

Generación de una base de orientación para la resolución de problemas

JOANA VILLALONGA PONS

La resolución de problemas es una actividad compleja de gestionar en el aula. En ella intervienen aspectos vinculados tanto al trato que recibe la resolución de problemas como al que toma la educación en sí misma. La evaluación, en particular la reguladora, y más concretamente el uso de instrumentos que permitan al propio resolutor reflexionar sobre su actividad, emergen como un factor clave en dicha gestión. El estudio que aquí se presenta corresponde a una parte de la investigación más amplia sobre el tema desarrollada por el autor. Concretamente, se estudia la posibilidad y el modo de generar una base de orientación para la resolución de problemas matemáticos para alumnos de entre 11 y 13 años de edad.

Palabras clave: Resolución de problemas, Bases de orientación, Autorregulación, Regulación del aprendizaje, Evaluación.

Progeneration of a problem solving-related orientation basis

Mathematical problem solving is a difficult activity to address in the classroom. Different aspects regarding both the problem solving meaning as well as the education understanding influence this practice. Assessment, the regulation of the learning in particular, and consequently the use of devices that allow the students to reflect on their own learning activity are seen as a key aspect for this purpose. The present paper describes part of a bigger study of the author regarding this topic. Specifically, it analyses the possibility and the way to develop a problem solving-related orientation basis for 11-13-year-old students.

Keywords: Problem solving, Orientation basis, Self-regulation, Learning regulation, Assessment.

La resolución de problemas pone de manifiesto la mayoría de conocimientos y habilidades matemáticas (Departament d'Ensenyament, 2017), convirtiéndose con ello en un aspecto fundamental, tanto de las matemáticas en sí mismas como de la educación matemática. Así ya lo manifestaron Halmos (1980), al situar los problemas como el corazón de las matemáticas, y el NCTM (1980), al concebirlos como el centro de cualquier proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Desde finales de los años 70 se ha trabajado para caracterizar la resolución de problemas, al mismo tiempo que estudiar la gestión de procesos de enseñanza y aprendizaje que permitan a los estudiantes convertirse en mejores resolutores (Ponte, 2007). Sin embargo, la noción de problema matemático ha sido utilizada de múltiples maneras, desde la realización de ejercicios rutinarios hasta el desarrollo de la actividad matemática profesional (Schoenfeld, 1992). Esta variedad junto a cierta falta de reconocimiento al respecto, ha llevado a los educadores de matemáticas a sentirse incómodos con respecto a este concepto (Ponte, 2007).

En el siglo XXI, con las múltiples reformas de los currículos, con enfoques centrados en procesos (NCTM, 2000) como en competencias

(Niss y Højgaard, 2011), la resolución de problemas ha vuelto a emerger con fuerza convirtiéndose en un objetivo importante de la investigación educativa, en la que interesan proyectos de investigación de diseño a largo plazo que trabajan con grupos de docentes en activo para establecer pautas prácticas para iniciativas sostenibles de resolución de problemas (Stacey, 2016).

A lo largo de estos años ha habido avances significativos en la comprensión de los aspectos cognitivos, metacognitivos y afectivos que intervienen en la resolución de problemas en matemáticas, como también una considerable investigación sobre la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos en las aulas (De Corte y otros, 2000; Schoenfeld, 2013). Sin embargo, quedan aún más preguntas que respuestas sobre esta compleja actividad, en particular en relación a cuándo y cómo intervenir en las tareas exploratorias que se pueden proponer en el aula (Mason, 2016). ¿Cómo lograr que los alumnos superen situaciones de bloqueo?, ¿cómo conseguir que los alumnos identifiquen sus errores y traten de corregirlos?, ¿cómo alcanzar que los alumnos dejen por escrito las acciones que llevan a cabo?, son algunos de los numerosos aspectos para los que se desearía respuesta, al interesarnos por la gestión de la resolución de problemas, cuando esta es la actividad principal en el aula.

