# suma+

88 revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas · *julio 2018*



suma+
revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas
88
julio 2018

# sumario

Contextualizar las matemáticas también en la universidad 3-6

## artículos

Matemáticas y mecánica cuántica en España. Apuntes para una reflexión
*Gonzalo Gimeno Valentín-Gamazo y Mercedes Xipell Gómez del Moral* 9-17

Leyendo problemas antiguos. Dos ejemplos del siglo XVII español
*Antonio M. Oller Marcén* 19-26

Material manipulativo vs GeoGebra en el estudio de semejanza y simetría
*M.ª Macarena Fariña, Edith Padrón, M.ª José Gutiérrez y Cristina Vaquero* 27-35

Las matemáticas y el ajedrez: una experiencia en Educación Infantil
*Desiré García Lázaro y Estíbaliz Jenkins Gómez* 37-44

Introducción al lenguaje algebraico en un entorno de resolución de problemas
*Mireia López Beltran y Cyntia Riquelme Carvallo* 45-54

Generación de una base de orientación para la resolución de problemas
*Joana Villalonga Pons* 55-63

## secciones

ELL@S TIENEN LA PALABRA
Tareas ricas para trabajar con potencias y raíces
*David Barba Uriach y Cecilia Calvo Pesce* 67-71

CREOGEBRA
A vista de GeoGebra
*José Luis Muñoz Casado* 73-80

Mujeres matemáticas: rompiendo moldes
María Josefa Wonenburger Planells, una algebrista de Oleiros
*Marta Macho Stadler* **81-85**

Del MMACA al aula
Cálculo y estrategias
*MMACA* **87-94**

Crónica de una clase no anunciada
Optimización didáctica de un problema de optimización
*Miquel Albertí Palmer* **95-102**

El rincón de ESTALMAT
Enriquecimiento de la argumentación visual de alumnos con talento matemático
*Rafael Ramírez Uclés (coordinador) y Pablo Flores Martínez* **103-107**

Sí a las calculadoras
Actividades con calculadora en el aula de secundaria
*M.ª Teresa Navarro Moncho* **109-120**

Reseñas
Historia, juegos y elecciones
*Joan Jareño Ruiz* **121-125**

## *FESPM & Cía*

Seminario federal sobre resolución de problemas
*Juana M.ª Navas Pleguezuelos* **129-136**

VIII Jornadas de Enseñanza de las Matemáticas en Cantabria
*Luis Ceballos Barón* **137-140**

## Suma *digital <revistasuma.es>*

Vivencias matemáticas
Vivir el paralelismo
*Miquel Albertí Palmer*



Enlaces referenciados en este número



suma+ 88
pp. 3-6



# Contextualizar las matemáticas también en la universidad



¿Por qué muchos estudiantes de ingeniería abandonan sus estudios en los primeros cursos del grado? ¿Hasta qué punto algunas de las materias clásicas de estos estudios (matemáticas, física o química) tienen algo que ver con este abandono? ¿Cómo viven alumnos el tener que estudiar unas materias que durante el grado tienen poca relación con otras materias más prácticas y propias de cada grado? ¿Tiene sentido que todos los programas de matemáticas, tanto de álgebra como de análisis, sean prácticamente iguales para todos los grados universitarios y que no se haga ninguna referencia concreta a otros contenidos o materias del grado en esos programas de álgebra y cálculo «para todos»?

Algunas de estas preguntas tal cual están formuladas ya llevan implícita la respuesta, tal vez los programas de álgebra y análisis comunes a muchos grados de ingeniería u otras titulaciones tecnológicas deberían estar «personalizados» para cada grado.

Fruto de estas y otras preguntas que se formularon algunos profesores de matemáticas del Departamento de Matemáticas de la UPC que cuenta con unos 200 profesores que imparten docencia en cerca de 70 titulaciones de grado fue el proyecto que comentaremos en este editorial. Este «ejército» de profesores de matemáticas imparte docencia en titulaciones de diferentes familias: Arquitectura, Urbanismo y Edificación; Ciencias Aplicadas; Ciencias y Tecnologías de la Salud; Diseño y Tecnología Multimedia; Ingeniería Aeroespacial; Ingeniería Civil; Ingeniería de Biosistemas y Alimentaria; Ingeniería de Telecomunicación; Ingeniería Industrial; Ingeniería Informática; Ingeniería Naval, Marina y Náutica; Gestión y Organización de Empresas.

Todas estas titulaciones tienen créditos de matemáticas en sus planes de estudios, en muchos casos solo en primero y segundo para dejar paso a otras materias en

tercero y cuarto. Pero, ¿tiene sentido que muchos programas de matemáticas de estas titulaciones sean totalmente intercambiables a pesar que uno pertenezca a la rama de Ingeniería Civil y el otro a la rama de Ingeniería Naval, Marina y Náutica, por poner un ejemplo?

Pero este grupo de profesores de la UPC no se quedaron en hacerse preguntas sino que ya han pasado a la acción para intentar introducir este debate en el seno de sus Departamentos.

Durante el segundo cuatrimestre del curso 2017-2018 iniciaron el proyecto: «Contextualización de las matemáticas en los grados de la UPC». Este proyecto coordinado por Marta Peña (Departamento de Matemáticas y Subdirectora del Instituto de Ciencias de la Educación (ICE) de la UPC): «tiene como principal objetivo la mejora de la docencia de las ciencias en la Universidad Politécnica de Cataluña (UPC), ilustrando la enseñanza de estas a través de diferentes problemas tecnológicos. En una primera fase el proyecto se centrará en matemáticas. Por ejemplo, modelizando matricialmente problemas de ingeniería y aplicando a continuación técnicas de cálculo matricial para su estudio y resolución. Esto requiere por parte del profesorado, no solo de conocimiento de los conceptos y técnicas de matemáticas o de física, sino también de nociones de las diferentes áreas de la ingeniería donde se aplican».



La justificación del proyecto, otra vez con palabras de Marta: «también a nivel universitario, para conseguir una mayor motivación y aprovechamiento del estudiante, conviene contextualizar las ciencias (matemáticas, física, química…) mediante aplicaciones inmediatas a las disciplinas de la carrera. En otras palabras, hay que promover el llamado *Student Engagement,* en particular que los estudiantes se sientan identificados con la profesión que han escogido y que encuentren que todo aquello que aprenden es útil para su futuro profesional».

La organización de esta iniciativa ha sido asumida por el ICE de la UPC, y cuenta con la colaboración de la Facultad de Matemáticas y Estadística (FME) y el Departamento de Matemáticas de la UPC.

Según Marta Peña: «La metodología del proyecto consiste en la impartición de conferencias de periodicidad quincenal, a partir de abril de 2018, que ilustran el uso de las matemáticas en diferentes áreas tecnológicas. La intención es recopilar el material presentado para su introducción y utilización en la comunidad universitaria. En particular, ejercicios contextualizados al grado donde se imparten, motivadores para el estudiante, y guías con nociones de las diferentes áreas de la ingeniería donde se aplican, que sirvan de apoyo para el profesorado de matemáticas».

La sesión inaugural tuvo lugar el 10 de abril de 2018, y contó con la presencia del rector de la UPC, Francesc Torres, y del secretario de Universidades e Investigación de la Generalitat de Cataluña, Arcadi Navarro. La conferencia inaugural fue a cargo del profesor de la UPC Claudi Alsina, con el título *Invitación a la renovación educativa de las matemáticas en las carreras técnicas*.

El resto de conferencias impartidas durante este curso 2017-18 fueron:

*Flujos en redes*, a cargo del profesor Josep Ferrer (Departamento de Matemáticas de la UPC).

*Engagement con los estudiantes de primero de Ingeniería Civil*, a cargo de la profesora M.ª Rosa Estela (Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental de la UPC).

*Las matemáticas de Google*, a cargo del profesor Rafael Bru (Universitat Politècnica de València).

*Numerical Factory: una cata numérica sobre la enseñanza de las matemáticas a las ingenierías*, a cargo del profesor Antoni Susín (Departamento de Matemáticas de la UPC).

La información de este proyecto se puede encontrar en la web <https://fme.upc.edu/ca/la-facultat/activitats/2017-2018/seminari-contextualitzacio-de-les-matematiques-a-les-carreres-tecnologiques-de-la-upc-1/presentacio-seminari-contextualitzacio-de-les-matematiques-a-les-carreres-tecnologiques-de-la-upc>.

El proyecto se retomará el curso 2018/19, con la impartición de conferencias que representen el más amplio número de titulaciones posibles de la UPC.

Un programa similar se plantearía en un futuro para la contextualización de otras ciencias (física, química…) a las carreras tecnológicas de la UPC.



Desde *Suma* tuvimos noticia del proyecto y asistimos a la primera conferencia (Claudi Alsina) y a la última (Antoni Susín). Felicitamos a los organizadores por la idea y puesta en marcha del proyecto y animamos a nuestros lectores que tengan ascendencia en las universidades de su comunidad autónoma para que promuevan reflexiones similares en sus universidades.




La presentación del proyecto en la FME de la UPC. De izquierda a derecha: David López, Arcadi Navarro, Francesc Torres, José Rodellar y Marta Peña

## En este número

Publicamos cuatro artículos, tres de ellos provienen de las aportaciones recibidas en <articulos@revistasuma.es> que han sido aprobadas por dos miembros del Consejo Asesor y el cuarto de una comunicación presentada en el XIII Congreso de la Sociedad Española de Historia de la Ciencia y la Técnica (SEHCYT), celebrado en Alcalá de Henares (junio de 2017), que por su temática —la introducción de la mecánica cuántica en España— nos pareció que podía interesar a los lectores de *Suma*. Cada artículo lleva el pie de página que da razón de su procedencia.

En secciones se producen cambios. Despedimos a David Barba Uriach y Cecilia Calvo Pesce, con su sección «Ell@s tienen la palabra», despedida motivada por la jubilación de David. Muchas gracias a los dos por vuestra colaboración desde *Suma* 70 (julio 2012). Os continuaremos leyendo en *PuntMat* <http://puntmat.blogspot.com/>.

La vida de la revista sigue, por eso estrenamos secciones en este número, exactamente dos. Una a cargo del *Grupo de calculadoras de la FESPM* que coordinará M.ª Teresa Navarro Moncho y otra a cargo de profesores del proyecto *Estalmat* que coordinará Rafael Ramírez Uclés.



En «FESPM & Cía» se recoge la crónica de las VIII Jornadas de Enseñanza de las Matemáticas en Cantabria (JEMC) organizadas cada dos años por la Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria (SMPC).

+⁺

# artículos



suma+
Artículos
Julio 2018
88
pp. 9-17

# Matemáticas y mecánica cuántica en España. Apuntes para una reflexión[1]

Gonzalo Gimeno Valentín-Gamazo
Mercedes Xipell Gómez del Moral



El objeto de este trabajo es hacer una breve descripción del proceso de propagación de la mecánica cuántica en España. En el mismo enfatizamos la conexión histórica de la disciplina física con sus fundamentos matemáticos. Revisamos algunas contribuciones relevantes a la cuestión y sugerimos algunas explicaciones respecto de la forma que adquirió esa propagación. Sugerimos que la complejidad matemática de la teoría se solapó con otras circunstancias de carácter más general haciendo difícil a los científicos españoles mantener el ritmo de la ciencia internacional.

*Palabras clave:* Mecánica cuántica, Formulación matemática, Principio de indeterminación, Didáctica en aulas universitarias.

**Mathematics and quantum mechanics in Spain. Notes for a reflection**

The aim of this work is to give a brief account of the process of propagation of quantum mechanics in Spain. In the work we emphasise the historical connection of the physical discipline with its mathematical background. We review some relevant contributions to the topic and suggest some explanations for the way in which this propagation took place. We suggest that the mathematical complexity of the theory overlapped more general circumstances making it difficult for the Spanish scientists to catch up with the progress of international developments.

*Keywords:* Quantum mechanics, Mathematical formulation, Principle of indetermination, Didactics in university classrooms.

En octubre de 1915 un ilustre matemático español se hacía la siguiente reflexión:

> ¿Podemos colaborar ya en la Ciencia universal, o debemos todavía limitarnos a asimilarla? Ignoro si para las demás Ciencias puede darse ya una contestación fundada; para la Matemática es todavía prematura la cuestión, y resolverla exige conocer antes la posición exacta de España respecto de la cultura mundial en este orden de conocimientos.

Y continuaba su discurso haciendo una clasificación de los matemáticos españoles de su tiempo en dos grupos:

> Primero. Los hombres modernos, es decir, amantes del progreso, que se han dado cuenta más o menos aproximada de nuestra posición y desean vivamente su mejora. Segundo. Los hombres que niegan la necesidad de este progreso, algunos de los cuales no son modernos, por desconocer la cultura matemática europea; otros, a pesar de conocer algo de ella por viajes, noticias o lecturas; otros, que ni la conocen, ni lo son, ni lo serían aunque la conocieran. (Rey Pastor, 1915)

Estas palabras, duras para sus compañeros de profesión, fueron pronunciadas por Julio Rey Pastor en el discurso inaugural del congreso de Valladolid de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias. Rey Pastor reflejaba en ellas el sentimiento de atraso que los españoles habían experimentado tras la pérdida de los últimos territorios de su imperio colonial.

Artículo solicitado por *Suma* en junio de 2017 y aceptado en enero de 2018

Solamente diez años después, en 1925, nacía en Europa la mecánica cuántica, una teoría física revolucionaria cuya interpretación desafiaba la intuición y demandaba un dominio de las ciencias matemáticas poco habitual. ¿Estaba preparada la ciencia española para esa revolución? ¿Qué características específicas revistió la introducción de la mecánica cuántica en el sistema científico, académico y cultural español? ¿Qué papel tuvo el desarrollo de la matemática, o la falta de él, en ese proceso?

Se suele aceptar la idea de que la mecánica cuántica comenzó a enseñarse en las aulas de la universidad española en la década de los 60, sin embargo en 1964 la sección cómica *Marginales* del diario ABC incluía chistes como el siguiente:

> Y usted ¿nunca ha pronunciado palabras como *implícitamente, contenido social, estructura cuántica* [...]? Ah, ya ¡como nunca ha tenido que escribir la presentación para un ciclo de teatro universitario de vanguardia!... (Diario ABC, miércoles 23 de septiembre de 1964. p. 37)[2]



La presencia de la mecánica cuántica a modo de chiste en la prensa diaria en 1964 nos permite intuir que su introducción en el mundo académico tuvo que ser anterior, como así fue.

Lo cierto es que desde los inicios de esa disciplina los científicos españoles intentaron comprenderla y transmitirla, si bien ese proceso se vio condicionado por diversas circunstancias que trataremos de esbozar a continuación. Pero antes de entrar en las particularidades de la transmisión de la mecánica cuántica es oportuno referirse al escaso refinamiento matemático de algunas ramas de la física y la química conectadas con ella. El historiador Sánchez-Ron da cuenta de esa falta de refinamiento afirmando que en las décadas de los años 20 y 30 del siglo pasado se avanzó mucho en la práctica de la investigación física en España «pero se hizo casi exclusivamente en Física Experimental, no en Física Teórica o Física Matemática» (Sánchez-Ron, 1990: 10). En esta expresión resuena el eco de la pregunta de Rey Pastor con la que hemos iniciado nuestro artículo.

*Lo cierto es que desde los inicios de esa disciplina los científicos españoles intentaron comprenderla y transmitirla, si bien ese proceso se vio condicionado por diversas circunstancias...*

## Primeras apariciones de la mecánica cuántica. El principio de incertidumbre de Heisenberg

Una de las primeras apariciones públicas de la cuántica española la encontramos en el discurso de Julio Palacios en el acto de su recepción como miembro de la Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales en 1932. Julio Palacios fue uno de los físicos más relevantes del período franquista. Siguiendo el protocolo establecido por la Academia, el discurso de Palacios fue contestado por otro académico; en el caso que nos ocupa el que contestó el discurso fue otra de las grandes figuras de la física española de su tiempo, Blas Cabrera, del cual Palacios era colaborador durante aquellos años (Palacios y Cabrera, 1932).

El discurso de Palacios versó sustancialmente sobre el principio de incertidumbre de Heisenberg. Como es sabido, este principio desarrolla el marco teórico de la indeterminación que se encuentra en ciertos procesos físicos. La versión matemática del principio establece que una distribución y su transformada de Fourier no pueden estar bien localizadas: si una es localizada (concentrada) la otra es dispersa y viceversa. El enunciado más habitual de la versión física del principio asienta la imposibilidad de determinar simultáneamente y con precisión arbitraria dos magnitudes físicas conjugadas como son la posición y la velocidad.

El principio de indeterminación era una de las piezas clave de la mecánica cuántica, entre otras cosas porque integraba un conjunto de resultados teóricos notables de la física atómica. Heisenberg lo desarrolló ampliamente en su libro de 1930 (Heisenberg, 1930), utilizando en su exposición dos visiones de la mecánica con características aparentemente incompatibles: la discontinuidad de la mecánica de matrices de Heisenberg y la continuidad de la ecuación de onda de Schrödinger[3].

Además de su importancia en el ámbito de la física el principio de indeterminación tuvo una repercusión notable en el sistema de pensamiento

europeo. Recuérdese que entre los fundamentos de la filosofía de la época se encontraba el principio de causalidad (todo hecho es consecuencia de una causa). El principio de indeterminación, sin embargo, desafía el de causalidad. En efecto, esa indeterminación objetiva aplicada al caso del movimiento de un cuerpo implica que no es posible determinar la posición de un móvil al cabo de un tiempo $t$, cosa que sí era posible en la mecánica de Newton. Y ello es porque bajo el nuevo principio, si en la igualdad $x(t) = x_0 + vt$ fuéramos capaces de conocer con total precisión la posición $x_0$, entonces la velocidad $v$ estaría totalmente indeterminada y recíprocamente.

Esa indeterminación no es por un problema de precisión en la medida sino que es una característica esencial de la mecánica cuántica. Por tanto, tomando el principio en estos términos, puede concluirse que hay una componente de arbitrariedad en cuanto a la trayectoria de un móvil que no existía en la mecánica de Newton. Según la interpretación ortodoxa de la mecánica cuántica[4] esa arbitrariedad no obedece a ningún motivo, desafiando por tanto el principio de causalidad.

La evidencia científica del principio de indeterminación socavó así los fundamentos de la filosofía de su tiempo. El pensamiento filosófico español lo acogió inicialmente con ambigüedad pues, aunque el principio suponía un inconveniente para ciertos argumentos, el sistema de pensamiento quedaba liberado de la lógica mecanicista del siglo XIX. En cierto modo parecía que la ciencia se auto-limitaba a sí misma y que los científicos tomaban conciencia de ello.

Tras el discurso de Palacios de 1932 y en consonancia con la importancia que esas teorías físicas estaban adquiriendo en Europa y Estados Unidos, los académicos españoles fueron incorporando la mecánica cuántica en las actividades docentes.

Citaremos aquí solamente un par de muestras de la incorporación de la cuántica en la vida académica española. La primera son las lecciones impartidas por Ferran Ramon Ferrando el curso 1932-1933 (Ramon Ferrando, 1933) y la segunda las dos visitas de Erwin Schrödinger a España, que tuvieron lugar los años 1934 y 1935. A continuación hacemos una rápida aproximación a ambas manifestaciones en lo concerniente a la docencia de las matemáticas que hoy nos ocupa.

