suma+ 88
Secciones
Julio 2018
pp. 103-107

Enriquecimiento de la argumentación visual de alumnos con talento matemático

Rafael Ramírez Uclés (coordinador)
Pablo Flores Martínez

Tú el talento y yo los hombros.

ESTALMAT (Estímulo del talento matemático) es un proyecto de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Los objetivos fundamentales del proyecto fueron descritos por su fundador, Miguel de Guzmán. Tratamos de detectar, orientar y estimular de manera continuada el talento matemático excepcional de estudiantes de secundaria y bachillerato, sin desarraigarlos de su entorno, mediante una orientación semanal durante los dos primeros años, que llevamos a cabo cada semana del curso académico por tres horas, y continuando en la etapa de enseñanza secundaria y bachillerato con diferentes formatos en las distintas sedes.

Actualmente el proyecto se desarrolla en 10 comunidades autónomas, pero sigue estando en expansión desde sus orígenes en 1998 <www.estalmat.org>. En este proyecto están implicados alrededor de 200 profesores en toda España, provenientes tanto de las universidades como de la enseñanza secundaria.

En ESTALMAT tenemos un rincón lleno de material que ha sido elaborado a través de los años por el profesorado del proyecto. Queremos compartir con todos los lectores de *Suma* nuestras experiencias y, para ello, mostraremos algunos de estos materiales para que puedan ser un punto de partida para el profesorado que desee llevar

El rincón de ESTALMAT

Artículo solicitado por *Suma* en marzo de 2018 y aceptado en abril de 2018

a sus estudiantes por los bellos paisajes de la matemática.

La investigación en Fórmula 1 ha aportado grandes inventos muy útiles para el más pequeño de los utilitarios. Una tarea rica pensada para un estudiante muy capaz, tiene mucho potencial para ser convertida en una tarea para todos, incluso para los que tienen dificultades. Un buen primer paso para atender a la diversidad.

Queremos resaltar el papel del profesor como primer escalón para que el talento de TODOS nuestros estudiantes pueda llegar a lo más alto. Y eso no es cuestión de suerte.

> Muchos creen que tener talento es una suerte; nadie que la suerte pueda ser cuestión de talento. (Jacinto Benavente)

El talento tendrá más fortuna si se apoya sobre los hombros adecuados.

> Si he visto más lejos es porque me he subido a hombros de gigantes. (Isaac Newton)

En esta entrega os presentamos algunas de las tareas propuestas en la sesión «Visualización» impartida en el segundo curso de ESTALMAT Andalucía Oriental. El enriquecimiento que se pretende va encaminado en dos direcciones. Por un lado, trabajar técnicas de argumentación matemática: condiciones necesarias y suficientes, contraejemplos, conjeturas, etc. Por otro lado, favorecer el desarrollo de sus habilidades de visualización, focalizándonos especialmente en la localización de errores en la argumentación visual.

La estructura de la sesión está basada en el *reposo curricular* (Ramírez y Flores, 2016), donde se tienen en cuenta las características de los estudiantes con talento, el enriquecimiento de contenidos matemáticos y elementos de razonamiento. Los contenidos matemáticos que se trabajan son la teselación del plano y el relleno del espacio. La metodología que recomendados es iniciar cada tarea individualmente y luego hacer una puesta en común en pequeño grupo. Finalmente se comparten y discuten las respuestas en el grupo clase.

Se persigue que los estudiantes conozcan técnicas de argumentación para justificar sus razonamientos, especialmente para hacer un uso eficaz de la visualización. En experiencias previas y en revisiones de la literatura de investigación, se han localizado errores como establecer falsas analogías entre el plano y el espacio («si los triángulos rellenan el plano, los tetraedros rellenan el espacio») o razonar a partir de ejemplos concretos, extrayendo conclusiones examinando solo algunos de todos los casos posibles («Se ve en este dibujo que las alturas de un triángulo siempre son menores que todos sus lados»). Además de errores implicados al utilizar elementos matemáticos implicados en el razonamiento, como técnicas de argumentación falaces, como implicaciones inversas, procesos inductivos incompletos o deductivos poco justificados, usar conjeturas tomándolas como verdaderas, o contraejemplos que no lo son, etc.

