suma+ 88
Secciones
Julio 2018
pp. 67-71

Tareas ricas para trabajar con potencias y raíces

David Barba Uriach
Cecilia Calvo Pesce

Ell@s tienen la palabra

En esta sección dedicada a las matemáticas en primaria, nuestra intención es la de analizar dinámicas de clase centradas en la conversación y la comunicación. Nos interesamos especialmente por actividades ricas que podemos proponer para generar este ambiente de clase y por las preguntas que podemos formular a los alumnos durante la ejecución y discusión de estas actividades para fomentar conversaciones que les permitan construir nuevos conocimientos y los inviten a comunicar sus razonamientos.

En esta entrega de «Ella@s tienen la palabra» propondremos analizar un conjunto de tareas ricas asociadas al estudio de potencias y raíces que permiten generar un ambiente de clase centrado en la comunicación y en la construcción del conocimiento a partir de la voz de los alumnos. Al igual que Afzal Ahmed en su libro *Better Mathematics: A Curriculum Development Study,* entendemos por tareas ricas aquellas que en un inicio son accesibles a todos los alumnos pero permiten plantear nuevos retos a partir del enunciado inicial. Aquellas que invitan a los alumnos a tomar decisiones, a que especulen, que formulen hipótesis, que justifiquen, que expliquen, que reflexionen, que interpreten…, tareas que promueven el debate y la comunicación, alentando preguntas del tipo «¿qué pasaría si?»

Artículo solicitado por *Suma* en marzo de 2018 y aceptado en abril de 2018

En esta ocasión analizaremos tareas relacionadas con un tema que aparece en los últimos cursos de primaria: la potenciación, una operación que presentaremos simplemente como una manera de abreviar multiplicaciones (esto es posible porque las potencias que se trabajan en esta etapa escolar tienen todas exponente natural el cual indica la cantidad de veces que debe multiplicarse por sí mismo el número que aparece en la base).

Ejemplos de tareas

Las tareas ricas sirven para introducir un tema, para practicarlo, para profundizar en su estudio o como colofón de su trabajo en el aula. En la serie de ejemplos que presentaremos en relación a «potencias y raíces» buscamos ilustrar todos estos momentos. Acompañamos cada tarea de un pequeño comentario, en ocasiones sobre la gestión y en ocasiones sobre la solución.

En la siguiente tarea nuestro propósito es estudiar el potencial de las potencias de una misma base para generar números pares.

Tarea 1. Potencias de base 10

Presentamos estas seis tarjetas, en el reverso de las cuales los alumnos pueden anotar su valor y les pedimos que se repartan la tarea de investigar qué números pares menores que 120 pueden obtener sumando algunas de estas tarjetas.

Cuando los alumnos hayan comprobado que todos los números pares hasta 120 pueden obtenerse combinando algunas de estas tarjetas (por ejemplo: $60 = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2$ o $64 = 2^6$) podemos preguntarles, qué otros pares se pueden conseguir con esas tarjetas (122, 124 y 126), qué número anotarían en una tarjeta extra para obtener todos los números hasta 120 (pares o impares), hasta qué número llegarían si agregaran una nueva tarjeta con la potencia séptima de base 2, etc...[1]

En la siguiente tarea el propósito es estudiar cómo se comportan los números cuadrados.

Tarea 2. Números cuadrados

¿Cuál puede ser la cifra de las unidades de un número cuadrado? Y si miramos las dos últimas cifras de estos números ¿cuáles son las posibilidades?
¿Cuál es el menor número cuadrado que comienza en 5?, ¿y en 7?

Aunque es conocido el hecho de que solo las cifras 0, 1, 4, 5, 6 y 9 aparecen en el lugar de las unidades de los números cuadrados, no lo es tanto que menos del 25% de números de dos cifras pueden aparecer en los últimos dos lugares de este tipo de números.