## Didáctica en las aulas universitarias

Ferran Ramon Ferrando, profesor de física en la Universidad de Valencia durante el curso 1932-1933, recogió por escrito las lecciones impartidas en esa universidad con la declarada intención de «exponer en forma didáctica» un asunto que llenaba una extensa bibliografía (Ramon Ferrando, 1933: 85). Nosotros añadimos que, a semejanza de lo que hemos observado en otros autores, Ferrando perseguía una segunda intención. Esta era la de poner en claro sus propias ideas en relación con un tema que introducía una enorme complejidad en la interpretación de los fenómenos físicos si se comparaba con la sencillez de la mecánica de Newton.




ANALES
DE LA
UNIVERSIDAD DE VALEN
AÑO XIV 1933-1934
CUADERNO 106
Los cuantos de acción
POR D. FERNANDO RAMÓN Y FERRA
PROFESOR DE FÍSICA DE ESTA UNIVERSIDAD
FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS
SEMINARIO DE PSICOLOGÍA
UNIVERSIDAD DE BARCELONA
Me he propuesto en este pequeño trabajo poner en orden unas lecciones que el curso pasado expliqué en nuestra Facultad. Mi contribución personal consiste en un esfuerzo para exponer en forma didáctica un asunto que llena una extensa bibliografía. (Por lo que toda cita me parece superflua) pero que, sin embargo, no es fácil

Figura 1. «Los cuantos de acción» de Ferran Ramon Ferrando, manifestación temprana de la docencia de la mecánica cuántica en las aulas universitarias españolas

Nos detenemos brevemente para aclarar lo que Ferrando consideraba una exposición didáctica. En aquella época la enseñanza universitaria de la física en España se debatió en la disyuntiva entre incorporar el aparato matemático en las exposiciones de la teoría o renunciar en lo posible a él y recurrir alternativamente a explicaciones basadas en la intuición. Esta disyuntiva se plasmó en los distintos estilos expositivos de los dife-

rentes académicos, dando lugar a una polarización de la docencia cuyos resultados son difíciles de valorar. Ferrando defendía que el exceso de matemáticas distraía a los alumnos de los hechos fundamentales (Ramon Ferrando, 1925: 11). Por ese motivo prefería recurrir a ejemplos que reforzasen los aspectos conceptuales sin entrar en el detalle de la formulación matemática. Otros autores españoles como Esteban Terradas, del que más adelante hablaremos, defendían que solamente las matemáticas posibilitaban la comprensión de la disciplina, e insistía en este hecho en el planteamiento de sus lecciones relegando de ellas la discusión conceptual.

## Las visitas de Schrödinger

La segunda muestra, ya citada, de incorporación de la cuántica en la vida académica fueron las visitas de Schrödinger a España. Shrödinger, autor de la ya mencionada mecánica ondulatoria, fue invitado en 1934 a impartir unas lecciones sobre su teoría en la Universidad Internacional de Verano de Santander. Las lecciones de 1934 fueron recogidas por el filósofo Xavier Zubiri y publicadas posteriormente (Schrödinger, 1935). En la versión publicada de esas conferencias se omitió la justificación matemática con la que Schrödinger acostumbraba a presentar su teoría; no sabemos si fue porque el propio Schrödinger decidió hacer una presentación menos técnica de la mecánica ondulatoria o porque a Zubiri le pareció más adecuado plasmarlas así en su libro. Destacamos este hecho por lo que hemos comentado anteriormente respecto de la polémica sobre el uso de la matemática en la docencia de la física.

En preparación del curso que se iniciaba tras la primera visita de Schrödinger en 1934, Isidre Pòlit, profesor de la Universidad de Barcelona, presentó un programa para la asignatura de Física Matemática en la Facultad de Ciencias de dicha universidad que incorporaba lecciones sobre algunos temas relacionados con la física cuántica. El programa de Pòlit se remontaba a la teoría de la radiación del cuerpo negro de Planck de 1900 para tratar a continuación de la teoría de la cuantificación de Bohr-Sommerfeld y terminar con la introducción a los fundamentos de la mecánica ondulatoria de Schrödinger.

En 1935 Schrödinger fue invitado por segunda vez a España. En esa ocasión impartió unas conferencias en el Instituto de Física, ubicado en las dependencias del edificio construido en Madrid con el respaldo económico de la Rockefeller Foundation en 1932.

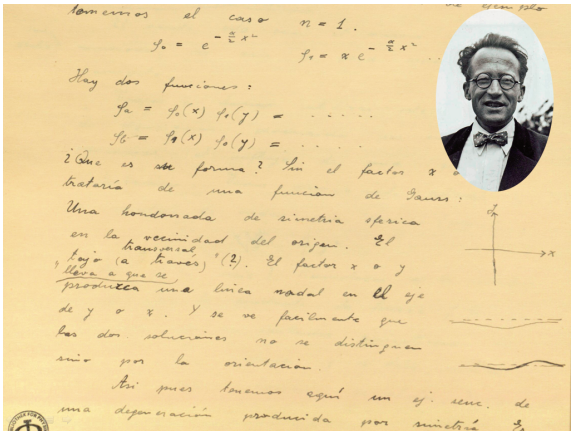


Figura 2. Borrador en castellano de las conferencias de Schrödinger en Madrid en 1935

El prestigio internacional de Blas Cabrera y su trabajo al frente del Laboratorio de Investigaciones Físicas, precursor del Instituto de Física, había influido en la decisión de los promotores de la Fundación Rockefeller y permitió modernizar las precarias instalaciones en las que se hallaba anteriormente dicho laboratorio. Las conferencias de 1935 fueron recogidas por un físico, Eduardo Gil Santiago, que no pudo publicar sus resúmenes hasta 1941[5]. Es de notar que, a diferencia de la publicación hecha por Zubiri de las conferencias de 1934, en la publicación hecha por Gil Santiago de las lecciones de 1935 abundan las expresiones matemáticas en la explicación, más en consonancia con la costumbre de Schrödinger.

Ese mismo año, 1935, Pòlit amplió su programa e incluyó el desarrollo de la ecuación de onda de Schrödinger, la utilización de los valores propios y las funciones propias y el significado físico de la función de onda Ψ.

Con los datos que poseemos a día de hoy no podemos concluir que la ampliación de los temas propuestos en los programas de Pòlit tenga su

origen en las conferencias de Schrödinger de esos años. Pero sí sabemos que algún efecto tuvieron en los asistentes. Uno de estos efectos se plasmó en una de las pocas manifestaciones de la mecánica cuántica que conocemos del período bélico 1936-1939. Nos referimos al estudio que el ingeniero de montes Fernando Peña Serrano publicó en 1937 en un artículo sobre la determinación de los niveles de energía del oscilador armónico (Peña, 1937). Como él mismo reconoce, dicho estudio se inspiró «en una idea expuesta por Schrödinger en las conferencias» de 1935.

## Cambios en la didáctica tras la guerra civil. Nuevas generaciones[6]

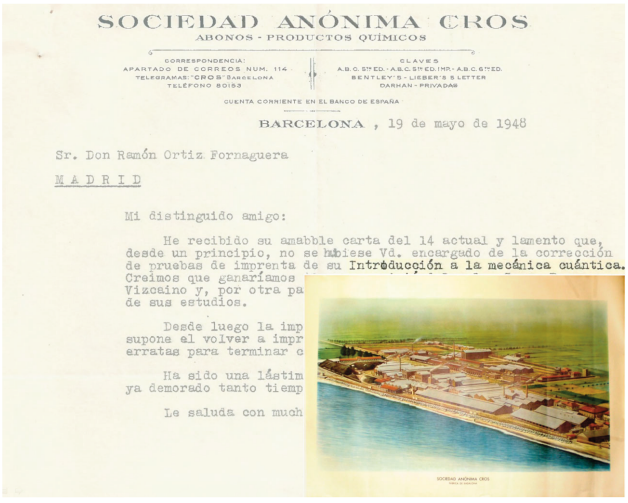
La matematización de las explicaciones de la nueva mecánica se incrementa tras la guerra civil. Al posible efecto diferido de las conferencias de Schrödinger en el Instituto de Física y Química se añade la aparición de nuevos personajes en el mundo académico. De entre ellos mencionaremos dos que creemos tuvieron cierta importancia, aunque esta se materializó de una forma indirecta. Se trata de Joaquín Catalá de Alemany y José García Santesmases.

Estos dos licenciados en Ciencias por la Universidad de Barcelona publicaron sendos trabajos en 1942 sobre algunas cuestiones de mecánica cuántica acerca de las que habían impartido seminarios en la misma universidad (Catalá, 1942), (García Santesmases, 1942). En ambos casos los trabajos respondían al resumen de lo que habían desarrollado durante el curso anterior y su publicación obedecía parcialmente a la finalidad de poner en orden las notas de lo trabajado y expuesto en clase.

Si bien no había pretensión de originalidad en sus monografías, estas cumplían una misión de indudable interés: poner de manifiesto lo avanzada que estaba la universidad en la docencia de esas cuestiones. Este avance no pasó desapercibido. Al menos no lo hizo a los ojos de un personaje de la época con influencias en el mundo tecnológico e industrial: Esteban Terradas.

Este ingeniero había sido a principios de siglo uno de los difusores de la mecánica estadística. Vinculado inicialmente al ámbito académico promovió la necesidad de formar a los alumnos en las técnicas matemáticas que les podían ayudar a interpretar las teorías físicas. Su posterior dedicación a intereses industriales, sumada a otras circunstancias administrativas, le supuso cierto distanciamiento de la evolución de la física (Roca Rosell y Sánchez Ron, 1990).

Sus conexiones políticas le permitieron acceder, tras la guerra, a una cátedra de Física Matemática desde la cual trató de promover activamente los intereses científicos en España. En esos intereses Terradas incluía la mecánica cuántica, pero lo cierto es que, en 1940, la física cuántica de Planck que él conocía había evolucionado mucho desde los años en que él había enseñado sus fundamentos en la universidad hacia 1910. Los trabajos de Catalá de Alemany y de García Santesmases hicieron que Terradas tomara conciencia de esa realidad y le estimularon a ponerse al día en una disciplina que entonces constituía la frontera de la física de vanguardia. Ese renovado interés de Terradas en la disciplina, apoyado en sus contactos e influencia, se reflejó en la docencia de su tiempo concretándose en publicaciones y seminarios sobre diversos aspectos de la mecánica cuántica. También se concretó ese interés en el ascendiente que Terradas ejerció sobre su discípulo Ramon Ortiz Fornaguera.



SOCIEDAD ANÓNIMA CROS
ABONOS - PRODUCTOS QUÍMICOS

CORRESPONDENCIA: APARTADO DE CORREOS NUM. 114 - TELEGRAMAS: "CROS" BARCELONA - TELÉFONO 60183
CLAVES: A.B.C. 5TH ED. - A.B.C. 5TH ED. INT. - A.B.C. 6TH ED. - BENTLEY'S - LIEBER'S 5 LETTER - DARHAN - PRIVADAS
CUENTA CORRIENTE EN EL BANCO DE ESPAÑA

BARCELONA , 19 de mayo de 1948

Sr. Don Ramón Ortiz Fornaguera
MADRID

Mi distinguido amigo:

He recibido su amabble carta del 14 actual y lamento que, desde un principio, no se hubiese Vd. encargado de la corrección de pruebas de imprenta de su Introducción a la mecánica cuántica. Creímos que ganaríamos Vizcaíno y, por otra pa de sus estudios.

Desde luego la imp supone al volver a impr erratas para terminar c

Ha sido una lástim ya demorado tanto tiemp

Le saluda con much

Figura 3. Gestiones para la publicación del libro *Introducción a la mecánica cuántica* de Ramon Ortiz a cargo de la S.A. Cros

Ramon Ortiz Fornaguera se había licenciado en Matemáticas y en Física en la Universidad de Barcelona al final de la guerra (Soler, 2015). Durante unos años impartió unas lecciones sobre mecánica cuántica dirigidas a los ingenieros y técnicos de la Sociedad Anónima Cros, industria dedicada a la elaboración de productos químicos con una importante factoría en Badalona. Estas lecciones fueron publicadas en 1947 y constituyen una de las primeras publicaciones en España sobre la disciplina (Ortiz, 1947). En esos años Ortiz realizó también su tesis doctoral bajo la dirección de Esteban Terradas y tradujo al castellano el libro de John von Neumann *Fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica*, obra que continúa siendo la referencia autorizada en ese terreno (von Neumann, 1932).

Catalá, Ortiz y en menor grado García Santesmases, que se reorientó profesionalmente hacia la computación, representan una nueva generación de jóvenes para los cuales la mecánica cuántica pudo haber supuesto un símbolo de identidad y un argumento a favor de la necesidad de renovación de la física universitaria de su tiempo. Estos físicos de nueva promoción incorporaron desde el primer momento el aparato matemático que ya se utilizaba en el centro científico en un intento de normalizar la docencia de la disciplina[7].

Estos físicos de nueva promoción incorporaron desde el primer momento el aparato matemático que ya se utilizaba en el centro científico en un intento de normalizar la docencia de la disciplina



## Normalización de la docencia

Quizá fuese ese deseo de normalización uno de los factores que indujeron a Ortiz a trabajar en la traducción del libro de von Neumann *Fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica*. En ese libro se desarrollan los principios matemáticos que sustentan la hoy conocida como *interpretación de Copenhagen* de la mecánica cuántica.

También muestra esa tendencia a la normalización el resumen de las conferencias de 1935 realizado por Eduardo Gil Santiago. Debido a la guerra dicho resumen no se publicó hasta 1941, coincidiendo en el tiempo con los trabajos anteriormente mencionados de Catalá de Alemany y de García Santesmases y abonando la idea de un cambio en el estilo de docencia.

En esa misma línea de cambio podrían interpretarse los dos libros publicados por el catedrático de la Universidad de Zaragoza José M.ª Íñiguez, doctor en Matemáticas y Química. Íñiguez publicó lo que nos parece ser la primera monografía de nivel universitario sobre mecánica cuántica en España en 1949 (Íñiguez, 1949)[8]. Pero lo que quisiéramos destacar aquí es que, quizá por su formación e interés en los aspectos matemáticos de la mecánica cuántica, Íñiguez publicó tres años antes un libro, también orientado a público universitario, sobre la teoría de operadores lineales, de gran importancia en esa disciplina (Íñiguez, 1946). Tiene sentido interpretar esta publicación como muestra del interés de Íñiguez por subsanar las carencias de sus estudiantes en ese terreno, revelando así la iniciativa de los académicos españoles en la europeización de los conocimientos matemáticos de su época.

## La mecánica cuántica vista por un matemático

Hasta aquí hemos ofrecido algunos apuntes sobre la dificultad que la complejidad matemática supuso en la transmisión de la teoría cuántica. La limitada tradición físico-matemática en España se unió a la polarización de los académicos entre el uso intensivo de la matemática en la docencia, o prescindir de ella. En esta disyuntiva cabe preguntarse cuáles fueron las aportaciones de los matemáticos, si es que las hubo, a ese proceso. Dado que hemos comenzado este resumen con palabras del matemático Julio Rey Pastor nos resulta grato tener la ocasión de volver sobre ese mismo autor para mencionar su incursión personal en el terreno de la mecánica cuántica.

Debe advertirse que la incursión de Rey Pastor es una de las pocas que conocemos realizada por un matemático fuera de las que protagonizaron los que además de la licenciatura de matemáticas disponían de la licenciatura de física, como es el

caso de Ramon Ortiz, o de la licenciatura de química, como es el caso de José M.ª Íñiguez. Esta escasez de aportaciones de los matemáticos a la física permite conjeturar que las dos ciencias se desarrollaban en silos independientes y con pocas injerencias. Los países del centro científico se habían encontrado ya en esa situación. Pero el vacío matemático que la física podía haber tenido en ellos fue parcialmente subsanado años antes, en 1924, por Richard Courant y David Hilbert con la publicación de un libro sobre los métodos matemáticos de la física (Courant y Hilbert, 1924). Ese libro fue referencia frecuente de los autores que trabajaron en los problemas de mecánica cuántica, motivo por el que no es aventurado decir que marcó a toda una generación de físicos. Sin embargo el Courant-Hilbert nunca fue traducido al castellano.

La aparición, en el año 1955, de un libro de Rey Pastor titulado *Los problemas lineales de la física*, supuso un intento tardío de remediar la situación (Rey Pastor, 1955). La conexión del libro de Rey con el tema que tratamos aquí es el capítulo VI de dicho texto, en el cual el autor incluye varias secciones relacionadas con la «nueva mecánica» que desarrollan el aparato matemático de aquellos aspectos más relevantes de la teoría.

## ¿Mecánica cuántica en la enseñanza secundaria?

Por último, es interesante observar que, pese a la complejidad de la nueva disciplina, su difusión no se limitó al ambiente universitario. Fuera de ese contexto también otros actores trataron de comprender, asimilar y transmitir la nueva teoría. Ya hemos mencionado que en el ámbito de la industria Ramon Ortiz impartió unas clases a principios de los 40, pero quizá más interesante para los lectores de este resumen resulte destacar el papel del profesor de instituto Juan Bautista Puig Villena.

Puig Villena, natural de Xàtiva (Valencia), ejerció en 1928 como profesor de matemáticas del instituto local de Villacarrillo (Jaén). Su interés científico y académico le movió a realizar una petición a la Junta para la Ampliación de Estudios para asistir al curso en Madrid del profesor P. Scherrer de la Escuela Politécnica de Zurich sobre la física de los rayos Röntgen y la estructura de los cristales[9]. Tras enseñar en Zafra (Badajoz) un tiempo, fue director de un colegio de Irún, donde entró en contacto con el Centro de Estudios Científicos de San Sebastián, del que fue socio. De esa época es su trabajo *La teoría corpuscular de la luz* (Puig Villena, 1935b). Posteriormente fue destinado a Antequera (Málaga) y Alcoy, lugar, este último, donde publicó *Breve idea de la mecánica ondulatoria* (Puig Villena, 1935a).

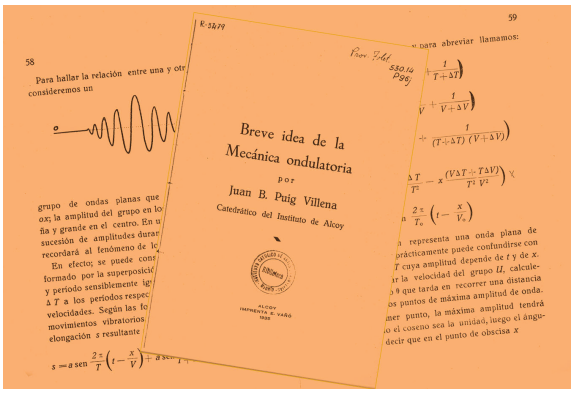

Breve idea de la
Mecánica ondulatoria
por
Juan B. Puig Villena
Catedrático del Instituto de Alcoy

Figura 4. Texto que atestigua que la nueva mecánica interesó también al profesor de enseñanza secundaria Juan Bautista Puig Villena

Ambos ensayos tratan de diversos aspectos relacionados con la mecánica cuántica y, al igual que hemos observado en el caso de Ramon Ferrando y otros autores, el objetivo de los trabajos combinaba los intereses didácticos con la necesidad de poner por escrito sus estudios y reflexiones sobre esa materia. Sus conexiones políticas previas a la guerra civil le obligaron a exiliarse a Costa Rica al acabar esta (Baig, 2014).