Por otro lado, al percibir la evaluación como una parte sustancial de todo proceso de enseñanza y aprendizaje, y por tanto centrada en la obtención de información tanto sobre aquello que hay que hacer para resolver una determinada tarea de resolución de problemas como con aquello que cada alumno ha hecho al tratar de resolverla, resulta indispensable disponer de instrumentos de evaluación que permitan la consecución de dichos objetivos. Sin embargo, se ha observado que la forma tradicional de evaluación de la resolución de problemas en matemáticas no puede revelar realmente lo que los estudiantes aprenden y conocen, con lo que se hace evidente una clara necesidad de cam-

se ha observado que la forma tradicional de evaluación de la resolución de problemas en matemáticas no puede revelar realmente lo que los estudiantes aprenden y conocen

bios en la evaluación que permitan la valoración de estas competencias más complejas (Rosli, Goldsby y Capraro, 2013).

De acuerdo con ello, el interés por caracterizar la resolución de problemas en el marco competencial actual de la educación, en el que la evaluación toma un papel esencial, requiere la generación y aplicación de instrumentos para la resolución de problemas en las aulas para que los alumnos aprendan a regular su propio aprendizaje. Con ello en la mente, nos preguntamos cómo se puede elaborar un instrumento con finalidad reguladora para ayudar a desarrollar la competencia de resolución de problemas matemáticos de los estudiantes.

Marco conceptual

Resolver un problema y autorregulación

El gran volumen de referencias sobre la resolución de problemas matemáticos pone de manifiesto que la resolución de problemas es una actividad compleja de llevar a cabo en el aula, tanto para estudiantes de cualquier edad (Mason, Burton y Stacey, 1982; Polya, 1945) como para docentes que intentan crear ambientes de trabajo adecuados (De Corte y Verschaffel, 2003; Schoenfeld, 2013).

En cuanto al proceso de resolver un problema, puede entenderse como un comportamiento dirigido a alcanzar objetivos específicos (Schoenfeld, 2007). Se trata de una actividad humana dinámica no necesariamente lineal, que requiere la organización y activación de múltiples habilidades y estrategias (De Corte y otros, 2000; Mason y otros, 1982; Polya, 1945). Conciliar estos aspectos no solo requiere de la posesión de conocimientos (conceptuales matemáticos, de recursos matemáticos o heurísticas de resolución), sino también de cierta competencia autorreguladora al tiempo que sentirse motivado y capacitado para desarrollar las acciones que pueden conllevar

(Schoenfeld, 2013). Esta capacidad de autorregulación, sin perder de vista el objetivo a lograr, así como la influencia de las dimensiones afectivas como las creencias, actitudes y emociones, se sitúan como factores clave en el proceso de resolver un problema de manera satisfactoria (Schoenfeld, 1992; 2013).

Al resolver un problema, el resolutor involucrado pasa por distintos momentos o, como llamaremos, etapas de resolución, como son familiarizarse con el problema, contemplar las ideas con las que ha trabajado anteriormente, inspirarse en el camino a seguir para hallar alguna solución, así como verificar el proceso que finalmente ha llevado al resultado. Así se desprende de las investigaciones de diversos autores, desde sus distintas perspectivas (Polya, 1945; Mason y otros, 1982; Schoenfeld, 1992). En relación a ello, destacan las cuatro fases de Polya (1945), por las que, a su entender, cualquier resolutor debe involucrarse al resolver un problema: *Entender el problema*, *Configurar un plan*, *Ejecutar el plan*, y *Examinar la solución obtenida*, al tiempo que resaltar una lectura profunda del problema (Schoenfeld, 2007). Por su parte, Mason y otros (1982) distinguen entre procesos, fases y estados. Por procesos entienden el hecho de concretar (que asocian a conjeturar) y generalizar (justificar). Estos procesos se desarrollan a través de tres fases, que identifican como abordaje, ataque y revisión. A su vez, cada una de estas fases aparecen de acuerdo con unos estados concretos: de introducirse e involucrarse; reflexionar; persistir y profundizar; y ser escéptico y contemplar.