00	**01**	02	03	**04**	05	06	07	08	**09**
10	11	12	13	14	15	**16**	17	18	19
20	**21**	22	23	**24**	**25**	26	27	28	**29**
30	31	32	33	34	35	**36**	37	38	39
40	**41**	42	43	**44**	45	46	47	48	**49**
50	51	52	53	54	55	**56**	57	58	59
60	**61**	62	63	**64**	65	66	67	68	**69**
70	71	72	73	74	75	**76**	77	78	79
80	**81**	82	83	**84**	85	86	87	88	**89**
90	91	92	93	94	95	**96**	97	98	99

Figura 1. Cifras finales de números cuadrados

Entre los primeros treinta números cuadrados aparecen todos los dígitos entre 1 y 9 como cifra inicial, pero ciertamente el 5 y el 7 son los que más se hacen esperar ($23^2 = 529$ y $27^2 = 729$); eso no quiere decir que esos dígitos sean menos probables que otros como cifra inicial. Podemos proponer a los alumnos que se repartan los 100 primeros números cuadrados y que estudien estadísticamente su cifra inicial (el resultado no varía sustancialmente al hacerlo en el rango 1-100 respecto a hacerlo en el rango 1-1000 como muestra la siguiente imagen y este no varía respecto a hacerlo en el rango 1-10 000) y que se sorprenderán al observar cómo la frecuencia decae con el aumento de la cifra[2].

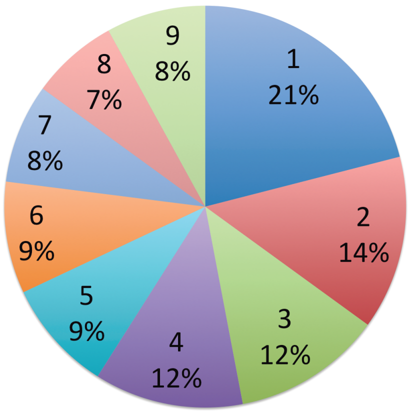

Figura 2. Frecuencia relativa de los dígitos 1 al 9 como primera cifra de los primeros 100 números cuadrados

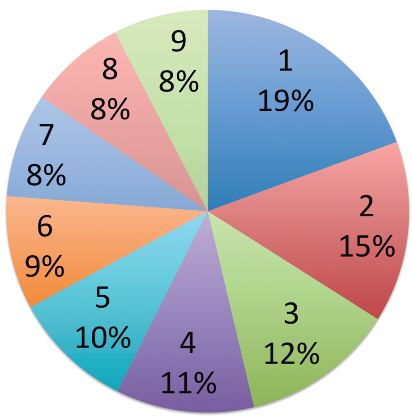

Figura 3. Frecuencia relativa de los dígitos 1 al 9 como primera cifra de los primeros 1 000 números cuadrados

En la tarea siguientes queremos dar sentido al hecho de llamar números cúbicos al resultado de potencias de base natural y exponente 3.

Tarea 3. Números cúbicos

Completar estas cuatro sentencias y que detecten el patrón subyacente pidiendo que escriban cuáles serían las dos igualdades que seguirían a estas

$3 + 5 = \_\_\_^3$

$7 + 9 + 11 = \_\_\_^3$

$13 + 15 + 17 + 19 = \_\_\_^3$

$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = \_\_\_^3$

Trabajando con material manipulativo podemos ir un paso más allá y entender por qué todos los números cúbicos se pueden descomponer como suma de impares consecutivos:

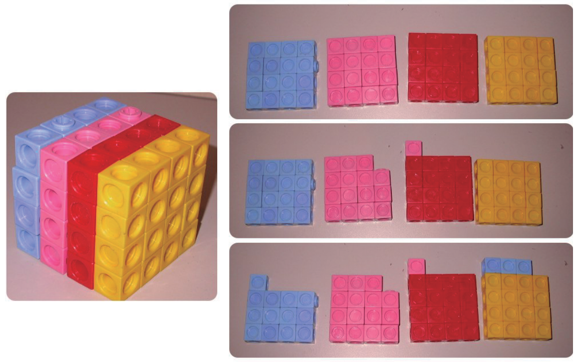

Figura 4. $4^3 = 4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 =$
$= (4^2 - 3) + (4^2 - 1) + (4^2 + 1) + (4^2 + 3)$

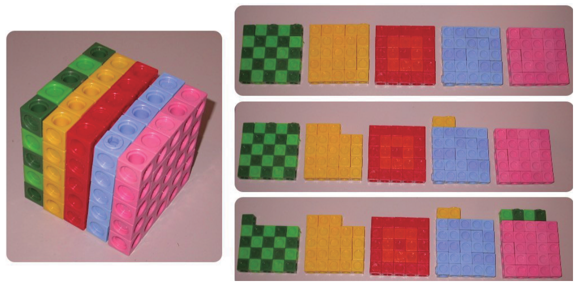

Figura 5. $5^3 = 5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 =$
$= (5^2 - 4) + (5^2 - 2) + 5^2 + (5^2 + 2) + (5^2 + 4)$