## Consideraciones finales

Las matemáticas presentaron una dualidad en el proceso de difusión de la mecánica cuántica que conviene señalar. Por un lado otorgaban credibilidad a la nueva física forzando una aceptación

casi obligada de las teorías y sus consecuencias. Por otro lado, la complejidad de sus razonamientos podía suponer un distanciamiento intelectual no siempre deseado por los físicos, a los que interesaba mantener la atención social por sus actividades científicas.

Por la trascendencia de sus postulados, la mecánica cuántica y las matemáticas que soportaban sus conclusiones permearon la sociedad española. Lo provocativo de la especulación física y lo complejo de su aparato matemático se combinaron de tal forma que la disciplina se expandió con lentitud, pero los físicos y matemáticos españoles realizaron notables esfuerzos para mantenerse al día en lo relacionado con la nueva mecánica.

Aunque el resultado de su esfuerzo no les permitió seguir el ritmo de los avances del centro científico, se han de valorar las enormes dificultades con que se encontraron, consecuencia en gran medida de la organización política, social, científica y económica de su país.



## Referencias bibliográficas

Ausejo, E., y A. Millán (1989), «La organización de la investigación matemática en España en el primer tercio del siglo xx: El laboratorio y seminario matemático de la junta para ampliación de estudios e investigaciones científicas (1915-1938)», *Llull* 12 (23), 261-308.

Baig, M. (2014), «Enseñanza y divulgación de la física moderna durante la república y la guerra: El caso del profesor Juan B. Puig Villena», *Enseñanza e historia de las ciencias y de las técnicas: Orientación, metodología y perspectivas: Actas del VII simposio de enseñanza e historia de las ciencias y de las técnicas de la SEHCYT, Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, SEHCYT, Barcelona, 29-35.

Catalá, J. (1942), «Idea acerca de las modernas estadísticas en el campo de la física», *Anales de la Universidad de Barcelona*, 1941-1942, 133-158.

Courant, R., y D. Hilbert (1924), *Methoden der mathematischen Physik*, Julius Springer, Berlín.

García, J. (1942), «Conceptos modernos sobre ondas y corpúsculos», *Anales de la Universidad de Barcelona*, 1941-1942, 159-212.

Gil, E. (1941*a*), «Nociones de la nueva mecánica cuántica», *Metalurgia y Electricidad*, 47, 31-35.

— (1941*b*), «Nociones de la nueva mecánica cuántica», *Metalurgia y Electricidad*, 48, 54-58.

— (1941*c*), «Nociones de la nueva mecánica cuántica», *Metalurgia y Electricidad*, 51, 22-27.

Heisenberg, W. (1930), *The physical principles of the quantum theory*, Dover Publications, Nueva York.

Herran, N., y X. Roqué (eds.) (2012), *La física en la dictadura. Físicos, cultura y poder en España 1939-1975*, Universitat Autónoma de Barcelona, Bellaterra.

Íñiguez, J. M. (1946), *Operadores Lineales en los Espacios Métricos*, Academia de Ciencias de Zaragoza, Zaragoza.

— (1949), *Mecánica Cuántica*, Academia de Ciencias de Zaragoza, Zaragoza.

Ortiz, R. (1947), *Introducción al estudio de la Mecánica Cuántica*, Sociedad Anónima Cros, Barcelona.

Palacios, J., y B. Cabrera (1932), *Discurso leído en el acto de su recepción en la Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, y contestación de Blas Cabrera*, Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Toledo.

Peña, F. (1937), «Un método para determinar los niveles de energía del oscilador armónico», *Revista Matemática Hispano-Americana*, 12, 10-16.

Puig, J. B. (1935*a*), *Breve idea de la mecánica ondulatoria*, Imprenta E. Vañó, Alcoy.

— (1935*b*), *Teoría corpuscular de la luz*, Revista del Centro de Estudios Científicos de San Sebastián, San Sebastián.

Ramon, F. (1925), *Materia y radiación. Discurso inaugural leído en la solemne apertura de curso académico de 1924 a 1925*, Clásica Española, Madrid.

— (1933), «Los cuantos de acción», *Anales de la Universidad de Valencia*, XIV (106), 85-155.

Rey, J. (1915), «Las matemáticas en España durante el siglo xx. Discurso inaugural de la sección 1ª Ciencias Matemáticas del Congreso de Valladolid celebrado por la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias», *Revista de Obras Públicas*. LXIII (2082), 529-535.

— (1955), *Los problemas lineales de la física*, CSIC-Dpto. de Publicaciones, 1988, Madrid.

Roca, A., y J. M. Sánchez, (1990), *Esteban Terradas 1883-1950: Ciencia y técnica en la españa contemporánea*, Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial, Madrid.

Sánchez, J. M. (1990), «La física matemática en España: De Echegaray a Rey Pastor». *Arbor*, 532, 9-60.

Schrödinger, E. (1935), *La nueva mecánica ondulatoria*, (Traductor X. Zubiri), Signo, Madrid.

Soler, P. (2015), «La obra científica de Ramon Ortiz Fornaguera (1916-1974): Un capítulo de la física matemática, teórica y nuclear en la dictadura franquista», *Actes d'Història de la Ciència i de la Tècnica*, 8, 9-55.

von Neumann, J. (1932), *Fundamentos Matemáticos de la Mecánica Cuántica*, 1949 (Traductor R. Ortiz), Instituto de Matemáticas Jorge Juan, Madrid.

Gonzalo Gimeno Valentín-Gamazo
*Universitat Autònoma de Barcelona*
<ggimenovg@gmail.com>
Mercedes Xipell Gómez del Moral
*Universitat Autònoma de Barcelona*
<mxipellg@gmail.com>



1 Este trabajo ha recibido soporte del Ministerio de Economía y Competitividad en el marco del proyecto «La física en la construcción de Europa» (HAR2014-57776-P).

2 La cursiva es nuestra.

3 La ecuación de onda de Schrödinger era una de las piezas fundamentales de la «mecánica ondulatoria». Esta era una de las expresiones formales de la mecánica cuántica. Uno de sus rasgos característicos era que sustentaba el carácter continuo de los fenómenos físicos. Otra de las expresiones formales de la misma teoría era la «mecánica de matrices» de Heisenberg que, a diferencia de la anterior, servía de apoyo al carácter discreto de esos mismos fenómenos. Durante un tiempo los físicos se vieron envueltos en una notable confusión debido a la aparente contradicción de ambas expresiones. Finalmente el propio Schrödinger demostró que eran equivalentes, aunque la contienda persistió respecto de cuál de las dos recogía mejor las sutilezas del mundo subatómico.

4 También conocida como «interpretación de Copenhagen».

5 Gil Santiago (1941*a*, 1941*b*, 1941*c*).

6 En Herran y Roqué (2012) se ofrece una visión actualizada de la física en España durante el período franquista.

7 Por «centro científico» nos referimos aquí a los países europeos y americanos que más notablemente contribuyeron al desarrollo de la mecánica cuántica.

8 Recuérdese que las lecciones de Ortiz anteriormente mencionadas no estaban dirigidas a estudiantes universitarios.

9 Hasta su supresión tras la guerra civil, la Junta de Ampliación de Estudios (JAE) posibilitó que numerosos estudiantes españoles completaran su formación junto a relevantes personalidades académicas de su tiempo en diversas ciudades de todo el mundo. Se pueden consultar muchos detalles de su actividad en el Archivo de la Junta de Ampliación de Estudios <http://edaddeplata.org/>. La JAE promovió también el Laboratorio y Seminario Matemático en 1915 (Ausejo y Millan, 1989).

PALEXCO
A Coruña

3 a 6 julio 2019

# JAEM 19

## UN ATLÁNTICO QUE SUMA

CONVOCA: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

ORGANIZA: AGAPEMA

COLABORAN:

GOBIERNO DE ESPAÑA · MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE

XUNTA DE GALICIA
CONSELLERÍA DE CULTURA, EDUCACIÓN E ORDENACIÓN UNIVERSITARIA

Deputación DA CORUÑA

Ayuntamiento de A Coruña
Concello da Coruña

suma+ 88
Artículos
Julio 2018
pp. 19-26

# Leyendo problemas antiguos. Dos ejemplos del siglo XVII español

Antonio M. Oller Marcén



Los problemas planteados en textos matemáticos antiguos solían ir acompañados de reglas aritméticas concretas para resolverlos que consistían en una descripción de las operaciones a realizar con los datos particulares del problema. La lectura de estos textos resulta complicada e implica soluciones que se alejan de las ideas utilizadas realmente por los autores. En este trabajo presentamos una serie de pasos según los cuales organizar la lectura de problemas antiguos y lo ejemplificamos a partir de dos problemas del Barroco. Este trabajo puede ser útil para la formación del profesorado.

*Palabras clave:* Historia de las matemáticas, Educación matemática, Siglo XVII, Formación de profesorado.

**Reading ancient problems. Two examples from 17th century in Spain**

The problems that can be found in ancient mathematical texts were usually accompanied with particular arithmetic rules that consisted of a description of the computations to be performed with the numerical data of the problem. Reading these texts is difficult and it often implies the use of ideas alien to those really used by the authors. In this work we present some steps to organize the reading of ancient problems and exemplify them with to problems from the Baroque. This work can be useful in teacher training.

*Keywords:* History of mathematics, Mathematics education, 17th century, Teacher training.

La lectura de textos antiguos de matemáticas puede tener interés para el profesorado de matemáticas desde múltiples puntos de vista (Lupiáñez, 2002). Existe indudablemente un interés histórico y humanístico, puesto que la lectura de textos antiguos muestra las matemáticas dentro de un contexto histórico y científico más amplio y como un constructo cultural humano. Existe también un interés puramente matemático, ya que no debe descartarse el hecho de que la lectura de ciertas obras antiguas, clásicas o no, pueda contribuir a aumentar los conocimientos matemáticos del lector. Finalmente, también tenemos un interés didáctico, puesto que la lectura de textos antiguos puede mostrar errores que algunos alumnos siguen cometiendo actualmente o ilustrar obstáculos para el aprendizaje de ciertos conceptos. Como consecuencia de este interés existe abundante literatura que, entre otros aspectos, muestra experiencias de aula basadas en el uso de fuentes antiguas para diseñar actividades con diversos objetivos (Jahnke y otros, 2000).

Muchos de los problemas que aparecen en textos antiguos (y que en muchas ocasiones siguen apareciendo en los libros de texto actuales) van acompañados de reglas aritméticas particularizadas a los datos concretos del problema en que se presentan y enunciadas sin justificación alguna.

Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2017 y aceptado en enero de 2018

Por ello, el uso de fuentes originales necesita de un intenso y, a veces complicado, trabajo de análisis previo. Parte de este trabajo previo supone tratar de entender cómo los autores resuelven los problemas que presentan puesto que, a menudo, las indicaciones que presentan son muy escasas. Así pues, la lectura de un problema antiguo de cara a su análisis y posible utilización en el aula podría realizarse según las siguientes fases:

1. Lectura detenida del enunciado, modernizando el lenguaje si es necesario.
2. Resolución del problema haciendo uso de las técnicas que se consideren más adecuadas y sin tener en cuenta la resolución original del autor.
3. Lectura detenida de la resolución original del autor, modernizando el lenguaje si es necesario.
4. Análisis de la solución original, tratando de ubicarla en el contexto histórico y matemático de la obra.
5. Comparación de la solución original con la actual.



Desde el punto de vista del docente de matemáticas, cada uno de estos pasos puede presentar distintas dificultades y supone, a su vez, oportunidades de aprendizaje y de puesta en juego de distintas competencias profesionales.

La lectura del enunciado puede ser difícil tanto por el lenguaje utilizado como por la tipografía del texto. La evolución en el idioma (ortografía y gramática) puede resultar interesante aunque no sea desde un punto de vista matemático. Por otro lado, el enunciado también puede proporcionar información histórica interesante sobre la época en la que se escribió el problema o sobre su autor.

La resolución personal del problema es interesante desde un punto de vista matemático. Su dificultad puede ser variable y al resolverlo enfrentamos las posibles dificultades que puede presentar y también comprendemos con mayor detalle el problema. Resulta conveniente tratar de resolver el problema de modo autónomo como si fuéramos estudiantes que están leyendo el libro.

La lectura de la solución del autor comparte con la lectura del enunciado las dificultades lingüísticas. A ellas hay que añadir la posibilidad de que la solución dada por el autor sea incompleta, poco clara o, a veces, incorrecta. En cualquier caso, desde el punto de vista del profesor de matemáticas, resulta interesante observar el modo en que un profesor de otra época presentaba la solución de un problema a sus eventuales alumnos.

La solución dada por el autor debe ser considerada dentro de un contexto histórico y matemático concreto. Debe evitarse proyectar sobre los textos conocimientos actuales y también considerar como inferiores soluciones que con ojos actuales parezcan incompletas o incorrectas. Tratamos de resolver el problema con las herramientas que pensamos que pudo haber tenido el autor en el momento de escribir el texto. Esto implica ponernos en el lugar del autor retrocediendo en el tiempo y olvidar parte de nuestros conocimientos matemáticos más *avanzados*. Aunque esto conlleva dificultades, puede suponer un ejercicio interesante.

Finalmente, al comparar la solución que el autor consideraba correcta con nuestra propia solución, y al analizar y comprender el origen de la solución original, podemos apreciar el carácter histórico y evolutivo del conocimiento matemático. Nuevamente hay que realizar esta labor de comparación de la forma más neutra posible evitando llevar a cabo juicios de valor sobre la superioridad de uno u otro enfoque. Desde el punto de vista docente tiene mucho más interés comparar las distintas soluciones a un problema en base a las ideas que se ponen en juego, a los sistemas de representación utilizados o a las dificultades y obstáculos que puede suponer cada una de ellas.

En este trabajo presentamos dos ejemplos de lectura de problemas antiguos según los pasos anteriores. Ambos provienen de textos españoles del siglo XVII disponibles digitalmente en la red. En cualquier caso, para el lector interesado, proporcionamos algunos breves apuntes bio-bibliográficos de los autores de las obras a las cuales pertenecen los problemas escogidos.

Estos ejemplos fueron utilizados en un taller impartido por el autor en las V Jornadas de Enseñanza de las Matemáticas en Navarra. En dicho taller se resolvieron y analizaron estos problemas y se discutieron algunas ideas a partir del trabajo realizado. En la conclusión, comentaremos algunas

ideas sobre las que reflexionar a partir de estos problemas, así como algunas líneas en las que se podría continuar el trabajo con este tipo de materiales.

## Un problema astronómico del valenciano Jerónimo Cortés

Jerónimo Cortés fue un autor valenciano, quizás de Gandía, que vivió entre finales del siglo XVI y principios del XVII. No solo escribió sobre matemáticas y astronomía, sino también sobre ciencias naturales. (Picatoste, 1891: 57-61). De hecho, de las seis obras que se le conocen, solo dos son de contenido puramente matemático: el *Compendio de reglas breves* (Cortés, 1594) y la *Arithmetica practica* (Cortés, 1604). Se conoce muy escasa información sobre su vida y la que se dispone proviene casi exclusivamente de los prólogos y dedicatorias de sus obras. Fue maestro de contar, probablemente sin formación universitaria, tuvo al menos cinco hijos y sufrió diversos problemas económicos durante su vida. En 1591 publicó su primera obra, el *Tratado del cómputo por la mano* (Cortés, 1591) y la última, *Libro y tratado de los animales terrestres y volátiles* (Cortés, 1613), apareció ya de forma póstuma en 1613. Sus obras más conocidas no fueron las de carácter matemático. Por ejemplo, su libro *Fisonomía natural y varios secretos de naturaleza* (Cortés, 1599) fue editado más de 100 veces, mientras que su *Lunario nuevo, perpetuo y general, y pronóstico de los tiempos universal* (Cortés, 1596) se editó unas 70 veces. Respecto a su obra matemática, el texto más importante es su *Arithmetica practica* (Cortés, 1604) que supone, en cierto modo, la culminación de una vida dedicada a las matemáticas. En el prólogo de dicha obra el propio autor dice sobre la matemática que «ha muchos años que la profeso y enseño, trabajo y deprendo». Esta obra (Salavert i Fabiani, 1979), fue reeditada póstumamente dos veces, primero en 1659 y de nuevo, casi un siglo después del fallecimiento de su autor, en 1724 (figura 1).

En la página 456 de la *Arithmetica practica* (figura 2) encontramos un problema clásico relacionado con la astronomía. En concreto se trata de estudiar la conjunción de Júpiter y Saturno; es decir, estudiar el tiempo que tardan dichos planetas en volver a estar alineados con el Sol. Desde un punto de vista histórico, es posible encontrar problemas semejantes a este en textos de distintos orígenes y tradiciones (Meavilla y Oller, 2015). Se trata, en realidad, de un problema de móviles en el que la astronomía proporciona únicamente un contexto en el que plantear el problema.



ARITHMETICA PRACTICA

DE GERONYMO CORTES,

MVY VTIL, Y NECESSARIA PARA TODO GENERO DE TRATANTES Y MERCADERES: LA QVAL CONTIENE TODO EL ARTE MENOR, Y PRINCIPIOS del mayor, que son las rayzes cubicas y quadradas, con los vsos y provechos dellas; las falsas posiciones al vso antiguo, y moderno declaradas. Contiene assi mesmo el modo y arte de inventar, y reduzir vnas monedas en otras, por reglas breves, con mucha variedad de preguntas y resp. puestas, assi Arithmeticas, como Geometricas.

Compuesto y ordenado por el predicho Geronimo Cortes natural de Valencia.

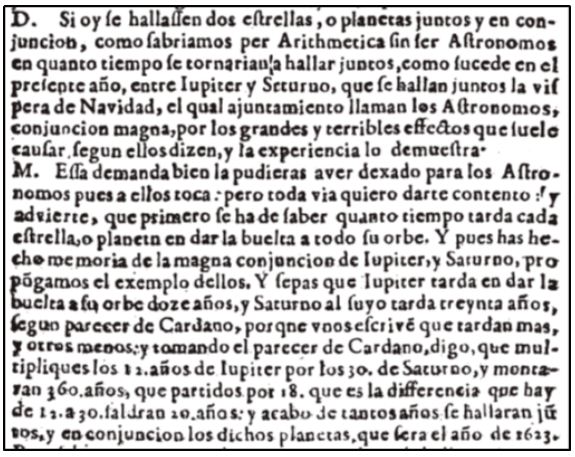
En esta vltima impression añadida, y mejorada.

*Al Illustre señor Don Lorenço Matheu, y Sanz, Cavallero del habito de Montesa, del Consejo de su Magestad, antes Oydor en la Real Cancilleria de Valencia, y aora Alcalde de su Casa, y Corte.*

En Valencia por Iuan Lorenzo Cabrera delante la Diputacion. Año 1659.

*A costa de Matheu Regil, Mercader de libros, viuente en su casa junto al Colegio del señor Patriarca.*

Figura 1



D. Si oy se hallassen dos estrellas, o planetas juntos y en conjuncion, como sabriamos per Arithmetica sin ser Astronomos en quanto tiempo se tornarian a hallar juntos, como sucede en el presente año, entre Iupiter y Saturno, que se hallan juntos la vispera de Navidad, el qual ajuntamiento llaman los Astronomos, conjuncion magna, por los grandes y terribles effectos que suele causar, segun ellos dizen, y la experiencia lo demuestra.

