos devolvía figuras simétricas respecto de los lados de la base triangular del caleidoscopio. También se hizo notar que las imágenes fotografiadas no eran exactamente simétricas debido a imperfecciones en la construcción del caleidoscopio y una baja calidad del papel espejo usado en su construcción. Este hecho no se considera un problema sino una oportunidad para que el alumnado aprenda a manejar los errores que se derivan de la imperfección de los mecanismos con los que muchas veces se debe trabajar.

	Grupo A				Grupo B			
	Respuesta y argumentos correctos	Respuesta correcta pero mal argumentada	Respuesta incorrecta	Respuesta en blanco	Respuesta y argumentos correctos	Respuesta correcta pero mal argumentada	Respuesta incorrecta	Respuesta en blanco
1. ¿Qué cuerpo geométrico define nuestro caleidoscopio?	66%	17%	17%	–	–	100%	–	–
2. Cuando miramos a través del caleidoscopio, ¿qué función tienen los lados del triángulo? ¿Con qué concepto matemático podemos relacionarlo?	50%	44%	6%	–	27%	55%	9%	9%
4. Decide con tus compañeros de grupo cuáles son los ejes de simetría del mosaico y trázalos. ¿Cómo varía el reflejo del eje de ese mosaico según cambiamos la posición del caleidoscopio? ¿Qué ocurre si coincide el eje del mosaico con una de las alturas del triángulo de la base del caleidoscopio?	55%	28%	17%	–	64%	13%	9%	9%
5. Explica con tus propias palabras cómo funciona el caleidoscopio usando el concepto de reflexión de la luz.	–	72%	22%	6%	–	73%	27%	–
Si dos figuras son simétricas, ¿también serán semejantes? ¿Por qué? Si dos figuras son semejantes, ¿también serán simétricas? ¿Por qué?	25%	50%	–	25%	60%	33%	–	7%

Tabla 3. Resultados de la ficha del alumnado del caleidoscopio

A continuación, el grupo B estudió el hecho de que las alturas de la base triangular de nuestro caleidoscopio se reproducían en todas las imágenes como nuevos ejes de simetría cuando coincidían con un eje de simetría del mosaico original. Los resultados no fueron muy buenos ya que no tenían buenas fotografías y el alumnado no parecía muy motivado. Por ello, en el grupo A se optó por suprimir esta parte del trabajo y dar una pequeña explicación para tener más tiempo y permitir al alumnado crear un caleidoscopio en GeoGebra. Esta actividad motivó mucho más al alumnado puesto que ayudaba a desarrollar su creatividad y ayudó al profesorado a comprobar que el alumnado había entendido el concepto de ejes de simetría.

Finalizamos la sesión cuestionando al alumnado sobre si dos figuras son semejantes también serán simétricas y viceversa, o no. La intención de esta reflexión era comprobar que el alumnado había entendido los conceptos de semejanza y simetría haciendo una comparativa entre ellos. En la tabla 3 se recogen los resultados de estas preguntas. Como se puede ver, la mayoría del alumnado era capaz de contestar correctamente a las preguntas y se explicó bastante bien de manera verbal durante la sesión, pero a la hora de argumentar sus respuestas tenía dificultades de expresión escrita.

5.ª Sesión

La última sesión estaba dedicada a realizar un cuestionario *Kahoot!* que nos permitiera saber si el alumnado había entendido los conceptos de semejanza y simetría que había trabajado en las sesiones anteriores a la vez que valoraba la experiencia de manera que nos posibilitara hacer cambios y mejoras en un futuro.

En general, los resultados de las contestaciones de ambos grupos a las preguntas relacionadas con los conceptos de semejanza y simetría fueron bastante buenos. En cuanto a su valoración de la experiencia, la mayoría la consideró positiva y educativa, con ciertas discrepancias entre sus preferencias para trabajar con material manipulativo o GeoGebra.

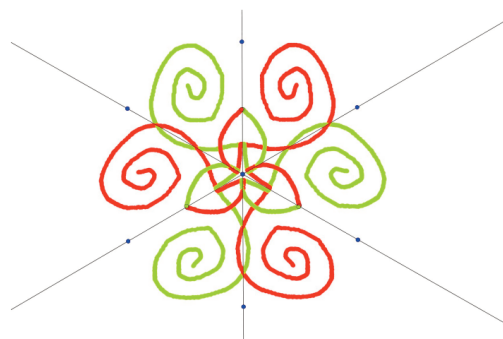


Figura 5. Caleidoscopio en GeoGebra de uno de los estudiantes

Conclusiones

Este proyecto de investigación se proponía elaborar un material didáctico que permitiera al profesorado y alumnado de 3.º ESO de las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas (LOMCE) afrontar la enseñanza y aprendizaje de los conceptos curriculares de semejanza y simetría. Creemos que el material creado satisface esta demanda dado que el alumnado dispone de una idea más clara de estos conceptos porque ha manipulado él mismo figuras semejantes y simétricas.