En cuanto a la actividad que conlleva resolver un problema, como en las bases de cualquier comportamiento competente, se encuentran los conocimientos que uno posee pero también, y junto a ello, cómo uno organiza y accede a dichos conocimientos (Schoenfeld, 2007). Al iniciar el proceso de resolver un problema es necesario prever los posibles caminos a seguir, sus etapas

intermedias así como sus posibles resultados. Esta previsión permite no solo escoger el camino a seguir sino también el orden de las acciones necesarias para aplicarlo (Sanmartí, 2007). Así lo constata el perfil que caracteriza a los resolutores expertos, quienes pasan más tiempo comprendiendo y analizando la situación expuesta en el problema y reflexionan continuamente sobre el estado de resolución, que calculando (De Corte y otros, 2000); comportamientos típicamente ausentes en resolutores de problemas menos eficientes (De Corte y Verschaffel, 2003), quienes muestran inseguridad ante la resolución de un problema, o no terminan los procesos iniciados, en particular por realizar las tareas aplicando diferentes maneras de hacer o de razonar, sin suficiente coherencia ni orden, siguiendo procesos algorítmicos vacíos (Sanmartí, 2007). Estos alumnos, por consiguiente, necesitan reconocer las distintas etapas de resolución en que se encuentran así como aprender a reflexionar sobre sus conocimientos y procesos de pensamiento existentes. Para ello, y más especialmente los resolutores menos eficientes, al intentar

resolver un problema, conviene tomar especial nota de los caminos que no lleven a ninguna parte, presentando cada línea de pensamiento lo más elaborada y completa como sea posible, expresándola con claridad y lógica (Mason y otros, 1982).

Se ha observado que, con apoyo adecuado en la comprensión de cómo funcionan las cosas, los estudiantes pueden convertirse en solucionadores de problemas más eficientes y autorregulados (Schoenfeld, 2013). Esta capacidad reguladora no se adquiere automáticamente, pero emerge con el tiempo (De Corte y Verschaffel, 2003). Por ello, será importante proporcionar a dichos alumnos aquella ayuda que les permita interpretar una tarea, identificar sus sub-objetivos y planificar una estrategia (De Corte y Verschaffel, 2003) para promover que aprendan a evaluar y regular su propio pensamiento (Sanmartí, 2007).

con apoyo adecuado en la comprensión de cómo funcionan las cosas, los estudiantes pueden convertirse en solucionadores de problemas más eficientes y autorregulados

Evaluación: instrumentos que promueven autorregulación

Ante una perspectiva socioconstructivista de la educación, en la que está constituida el currículo catalán actual (Departament d'Ensenyament, 2017), en la que se considera que el conocimiento se construye mediante un proceso en el que las ideas pueden evolucionar gracias a situaciones problemáticas que favorecen la explicitación y el contraste de puntos de vista, la evaluación se convierte en un elemento fundamental de la dinámica de cualquier proceso de aprendizaje (Sanmartí y Jorba, 1995).

Se ha comprobado que los alumnos que tienen éxito en la escuela se caracterizan, entre otras destrezas, por su capacidad para identificar y corregir sus errores. Como no todos los alumnos desarrollan esta destreza por sí mismo, el reto del docente es comprender sus causas, pues solo ayudándoles a reconocerlas no será posible aprenderlos a corregir (Sanmartí, 2007). Para que esta intervención sea adecuada y significativa, tanto para el aprendizaje como la enseñanza, se requiere de un sistema de evaluación que permita analizar el estado del estudiante de acuerdo con las tareas propuestas. Sin embargo, la forma tradicional de evaluar la resolución de problemas, basada principalmente en una evaluación final y, especialmente, calificadora del desempeño de los alumnos por parte de los docentes, no puede realmente revelar lo que los estudiantes aprenden (Rosli y otros, 2013). Es necesaria, entonces, una evaluación que preste atención en la observación y la reflexión de los alumnos, tanto para evaluar su comprensión como para tener en cuenta sus sentimientos y sus creencias acerca de lo que están trabajando (Lester y Kroll, 1991).

Bajo una concepción competencial de la educación, apreciamos que la capacidad de análisis sobre los procesos de resolución junto con una aplicación adecuada de ellos es, en gran parte, la esencia de una educación en la que se pretende que los alumnos adquieran la competencia en resolución de problemas y puedan seguir desarrollándola en ocasiones posteriores de manera autó-

noma. Observamos entonces, que para lograr que los alumnos alcancen los objetivos mencionados, se requiere de un proceso evaluativo doble. Por un lado se requiere de una evaluación de los procesos del propio estudiante, como resolutor. Por otro, al tratarse de un objetivo educativo, es fundamental una evaluación que permita al aprendiz la adquisición de la misma.