M. Essa demanda bien la pudieras aver dexado para los Astronomos pues a ellos toca: pero toda via quiero darte contento: y advierte, que primero se ha de saber quanto tiempo tarda cada estrella, o planeta en dar la buelta a todo su orbe. Y pues has hecho memoria de la magna conjuncion de Iupiter, y Saturno, pongamos el exemplo dellos. Y sepas que Iupiter tarda en dar la buelta a su orbe doze años, y Saturno al suyo tarda treynta años, segun parecer de Cardano, porque vnos escriuē que tardan mas, y otros menos: y tomando el parecer de Cardano, digo, que multipliques los 12. años de Iupiter por los 30. de Saturno, y montaran 360. años, que partidos por 18. que es la differencia que hay de 12. a 30. saldran 20. años: y acabo de tantos años se hallaran iũtos, y en conjuncion los dichos planetas, que sera el año de 1623.

Figura 2

La lectura del problema proporciona información interesante. Además de los datos astronómicos sobre la rotación de Júpiter y Saturno en torno al Sol, muy ajustados a la realidad, se habla de Cardano y, además, podemos descubrir el año de escritura del libro; puesto que se dice que dentro de 20 años será 1623. Pese a tener casi 400 años, la lectura del problema no es complicada, aunque la ortografía y gramática varía mucho de las actuales. En cualquier caso, el enunciado del problema expresado en lenguaje moderno y de forma concisa sería el siguiente:

> Saturno tarda 30 años en completar su órbita en torno al Sol, mientras que Júpiter lo hace en 12. Si hoy ambos planetas están alineados con el Sol, ¿cuándo volverán a estarlo?

Una posible solución a este problema, tal y como podría encontrarse en cualquier libro de texto actual y utilizando lenguaje algebraico, es la siguiente. Si llamamos $x$ al tiempo que tardarán en volver a encontrarse ambos planetas, el planeta más rápido (Júpiter) habrá dado exactamente una vuelta más que el más lento (Saturno) en ese tiempo. Por tanto se debe cumplir que

$$\frac{x}{12}=\frac{x}{30}+1$$

Resolviendo la ecuación se obtiene la respuesta buscada: 20 años.

La solución original de Cortés, como se corresponde con un texto de aritmética, no involucra ningún uso de lenguaje algebraico. De hecho, la respuesta del autor es meramente descriptiva:

> Multiplica los 12 años de Júpiter por los 30 de Saturno, y obtendrás 360 años, que partidos por 18, que es la diferencia de 12 a 30, saldrán 20 años.

Como es habitual en textos de la época, el autor no da ningún tipo de indicación sobre las ideas subyacentes al proceso que describe. Si retomamos la solución algebraica moderna y detallamos los pasos necesarios para resolver la ecuación anterior, obtenemos una secuencia de operaciones como la siguiente:

$$\frac{x}{12}=\frac{x}{30}+1\Rightarrow\frac{x}{12}-\frac{x}{30}=1\Rightarrow$$
$$\left(\frac{30-12}{30\times12}\right)x=1\Rightarrow x=\frac{30\times12}{30-12}=\frac{360}{18}=20$$

En el último paso de esta secuencia de operaciones aparecen las operaciones que Cortés proponía como solución al problema. El producto de 12 por 30 dividido entre la diferencia de esos mismos dos números. Sin embargo, no debemos pensar que el autor, al dar esta solución, estuviera llevando a cabo las operaciones que acabamos de mostrar. De hecho, en toda su obra no aparece ningún contenido relacionado con el álgebra. Así pues, si queremos entender realmente la solución original de Cortés, hemos de tratar de dar una interpretación a esas operaciones que involucre únicamente ideas aritméticas. Podemos encontrar, al menos, dos posibles interpretaciones.

1. Saturno da 1/30 de vuelta al año, mientras que Júpiter da 1/12 de vuelta al año. Así pues, al cabo de un año, el número de vueltas de adelanto de Júpiter sobre Saturno será:

$$\frac{1}{12}-\frac{1}{30}=\frac{30-12}{30\times12}$$

En consecuencia, para que el adelanto sea exactamente de una vuelta, deberá haber transcurrido un número de años igual a:

$$\frac{30\times12}{30-12}=20$$

2. Supongamos que han transcurrido 360 años (producto de 30 y 12). En ese tiempo, Saturno habrá dado 12 vueltas en torno al Sol mientras que Júpiter habrá dado 30. Es decir, el adelanto de Júpiter sobre Saturno al cabo de 360 años es de 18 vueltas (resta de 30 y 12). Por lo tanto, si queremos saber el tiempo que debe transcurrir para que dicho adelanto sea solo de una vuelta, basta con dividir 360 entre 18.

Finalmente, para completar la lectura del problema, vamos a comparar las tres soluciones que hemos presentado para analizar las posibles fortalezas y debilidades de cada una de ellas.

— Como es habitual, la solución algebraica permite una resolución rápida y directa del problema, pero oculta el significado de las operaciones realizadas. Es muy difícil, por no decir imposible, proporcionar una interpretación, por ejemplo, al producto de 30 por 12 en este contexto. Además, el

planteamiento de la ecuación no es trivial y es necesario observar que en el momento del reencuentro el planeta más rápido habrá dado exactamente una vuelta más que el planeta más lento.

— La primera resolución aritmética implica la consideración de las velocidades de cada planeta. Esto aumenta la complejidad de esta solución puesto que debe construirse una nueva magnitud. Por lo demás, esta solución involucra ideas sencillas sobre proporcionalidad y razones inversas. Así, en el último paso se invierte la razón que representa el número de vueltas de ventaja al cabo de un año, para obtener el tiempo necesario para obtener una ventaja de una vuelta. En este caso, tampoco es fácil asignar un significado claro y sencillo al producto y a la diferencia de 30 y 12. Dichas operaciones surgen únicamente dentro de la aplicación de un algoritmo de operación con fracciones.

— La segunda resolución aritmética es un ejemplo de la llamada *regla de falsa posición*. Se trata de la solución conceptualmente más simple pues no requiere de la consideración de nuevas magnitudes. Además, las operaciones realizadas tienen un sentido claro y sencillo. El producto de 30 por 12 se toma para considerar un tiempo que es múltiplo de ambos. La diferencia entre 30 y 12 son las vueltas de adelanto del rápido sobre el lento en ese tiempo. El cociente se realiza para obtener un valor unitario, por lo que de nuevo aparecen ideas relacionadas con la proporcionalidad.

## Un problema de herencias de Andrés Puig de Vic

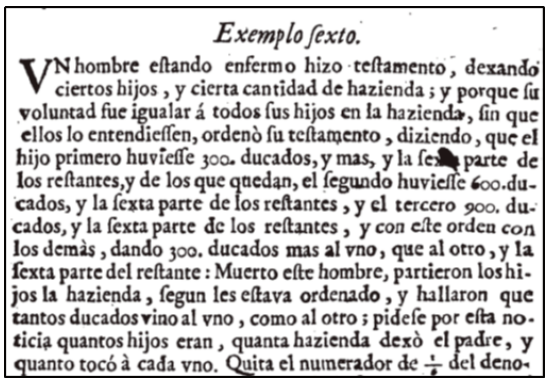
De la vida de Andrés Puig sabemos incluso menos que de Jerónimo Cortés. Nació en Vic, según los datos que leemos en su obra, estudió en Valencia y vivió en Barcelona (Rodríguez Vidal, 1980). Su única obra conocida es la *Arithmetica especvlativa y practica y arte de algebra* (Puig, 1672) que se publicó por primera vez en 1670 (figura 3) y fue reeditada, al menos en cuatro ocasiones más hasta mediados del siglo XVIII (León y Sanz, 1994).



ARITHMETICA
ESPECVLATIVA,
Y PRACTICA, Y ARTE
DE ALGEBRA.
EN LA QVAL SE CONTIENE TODO LO que pertenece al Arte menor, ò mercantivol, y à las dos Algebras, Racional, è Irracional; con la explicacion de todas las propoſiciones, y problemas de los Libros quinto, ſeptimo, octavo, nono, y decimo del Principe de la Matematica Euclides.
COMPVESTO, ORDENADO, Y HECHO imprimir por el Maeſtro ANDRES PVIG, natural de la Ciudad de Vique, deſte Principado de Cataluña, y vezino de la de Barcelona.
DIRIGIDA A LOS MVY ILVSTRES SEÑORES Conſelleres, y Sabio Conſejo de Ciento de la Ciudad de Barcelona.
EN BARCELONA,
Por ANTONIO LACAVALLERIA, Año M.DC.LXXII.
Vendenſe en caſa del miſmo Autor.
Con Licencia, y Privilegio.

Figura 3

En la página 246 de esta obra (figura 4) encontramos un curioso problema de herencias. Estos problemas de herencias son muy comunes en las aritméticas de la época y tienen un claro origen musulmán. Este problema en concreto se encuentra en multitud de textos anteriores como, por ejemplo, el *Libro primero, de Arithmetica Algebratica* de Marco Aurel (1552).



*Exemplo ſexto.*

VN hombre eſtando enfermo hizo teſtamento, dexando ciertos hijos, y cierta cantidad de hazienda; y porque ſu voluntad fue igualar á todos ſus hijos en la hazienda, ſin que ellos lo entendieſſen, ordenò ſu teſtamento, diziendo, que el hijo primero huvieſſe 300. ducados, y mas, y la ſexta parte de los reſtantes, y de los que quedan, el ſegundo huvieſſe 600. ducados, y la ſexta parte de los reſtantes, y el tercero 900. ducados, y la ſexta parte de los reſtantes, y con eſte orden con los demàs, dando 300. ducados mas al vno, que al otro, y la ſexta parte del reſtante: Muerto eſte hombre, partieron los hijos la hazienda, ſegun les eſtava ordenado, y hallaron que tantos ducados vino al vno, como al otro; pideſe por eſta noticia quantos hijos eran, quanta hazienda dexò el padre, y quanto tocó à cada vno. Quita el numerador de $\frac{1}{6}$ del deno-

Figura 4

La escritura es muy similar a la de la obra de Cortés analizada anteriormente y su lectura resulta sencilla. En este caso la información histórica es escasa más allá de la aparición de una unidad monetaria antigua, los ducados. La adaptación del problema al lenguaje moderno, manteniendo el uso de los ducados como unidad monetaria es la siguiente:

> Un hombre hace testamento, dejando ciertos hijos, y cierta cantidad de hacienda. Ordenó que el hijo primero tuviese 300 ducados y la sexta parte de los restantes, que el segundo tuviese 600 ducados y la sexta parte de los restantes, y el tercero 900 ducados y la sexta parte de los restantes, etc. De este modo, resultó que todos los hijos recibieron la misma herencia. ¿Cuánta fue la herencia y cuánto tocó a cada hijo?

A continuación proponemos una posible solución a este problema. Supongamos que $H$ es el importe de la herencia, y que $x_k$ es la parte de la misma que recibe el $k$-ésimo hijo. Entonces, tenemos que

$$x_k = 300k + \frac{1}{6}\left(H - 300k - \sum_{i=1}^{k-1} x_i\right)$$

En particular, se tiene que

$$x_1 = 300 + \frac{1}{6}\left(H - 300\right)$$
$$x_2 = 600 + \frac{1}{6}\left(H - 600 - x_1\right)$$

y como todos los hijos deben recibir la misma herencia (es decir, $x_1 = x_2$), se obtiene que

$$300 + \frac{1}{6}\left(H - 300\right) = 600 + \frac{1}{6}\left(H - 600 - x_1\right)$$

de donde se deduce que $x_1 = 1500$ y, consecuentemente, que el padre tenía 5 hijos y que su herencia fue $H = 7500$.

Pese a que el texto de Puig presenta contenidos algebraicos, este problema aparece en una sección en la que no se hace uso de los mismos. De hecho, la solución dada por el autor es bastante esquemática y puramente descriptiva:

> Quita el numerador de 1/6 del denominador y quedarán 5 y tantos hijos dejó el padre; sabido cuántos hijos dejó. Multiplica por 300 ducados que se dan en principio, por 5 y montarán 1 500 ducados y tantos vinieron por cada hijo, y porque los hijos son 5 multiplica los 1 500 ducados por 5 y montarán 7 500 ducados por la hacienda que dejó el padre; pruébalo pues es fácil, y hallarás ser verdad.

Dar una interpretación de esta solución resulta algo más complicado que en el caso anterior, debido a que se trata de un problema más complejo que involucra múltiples cantidades desconocidas. Vamos a presentar un posible razonamiento que quizás permita comprender el origen de la solución dada por Puig. Para ello vamos a utilizar lenguaje simbólico (con la misma notación anterior), si bien todos los argumentos que presentaremos se podrían presentar retóricamente de un modo más historicista. Comenzamos calculando lo que recibe el primer hijo y reescribiéndolo adecuadamente:

$$x_1 = 300 + \frac{1}{6}\left(H - 300\right) = \frac{H}{6} + \frac{5}{6}\cdot 300$$

Es decir, el primer hijo recibe un sexto de la herencia y cinco sextos de 300. Esta manera de escribir la parte del primer hijo es interesante porque saca a la luz la resta de «el numerador de 1/6 del denominador». Ahora, hacemos algo parecido con la parte del segundo hijo:

$$x_2 = 600 + \frac{1}{6}\left(H - 600 - x_1\right) =$$
$$= \frac{H}{6} + \frac{5}{6}\cdot 300 + \frac{5}{6}\cdot 300 - \frac{1}{6}x_1$$

En este caso, al escribir la parte del segundo hijo de esta forma, podemos compararlo muy fácilmente con la parte del primer hijo. Para que ambos reciban lo mismo se debe cumplir que

$$\frac{5}{6}\cdot 300 - \frac{1}{6}x_1 = 0$$

Y así se obtiene la solución buscada.

Como hemos dicho, en este caso el uso del lenguaje algebraico es meramente circunstancial y todo podría haberse llevado a cabo de forma verbal. Este enfoque se aproxima muy probablemente a la cadena de razonamientos usada por el autor ya que implica únicamente la manipulación de las cantidades involucradas descomponiéndolas de manera adecuada para permitir comparaciones. Además, estas manipulaciones ponen de manifiesto claramente el porqué de las condiciones del problema. Para que el procedimiento funcione es crucial que cada hijo reciba sucesivamente 300 ducados más que el anterior.

Terminamos la lectura del problema comparando ambas soluciones.

— El uso del lenguaje algebraico en la solución moderna permite escribir de forma clara la parte $x_k$ de cada uno de los hijos. Sin embargo, solo son necesarias las partes de los dos primeros para resolver el problema. En este sentido un uso excesivo y acrítico del álgebra puede ocultar este hecho y complicar la resolución del problema innecesariamente. También surge la dificultad del excesivo número de incógnitas (por tanto de símbolos) que se deben utilizar, junto con el hecho de que se desconozca el número de hijos.
— En la posible solución del autor surge de forma muy natural la comparación entre los dos primeros hijos, lo que elimina la necesidad de usar una de las cantidades desconocidas del problema. Sin embargo, es necesaria una manipulación *ad hoc* y nada evidente de las cantidades implicadas. De hecho esta necesidad ilustra que el problema está planteado a partir de la solución. En todo caso, este tipo de manipulaciones son interesantes por sus similitudes con el tipo de transformaciones que se realizan al resolver ecuaciones y obliga a un manejo significativo de los significados de las operaciones.

## A modo de conclusión

En este breve trabajo hemos presentado dos ejemplos de cómo leer un problema antiguo. Ambos problemas, sobre todo el primero, pueden resolverse con cierta facilidad utilizando técnicas algebraicas, sin embargo, en ninguno de los dos casos el autor hizo uso de dichas técnicas para su resolución. Es más, en ambos casos la solución dada por el autor se limita a enumerar las operaciones concretas que se deben realizar con los datos concretos del problema para obtener la solución.

La necesidad de considerar detenidamente los problemas estudiados y de buscar los argumentos subyacentes a las soluciones meramente descriptivas que presentaban los autores supone un ejercicio interesante para un docente, ya sea en formación o en ejercicio. Obliga, por ejemplo, a considerar distintos niveles de razonamiento aritmético o algebraico para encontrar soluciones adecuadas desde un punto de vista histórico. También implica la comparación de distintos métodos de resolución, valorando ventajas e inconvenientes de cada uno de ellos.

En algunas ocasiones las soluciones originales, pese a tratarse de simples *recetas* son susceptibles de ser generalizadas para ser utilizadas en situaciones más generales. De hecho, algunos investigadores sostienen que ese era uno de los objetivos de los autores al plantear ese tipo de soluciones. De hecho, supone un ejercicio interesante, que podría completar el análisis realizado, plantear versiones generales no solo de los enunciados de los problemas, sino también de los métodos de resolución presentados.

En cualquier caso, pensamos que este tipo de trabajo con textos históricos es interesante para el profesorado y animamos a los lectores a que aborden este tipo de lecturas.



## Referencias bibliográficas

Aurel, M. (1552), *Libro primero, de Arithmetica Algebratica*, Ioan de Mey, Valencia.
Cortés, J. (1591), *Tratado del computo por la mano*, Herederos de Joan Navarro, Valencia.
— (1594), *Compendio de reglas breves*, Herederos de Joan Navarro, Valencia.
— (1596), *Lunario nuevo, perpetuo y general, y pronóstico de los tiempos universal*, Herederos de Joan Navarro, Valencia.
— (1599), *Fisonomía natural y varios secretos de naturaleza*, Juan Crisostomo Garriz, Valencia.
— (1604), *Arithmetica practica*, Juan Crisostomo Garriz, Valencia.
— (1613), *Libro y tratado de los animales terrestres y volátiles*, Juan Crisostomo Garriz, Valencia.
Jahnke, H. N., A. Arcavi, E. Barbin, O. Bekken, F. Furinghetti, A. El Idrissi, C. M. Silva Da Silva y Ch. Weeks (2000), «The use of original sources in the mathematics classroom», *History in mathematics education: the ICMI study*, 291-328, Kluwer, Dordrecht.
León, F. J., y M. V. Sanz (1994), *Estética y teoría de la arquitectura en los tratados españoles del siglo XVIII;* CSIC, Madrid.

Lupiáñez, J. L. (2000), «Reflexiones didácticas sobre la historia de la matemática», *SUMA,* n.º 40, 59-63.

Meavilla, V., y A. M. Oller (2015), «Problemas de relojes. Ejemplos históricos y consideraciones didácticas», *Boletim de Educaçao Matemática*, v. 29, n.º 51, 110-122.

Picatoste, F. (1891), *Apuntes para una biblioteca científica española del siglo XVI,* Imprenta y fundición de Manuel Tello, Madrid.

Puig, A. (1672), *Arithmetica especvlativa y practica y arte de algebra*, Antonio Lacavalleria, Barcelona.

Rodríguez Vidal, R. (1980), «Notas para una nómina de matemáticos españoles del siglo XVII», *El científico español ante su historia: la ciencia en España entre 1750-1850: I Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias,* 365-369, SEHCYT, Madrid.