> Si dos rectas son paralelas, están contenidas en dos planos que son paralelos. Por lo tanto si no son paralelas, no puede haber dos planos paralelos que las contengan.

Presentamos distintas tareas, comentando los aspectos más destacados sobre la forma de llevarlas al aula, ejemplos de respuestas de los estudiantes y reflexiones sobre su solución.

Tarea 1. Lluvia de ideas: relleno del espacio

Responde individualmente a las siguientes preguntas:

1.1 ¿Qué cuerpos rellenan el espacio?
1.2 El cubo rellena el espacio. Justifica tu respuesta.
1.3 Define qué se entiende por cuerpo que rellena el espacio.
1.4 Buscar ejemplos de poliedros que rellenan el espacio.
1.5 Estudiar la relación que existe entre los poliedros que rellenan el espacio y los polígonos que rellenan el plano.
1.6 ¿Rellena el tetraedro el espacio?

Se pide que de una manera intuitiva identifiquen los cuerpos que rellenen el espacio. Se introducirá el problema de relleno del espacio en relación con problemas reales de diseño, almacenaje y transporte, analizando el nombre de tetrabrick.

Se compartirá una lluvia de ideas sobre el concepto de relleno del espacio, guiándoles a que valoren la exactitud y generalidad de sus aportaciones. Se les motiva a que expresen argumentos que justifican por qué el cubo rellena el espacio.

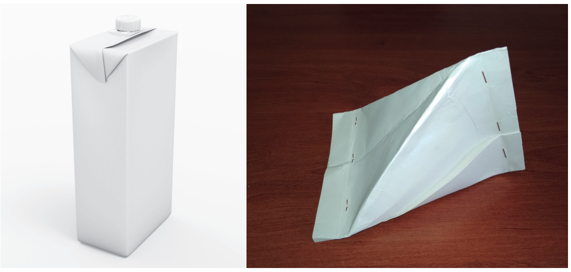

Figura 1. Tetrabrick: ¿hexaedro o tetraedro?

[Respuesta a 1.2] El cuadrado rellena el plano, por lo tanto el cubo puede rellenar el espacio, ya que podemos dividir el espacio en tres planos y cada uno puede ser rellenado con las caras del cubo.

Se prevé que el razonamiento sobre un caso concreto les ayude a extraer propiedades generales para definir qué se entiende por rellenar el espacio, que se abordará en la actividad 1.3, en la que, primero de manera individual y luego mediante la puesta en común, se definirá «rellenar el espacio» y se les pedirá que busquen ejemplos de poliedros que lo hagan.

[Respuestas a 1.3] Conseguir colocar figuras en la correcta composición de modo que no queden huecos libres y que se pueda extender indefinidamente.

Establecer una secuencia para colocar poliedros infinitas veces de forma que no quede ningún punto del espacio que no esté dentro de ellos.

Es esperable que presenten ideas intuitivas interesantes, por lo que la puesta en común no se limitará a valorar la corrección de las aportaciones, procurará motivarles para *pulir* argumentaciones, emplear lenguaje matemático preciso y examinar razones que permiten la generalización.

En la actividad 1.4, en caso de que únicamente aparezcan rellenos del espacio con cubos o prismas rectos, recomendamos presentar otros poliedros que rellenan el espacio, como el sólido de Kelvin, y discutir si proceden de los anteriores a partir de truncamientos u otras transformaciones que mantienen la cualidad de rellenar el espacio.

[Respuesta a 1.4] Ejemplos que rellenan son el cubo, el prisma hexagonal, el prisma triangular, ortoedro…

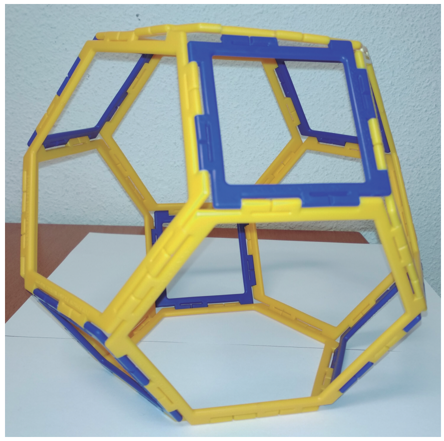

Figura 2. Sólido de Kelvin

Para relacionar los poliedros que rellenan el espacio y los polígonos que rellenan el plano (actividad 1.5), se puede comenzar analizando los polígonos regulares que teselan el plano para que identifiquen propiedades de sus ángulos interiores (divisores de 360º). Posteriormente se puede sugerir obtener pirámides y prismas con base estos polígonos y discutir si esos poliedros rellenan el espacio.