En este sentido, se distinguen dos finalidades de la evaluación. Por un lado, una función identificada como calificadora, cuyo objetivo recae principalmente en el establecimiento de grados de aprendizaje. Por otro, la que pretende actuar como medio para regular los aprendizajes y de ahí que se hable de su función reguladora. Esta función reguladora puede ser canalizada de dos modos: de manera formativa, cuando las decisiones son tomadas fundamentalmente por los docentes, o en modo formadora, cuando las decisiones son tomadas principalmente por el estudiante (Sanmartí, 2007) y, por tanto, vinculada a procesos de autorregulación. En este sentido, surge, de forma natural, la necesidad de una evaluación reguladora de la resolución de problemas (Lester y Kroll, 1991) y, por consiguiente, el establecimiento de instrumentos y de su implementación que permitan desarrollarla de manera consecuente.

Entre las referencias a instrumentos específicos que permiten desarrollar una finalidad reguladora de la evaluación, encontramos las rúbricas de desempeño (Rosli y otros, 2013; Sanmartí, 2010) con carácter formativo, y las bases de orientación (Sanmartí, 2010) con carácter formador. Sin embargo las referencias a estos instrumentos de evaluación para la resolución de problemas en la enseñanza obligatoria son escasas (Rosli y otros, 2013), especialmente en relación a las bases de orientación.

Interesados por los instrumentos que promueven la autorregulación, nos centramos en las bases de orientación. Las bases de orientación, construidas de acuerdo con los elementos esenciales de procesos de autorregulación (Jorba y Sanmartí, 2004) por parte del que aprende, se definen como aquellos instrumen-

Es necesaria, entonces, una evaluación que preste atención en la observación y la reflexión de los alumnos

tos que resumen de manera gráfica y ordenada la acción que se pretende realizar, con la finalidad de promover que los estudiantes anticipen y planifiquen las operaciones que han de llevar a cabo para resolver con éxito distintos tipos de tareas escolares (Sanmartí, 2007).

Metodología

Este artículo aborda una parte de una investigación más amplia sobre el diseño y uso de las bases de orientación (BO) como herramientas autorreguladoras del aprendizaje para la resolución de problemas en matemáticas (Villalonga, 2017).

El estudio se desarrolló principalmente de acuerdo con un proceso de investigación-acción que, mediante aproximaciones sucesivas, permitió, por un lado, la elaboración e implementación de un instrumento con finalidad reguladora y, de manera paralela, la obtención de evidencias de su uso, en un marco cualitativo. En particular, se apostó por el diseño de una BO para la resolución de problemas en alumnos de 6.º de Educación Primaria y 1.º de Educación Secundaria Obligatoria, cuando se espera que los alumnos hayan alcanzado cierta competencia en resolución de problemas matemáticos.

Se llevaron a cabo tres implementaciones con el uso de una BO para la resolución de problemas (ver anexo 2 para un ejemplo de ellas), más una prueba piloto inicial. En todas ellas se analizaron, en particular, las producciones de los alumnos al resolver los problemas matemáticos propuestos. En cada una de las tres implementaciones sucesivas se utilizó una BO concreta, fruto del análisis de la implementación anterior, de acuerdo con las producciones de los alumnos y las observaciones de los propios alumnos y sus docentes. En todos los casos las BO fueron implementadas en grupos-clase de 6.º de Primaria y 1.º de la ESO de distintos centros educativos de Cataluña. Los alumnos participantes fueron invitados a resolver, en días distintos, un conjunto específico de pro-

blemas atípicos en su práctica diaria (ver anexo 1 para un ejemplo de ellos) utilizando la BO diseñada para cada implementación.

La práctica llevada a cabo, novedosa para todos los participantes, se desarrolló en distintos periodos comprendidos entre junio de 2014 y junio de 2016, de acuerdo con la programación de los docentes participantes. Los problemas a trabajar fueron llevados al aula en sesiones distintas, invitando siempre a los alumnos a utilizar la BO para resolver el problema en cuestión. En cada sesión, los alumnos recibían una copia en papel del problema en la que debían de escribir su propia resolución así como una copia de la BO para guiar su actividad. Para garantizar, en la medida de lo posible, que los alumnos entendían el vocabulario, estructura y propósito general de la BO, previamente a la primera ocasión del uso de la BO, el docente en cuestión debía explicar el propósito de la BO a los alumnos y conjuntamente con la clase discutieron y aclararon el significado y el propósito de cada elemento de la BO. En el resto de lecciones comprendidas en el periodo de experimentación, los alumnos no utilizaron la BO ni trabajaron con los problemas propuestos.