Salavert i Fabiani, V. (1979), «L'aritmetica practica de Geronymo Cortes i la vida mercantil al pais Valencia a les darreries del segle XVI», *Estudis. Revista de història moderna*, 8, 105-124.

Antonio M. Oller Marcén
*Centro Universitario de la Defensa de Zaragozao*
<oller@unizar.es>

suma+ 88
Artículos
Julio 2018
pp. 27-35

# Material manipulativo vs GeoGebra en el estudio de semejanza y simetría

M.ª Macarena Fariña
Edith Padrón
M.ª José Gutiérrez
Cristina Vaquero



El siguiente proyecto investiga los beneficios de usar materiales manipulativos y GeoGebra en la enseñanza y aprendizaje de los conceptos de semejanza y simetría en la Educación Secundaria. Para ello, se diseñó un material de trabajo en el cual se estudian estos conceptos a través del uso de pantógrafos y caleidoscopios de forma manipulativa y con GeoGebra. Tras llevar al aula dicho material, comprobamos su eficacia y reelaboramos este material para que pueda ser usado por cualquier docente.

*Palabras clave:* Innovación didáctica, Material manipulativo, GeoGebra, Geometría, Semejanza y simetría.

**Manipulative Material vs GeoGebra in the study of similarity and simmetry**

The following project investigates the benefits of using manipulative materials and GeoGebra in the teaching and learning of concepts of similarity and symmetry in Secondary Education. In order to do this, we have designed a working material in which these concepts are studied, using pantographs and kaleidoscopes in a manipulative way and with GeoGebra. After taking this material to the class, we confirmed its utility and we reworded this material to be able to being used by any teacher.

*Keywords:* Didactic Innovation, Manipulative Material, GeoGebra, Geometry, Similarity and symmetry.

Presentamos a continuación un proyecto de investigación enmarcado dentro de la realización del Trabajo de Fin del Máster en Formación del Profesorado de ESO, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas de la Universidad de La Laguna (Fariña, 2016).

En dicho proyecto nos proponemos confrontar el uso de un mismo material, el pantógrafo y el caleidoscopio, a través de dos recursos diferentes: material manipulativo y GeoGebra.

A continuación presentamos el marco teórico en el que desarrollamos este proyecto, especificamos los objetivos planteados y la metodología llevada a cabo, explicamos los materiales elaborados a priori y cómo fue su desarrollo en el aula. Terminamos exponiendo nuestras conclusiones y presentando un material elaborado tras la experiencia de aula que esperamos sirva de ayuda para el profesorado de 3.º de ESO de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas.

## Marco teórico

Desde la época de los griegos era conocida la importancia de la geometría en la formación académica de los individuos. Basta recordar la fa-

Artículo recibido en *Suma* en agosto de 2017 y aceptado en febrero de 2018

mosa frase que figuraba en la entrada de la Academia de Platón: «Ἀγεωμέτρητος μηδείς εἰσίτω» («Aquí no entra nadie que no sepa geometría»). No obstante, en el actual sistema de enseñanza español se ha relegado la geometría a un segundo plano. El alumnado la concibe en muchas ocasiones como un conjunto de fórmulas para calcular perímetros, áreas, volúmenes…, y las ideas menos algebraicas, que implican un razonamiento visual, pasan desapercibidas (Barrantes y Blanco, 2004, 2005). De esta manera, el alumnado suele asociar la geometría con la memoria y no con la motivación y la creatividad.

Por ello, parece necesario usar otros tipos de recursos al tradicional lápiz y papel que atraiga al alumnado al mundo de la geometría. En este sentido, contamos con los *Software de Geometría Dinámica* (SGD), de gran utilidad para estudiar la geometría de manera dinámica en contraposición al estudio estático que se ha dado tradicionalmente. Entre ellos podemos destacar el software libre GeoGebra, de interfaz sencilla permite al alumnado aprender matemáticas de manera amena usando un recurso cercano a él como son los ordenadores (Argudo Ortiz, 2013). Una de las ventajas fundamentales de este tipo de software es que nos permite modificar algunos parámetros y el alumnado puede visualizar los resultados matemáticos invariantes frente a los valores de estos parámetros.

También es posible recurrir a recursos más tradicionales como el material manipulativo. Sin embargo, muy pocas veces se usa con verdadero sentido didáctico sino más bien como una manualidad, o al menos eso suele pensar el alumnado (Barrantes y Blanco 2004, 2005). Cuando este recurso se usa adecuadamente como material didáctico ha demostrado tener buenos resultados en el aprendizaje del alumnado desde la Educación Primaria (Martín Abad, 2012).

En este trabajo de investigación hemos confrontado el uso de materiales manipulativos y el software GeoGebra en el estudio de los conceptos de semejanza y simetría del currículo LOMCE de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas (SSAA) en 3.º de ESO. Para ello, hemos recurrido en ambos formatos al uso de pantógrafos y caleidoscopios.

En este sentido, hay que destacar algunas experiencias previas usando estas herramientas. La primera experiencia la realizaron Vargas y Vargas (2011) con 25 estudiantes de entre 15 y 17 años de un colegio de la ciudad de Bogotá y consistió en copiar una figura utilizando un pantógrafo, describir el funcionamiento de esta máquina y descubrir que la figura inicial y la resultante se encontraban en escala. Con esta actividad quería evaluarse la argumentación del alumnado y se descubrió que sus primeras argumentaciones estaban basadas en la visualización y comparación de las figuras obtenidas. A continuación, el alumnado realizó acciones como medir o fijarse en el movimiento de la máquina para determinar la escala. Finalmente, desarrolló argumentaciones relacionadas con la estructura de la máquina, aunque estas últimas argumentaciones solo fueron posibles en la discusión final gracias a las sugerencias del docente al relacionar la estructura del pantógrafo con los triángulos semejantes.

La segunda experiencia la realizó Hoyos (2006) con estudiantes de entre 14 y 15 años de México y se estructuró en tres fases: en la primera se presentó el programa Cabri-II y se trabajó con algunas de sus herramientas la homotecia, la simetría, la reflexión y la traslación; en la segunda fase se trabajó con máquinas matemáticas como el pantógrafo la semejanza y la simetría; la última fase abordó la resolución de problemas. Según Hoyos (2006) es probable que el software y los pantógrafos satisficieran funciones complementarias en el desarrollo del aprendizaje y la comprensión de las propiedades de las transformaciones geométricas. No obstante, la percepción del alumnado de estos recursos como herramientas diferentes no permite confrontarlas adecuadamente.

En relación con el estudio de la simetría a través del caleidoscopio, Martínez (2008) propone una actividad para Bachillerato (que puede ser adaptada a la ESO) consistente en estudiar los 17 tipos de mosaicos de una manera sencilla. A partir de este estudio, se obtendrían 4 tipos de mosaicos especiales con los que se podría construir un caleidoscopio manipulativo. Martínez (2008) no concreta si llevó al aula dicho material ni cuáles fueron sus resultados.

## Objetivos y metodología

El objetivo general de este trabajo de investigación es comparar el uso de materiales manipulativos y las TICs en la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Para ello, nos hemos propuesto los siguientes objetivos:

- Preparar un material didáctico que permita al profesorado y alumnado de 3.º ESO de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas (LOMCE) afrontar la enseñanza y aprendizaje de los conceptos curriculares de semejanza y simetría. Dicho material didáctico se desarrolla en torno al uso del pantógrafo y el caleidoscopio, tanto en su versión manipulativa como en su desarrollo en GeoGebra.
- Evaluar la eficacia del uso de materiales manipulativos como el pantógrafo y el caleidoscopio en el estudio de la semejanza y la simetría.
- Evaluar la eficacia del uso de GeoGebra a través del desarrollo de pantógrafos y caleidoscopios en el estudio de la semejanza y la simetría.
- Comparar la eficacia del uso de materiales manipulativos y GeoGebra.

En cuanto a la metodología elegida para llevar al aula el material elaborado y evaluar los objetivos establecidos, se ha optado por desarrollar una *Indagación Científica* (ICIE), caracterizada por «aprender Ciencias haciendo Ciencias».

Se ha intentado llevar una investigación guiada con el alumnado en la que, partiendo del uso del pantógrafo y el caleidoscopio manipulativos, ha establecido diferentes conjeturas e hipótesis que ha podido comprobar o refutar al implementar este mismo material en GeoGebra. De esta forma, el alumnado ha podido llegar por sí mismo a las definiciones de las transformaciones estudiadas y sus propiedades.

Para realizar esta indagación científica optamos por un trabajo cooperativo del alumnado puesto que los estudiantes que trabajan juntos se implican más activamente en el proceso de aprendizaje. En otras palabras, las técnicas de aprendizaje cooperativo permiten a los estudiantes actuar sobre su propio proceso de aprendizaje, implicándose más con la materia de estudios y con sus compañeros (Domingo, 2008). Por ello, decidimos trabajar con grupos de tres miembros a los que se les asignó diferentes roles en las distintas actividades que desarrollamos. Elegimos trabajar con grupos de tres miembros por la facilidad para distribuir el trabajo. Además, se buscó que los grupos estuvieran equilibrados y sus miembros poseyeran diferentes aptitudes para las matemáticas.

También es importante destacar lo provechoso que resulta para una indagación científica que surjan debates supervisados por el docente, tanto en los pequeños grupos como en el gran grupo.

## Materiales

Como decíamos, uno de los objetivos de este trabajo de investigación es la elaboración de un material didáctico que ayude al profesorado y al alumnado de 3.º de ESO de SSAA en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los conceptos de semejanza y simetría. Dicho material consta de dos partes: una *Guía del profesorado*, que sirve de ayuda para el docente que implemente en el aula el material de trabajo, y las *Fichas del alumnado*, que recogen las preguntas que guiarán al alumnado en su indagación científica.

La guía del profesorado se estructura en cuatro epígrafes: el primero es una introducción donde se exponen los objetivos, la justificación del proyecto, la metodología, los contenidos y la evaluación del mismo; el segundo y el tercero recogen cómo se estructuran las sesiones destinadas al trabajo con pantógrafos y caleidoscopios de forma manipulativa y con ayuda de GeoGebra; el último epígrafe recoge cómo será la evaluación del alumnado.

Los epígrafes 2 y 3 de la guía del profesorado detallan cuáles serán las actividades que deberá ir realizando el alumnado durante las cuatro sesiones para las que fue diseñado el material así como la actuación del docente que lleve al aula el material. También recoge una serie de materiales que se elaboraron para este proyecto: un

pantógrafo construido en GeoGebra para manipulación del alumnado, unos vídeos tutoriales para el docente sobre las sesiones de GeoGebra, la base para construir un caleidoscopio manipulativo y un mosaico sin colorear que el alumnado usará en el estudio con el caleidoscopio.

Es importante indicar que antes de comenzar la primera sesión de trabajo, el alumnado debe elaborar, con ayuda del profesorado, un pantógrafo manipulativo usando varillas de madera o un material similar. También será el alumnado el encargado de diseñar en GeoGebra un caleidoscopio como una de las actividades finales de su cuarta sesión de trabajo.

El último epígrafe de evaluación consta de un *Kahoot!* con dieciocho preguntas de las cuales doce están destinadas a evaluar la adquisición de conocimientos del alumnado durante las cuatro sesiones de trabajo. Las otras seis fueron incluidas para conocer su opinión sobre el proyecto.



Las cuatro fichas del alumnado recogen las preguntas que el alumnado debe ir haciéndose y respondiendo para avanzar en su investigación científica. Además, las fichas correspondientes a las sesiones de GeoGebra cuentan con indicaciones que ayuden en la realización de las actividades previstas con este software.

Hay que destacar que estos son los materiales que se realizaron en un principio. Tras la experiencia de aula, que se detalla a continuación, se modificaron dichos materiales atendiendo a los resultados obtenidos en nuestra investigación con la intención de diseñar un marco de trabajo que pudiera aprovechar cualquier docente.

## Experiencia de aula

El material antes descrito se llevó al aula en dos grupos de 20 y 15 estudiantes de 3.º de ESO de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas en el IES Sabino Berthelot (Tenerife). De esta manera, hemos podido hacer algunas correcciones a lo largo de la experiencia al plan de trabajo inicial.

El IES Sabino Berthelot se halla situado en el municipio de El Sauzal, en el pueblo de medianías de Ravelo. Es un municipio eminentemente rural, y constituye una de las áreas más deprimidas cultural y económicamente de la isla. Se trata de un centro público donde se imparte ESO, Bachillerato, un Ciclo Formativo de Grado Medio un programa de Cualificación Profesional Inicial y un Aula Enclave.

El proyecto se distribuyó en cuatro sesiones de 55 minutos más una sesión de 20 minutos. Previo a estas sesiones se desarrollaron algunas actividades fundamentales: el alumnado elaboró junto a sus docentes de matemáticas unos pantógrafos manipulativos usando varillas de madera (figura 1), se trabajó el teorema de Tales con el alumnado y se crearon grupos de trabajo heterogéneos.

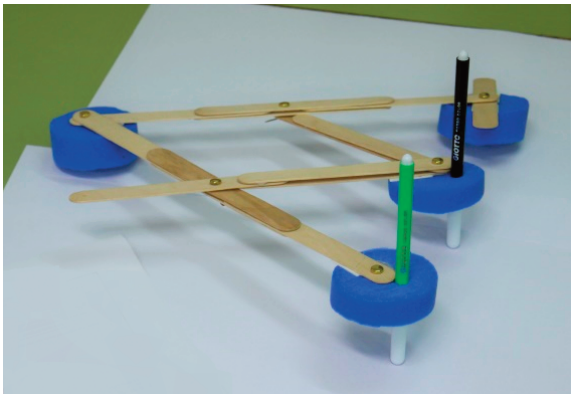


Figura 1. Pantógrafo elaborado por el alumnado

A continuación se comenta cómo se llevaron a cabo las cinco sesiones de trabajo y cómo fueron los resultados que se obtuvieron.

### *1.ª Sesión*

La primera sesión estaba destinada a conocer el funcionamiento del pantógrafo y establecer hipótesis sobre las propiedades de las figuras que este material creaba con la intención de descubrir cuándo dos figuras son semejantes y por qué. Se esperaba que el alumnado conjeturara que el pantógrafo creaba figuras paralelas de lados proporcionales y ángulos iguales. Se comenzó probando el pantógrafo para reproducir cualquier tipo de figura y, a continuación, se centró en el uso de figuras geométricas simples como el triángulo.

El alumnado debía dibujar un triángulo con el pantógrafo (figura 2) y estudiar la relación entre los lados y ángulos del triángulo original y el que dibuja el pantógrafo. Se pretendía que el alumnado descubriera y entendiera la noción de figuras semejantes y razón de semejanza. Más tarde, debía encontrar en la construcción del pantógrafo una relación entre las varillas que produjera dicha razón de semejanza. Para ello, es conveniente disponer de pantógrafos con diferentes razones de semejanza para poder detectar mejor qué varillas son las que determinan la razón de semejanza.

Para terminar la sesión, nos propusimos entender mejor el funcionamiento del pantógrafo. Para ello es necesario usar el teorema de Tales aplicándolo a la estructura de la máquina (figura 3). Es importante que el docente ponga especial énfasis en esta parte de la sesión ya que la experiencia en el aula nos ha mostrado que es una de las actividades más difíciles de comprender.

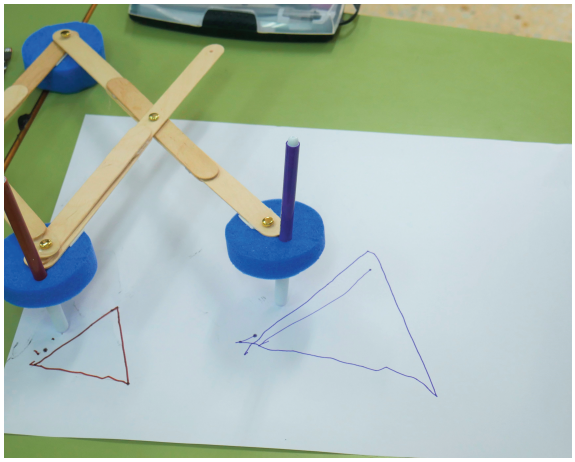


Figura 2. Trabajo del alumnado con el pantógrafo

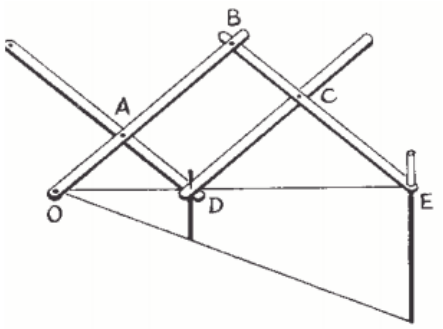



Figura 3. Aplicación del teorema de Tales al pantógrafo



| | Grupo A | | | | Grupo B | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Respuesta y argumentos correctos | Respuesta correcta pero mal argumentada | Respuesta incorrecta | Respuesta en blanco | Respuesta y argumentos correctos | Respuesta correcta pero mal argumentada | Respuesta incorrecta | Respuesta en blanco |
| 1. Una vez que has dibujado con el pantógrafo la imagen que has elegido, ¿puedes explicar qué hace el pantógrafo? | 100% | – | – | – | 100% | – | – | – |
| 5. ¿Cuál es la relación entre las longitudes de los lados de ambos triángulos? ¿Cuál es la relación entre los ángulos de ambos triángulos? | 86% | 14% | – | – | 100% | – | – | – |
| Dibuja un triángulo cualquiera con ayuda de la regla. Usa el pantógrafo para reproducirlo.<br>6. ¿Cómo son ambos triángulos? ¿Por qué? | 43% | 57% | – | – | 80% | 20% | – | – |
| 9. ¿Por qué funciona el pantógrafo así?<br>i. Traza una recta que una los puntos O, D y E. Recuerda que estos tres puntos siempre están alineados.<br>ii. Traza una recta perpendicular a ésta por D. ¿Cómo es la recta que traza E? | 29% | 14% | 14% | 43% | – | – | 100% | – |
| 9. iii. ¿Cómo están los puntos del otro extremo de las rectas trazadas por D y E? ¿Podemos trazar una línea que los una? | – | 29% | 57% | 14% | – | – | 100% | – |
| 9. iv. Ayudándote de un dibujo explica cómo aplicas el teorema de Tales en la construcción que acabas de hacer con el pantógrafo. | – | 14% | 29% | 57‰ | – | 20% | 60% | 20% |
| 9. v. Explica de qué forma aparece el teorema de Tales en el pantógrafo y relaciónalo con el funcionamiento del mismo. | 14% | 14% | 43% | 29% | – | 80% | 20% | – |

Tabla 1. Resultados de la ficha del alumnado del pantógrafo

En la tabla 1 se encuentran los resultados de las fichas del alumnado de ambos grupos a aquellas preguntas en las que se pedía un razonamiento o justificación y no solo completar información o realizar medidas. Las respuestas se recogieron por grupos de trabajo del alumnado, siete en el grupo A y cinco en el B.

Como se aprecia en la tabla, el grupo A tuvo un mayor grado de éxito en las respuestas a las preguntas de esta primera ficha. Hay que destacar del alumnado que en el aula parecía comprender la investigación que se estaba llevando a cabo aunque sus respuestas escritas eran poco concretas, posiblemente por su falta de costumbre de redactar en matemáticas las justificaciones o argumentos de sus respuestas.