No obstante, consideramos que el material aquí descrito admitía algunas modificaciones para su mejora. Estas ideas de mejora se concretan en el material de trabajo elaborado a posteriori: Guía del profesorado y Fichas del alumnado. Este material reelaborado proporciona un marco de enseñanza y aprendizaje de los conceptos de semejanza y simetría aprovechable por cualquier docente de 3.º ESO de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas (Fariña, 2016). En los siguientes enlaces se puede consultar dichos materiales:

Guía del profesorado: <https://goo.gl/C3zyqH>

Fichas del alumnado: <https://goo.gl/nchXnu>

Este proyecto también se proponía evaluar la eficacia del uso de materiales manipulativos (pantógrafo y caleidoscopio) y GeoGebra en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los conceptos de semejanza y simetría. En este

sentido, podemos decir que hemos recogido bastante información a su favor. Tal y como afirman las docentes de ambos grupos, «al trabajar de forma manipulativa estos conceptos, el alumnado está más predispuesto a entender, lo que es un avance con respecto a lo que suele ocurrir. Además, sus resultados académicos han mejorado».

También se debe tener en cuenta que todo el alumnado opinaba que la experiencia había sido bastante buena y que había sido de gran ayuda para entender los conceptos matemáticos de semejanza y simetría. Por lo tanto, podemos afirmar que llevar al aula material manipulativo y GeoGebra conjuntamente es de gran eficacia en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Sin embargo, es más complicado comprobar cuál de los recursos es más eficaz. Hemos encontrado diferentes preferencias entre el alumnado en el uso de materiales manipulativos o GeoGebra. Incluso las docentes de ambos grupos discrepan en este aspecto. Opinamos que este hecho se deba seguramente a que ambos materiales se complementan, tal y como afirmaba Hoyos (2006), y sea el uso conjunto de ambos lo que garantice la eficacia de los mismos.

Consideramos que la puesta en práctica del material resultó muy satisfactoria porque las actividades que se proponían con GeoGebra complementaban perfectamente a las que se llevaban a cabo con el material manipulativo. Fue el trabajo con el material manipulativo el que permitió al alumnado conjeturar las propiedades de semejanza y simetría, y fue el uso de GeoGebra lo que permitió corroborar dichas hipótesis y vi-

sualizar que las propiedades no dependían de las restricciones del material.

Referencias bibliográficas

- ARGUDO, M. (2013), *Las Tic y el aprendizaje de la geometría*, Trabajo de Fin de Máster inédito, Universidad CEU Cardenal Herrera, Valencia.
- BARRANTES, M., y L. BLANCO (2004), «Recuerdos, Expectativas y Concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar», *Enseñanza de las Ciencias*, n.º 22(2), 241-250.
- (2005) «Análisis de las concepciones de los profesores en formación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría», *Números*, vol. 62, 33-44.
- DOMINGO, J. (2008), «El aprendizaje cooperativo», *Cuadernos de trabajo social*, vol. 21, 231-246.
- FARIÑA, M. (2016), *Descubriendo el Pantógrafo y el Caleidoscopio*, Trabajo de Fin de Máster, Universidad de La Laguna, Tenerife.
- HOYOS, V. (2006), «Funciones complementarias de los artefactos en el aprendizaje de las transformaciones geométricas en la escuela secundaria», *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 24(1), 31-42.
- MARTÍN, S. (2012), «Una propuesta didáctica con materiales manipulativos para la Educación Primaria», *Suma*, n.º 69, 21-29.
- MARTÍNEZ, A. J. (2008), «Mosaicos. Construcción y Matemáticas en el caleidoscopio», *Revista digital Innovación y Experiencias Educativas*.
- VARGAS, C. y M. VARGAS (2011), *El pantógrafo como elemento para suscitar procesos de argumentación en el trabajo con escalas*, Universidad Pedagógica Nacional. Recuperado de:
<<http://matematicas.uis.edu.co/com2011/HTML/ARCHIVOS%20MEMORIAS/EDUCACION/MarthaVargas.pdf>>.

M.^a MACARENA FARIÑA
Universidad de La Laguna
<macarena.farcast@gmail.com>

EDITH PADRÓN
Universidad de La Laguna
<mepadron@ull.edu.es>

M.^a JOSÉ GUTIÉRREZ
IES Sabino Berbelot, Ravelo (Tenerife)
<mjosegut@gmail.com>

CRISTINA VAQUERO
IES Sabino Berbelot, Ravelo (Tenerife)
<vaquerorequejocristina@gmail.com>