En la tarea siguiente se trata de dar sentido a las potencias con base racional. Los números cuadrados y cúbicos aparecen al usar exponente 2 y 3 combinado con una base natural, pero la potencia debe entenderse en primaria como una operación aplicable a cualquier base positiva y exponente entero. Es así que podemos calcular, tanto de manera exacta como aproximada, por ejemplo, $2{,}7^2$. Para el cálculo exacto recurrimos a los conocimientos sobre multiplicaciones decimales y planteamos $2{,}7 \times 2{,}7 = 7{,}29$ y para el cálculo aproximado podemos plantear razonamientos de este tipo: «como $2{,}7 \approx 3$, $2{,}7^2 \approx 3^2 = 9$». Este cálculo apoyado en el «redondeo» puede complementarse con un razonamiento de acotación: «como 2,7 está entre 2 y 3, $2{,}7^2$ está entre $2^2 = 4$ y $3^2 = 9$». Afirmaciones como esta ayudan a entender que el cálculo exacto no es el único que trabaja con afirmaciones de total certeza.

Proponemos a continuación una tarea que invita a explorar este tipo de razonamientos que puede ser apoyado por el contexto del cálculo de áreas.

Tarea 4. Potencias con base racional
Ya sabemos que $3{,}5^2$ está entre 3^2 y 4^2 pero ¿de cuál de los dos está más cerca? Compara la aproximación así obtenida con 3x4. ¿Podrías generalizar las respuestas anteriores a otros números como 11,5 u 8,5?

Superponiendo un cuadrado de lado 3, uno de lado 3,5 y uno de lado 4 se puede ver que la diferencia entre los dos cuadrados más pequeños es menor que la diferencia entre los dos cuadrados más grandes y de allí deducir que $(n+0{,}5)^2$ está más cerca de $(n+1)^2$ que de n^2.

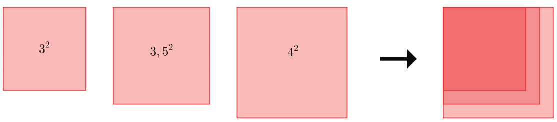

Figura 6. Superposciones de cuadrados de lados respectivos 3, 3,5 y 4

Superponiendo un cuadrado de lado 3,5 y un rectángulo de lados 3 y 4 se puede ver que el rectángulo de lados desiguales tiene un área ligeramente menor que el cuadrado (el área que sobra por la derecha, $0{,}57 \times 3$, es menor que la que sobra por debajo, $0{,}5 \times 3{,}5$) por lo que ofrece una muy buena aproximación por defecto: $3^2 < 3 \times 4 < 3{,}5^2 < 4^2$. Pero podemos decir más: la diferencia entre las áreas que sobran por un lado y por el otro es de 0,25, de lo cual deducimos que 3×4 da una aproximación por defecto que difiere del valor real en 0,25, o lo que es lo mismo, $3{,}5^2 = 12{,}25$.

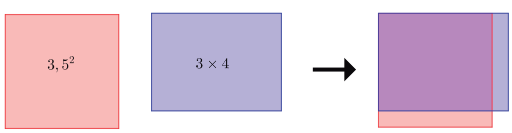

Figura 7. Superposición de cuadrado de lado 3,5 y rectángulo de 3×4

La generalización del razonamiento anterior permitiría decir $11{,}5^2 \approx 11 \times 12 = 132$ u $8{,}5^2 \approx 8 \times 9 = 72$, o calcular mentalmente $11{,}5^2 = 132{,}25$ u $8{,}5^2 = 72{,}25$.

En la tarea siguiente se trata de dar sentido a las raíces cuadradas. Si estudiamos las potencias de exponente 2 es natural preguntarse qué número elevado al cuadrado tiene un determinado resultado. Es un hecho matemático importante saber que para números positivos esta pregunta siempre tiene respuesta y que a ella le llamamos, la raíz cuadrada del número en cuestión.

Cuando el número al que queremos calcular la raíz cuadrada es un cuadrado perfecto la respuesta es un número natural, cuando es otro tipo de número natural la respuesta es un número real que tiene una expresión decimal infinita. La búsqueda de la raíz cuadrada de un número positivo es muy previa a plantearse la existencia de un algoritmo para realizar ese cálculo y en este sentido, puede y debe estar presente en las aulas de primaria[4].