### *2.ª Sesión*

La segunda sesión de trabajo estaba destinada a comprobar o refutar las hipótesis que el alumnado había elaborado en la sesión anterior sobre la construcción de figuras semejantes y su razón de semejanza, ayudándose de GeoGebra. Se proporcionó un fichero en GeoGebra con el diseño de un pantógrafo en el que se podían variar las longitudes de las varillas, estableciendo así diferentes razones de semejanza en contraposición a la herramienta manipulativa.

Lo primero que hizo el alumnado fue investigar cómo funcionaba el pantógrafo y cómo podía variar la razón de semejanza en función de las longitudes de las varillas. A continuación, se realizó una actividad guiada para comprobar que el pantógrafo crea figuras paralelas, de lados proporcionales y ángulos iguales. El alumnado demostró ciertas dificultades al trabajar con este software seguramente debido a su falta de práctica con el mismo. Se había propuesto otras actividades para el alumnado como trabajar con algunas herramientas en GeoGebra la traslación, la rotación y la homotecia, pero no dio tiempo. También se pretendía grabar un vídeo usando el pantógrafo en GeoGebra para demostrar las hipótesis del día anterior, pero esta actividad solo se desarrolló con el grupo B tras hacer pequeñas modificaciones en el desarrollo de la sesión al comprobar con el grupo A que se precisaba de más tiempo.

El ejercicio que debía hacer el alumnado consistía en dibujar un triángulo que reproducían con el pantógrafo diseñado en Geogebra, comprobar que sus ángulos eran iguales y sus lados eran paralelos y proporcionales según la razón de semejanza elegida. A continuación se recogen los resultados que se obtuvieron de la grabación del vídeo por los quince estudiantes del grupo B (tabla 2).

| Grupo B | % de vídeos |
|---|---|
| Realiza correctamente el ejercicio (corrige los errores que comete) | 53% |
| Comete errores que no corrige al realizar el ejercicio | 7% |
| No completa el ejercicio | 27% |
| No realiza correctamente el ejercicio | 13% |

Tabla 2. Resultados del vídeo en GeoGebra del grupo B

Como se aprecia en la tabla, aproximadamente la mitad del alumnado realizó correctamente la actividad. Además, el alumnado de este grupo disfrutó más del trabajo de la sesión con esta actividad de grabación que el otro grupo, debido seguramente a la novedad de grabar un vídeo con el ordenador en la clase de matemáticas.

### *3.ª Sesión*

La tercera sesión estaba destinada a construir un caleidoscopio y trabajar con él el concepto de simetría. Se proporcionó al alumnado el material necesario para construir un caleidoscopio triangular (cartulina y papel espejo) y, previamente, se le había entregado un dibujo en blanco de un mosaico geométrico para que lo coloreara y poder utilizarlo en esta sesión.

Cada estudiante construyó su caleidoscopio y a partir de él se pudo definir el concepto de figuras simétricas y de eje de simetría. El alumnado hizo hipótesis sobre las figuras que devolvía el caleidoscopio y si serían o no simétricas. Para comprobar dichas hipótesis, los estudiantes tomaron varias fotografías con sus móviles que usarían en la siguiente sesión de GeoGebra.



Figura 4. Uso del caleidoscopio y el mosaico

También se pudo investigar sobre una cualidad particular de nuestro caleidoscopio: cuando un eje de simetría del mosaico coincide con un eje de simetría de la base del caleidoscopio (una altura del triángulo equilátero), dicho eje se reproduce en las imágenes que nos devolvía el caleidoscopio como un nuevo eje de simetría.

Además trabajamos el concepto físico de reflexión de la luz para poder explicar el funcionamiento del caleidoscopio.

En la tabla 3 se recogen los resultados de las fichas del alumnado de ambos grupos, incluyendo una pregunta final que se realizó en la sesión siguiente. Las respuestas se recogieron de manera individual, veinte en el grupo A y quince en el B.

Como se aprecia en la tabla, la mayoría del alumnado respondió correctamente a las preguntas que se le planteaban aunque no siempre argumentó correctamente. De nuevo creemos que los resultados se deben más a una falta de costumbre en redactar sus justificaciones que a una falta de comprensión del resultado.

### *4.ª Sesión*

Esta sesión estaba dedicada a trabajar la simetría con el alumnado en GeoGebra. Se comenzó comprobando con sus fotografías del día anterior que el caleidoscopio nos devolvía figuras simétricas respecto de los lados de la base triangular del caleidoscopio. También se hizo notar que las imágenes fotografiadas no eran exactamente simétricas debido a imperfecciones en la construcción del caleidoscopio y una baja calidad del papel espejo usado en su construcción. Este hecho no se considera un problema sino una oportunidad para que el alumnado aprenda a manejar los errores que se derivan de la imperfección de los mecanismos con los que muchas veces se debe trabajar.



| | Grupo A | | | | Grupo B | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Respuesta y argumentos correctos | Respuesta correcta pero mal argumentada | Respuesta incorrecta | Respuesta en blanco | Respuesta y argumentos correctos | Respuesta correcta pero mal argumentada | Respuesta incorrecta | Respuesta en blanco |
| 1. ¿Qué cuerpo geométrico define nuestro caleidoscopio? | 66% | 17% | 17% | – | – | 100% | – | – |
| 2. Cuando miramos a través del caleidoscopio, ¿qué función tienen los lados del triángulo? ¿Con qué concepto matemático podemos relacionarlo? | 50% | 44% | 6% | – | 27% | 55% | 9% | 9% |
| 4. Decide con tus compañeros de grupo cuáles son los ejes de simetría del mosaico y trázalos. ¿Cómo varía el reflejo del eje de ese mosaico según cambiamos la posición del caleidoscopio? ¿Qué ocurre si coincide el eje del mosaico con una de las alturas del triángulo de la base del caleidoscopio? | 55% | 28% | 17% | – | 64% | 13% | 9% | 9% |
| 5. Explica con tus propias palabras cómo funciona el caleidoscopio usando el concepto de reflexión de la luz. | – | 72% | 22% | 6% | – | 73% | 27% | – |
| Si dos figuras son simétricas, ¿también serán semejantes? ¿Por qué? Si dos figuras son semejantes, ¿también serán simétricas? ¿Por qué? | 25% | 50% | – | 25% | 60% | 33% | – | 7% |

Tabla 3. Resultados de la ficha del alumnado del caleidoscopio

A continuación, el grupo B estudió el hecho de que las alturas de la base triangular de nuestro caleidoscopio se reproducían en todas las imágenes como nuevos ejes de simetría cuando coincidían con un eje de simetría del mosaico original. Los resultados no fueron muy buenos ya que no tenían buenas fotografías y el alumnado no parecía muy motivado. Por ello, en el grupo A se optó por suprimir esta parte del trabajo y dar una pequeña explicación para tener más tiempo y permitir al alumnado crear un caleidoscopio en GeoGebra. Esta actividad motivó mucho más al alumnado puesto que ayudaba a desarrollar su creatividad y ayudó al profesorado a comprobar que el alumnado había entendido el concepto de ejes de simetría.

Finalizamos la sesión cuestionando al alumnado sobre si dos figuras son semejantes también serán simétricas y viceversa, o no. La intención de esta reflexión era comprobar que el alumnado había entendido los conceptos de semejanza y simetría haciendo una comparativa entre ellos. En la tabla 3 se recogen los resultados de estas preguntas. Como se puede ver, la mayoría del alumnado era capaz de contestar correctamente a las preguntas y se explicó bastante bien de manera verbal durante la sesión, pero a la hora de argumentar sus respuestas tenía dificultades de expresión escrita.



### *5.ª Sesión*

La última sesión estaba dedicada a realizar un cuestionario *Kahoot!* que nos permitiera saber si el alumnado había entendido los conceptos de semejanza y simetría que había trabajado en las sesiones anteriores a la vez que valoraba la experiencia de manera que nos posibilitara hacer cambios y mejoras en un futuro.

En general, los resultados de las contestaciones de ambos grupos a las preguntas relacionadas con los conceptos de semejanza y simetría fueron bastante buenos. En cuanto a su valoración de la experiencia, la mayoría la consideró positiva y educativa, con ciertas discrepancias entre sus preferencias para trabajar con material manipulativo o GeoGebra.

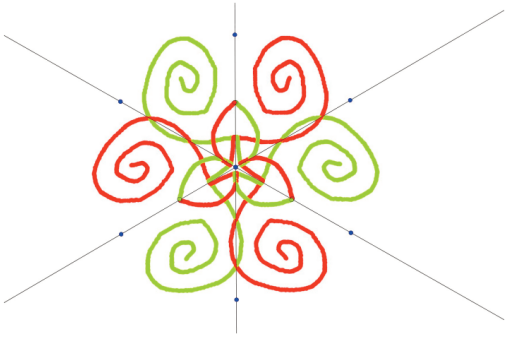


Figura 5. Caleidoscopio en GeoGebra de uno de los estudiantes

## Conclusiones

Este proyecto de investigación se proponía elaborar un material didáctico que permitiera al profesorado y alumnado de 3.º ESO de las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas (LOMCE) afrontar la enseñanza y aprendizaje de los conceptos curriculares de semejanza y simetría. Creemos que el material creado satisface esta demanda dado que el alumnado dispone de una idea más clara de estos conceptos porque ha manipulado él mismo figuras semejantes y simétricas.

No obstante, consideramos que el material aquí descrito admitía algunas modificaciones para su mejora. Estas ideas de mejora se concretan en el material de trabajo elaborado a posteriori: Guía del profesorado y Fichas del alumnado. Este material reelaborado proporciona un marco de enseñanza y aprendizaje de los conceptos de semejanza y simetría aprovechable por cualquier docente de 3.º ESO de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas (Fariña, 2016). En los siguientes enlaces se puede consultar dichos materiales:

Guía del profesorado: https://goo.gl/C3zyqH
Fichas del alumnado: https://goo.gl/ncHXnu

Este proyecto también se proponía evaluar la eficacia del uso de materiales manipulativos (pantógrafo y caleidoscopio) y GeoGebra en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los conceptos de semejanza y simetría. En este

sentido, podemos decir que hemos recogido bastante información a su favor. Tal y como afirman las docentes de ambos grupos, «al trabajar de forma manipulativa estos conceptos, el alumnado está más predispuesto a entender, lo que es un avance con respecto a lo que suele ocurrir. Además, sus resultados académicos han mejorado».

También se debe tener en cuenta que todo el alumnado opinaba que la experiencia había sido bastante buena y que había sido de gran ayuda para entender los conceptos matemáticos de semejanza y simetría. Por lo tanto, podemos afirmar que llevar al aula material manipulativo y GeoGebra conjuntamente es de gran eficacia en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Sin embargo, es más complicado comprobar cuál de los recursos es más eficaz. Hemos encontrado diferentes preferencias entre el alumnado en el uso de materiales manipulativos o GeoGebra. Incluso las docentes de ambos grupos discrepan en este aspecto. Opinamos que este hecho se deba seguramente a que ambos materiales se complementan, tal y como afirmaba Hoyos (2006), y sea el uso conjunto de ambos lo que garantice la eficacia de los mismos.

Consideramos que la puesta en práctica del material resultó muy satisfactoria porque las actividades que se proponían con GeoGebra complementaban perfectamente a las que se llevaban a cabo con el material manipulativo. Fue el trabajo con el material manipulativo el que permitió al alumnado conjeturar las propiedades de semejanza y simetría, y fue el uso de GeoGebra lo que permitió corroborar dichas hipótesis y visualizar que las propiedades no dependían de las restricciones del material.

## Referencias bibliográficas


Argudo, M. (2013), *Las Tic y el aprendizaje de la geometría*, Trabajo de Fin de Máster inédito, Universidad CEU Cardenal Herrera, Valencia.

Barrantes, M., y L. Blanco (2004), «Recuerdos, Expectativas y Concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar», *Enseñanza de las Ciencias*, n.º 22(2), 241-250.

— (2005) «Análisis de las concepciones de los profesores en formación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría», *Números*, vol. 62, 33-44.

Domingo, J. (2008), «El aprendizaje cooperativo», *Cuadernos de trabajo social*, vol. 21, 231-246.

Fariña, M. (2016), *Descubriendo el Pantógrafo y el Caleidoscopio*, Trabajo de Fin de Máster, Universidad de La Laguna, Tenerife.

Hoyos, V. (2006), «Funciones complementarias de los artefactos en el aprendizaje de las transformaciones geométricas en la escuela secundaria», *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 24(1), 31-42.

Martín, S. (2012), «Una propuesta didáctica con materiales manipulativos para la Educación Primaria», *Suma*, n.º 69, 21-29.

Martínez, A. J. (2008), «Mosaicos. Construcción y Matemáticas en el caleidoscopio», *Revista digital Innovación y Experiencias Educativas*.

Vargas, C. y M. Vargas (2011), *El pantógrafo como elemento para suscitar procesos de argumentación en el trabajo con escalas*, Universidad Pedagógica Nacional. Recuperado de: <http://matematicas.uis.edu.co/com2011/HTML/ARCHIVOS%20MEMORIAS/EDUCACION/MarthaVargas.pdf>.



M.ª Macarena Fariña
*Universidad de La Laguna*
<macarena.farcast@gmail.com>

Edith Padrón
*Universidad de La Laguna*
<mepadron@ull.edu.es>

M.ª José Gutiérrez
*IES Sabino Berthelot, Ravelo (Tenerife)*
<mjosegut@gmail.com>

Cristina Vaquero
*IES Sabino Berthelot, Ravelo (Tenerife)*
<vaquerorequejocristina@gmail.com>

MATRIX

# III conferencia internacional

## de museos y centros divulgación de matemáticas

Mathematics Awareness, Training, Resource & Information Exchange

**29-31 de octubre de 2018 Cornellà de Llobregat - Barcelona**



## Compartiendo la divulgación matemática!

**La III edición de MATRIX congregará a representantes de museos de matemáticas de todo el mundo; creadores y organizadores de exposiciones matemáticas; y personas dedicadas a la divulgación de las matemáticas para el público en general.**

Las anteriores ediciones (Dresde 2014, Leeds 2016) han representado un momento importante de encuentro, generando proyectos compartidos, como Mathspaces, exposiciones y colaboraciones puntuales.

Queremos seguir en esta dirección, **compartiendo ideas, experiencias y buenas prácticas**, tratando temas candentes como la relación entre la educación formal y no formal, los museos y los centros de investigación, la formación del profesorado, la modelización de la realidad, la experimentación y la simulación virtual, la estadística en los museos (y para los museos), las matemáticas y otras disciplinas STEAM...

El objetivo final, sin embargo, es ayudar a **mejorar la percepción e implicación de la sociedad** con respecto a las matemáticas.

Más información escribiendo a **matrix@mmaca.cat**

mmaca Museu de Matemàtiques de Catalunya

MOMATH National Museum of Mathematics

CosmoCaixa Obra Social "la Caixa"

Agbar Museu de les Aigües

Ajuntament de Cornellà de Llobregat

Generalitat de Catalunya Departament d'Ensenyament

Diputació Barcelona #DibaOberta

Ajuntament de Barcelona

Fundació Privada CELLEX

hp

Societat Catalana de Matemàtiques IEC

feemcat Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya

suma+
Artículos
Julio 2018
88
pp. 37-44

# Las matemáticas y el ajedrez: una experiencia en Educación Infantil

Desiré García Lázaro
Estíbaliz Jenkins Gómez



Actualmente, se dispone de multitud de recursos diferentes que han demostrado su validez en la motivación para aprender y en el propio aprendizaje. En este trabajo, nuestro principal objetivo es analizar el uso del ajedrez en el aula de educación infantil. Su uso didáctico entre los más pequeños surge a partir de la aprobación en España de la proposición no de ley sobre la implantación y fomento de la práctica del ajedrez en escuelas y espacios públicos y su promoción como deporte.

*Palabras clave:* Matemáticas, Material manipulativo, Educación Infantil, Ajedrez educativo, Didáctica, Juego de mesa.

**Mathematics and chess: an experience in Early Childhood Education**

Nowadays, there exist a lot of different resources that have demonstrated its validity in the motivation to learn and in the learning itself. In this work, our main goal (or objective) consists in suggesting the use of chess-games in the classroom at pre-school education level. Its educational use among young children takes its origin from the approval in Spain of the proposed bill relative to the implementation and promotion of the chess practices in schools and public spaces and its promotion as a sport.

*Keywords:* Mathematics, Manipulative material, Early Childhood Education, Educational Chess Didactics, Board game.

Las matemáticas son una parte importante en el día a día de las personas, pero en la mayoría de las ocasiones están catalogadas como aburridas o de poca utilidad (Berini y otros, 2010). Por ello, para evitar las percepciones negativas sobre el aprendizaje de esta disciplina, es necesario realizar un cambio en su didáctica, de tal forma que el proceso de enseñanza-aprendizaje resulte más atractivo para el estudiante (Álvarez, 1996; Cascallana, 1999; Godino y otros, 2007).

En este trabajo se propone un uso alternativo del ajedrez como juego de mesa empleándolo como recurso pedagógico en el aula. En concreto, la evidencia empírica que se recoge en esta práctica permite que se emplee el ajedrez como material manipulativo para fomentar el aprendizaje de los contenidos matemáticos regulados en el Decreto 17/2008, de 6 de marzo, del Consejo de Gobierno, por el que se desarrollan para la Comunidad de Madrid las enseñanzas de la Educación Infantil.

## Antecedentes

La literatura revisada sobre el aprendizaje de las matemáticas, defiende la importancia de la ma-

Artículo recibido en *Suma* en enero de 2017 y aceptado en enero de 2018

nipulación de materiales en el desarrollo del pensamiento matemático del niño (Canals, 2001; Graells, 2000).

En este contexto, Rousseau (1712-1778) defiende que el niño aprende a través de los sentidos y de la experimentación (Rousseau, 1982). Destaca la importancia de acercar los conocimientos al niño y estimular su aprendizaje pero, dejándole que aprenda por sí mismo. Para él, lo más importante es que el niño experimente (González, 2010).

Asimismo, Montessori (1870-1972) además, enfatiza la importancia de trabajar los materiales con un objetivo específico. Pretende que el niño manipule libremente estos recursos en un ambiente previamente organizado. De esta forma, el niño a través de su propia experiencia alcanza el nivel de aprendizaje marcado. Además, concluye que mediante el uso de materiales manipulativos, los niños aprenden matemáticas y las perciben de forma positiva (Montessori, 2013).

En la misma línea, Jean Piaget (1896-1980), afirma que el niño necesita aprender desde su interior, es decir, no sirve con una mera explicación por parte del adulto. El niño requiere la experimentación y la manipulación. Para él, la experiencia del niño permite que conozca el concepto. Por ejemplo, Piaget señala que nadie sabe cómo aparece el número en la mente de un niño porque se trata de un proceso gradual. Hace hincapié, igual que Montessori, en la importancia de proporcionar a los niños los materiales necesarios y adecuados para el aprendizaje.

A partir del siglo XX se produce una revolución en la enseñanza de las matemáticas con la utilización en el aula de materiales didácticos y de juegos (Pérez-Latorre, 2012). Así, se ha pasado de usar papel y lápiz como elemento principal de apoyo en la didáctica, a utilizar como protagonistas en el aula piezas de lego, puzles, regletas, papiroflexia o el ajedrez (Núñez y Ruiz, 2010; Giménez, 2000).