Los resultados y reflexiones que se presentan en este artículo son parte de los surgidos al analizar el marco teórico, indispensable para el diseño de los instrumentos a elaborar de acuerdo con los objetivos que deben promover, y el comportamiento y percepciones de los alumnos al resolver los problemas utilizando una BO para reconocer las necesidades y ajustar los objetivos marcados en su uso.

Resultados

Qué entender por problema matemático

De acuerdo con las reflexiones de Mason (2016), entendemos que algo o alguna situación es un problema solo cuando quien pretende resolverlo experimenta un estado conflictivo, asume la tarea de dar sentido a la situación

Las bases de orientación [...] se definen como aquellos instrumentos que resumen de manera gráfica y ordenada la acción que se pretende realizar

y se involucra en alguna actividad creativa con sentido para afrontarlo. Más concretamente, y bajo las influencias de las referencias consultadas, definimos problema matemático como una cuestión desconocida, planteada a través de un conjunto de datos dentro de un contexto, para la que no se dispone de ninguna respuesta inmediata o de ningún proceso matemático rutinario prefijado de resolución, sino que, de manera contraria, invita a la indagación matemática, estimulando la curiosidad y la voluntad de trabajar en ella, promoviendo así una participación activa en el proceso de resolución que a su vez revela algo desconocido hasta el momento. Con ello entra en juego la reflexión, la toma de decisiones, el diseño de estrategias y la evaluación de la tarea desarrollada.

De ello se desprenden dos hechos inmediatos. Por un lado, la necesaria distinción entre problema propiamente dicho, cuando, aún teniendo los conocimientos necesarios, se desconoce cómo resolver la tarea, y un ejercicio, cuando la tarea puede resolverse de manera automática o rutinaria. Por otro lado, que la noción de problema matemático no es absoluta, sino relativa a las capacidades y habilidades de la persona que se enfrenta al problema.

Entendemos que resolver un problema matemático es un proceso propio de quien lo resuelve, creativo y no lineal de indagación matemática que requiere de la activación y la relación de distintos tipos de conocimientos matemáticos (básicos, heurísticos y sobre recursos) para dar respuesta a una cuestión planteada contribuyendo, a su vez, al fomento de otros conocimientos y cuestiones. Este proceso conlleva la activación de distintas acciones que, de acuerdo con su finalidad, permite identificar ciertas etapas por las que cualquier resolutor eficiente pasa. Si bien estas etapas son identificables por las acciones que los resolutores desarrollan y son perceptibles cuando emergen, conviven interrelacionándose hasta el final del proceso, mostrando con ello la naturaleza no lineal y más bien cíclica que caracteriza dicho proceso. En este sentido, identificamos un mínimo de tres etapas por las que cualquier resolutor involucrado pasa al resolver un problema, con las que se puede establecer

un paralelismo entre el proceso de resolver un problema y el discurso de un texto narrativo caracterizado por tener una *introducción*, que en nuestro caso identificamos con *comprender la situación conflictiva*; un *desarrollo*, que equivaldría a *escoger un camino para desenredar la situación* y, por último, un *final*, que se corresponde con *revisar el desarrollo de lo hecho de acuerdo con las condiciones expuestas*. Como no tiene sentido revisar una tarea sin haberla hecho, ni resolver una situación que no hemos intentado entender, estas etapas aparecen de manera paulatina y consecutiva en el tiempo, conviviendo e interrelacionándose hasta el final del proceso que generan, formando un continuo en el tiempo, pues unas no tienen sentido sin las otras. Clarificar, finalmente, que la identificación de las tres etapas se trata de una nomenclatura formal que permite canalizar el camino hacia un objetivo, dar respuesta coherente a las cuestiones formuladas. Atendiendo el hecho que cualquier resolutor implicado en la resolución de un problema debe pasar por ellas y su orden de aparición observado, preferimos referirnos a ellas como los niveles de implicación en las que un resolutor se ve inmerso al resolver un problema. En la tabla 1 se describen estos tres niveles de implicación.