[Respuesta a 1.5] El cubo rellena el espacio porque los ángulos forman 90° y al poner 4 forman 360° y no dejan puntos del plano entre ellos.

El apartado 1.6 es el que presenta una mayor dificultad, pues hay una idea muy extendida de que el tetraedro mantiene propiedades del triángulo. Para profundizar se pueden utilizar materiales manipulativos (puzles de pirámides, cuerpos geométricos, polydron, troquelados, geomag…) así como Geogebra u otras aplicaciones informáticas (Flores, 2007).

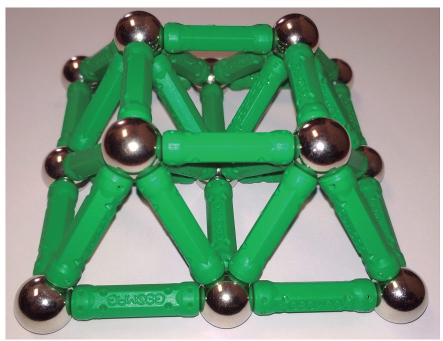

Figura 3. Estructura con pirámides

[Respuesta a 1.6] El tetraedro no rellena el espacio porque al juntar tetraedros se quedan huecos irremediablemente.

El relleno del espacio por tetraedros podría aparecer intuitivamente al establecer una analogía incorrecta con la teselación del plano por triángulos equiláteros. Si algún alumno hiciera depender la teselación del tetraedro de la medida del rectilíneo del ángulo diedro de las caras del tetraedro, se suministrará información sobre los rectilíneos de diversos poliedros regulares.

[Respuesta a 1.6] No, porque su ángulo mide aproximadamente 70° que no es divisible entre 360°.

Rectilíneo del ángulo diedro				
Tetraedro	*Cubo*	*Octaedro*	*Dodecaedro*	*Icosaedro*
70° 31' 44''	90°	109° 28'16''	116° 33' 54''	138° 11' 23''

Tarea 2. Condiciones de los poliedros que rellenan el espacio

Justificar la veracidad de las siguientes afirmaciones:

2.1 *Si* un polígono rellena el plano, *entonces* el prisma recto que se forma a partir de él, rellena el espacio.
2.2 Un poliedro rellena el espacio *si y solamente si* es un prisma recto de base un polígono que rellena el plano.
2.3 Un poliedro rellena el espacio *si y solamente si* rellena un cubo.
2.4 *Si* un poliedro A rellena el espacio y se descompone en otros poliedros B iguales, *entonces* el poliedro B rellena el espacio.
2.5 *Si* un poliedro rellena el espacio, *entonces* cualquier sección (corte del poliedro con un plano) suya rellena el plano.
2.6 Un poliedro rellena el espacio *si y solamente si* se rellena a sí mismo.
2.7 *Si* un poliedro rellena el espacio, *entonces* podemos deformarlo «de manera conveniente» para obtener otros poliedros que rellenan el espacio.

En estas actividades se pretende que los estudiantes diferencien entre expresiones que emplean «si [...] entonces» y «si y solamente si». Para ello se presentarán varios ejemplos que utilicen estos conectivos y los relacionen con expresiones que emplean el conectivo lógico *implicación* (⇒) y *doble implicación* (⇔), hasta llegar a establecer la diferencia entre relacionar dos afirmaciones con una simple o doble implicación. Para favorecer el desarrollo de la argumentación visual, es recomendable usar contraejemplos concretos que demuestran que la implicación no es cierta en uno de los sentidos. Demostrar la veracidad de una implicación requiere una justificación razonada de modo general.