Así, el ajedrez educativo combina las características propias de un material didáctico y de un juego reglado. Su uso pedagógico, permite fomentar el aprendizaje significativo y la motivación entre los más pequeños (De Guzmán, 1989).

[...] como aporte innovador a la resolución europea, surge la idea de utilizar la capacidad pedagógica que caracteriza al ajedrez como material didáctico para enseñar conceptos matemáticos en la etapa infantil.

Las investigaciones consultadas manifiestan que el ajedrez, es un recurso didáctico con características lúdicas que permite desarrollar valores y habilidades sociales (Charness, 1989). Algunas de ellas, demuestran que es beneficioso para el desarrollo cognitivo, mejora la memoria visual la creatividad, favorece las habilidades espaciales y lógico-matemáticas y además, mejora la autoconfianza, la autoestima y el desarrollo de competencias lingüísticas, entre otros (García y Olagasagasti, 2013).

El Parlamento Europeo, con el objetivo de introducir el ajedrez en los sistemas educativos de los estados miembros, aprobó en el año 2012 el programa llamado *Ajedrez en la Escuela*. Asimismo, en España, la Comisión de Educación y Deporte del Congreso aprobó por unanimidad en febrero de 2015, la proposición no de ley sobre la implantación y fomento de la práctica del ajedrez en escuelas y espacios públicos y su promoción como deporte. Con esta propuesta, se pretende incluir el ajedrez como asignatura dentro del horario lectivo perdiendo su característica de materia extraescolar.

Actualmente, la práctica del ajedrez en las aulas de educación primaria de la Comunidad de Madrid está en auge ya que algunos estudios demuestran que la utilización de este recurso, mejora el rendimiento en el cálculo numérico y el razonamiento lógico en niños del primer ciclo de primaria (Fernández, 2008; 1991; Dato, 2003).

Así, como aporte innovador a la resolución europea, surge la idea de utilizar la capacidad pedagógica que caracteriza al ajedrez como material didáctico para enseñar conceptos matemáticos en la etapa infantil. Para ello, hay que tener en cuenta las características de los niños, sobre todo su capacidad de concentración, sus inquietudes y motivaciones y la importancia del juego y sus reglas.

La introducción de este material en las aulas de los más pequeños sirve para desarrollar el razonamiento lógico porque su carácter instructivo y educativo potencia la creatividad, la competencia matemática, la disciplina, la atención, el respeto por el adversario y la paciencia, entre otras. Al mismo tiempo, la utilización del tablero es esencial para trabajar la percepción visual, que se aprovecha para introducir conceptos de geometría y desarrollar la inteligencia espacial (Gardner, 1998).

## El ajedrez educativo: la experiencia de su aplicación en el aula de infantil

A continuación se presenta en este trabajo una experiencia del uso del ajedrez como herramienta didáctica que facilita e inicia al niño en el cálculo matemático.

La implantación de esta dinámica, pretende introducir este material de forma paulatina en el aula infantil, de forma que al finalizar el curso los niños estén totalmente familiarizados con él y adquieran y refuercen diferentes conceptos matemáticos de forma lúdica a través del uso del ajedrez, usando el tablero y sus piezas (destacan las clasificaciones, series, números y operaciones aritméticas, relaciones espaciales y geometría, entre otras, como objetivos matemáticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje planteado).

Para conseguir los objetivos que se plantean, es muy importante la implicación del educador en las sesiones, ya que según sea esta, así será el aprendizaje de los niños. Es imprescindible que plantee situaciones que los propios niños sepan resolver a través de la experimentación y la manipulación en el aula.

### *Contexto*

Esta intervención se desarrolla en la segunda parte de la etapa de educación infantil, de 3 a 6 años. Las actividades recogidas en esta práctica educativa se llevaron a cabo con los alumnos de 4 años de un colegio situado en el sur de la Comunidad de Madrid. El colegio está ubicado en el centro de la población y es un colegio pequeño, por lo que solo hay una clase de infantil por nivel.

La metodología que se propone para el desarrollo de esta propuesta se adapta a las experiencias vividas en el aula así como a las actividades realizadas y el juego experimentado por el niño, fomentando la adquisición de los hábitos de trabajo de forma progresiva.

Es necesario destacar que las actividades que se describen en este trabajo tienen un carácter globalizado ya que integran contenidos de todas las áreas recogidas en el currículo de educación infantil. Además, las tareas se realizan de forma individual y colectiva, para que el niño desarrolle, por un lado, su autonomía, y por otro para fomentar el trabajo en equipo. Estos métodos de trabajo se aplicarán en un ambiente de afecto, confianza y motivación, para potenciar la autoestima e integración social de los alumnos (Godino y otros, 2007).

De la misma forma, en las sesiones planteadas, ha sido preocupación constante la individualidad de cada niño, siempre atendiendo a la diversidad de cada uno de ellos. En algunos casos, incluso se han adaptado las actividades para los niños que así lo han requerido.

Asimismo, además de los contenidos matemáticos que se plantean en el proceso de enseñanza-aprendizaje relacionados con la clasificación por atributos de las figuras, el número y su cuantificación y el movimiento en las relaciones espaciales, se presta especial atención a las enseñanzas transversales que surgen a lo largo de las actividades, entre ellas: la educación en valores y la educación para la paz. Por un lado, la educación en valores se trabaja fomentando la convivencia entre iguales así como las normas de diálogo y, en la educación para la paz, se promueve el trato con respeto hacia otras personas solventando de forma pacífica los conflictos que puedan surgir.

### *Objetivos*

El objetivo principal de esta investigación es promover el aprendizaje de las matemáticas a través del uso del ajedrez en el aula de los más pequeños.

Los contenidos matemáticos que se trabajan de forma lúdica son la identificación de los números, su reconocimiento y la asociación de la grafía con su cantidad, los agrupamientos, las clasificaciones y seriaciones, así como las operaciones aritméticas de suma sencillas, entre otros.

Asimismo, se trata de acercar estos conceptos matemáticos al niño empleando el ajedrez conocido como juego de mesa, en una versión de material didáctico, de tal forma que estos aspectos son aprendidos por el niño a la vez que este trabaja su autonomía y desarrolla las habilidades sociales. En este sentido, para trabajar la autonomía, en las asambleas llevadas a cabo en las que se les explica el funcionamiento del ajedrez como juego de mesa y sus normas, los niños desarrollan actitudes de organización y de aceptación de las mismas. Además, durante la ejecución de las actividades, desarrollan habilidades sociales con el maestro y con otros compañeros, ya que para comunicarse con ellos requieren realizar un buen uso del lenguaje, así como trabajar su comprensión.



## *Metodología*

La inclusión del ajedrez en el aula de 4 años se lleva a cabo a través de la puesta en práctica de actividades didácticas de una duración de 15 minutos. Estas tareas se llevan a cabo en un total de 22 sesiones que comienzan al principio de curso y cuya complejidad aumenta gradualmente a medida que avanza el año académico.

Las actividades se reparten en los tres trimestres del curso escolar. Las primeras sesiones tratan de familiarizar a los niños con el material, el tablero, las piezas y sus movimientos.

En la primera parte de la intervención, se comienza con una sesión de manipulación libre del ajedrez. Algunos niños comentan que ya sabían jugar al ajedrez como juego de mesa porque habían visto jugar a sus hermanos mayores. Ellos colocan las piezas, casi todas en orden correcto y recalcan que solo podían jugar dos personas. Los que no sabían jugar, miran y otros cogen algunas de las piezas para jugar con ellas e inventan juegos (ver figura 1).



Figura 1. Juego libre

Una vez que los niños experimentan ya con el material en las primeras sesiones, se realizan tareas relacionadas con las clasificaciones y seriaciones usando los colores del tablero. Además, empiezan a reconocer las piezas y su posición, a la vez que utilizan la recta numérica aprovechando la numeración del 1 al 8 del tablero.

Tras este primer contacto, se realiza una actividad con los colores del tablero, se les reparte por mesas cuadrados de goma eva blancos y negros. Se les pide que los clasifiquen agrupándolos por color. Luego se les solicita que completen la serie que se mostraba en la pizarra digital (PDI), blanco–negro–blanco con un total de seis cuadrados.

Posteriormente, se les pide que unan todas las series para formar un tablero, teniendo en cuenta que no podían estar juntos ni en vertical ni horizontal dos cuadrados del mismo color (ver figura 2).

En el segundo trimestre, se pide que cada niño realice su propio ajedrez, siguiendo las pautas del educador. Vuelven a trabajar así, la clasificación, series y patrones siguiendo una



Figura 2. El tablero de ajedrez

organización espacial establecida. Se recuerdan las piezas y su posición en la recta numérica, aunque esta vez se les pide que lo hagan a la inversa.

Una de las actividades que se lleva a cabo en el aula durante este periodo pretende afianzar el concepto de cantidad. Para ello, se le muestra a cada niño las piezas de ajedrez, y pieza por pieza, se les va indicando qué puntuación tiene cada una y se escribe en la pizarra su valor, junto al dibujo de cada pieza, exceptuando el rey porque tiene más valor que el resto. Posteriormente, se le entrega a cada niño un juego de piezas y gomets, se les pide que coloquen tantos gomets como puntos vale esa pieza

Al finalizar estas sesiones, los niños comienzan a tener en cuenta las puntuaciones de cada ficha, afianzando así los conocimientos sobre las cantidades y las comparaciones de valor entre ellas.

Se ha utilizado la pizarra digital en el aula para llevar a cabo la actividad basada en las equivalencias, todavía un poco difícil para ellos. Todas las posibles combinaciones se han pensado numéricamente entre todos y se han puesto en la pizarra para ayudarles a comprenderlo (ver figuras 3 y 4).

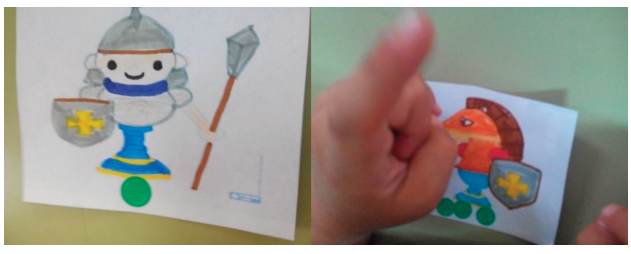


Figura 3. Piezas de ajedrez

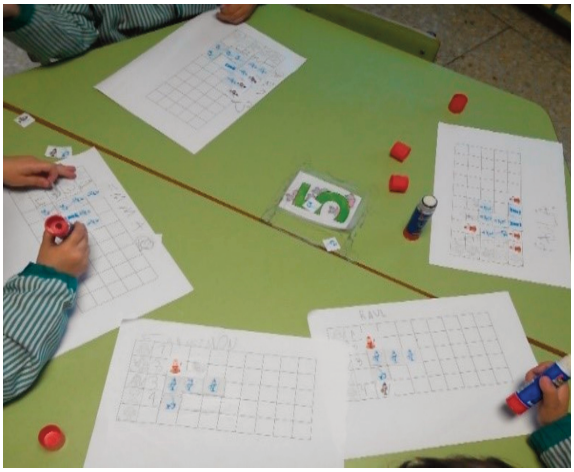


Figura 4. Números equivalentes

Por último en el tercer trimestre, se les presenta mediante un cuento el movimiento de cada pieza, y concretamente con el peón y el alfil realizan sumas sencillas. Para la utilización del alfil se les explica el concepto de recta horizontal, vertical y diagonal y trabajan las relaciones espaciales, realizando estos desplazamientos en el aula, de tal forma que interiorizan y distinguen los conceptos correspondientes al dominio de la lateralidad.

En estas asambleas se les cuenta un cuento relacionado con las piezas del ajedrez y sus movimientos, incidiendo en la forma de desplazamiento que tiene el peón. Posteriormente, con la pieza del peón, cada niño realiza el movimiento en el tablero de ajedrez. Finalmente, cuando entienden el movimiento de las piezas, se les entregan tableros de $3 \times 3$ para que realicen, además, las sumas de los valores de las fichas.

Como actividad final se propone una actividad de búsqueda de una de las piezas dentro del tablero, realizando las sumas sencillas para valorar su evolución y la adquisición de los contenidos trabajados en las sesiones anteriores.

Para ello, se vuelve a contar el cuento añadiendo al final de la historia que «la reina se ha perdido y tienen que encontrarla entre todos». Se les repartió por parejas un tablero numerado, y las piezas del ajedrez, cada una con sumas para realizar e ir colocando cada pieza en el lugar correspondiente, de esta forma el hueco que quedaba era la reina-dama. Finalmente, se comprobó

en la PDI si la reina estaba en el lugar correcto (ver figuras 5 y 6).

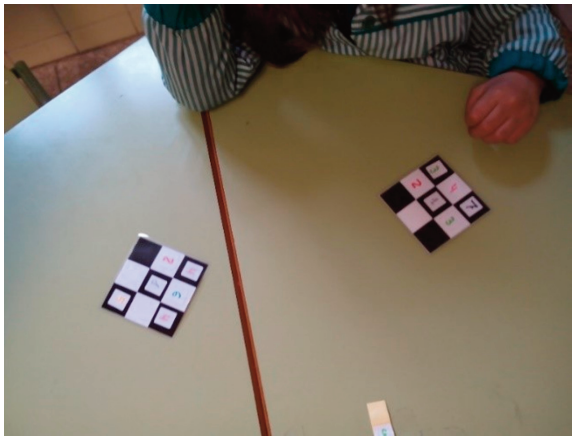


Figura 5. Tableros de ajedrez para iniciarse en la suma

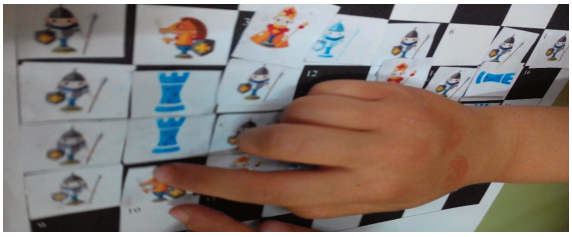


Figura 6. Busca a la dama



### *Evaluación*

La valoración académica forma parte del proceso de enseñanza–aprendizaje analizado y se realiza de manera permanente. El objetivo que se pretende alcanzar con una correcta evaluación, es obtener información óptima que permita tomar las decisiones oportunas de cara a la mejora del proceso así como de la adaptación de las actividades planteadas. Con la evaluación, se determina la consecución de los objetivos planteados y la evolución de los niños.

La evaluación que se realiza en este trabajo tiene carácter global, continuo y formativo y se centra en valorar en conjunto todas las áreas. Además, se dice que es formativa, ya que orienta a los educadores en este proceso para ajustar las actividades.

La valoración de las sesiones se lleva a cabo en tres momentos: al inicio, durante y al final de la sesión. Al principio, una evaluación inicial permitirá estimar el nivel del que parten los niños antes de la intervención. Durante la realización de las actividades se realizará un registro de campo de los resultados de las actividades mediante la observación de los niños y por último, se les valorará con los indicadores de evaluación marcados. Al finalizar el curso se valorará el aprendizaje total del niño.

Los indicadores de evaluación que se tendrán en cuenta son los recogidos en la tabla 1. No obstante además de estos se valorará la actitud del niño y su disfrute con las actividades.

| | |
|---|---|
| Área: Conocimiento de sí mismo y autonomía personal | |
| CE1 | Se relaciona correctamente en el grupo |
| CE2 | Se organiza previamente para la realización de las tareas |
| CE3 | Acepta las normas de participación en la actividad |
| Área: Conocimiento del entorno | |
| CE4 | Acepta las normas de participación en la actividad |
| CE5 | Iniciarse en la utilización de estrategias |
| CE6 | Identifica la grafía de los números del 1 al 6 |
| CE7 | Asocia los números a la cantidad que representan |
| CE8 | Valora la importancia de los números |
| CE9 | Realiza series identificando el patrón que sigue para completarla |
| CE10 | Clasifica y realiza el recuento de elementos obtenidos |
| CE11 | Completa tableros de doble entrada |
| CE12 | Lleva a cabo la descomposición numérica |
| CE13 | Realiza operaciones de adición sencillas |
| CE14 | Identifica las rectas horizontales, verticales y diagonales |
| Área: Lenguajes: Comunicación y representación | |
| CE15 | Escucha y comprende cuentos sencillos |
| CE16 | Utiliza el lenguaje como medio de comunicación para describir sus acciones |
| CE17 | Describe los objetos o movimientos que realiza |

Tabla 1. Evaluación de los conocimientos

Fuente: Decreto 17/2008, de 6 de marzo, del Consejo de Gobierno, por el que se desarrollan para la Comunidad de Madrid las enseñanzas de la Educación Infantil. Madrid.

## Resultados y conclusiones

A partir de la realización de las actividades propuestas en esta experiencia se ha comprobado la premisa principal para la realización de esta investigación, es decir, la introducción de cualquier material didáctico y además manipulativo en las

aulas incrementa en los niños su motivación y su interés por el aprendizaje, en especial el ajedrez.

Concretamente con el uso del ajedrez como juego de mesa en una versión de ajedrez educativo, se ha observado, además de conseguir el aprendizaje de los objetivos matemáticos, cómo aumenta la estimulación de los niños. La motivación es muy importante porque aprenden de forma lúdica. Además, los niños afirmaron sentirse más importantes porque consideraban que el ajedrez era un juego de mayores.

Se ha apreciado una mayor implicación de los niños durante las sesiones realizadas, se encontraban más estimulados y lo transmitían en sus casas. Esta motivación en ellos, se traduce en que favorece el aprendizaje y adquisición de conceptos en los niños.

Es muy importante tener en cuenta la idoneidad de los contenidos que se quieren transmitir, así como la forma de hacerlo mediante las actividades. Con la realización de estas tareas y los resultados obtenidos, se afirma que el uso de recursos del ajedrez como material manipulativo mejora sustancialmente la forma de enseñar y hace que aumente el rendimiento académico de los niños en las habilidades matemáticas de cálculo, debido a que facilita la comprensión de los conceptos matemáticos relacionados con la clasificación y seriación, el número y las operaciones aritméticas o las relaciones espaciales.

Asimismo, es necesario resaltar la importancia de la adecuación del lenguaje para quienes se dirigen las sesiones, puesto que al utilizar un juego de mesa en edades tan tempranas, es necesario simplificar su funcionamiento y realizar una adaptación del mismo. Es importante fundamentar y argumentar las tareas en función del nivel de los alumnos, es decir, explicarles lo que se está haciendo y lo que se pide que hagan, además de buscar la relación de las actividades que se les plantean con sus propios conocimientos, para generar aprendizajes significativos. Es necesario también ayudarles a que saquen conclusiones, siendo capaces de generar problemas y a la vez, de negociar entre ellos cómo solucionarlos, para ello es clave el papel del educador.

Para la propuesta de las actividades, lo primordial es conocer las capacidades previas de los niños con los que se va a trabajar. Por ello, la realización de algunas actividades tipo se proponen como pretest, y han sido imprescindibles para desarrollar la intervención. Con ello se pretende comprobar si los niños tienen las capacidades y conocimientos previos necesarios, matemáticos o no, para que no se frustren en el momento de realizar las actividades y logren superar con éxito el objetivo que se les plantea, además de su satisfacción personal.