Los alumnos de primaria, luego de elevar al cuadrado con naturalidad números entre 1 y 20 pueden determinar $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$…, $\sqrt{361}$. En este contexto les podemos presentar esta tarea, como un reto para ir completando entre todos durante unos cuantos días

Tarea 5. Raíces cuadradas
¿Qué resultados enteros entre 0 y 20 se pueden obtener usando un 1, un 6, un 9, una o más √ y la cantidad que se desee de estos símbolos: +, -, x, : y ()?

Algunas de las soluciones posibles son:

1 = 6 : √9 - 1	2 = 9 - 6 - √1	3 = 6 : √9 + 1
4 = √(1+6+9)	5 = √(16+9)	6 = 6 x √1⁹
7 = 6 + √1⁹	8 = 6 + √9 - 1	9 = 1 x 6 + √9
10 = 1 + 6 + √9	11 = 9 + √√16	12 = √(16x9)
13 = √169	14 = √196	15 = √1 x 6 + 9
16 = √1 + 6 + 9	17 = 6 x √9 - 1	18 = 1 x 6 x √9
19 = 16 + √9	¿Se puede conseguir el 20? ¿Y el 0?	

Un último comentario antes de dejar el tema de las raíces cuadradas. La búsqueda de, por ejemplo, $\sqrt{8}$ debería ser entendida por los alumnos como un reto que les permitirá profundizar sus conocimientos sobre los números decimales.

No hay ningún número natural que elevado al cuadrado dé 8 por lo tanto, habrán de buscar un decimal que cumpla esta condición. La búsqueda de ese decimal ha de realizarse en el rango de 2 a 3 ya que $2^2 = 4 < 8 < 9 = 3^2$, por lo cual podría estudiar los resultados de $2{,}1^2$, $2{,}2^2$, …, $2{,}9^2$. Ninguna de estas potencias tiene resultado 8 pero $2{,}8^2 < 8 < 2{,}9^2$ y eso permite volver a afinar el rango de búsqueda[5], calcular $2{,}81^2$, $2{,}82^2$,…, $2{,}89^2$ y continuar este proceso hasta dar sentido al resultado que le devuelve la calculadora al pedirle que calcule $\sqrt{8}$: 2,828427125.

Reflexión final

En esta entrega de «Ell@s tienen la palabra» nos hemos centrado en tareas para trabajar con potencias y raíces. Las tareas que planteamos sobre potencias buscan combinar cálculo exacto y aproximado (para elevar un número decimal que está exactamente en la mitad de dos números naturales consecutivos, basta multiplicar esos dos números naturales y sumar 0,25), buscar patrones (si la cifra de las decenas de un número es impar solo podrá ser un número cuadrado si acaba en 6), resaltar propiedades fundamentales (todo número entero se puede obtener como suma de potencias de base 2) o dar sentido al vocabulario habitual en este tema (cuando el exponente es 3 decimos que estamos elevando al cubo). En el caso de la tarea relacionada con la raíz cuadrada, hemos puesto el acento en la noción de raíz cuadrada como operación inversa de la potencia de exponente 2, que es suficiente para plantear tareas que inviten a nuestros alumnos a resolver problemas y a hablar de matemáticas.

David Barba Uriach
Universitat Autònoma de Barcelona

Cecilia Calvo Pesce
Escola Sadako, Barcelona
<tienenlapalabra@revistasuma.es>

1 Se pueden encontrar otras tareas similares en el post «Las primeras potencias» del blog *Puntmat* <http://puntmat.blogspot.com.es/2015/10/les-primeres-potencies.html>.

2 Se pueden encontrar otras tareas similares en los dos posts sobre «Los primeros números cuadrados» del blog *Puntmat* <http://puntmat.blogspot.com.es/2015/09/els-primers-nombres-quadrats-i.html y http://puntmat.blogspot.com.es/2015/09/els-primers-nombres-quadrats-ii.html>.

3 Se pueden encontrar otras tareas similares en el post «Los primeros números cúbicos» del blog *Puntmat* <http://puntmat.blogspot.com.es/2015/09/els-primers-nombres-cubics.html>.

4 En <https://puntmat.blogspot.com.es/2018/04/arrels-quadrades-primaria-i-tant.html> se recogen enlaces a diversas entradas del blog Calaix +ie de Joan Jareño que permiten reflexionar sobre los algoritmos asociados al cálculo de la raíz cuadrada.

5 Hemos comprobado la conveniencia de visualizar el efecto lupa relacionado con la densidad de los decimales tal como se explica en <http://ateneu.xtec.cat/wikiform/wikiexport/cursos/curriculum/inf_pri/aramat/m2/m2s2>.