En las respuestas donde manifiesten ideas intuitivas, se les pide que *argumenten* precisando los términos utilizados y validando la generalidad de las afirmaciones que hagan a partir de casos concretos:

[Respuesta a 2.1] Sí, porque es igual pero con volumen.

[Respuesta a 2.4] Verdadero, porque esas partes se pueden juntar de forma que formen una figura igual al poliedro inicial que rellena el espacio.

En las preguntas de doble implicación, se distinguen por separado las dos afirmaciones (la necesaria y la suficiente). Por ejemplo, en 2.2, una implicación hace referencia a la actividad 2.1 (verdadera), pero se puede probar con un contraejemplo, como empleando el sólido de Kelvin, que un poliedro que rellena el espacio no debe ser *necesariamente* un prisma de esas características.

[Respuesta a 2.2] Falso, porque hay prismas que no son rectos que rellenan el espacio.

En la actividad 2.3, nuevamente se muestra la diferencia entre mostrar que una condición es cierta, necesitando argumentarla, mientras que basta un contraejemplo para ver que la otra implicación no es correcta.

[Respuesta a 2.3] Si un poliedro rellena un cubo, podemos estar seguros de que rellena el espacio, porque el cubo rellena el espacio.

[Respuesta a 2.3] Un prisma recto de base hexágonos regulares es un poliedro que rellena el espacio, pero un cubo no puede rellenarse con ellos porque sus ángulos son distintos.

Es interesante contrastar respuestas diferentes a las actividades, especialmente cuando algún estudiante haya argumentado que es cierta y otro muestre un contraejemplo que la rebate.

[Respuesta a 2.6] Falso, el prisma hexagonal no se rellena a sí mismo con prismas hexagonales más pequeños.

[Respuesta a 2.5] Se puede obtener una sección pentagonal (no regular) de un cubo, y ese polígono no rellena el plano. Además, el plano puede ir cortando a los cubos en figuras diferentes...

En la actividad 2.7 conviene que identifiquen qué transformaciones se pueden hacer en un cuerpo que rellena el espacio para que el objeto resultante también lo rellene. Además de las isometrías, existen otras transformaciones que transforman una figura que rellena el espacio, en otra que también lo rellena. En la búsqueda de distintos cuerpos para rellenar el espacio, se estimulará a relacionar las figuras que se obtienen a partir de transformaciones de otras. El trabajo en grupo, tanto previo como durante la puesta en común, obligará a verbalizar las situaciones visuales y les exigirá mayor precisión en el lenguaje.

> [Respuesta actividad 2.7] Dividirlo en partes iguales, isometrías, formar un prisma oblicuo a partir de uno recto (solo si se desplaza su cara superior en una sola dirección sin rotar).

> [Respuesta actividad 2.7] Aumentar proporcionalmente las longitudes de los lados. En un cuerpo que tenga caras opuestas, quitarle un trozo a una cara y pegárselo en la opuesta.

Tras la puesta en común, se puede relacionar esta actividad de deformación para buscar nuevas piezas que rellenan el espacio, con la construcción de mosaicos en el plano, como los polígonos nazaríes de la Alhambra o *tipo Escher,* en los que se modifica el relleno del plano con cuadrados, triángulos o hexágonos.

Como conclusión de la sesión, es interesante pedir que los participantes identifiquen una afirmación correcta relativa a figuras que rellenan el espacio y justifique suficientemente la validez de esta afirmación, convirtiéndola en «su teorema», y empleando en su formulación los términos empleados en la clase: implicación, doble implicación, si […] entonces, si y solo si.

Referencias bibliográficas

Flores, P. (2007), «Pirámides rellenas de … pirámides. Puzzles espaciales que favorecen la visualización», en P. Flores, F. Ruiz y M. de la Fuente (coord.), *Geometría para el siglo XXI,* Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) y SAEM THALES, Badajoz, 223-247.

Ramírez, R., y P. Flores (2006), «Planificar el enriquecimiento para alumnos de alta capacidad matemática: reposo curricular», *Suma,* n.º 83, 33-41.

Rafael Ramírez Uclés
Universidad de Granada
<rramirez@ugr.es>

Pablo Flores Martínez
Universidad de Granada
<pflores@ugr.es>