Etapas de resolución	
↓	
Niveles de implicación	Subniveles de implicación
Comprender el problema	<ul style="list-style-type: none"> — Familiarizarse con la situación y condiciones expuestas en el enunciado. — Extraer la información del enunciado y recomponer la necesaria para entender mejor la situación.
Tener un plan de acción	<ul style="list-style-type: none"> — Utilizar la redefinición del enunciado para buscar maneras con las que atacar la situación problemática — Convencer que alguna de las maneras permite llegar a alguna conclusión sobre la situación expuesta.
Validar lo realizado	<ul style="list-style-type: none"> — Interpretar los resultados y con ellos dar una respuesta coherente y consistente. — Evaluar, en el sentido de sintetizar, completar y mejorar, las soluciones encontradas.

Tabla 1. Niveles y subniveles de implicación básicos del proceso de resolver un problema

Qué entender por BO para la resolución de problemas matemáticos

Atendiendo a la definición general de BO por un lado, y por otro, analizado el proceso que conlleva resolver un problema, definimos una base de orientación para la resolución de problemas como la secuencia necesaria de acciones basada en el comportamiento de resolución de problemas de resolutores expertos que, atendiendo las necesidades de los resolutores no expertos para los que se elabora, proporciona, de manera emergente, independencia y autonomía para resolver problemas matemáticos. Se trata entonces de un instrumento adaptativo, que toma formas distintas en función de la edad y de las necesidades de los alumnos, y que se actualiza de acuerdo con sus dificultades y logros.

De acuerdo con el proceso de resolver un problema, una BO para la resolución de problemas debe:

- construirse en base a las etapas mínimas de resolución identificadas, a las que nos referimos como niveles de implicación,
- contener todas aquellas acciones que se desea que los alumnos desarrollen con la práctica de resolver problemas, como descriptores de las etapas,
- reflejar continuidad no lineal pero vinculante entre las etapas en que implicarse y las acciones a realizar, atendiendo que estas etapas se inician de manera sucesiva

pero conviven hasta finalizar la resolución y que las acciones deben describir actos que hacen realizables (operacionalizan) las etapas.

De ello, surge la tabla 2, en la que se presenta la selección de acciones vinculadas a cada una de los niveles y subniveles de implicación, así como sus vínculos, y que identificamos como la base para la creación de cualquier BO para la resolución de problemas.

Reflexiones finales

Resolver un problema matemático se trata de una actividad propia que conlleva un proceso personal, creativo y no lineal, dirigida a objetivos concretos: encontrar respuesta a una cuestión que, al ser una pregunta para la que el resolutor no tiene respuesta o métodos directos que le permitan responder, está caracterizada por momentos de atasco (entendido como bloqueo y error). El desarrollo de esta actividad conlleva ciertos niveles de implicación, requiere decisión y control sobre uno mismo y se ve influenciada por el entorno. En este sentido, la gestión de las actividades de aula influye, de manera directa e indirecta, en la gestión de estas variables.

Observamos cómo la resolución de problemas en un marco competencial de la educación,

Niveles	Implicación		Acciones		
	Subniveles	Desarrollar	Conectar	Comprender	
Comprender el problema	Familiarizarse	identificar, señalar, separar, entender, aclarar, clarificar			
	Organizar	expresar, representar, plantear, introducir, profundizar	jugar, manipular,		
Tener un plan de acción	Buscar	observar, recordar, examinar, combinar, repetir, cambiar, comparar, acercarse, diseñar, apuntar, intentar	hacer pruebas, probar	escribir, anotar, detectar, localizar	
	Convencer	estructurar, argumentar, razonar, detallar, documentar	revisar, repasar,	volver, reiniciar	
Validar lo realizado	Interpretar	comprobar, verificar, refutar, consolidar, completar	analizar, justificar		
	Evaluar	mejorar, simplificar, extender, incorporar, utilizar			

Tabla 2. Descriptores clave para la generación de una BO para la resolución de problemas

en la que la resolución de problemas se concibe como motor para promover el interés y el aprendizaje de las matemáticas, pero también como una competencia fundamental de la matemática, resulta un medio para tres fines, no necesariamente disjuntos pero que requieren de ser reconocidos al llevar problemas al aula para atender bien qué aspectos se quieren trabajar y especialmente evaluar en cada uno. Estos aspectos son:

- Atraer el interés y la implicación matemática de los alumnos.
- Integrar, manipular y descubrir conocimientos matemáticos en los alumnos.
- Aprender a pensar matemáticamente y actuar (lo que también conlleva comunicar) de manera consecuyente.

En particular, e interesados por la gestión del último de los casos identificados, observamos la necesidad de disponer de sistemas de autorregulación que permitan a los alumnos menos eficientes en la resolución de problemas gestionar y tomar decisiones de manera responsable para seguir adelante con sus resoluciones a un problema, como muestran dominar los resolutores eficientes. Sin embargo, es evidente la ausencia de mecanismos de evaluación reguladora en el aprendizaje y enseñanza de la resolución de problemas que permiten desarrollarlo. En particular, se requiere de mecanismos que ayuden a los alumnos a regular sus acciones y con ellos desarrollar sus habilidades necesarias para la resolución de problemas, como interpretar la tarea, identificar sus subobjetivos, planificar una estrategia o evaluar sus desarrollos. En respuesta a ello, el estudio desarrollado muestra la posibilidad de generar instrumentos que contribuyan en este aspecto. De hecho, se muestra el modo de generar una BO para la resolución de problemas de acuerdo con estudios paralelos (Villalonga, 2017) sobre resolución de problemas, y se observa que la generación e implementación adecuada de ellas contribuye de manera positiva en el fin propuesto.

Resolver un problema matemático se trata de una actividad propia que conlleva un proceso personal, creativo y no lineal, dirigida a objetivos concretos

Referencias bibliográficas

- Currículum educació primària* (2017), Servei d'Ordenació Curricular d'Educació Infantil i Primària, Departament d'Ensenyament, Generalitat de Catalunya.
- DE CORTE, E., L. VERSCHAFFEL y P. OP'TEYNDE (2000), «Self-Regulation: A Characteristic and a Goal of Mathematics Education», en M. Boekaerts, P. R. Pintrich y M. Zeinler (eds.), *Handbook of Self-Regulation*, Elsevier Academic Press, 687-726.
- DE CORTE, E., y L. VERSCHAFFEL (2003), «El desarrollo de habilidades de autorregulación en la solución de problemas matemáticos», *Pensamiento Educativo*, n.º 32, 286-305.
- HALMOS, P. (1980), «The Heart of Mathematics», *American Mathematical Monthly*, n.º 87(7), 519-524.
- JORBA, J., y N. SANMARTÍ (2004), «La función pedagógica de la evaluación», en A. Parcerisa, y M. Rovira (eds.), *Evaluación como ayuda al aprendizaje*, Graó, Barcelona, 21-44.
- LESTER, F. K., y D. L. KROLL (1991), «Evaluation: A new vision». *The Mathematics Teacher*, n.º 84(4), 276-284.
- MASON, J. (2016), «When Is a Problem...? «When» Is Actually the Problem!», en P. Felmer, E. Pehkonen, y J. Kilpatrick (eds.), *Posing and solving mathematical problems. Advances and New Perspectives*, Springer, Switzerland, 263-285.
- MASON, J., L. BURTON y K. STACEY (1982), *Thinking Mathematically*. Pearson, Harlow.
- NCTM (1980), *An agenda for action: Directions for school mathematics for the 1980s*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston.
- (2000), *Principles and Standards for School Mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston.
- NISS, M., y T. HØJGAARD (2011), *Competencies and Mathematical Learning*, English edition, IMFUFA, Roskilde University.
- POLYA, G. (1945), *How to solve it*, Princeton University Press, Princeton.
- PONTE, J. P. (2007), «Investigations and explorations in the mathematics classroom», *ZDM Mathematics Education*, n.º 39, 419-430.
- ROSLI, R., D. GOLDSBY y M. M. CAPRARO (2013), «Assessing Students' Mathematical Problem-Solving and Problem-Posing Skills», *Asian Social Science*, n.º 9(16), 54-60.

SANMARTÍ, N., y J. JORBA, (1995), «Autorregulación de los procesos de aprendizaje y construcción de conocimientos», *ALAMBIQUE Didáctica de las Ciencias Experimentales*, n.º 4, 59-77.

SANMARTÍ, N. (2007), *Evaluar para aprender: 10 ideas clave*, Graó, Barcelona.

— (2010), *Avaluar per aprendre. L'avaluació per millorar els aprenentatges de l'alumnat en el marc del currículum per competències*. Direcció General de l'Educació Bàsica i el Batxillerat, Catalunya.

SCHOENFELD, A. H. (1992). «Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics», en D. Grouws. (ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*, MacMillan, Nueva York, 334-370.

— (2007), «What is Mathematical Proficiency and How Can It Be Assessed? Assessing Mathematical Proficiency», *MSRI Publications*, n.º 53, 59-73.

— (2013), «Reflections on problem solving theory and practice», *The Mathematics Enthusiast*, 10(1 y 2), 9-34.

STACEY, K. (2016), «Reaction: Teachers, Problem-Posing and Problem-Solving», en P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (eds.), *Posing and solving mathematical problems. Advances and New Perspectives*, Springer, Switzerland, 387-391.

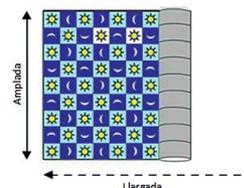
VILLALONGA, J. (2017), *La competencia matemática. Caracterización de actividades de aprendizaje y de evaluación en la resolución de problemas en la enseñanza obligatoria* [Tesis doctoral], UAB. Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals.

Anexo 1. Problema Piloto

La figura 1 presenta el problema utilizado en la prueba piloto del estudio, previa a diseñar e implementar alguna base de orientación para la resolución de problemas y que, por tanto, los alumnos resolvieron sin ser invitados a utilizar ninguna BO.

Problema.

L'Arnau ha comprat una catifa molt gran de 6 m de llarg i de 3,6 m d'ample. La catifa està formada, tal com es pot veure a la figura, de petits quadrats que contenen el dibuix d'un Sol o d'una Lluna.



1. Quan la catifa estigui desplegada del tot, quants quadrats hi haurà en total?
2. De tots aquests quadrats, quants contindran un Sol i quants una Lluna?
3. Explica com ho has fet per saber cada una de les coses que es demanen.
4. Se t'acut alguna altra manera de poder determinar el que es demana en el problema? Si és així, explica-ho.

Figura 1. Problema utilizado en la prueba piloto del estudio

Anexo 2. Ejemplo de BO

Se presenta aquí la BO utilizada en la segunda fase de implementación del estudio, resultado del análisis de la primera fase de implementación.

Nivells d'implicació	Accions
Comprenc el problema	<p>Assenyalo les preguntes que he de respondre i entenc tot allò que se'm demana que faci.</p> <p>Assenyalo les dades i m'asseguro que les entenc. Expresso el problema per entendre'l millor fent un dibuix, esquema, diagrama... (el que em sembli més adequat) i faig proves si m'és necessari.</p>
Per a cada pregunta formulada: Tinc un pla d'acció	<p>Penso alguna estratègia de resolució a partir de la representació i les proves o exemples que he fet, i tracto d'aplicar-la.</p> <p>Trobo les dades i els raonaments i/o algorismes que necessito per aplicar l'estratègia.</p> <p>Aplico l'estratègia i l'escric de manera que s'entengui tot allò que he pensat.</p>
Reviso la meva tasca	<p>Si no me'n surto, detecto on em bloquejo o m'equivoco i aplico una nova estratègia (amb tot el que necessiti).</p> <p>Una vegada resolt,</p> <ul style="list-style-type: none"> — investigo si hi ha altres solucions i les trobo. — Si només n'hi ha una, raono per què no n'hi ha més. — raono si es podria fer d'altres maneres. <p>Rellegeixo què he fet, i m'asseguro que ho explico tot i que responc de manera raonada i que s'entén relacionant-ho, si cal, amb la resta de preguntes i tasques demanades</p>

Tabla 3. BO utilizada en la segunda implementación del estudio