Para finalizar, hay que tener en cuenta que las épocas cambian, con lo cual los métodos en educación también deberían adaptarse. Es primordial la utilización de nuevas estrategias que motiven a los niños y que a la vez ellos puedan ser los protagonistas, por ello, se insiste tanto en el uso de materiales manipulativos en el aula.

## Referencias bibliográficas


Álvarez, A. (1996), *Actividades Matemáticas con Materiales Didácticos*, MEC-Narcea, Madrid.

Berini, M., D. Bosch, M. Casadevall, I. Guevara y D. Sabaté (2010), «Las matemáticas no me han servido para nada… Pero dicen que las matemáticas son imprescindibles…», *Suma,* n.º 64, 15-24.

Canals, M. (2001), *Vivir las matemáticas*, Octaedro. Barcelona.

Cascallana, M. T. (1999), *Iniciación a la matemática: materiales y recursos didácticos*, Santillana, Madrid.

Charness, N. (1981). «Aging and skilled problem solving», *Journal of Experimental Psychology: General*, 110(1), 21.

Dato, J. Á. O. (2003), «El juego-rey y la ciencia de los números», *Suma*, n.º 44, 53-64.

De Guzmán, M. (1989), «Juegos y matemáticas», *Suma*, n.º 4, 61-64.

*Decreto 17/2008, de 6 de marzo, del Consejo de Gobierno, por el que se desarrollan para la Comunidad de Madrid las enseñanzas de la Educación Infantil*, Boletin Oficial de la Comunidad de Madrid (12 de marzo de 2008), n.º 61, 6-15, Madrid.

Fernández, J. (2008), *Utilización de material didáctico con recursos de ajedrez para la enseñanza de las matemáticas*, Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona.

Fernández, S. F. (1990), «El ajedrez, un recurso en el aula». *Suma*, n.º 7, 53-60.

García, L., y L. Olasagasti (2013), *Ajedrez y ciencia, pasiones mezcladas*, Grupo Planeta, Barcelona.

Gardner, H. (1998), *Inteligencias múltiples*, Paidós, Barcelona.

Giménez, J. (2000), «La importancia de lo tangible para el aula de Matemáticas», *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, n.º 43-44, 47-52.

Godino, J., D. Bencomo, V. Font y M. Wilhelmi (2007), *Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*, Universidad de Granada, Granada.

González, J. L. (2010), *Recursos, material didáctico y juegos y pasatiempos: Consideraciones generales*, Universidad de Málaga, Málaga.

Graells, P. (2000), *Los medios didácticos, Departamento de Pedagogía Aplicada*, Facultad Educación, Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona.

Montessori, M. (2013), *The Montessori method*, Transaction publishers, New Brunswick.

Núñez, J., y S. Ruiz (2010), «Cabalgando con las matemáticas», *Suma*, n.º 64, 25-34.

Pérez-Latorre, Ó. (2012), «Del Ajedrez a StarCraft. Análisis comparativo de juegos tradicionales y videojuegos», *Comunicar: Revista Científica de Comunicación y Educación*, 19(38), 121-129.

Rousseau, J. J. (1982), *Emilio*, Edaf, Madrid.

Desiré García Lázaro
*Universidad Rey Juan Carlos*
<desire.garcia@urjc.es>

Estíbaliz Jenkins Gómez
*Universidad Rey Juan Carlos*
<estibaliz.jenkins@alumnos.urjc.es>

suma+
Artículos
Julio 2018
88
pp. 45-54

# Introducción al lenguaje algebraico en un entorno de resolución de problemas

Mireia López Beltran
Cyntia Riquelme Carvallo



La resolución de problemas y las tareas ricas nos brindan una magnífica oportunidad para la introducción y adquisición del lenguaje algebraico. En este trabajo presentamos una selección de actividades recogida en el blog Banco de recursos del FEM Matemàtiques[1], elaborado por las autoras de este artículo, que permiten a los alumnos trabajar el álgebra de una manera significativa a partir de la investigación de patrones. En los materiales recogidos se presentan propuestas para el trabajo de las actividades en el aula que incluyen producciones de alumnos.

*Palabras clave:* Lenguaje algebraico, Patrón, Resolución de problemas, Tareas ricas, Secundaria.

**Introduction to algebraic language in a problem resolution environment**

Problem solving and rich tasks provide a great opportunity for the introduction and acquisition of algebraic language. In this paper we present a selection of activities collected in the blog FEM Matemàtiques[1] Resource Bank, created by the authors of this article, that allow students to work algebra in a meaningful way based on pattern research. In the collected materials there are work proposals of classroom activities that include student productions.

*Keywords:* Algebraic language, Pattern, Problem solving, Rich tasks, Secondary.

Demasiado a menudo podemos encontrar propuestas de aula donde la resolución de ecuaciones de diferentes tipos se lleva gran parte del protagonismo del trabajo de álgebra planteado. Desde este enfoque, el alumnado trabaja la introducción al álgebra a partir de ejercicios de operaciones con expresiones algebraicas cada vez más complicados para pasar a la resolución de ecuaciones y finalmente llegar a su aplicación en la resolución de problemas. De este modo, la resolución de problemas no está en la introducción ni en el núcleo del aprendizaje, sino que se trabaja en la parte final de aplicación y solo después que el alumnado haya mecanizado la resolución de las ecuaciones pertinentes. De esta manera muchos alumnos se introducen en el álgebra a partir de un lenguaje abstracto y sin significado para ellos, lleno de letras, números y operaciones cada vez más complejas.

Este planteamiento no suele dar suficiente protagonismo a otro tipo de trabajo que también debemos realizar con nuestros alumnos y que encontramos, por ejemplo, en los contenidos del currículo en los cursos de 1.º y 2.º de la ESO (12-14 años):

> El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades. (BOE, 2015)

Artículo recibido en *Suma* en febrero de 2018 y aceptado en abril de 2018

Creemos que es fundamental dotar de significado a las expresiones algebraicas y que los alumnos experimenten la necesidad de su utilización para facilitar lo que quieren comunicar. Como todo lenguaje, tiene un carácter o sentido comunicativo «que nos permite expresar de manera general e interpretar de forma sintética propiedades y relaciones numéricas conocidas o desconocidas» (Calvo y otros, 2016). En el caso de la investigación de patrones hacemos que los alumnos puedan dotar de significado a las expresiones algebraicas ya que las necesitan para expresar aquellas relaciones que ellos mismos han descubierto. También este lenguaje permite a los alumnos que argumenten «al desvelar relaciones nuevas, buscar equivalencias entre expresiones aparentemente diferentes y justificar las relaciones, afirmaciones o conjeturas que realizan dando razones matemáticas en todo el proceso» (Calvo y otros, 2016).



Podemos enseñar contenidos y procesos matemáticos a partir de la Resolución de Problemas (RP) ya que esta «no tiene que ser una tarea a realizar al final del proceso de aprendizaje, sino que puede ser perfectamente el desencadenante del proceso» (Burgués y Sarramona, 2013). Los problemas a trabajar no pueden ser de cualquier tipo, es importante que sean «actividades competencialmente ricas formulando preguntas que promuevan conexiones, reflexiones y argumentaciones» (Calvo y otros, 2016: 254)[2].

## Problemas con investigación de patrones

Los problemas que hemos seleccionado trabajan el álgebra a partir del planteamiento de investigaciones en que los alumnos deben conjeturar y buscar un patrón. Una característica que hace atractivo el uso de patrones en el aula es que «nos permiten predecir, saber lo que puede ocurrir gracias a establecer fórmulas o reglas…». De hecho, en las primeras etapas educativas «se realiza un trabajo de series y patrones, con material y sin, que después desaparece en los cursos posteriores». Este tipo de actividades también comporta una metodología de aula y un papel del profesor enfocado a «ayudar a nuestros alumnos a matematizar el patrón» con el uso del lenguaje algebraico y «mostrando las virtudes» de este lenguaje (Burgués, 2011).

En muchos de los problemas del *Fem Matemàtiques* se trabaja la identificación de patrones en contextos numéricos y geométricos (en el plano y en el espacio). Ser capaz de encontrarlos es una indicación del trabajo con un tipo de pensamiento funcional que permite generalizar y desarrollar una regla algebraica o fórmula que nos permita predecir comportamientos.

Según Burgués (2011) la investigación pasaría por diferentes fases:

— Darse cuenta de las semejanzas (módulos) o tipos de cambio.
— Recoger datos y organizarlos.
— Realizar conjeturas y pruebas.
— Expresar las relaciones y reglas.
— Comprobar y justificar.

Entendemos que estas fases son las que se darían en una investigación completa. Durante el trabajo con los alumnos muchas veces las encontramos mezcladas. Además, nos podemos encontrar que algunas de estas fases no se detallen por escrito y especialmente en un informe final, de ahí que en los ejemplos completos de producciones de alumnos podemos no encontrarlas todas o que no aparezcan tan definidas.

### *Darse cuenta de las semejanzas (módulos) o tipos de cambio*

Los alumnos deben darse cuenta de las semejanzas o características que se repiten (módulo o unidad de repetición) o de un tipo de cambio, por tanteo operativo u observación de las formas de las figuras. Hay patrones de repetición de un módulo y patrones de crecimiento.

El caso de la figura 1 presenta un patrón de crecimiento. En estos patrones lo que se repite, lo que se mantiene, es la manera como crece la figura. En esta tarea podríamos ayudar a los alumnos con una pregunta como: *¿Qué permanece igual y qué cambia al aumentar el nivel?*

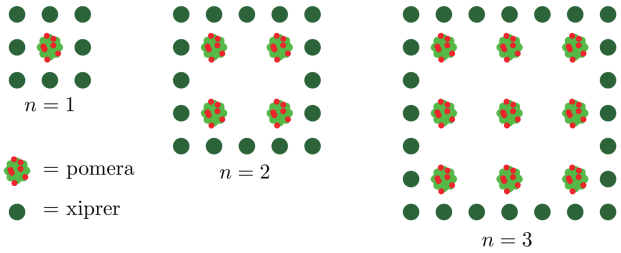



Figura 1. Manzanos y cipreses (FM14 segunda fase. Nivel primero de ESO). Patrón geométrico

En el siguiente ejemplo encontramos un patrón numérico de repetición muy sencillo:

*División decimal*
(Problema del FM16 segunda fase. Nivel sexto de primaria)

Si calculas, con la calculadora, el cociente con decimales de la división 9 : 37, la pantalla te mostrará, como mucho, trece cifras decimales. Con estas cifras se puede deducir la respuesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto suman las 14 primeras cifras decimales del cociente?
b) ¿Cuánto suman las 100 primeras cifras decimales del mismo cociente?

En la respuesta de un alumno (figura 2) vemos cómo ha detectado la repetición del patrón numérico, el módulo 243 que marca en la representación del número.

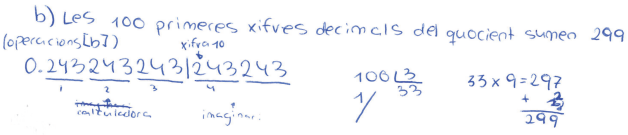



Figura 2. Patrón de repetición numérico

## *Recoger datos y organizarlos*

Una buena estrategia para los alumnos para detectar las repeticiones y cambios es recoger datos y organizarlos. Pueden empezar con esquemas y dibujos, como en el ejemplo del alumno que encuentra el módulo de repetición en la división decimal o como en el ejemplo siguiente, donde vemos cómo un buen esquema les ayuda a organizar las ideas y ver las relaciones.

*Invito a magdalenas*
(Problema FM15 primera fase. Nivel sexto de primaria y primero de la ESO)

Con 6 tiques, 1 magdalena gratis. Con 51 tiques, ¿a cuántos amigos puedo invitar gratis con los tiques que tengo?

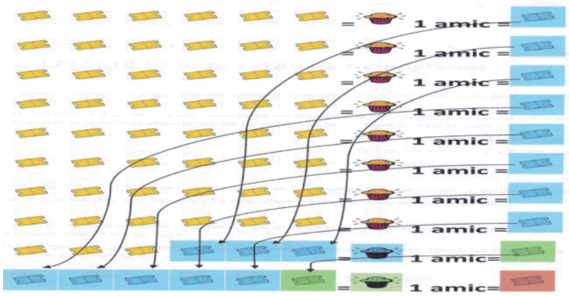



Figura 3. Esquema resolución problema *Invito a magdalenas*

Puede haber diversas estrategias de ataque que nos permitan recoger datos y que nos vienen dadas por diferentes perspectivas, visiones, manipulaciones o dibujos.

Una buena herramienta es la realización de listas ordenadas o tablas. Su aprendizaje lejos de ser intuitivo también debe ser sugerido o mostrado por parte del profesorado. Debería surgir de la necesidad de organizar los datos, ya que en un principio el alumnado suele ponerlos desordenados o en formas parecidas a listas[3]. La construcción de tablas favorece la observación de pautas de crecimiento y la observación de las relaciones numéricas, un puente claro para el estudio posterior de funciones y para poder hacer el paso de las relaciones reiterativas o recursivas a las relaciones funcionales (ver figura 5).

## *Realizar conjeturas y pruebas*

A partir de la observación y de la exploración, en su proceso de investigación, los alumnos deben ir planteando sus hipótesis y conjeturas. Después, ponerlas a prueba y según el éxito o no, repetir el proceso o realizar un trabajo de abstracción.

Las pruebas sirven para poder dar razones matemáticas y justificar la conjetura. En este proceso de búsqueda del patrón, los alumnos deben

utilizar diferentes estrategias como, por ejemplo, coger casos más simples. Estas pruebas se deben ordenar siguiendo el punto anterior. Se debe realizar un trabajo sistemático y exhaustivo, de manera que no se escape nada.

*Una escultura cúbica*
(Problema del FM15 primera fase. Nivel primero de la ESO)

Un artista dispone de 14 cubos de un metro de arista. Con estos 14 cubos hace una escultura. Para protegerla, la pintan.

a) ¿Cuál es, en metros cuadrados, el área que tienen que pintar?
b) Y, ¿en una figura de 5 pisos?

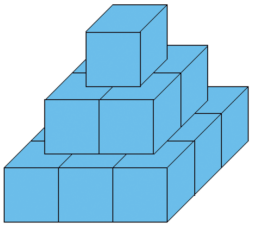


Figura 4. Una escultura cúbica



Organizar los datos en una tabla nos ayudará a ver relaciones verticales u horizontales entre los números que aparecen, como en la figura 5.

La primera relación que suelen observar los alumnos es la relación vertical. Los primeros patrones que trabajan de pequeños son las seriaciones. Estas seriaciones las pueden continuar basándose en el patrón que siguen los números anteriores: en el caso de la tabla, pueden ver que la regla es sumar 6 y pueden prever los números siguientes: 5, 11, 17, 23… esta estrategia se denomina recursiva y está caracterizada por la repetición (relación iterativa). Sin embargo, esta estrategia es limitada en caso de que se les pidan valores elevados. Por ejemplo:

| Pis | Cares laterals pintades | Cares superiors pintades | Total $m^2$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 1 | 5 |
| 2 | 8 | 3 | 11 |
| 3 | 12 | 5 | 17 |
| 4 | 16 | 7 | 23 |
| 5 | 20 | 9 | 29 |
| | | | 85 |

+6

x4

Figura 5. Tabla de datos hecha por unos alumnos (una escultura cúbica)

los metros cuadrados de una escultura de 30 o 60 pisos.

Para encontrar la regla general que nos permita predecir los casos más grandes, se tiene que hacer un salto de la recurrencia a la regla funcional: de la visión vertical de la tabla a la horizontal, es decir, de conocer un término sabiendo el anterior, a conocerlo directamente en función de *n*. En esta parte, el profesor debe estar atento y en caso de que el alumno no consiga encontrar las relaciones puede, mediante buenas preguntas, guiarlo para matematizar la regla y poder predecir el patrón.

## *Expresar las relaciones y reglas*

Una vez el alumnado ha sido capaz de visualizar un patrón o relación, ahora le surge la necesidad de expresarlo, es decir, de la utilización del lenguaje algebraico para comunicar de una manera más sintética las relaciones y patrones que han encontrado. Un lenguaje algebraico que tiene sentido para ellos ya que las fórmulas y expresiones han sido encontradas de manera personal e intentan expresar cómo han interpretado ellos las relaciones o la estrategia utilizada.

*Contamos baldosas*
(Problema del FM14 primera fase. Nivel sexto de primaria)

El mosaico de la figura 6 está formado por baldosas blancas y negras. Tiene una anchura de 9 baldosas.

[…]

f) Explica cómo se encuentra el número de baldosas necesarias a partir del número de anchura del mosaico.

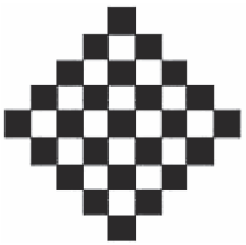


Figura 6

En este apartado final del problema se les pide el salto a la abstracción al tener que calcular las baldosas para un ancho que no pueden dibujar ni contar. Para expresar la relación nos podemos

encontrar, según el nivel competencial del alumnado, con: una expresión verbal (oral o escrita), una semifórmula donde se incluyen ya elementos algebraicos o una fórmula algebraica (figura 7).

En la ficha del problema en el blog se pueden encontrar ejemplos de los otros tipos de expresiones.

amplada : 2 = nombre de rajoles blanques (b) (un número enter, sense decimals)
b + 1 = nombre de rajoles negres (n)

Després, per saber el nombre total de rajoles hem de fer el següent:

$b^2 + n^2$ = nombre de rajoles totals.

Figura 7. Semifórmula

[Traducción:
anchura: 2 = número de baldosas blancas (*b*) (un número entero, sin decimales)
*b* + 1 = número de baldosas negras (*n*)
Después para saber el número total de baldosas tenemos que hacer lo siguiente:
$b^2 + n^2$ = número de baldosas total]

### *Comprobar y justificar*

Finalmente, es muy importante la justificación y argumentación del proceso: razonar el porqué del patrón.

El problema *Invito a magdalena*s que hemos visto en el apartado «Recoger datos y organizarlos» continúa con la pregunta: *¿Cuántos tiques necesito para cualquier número n de amigos?* Por tanto ahora nos pide la regla que nos permita predecir el número de tiques. A continuación observamos dos respuestas con la justificación del patrón descrito:

> Sí que podríamos decir cualquier número de amigos, porque por lo que hemos visto, siempre se tiene que multiplicar el número de amigos x 6 (tiques para cada magdalena).
>
> n.a. × 6 = número de tiques que necesito.
>
> Entonces tenemos que restar el número de amigos al número de tiques que necesito si puedo deber.
>
> Para saber los tiques necesarios para no deber nada, tenemos que sumar 1 al último resultado.

En la solución recogida en la respuesta anterior justifican el patrón encontrado diciendo que «el número de amigos × 6 = n.º de tiques que se necesitan», al que «tenemos que restar el número de amigos […] si puedo deber» (se dan cuenta que por cada amigo que han invitado a una magdalena, esta tendrá un tique, pero claro el último tique lo «debes» por que has conseguido la magdalena sin tenerlo, por eso dicen «si puedo deber». Entonces terminan el razonamiento que «para saber los tiques necesarios para no deber nada, tenemos que sumar 1 al último resultado», de esta manera obtienen: $6x - x + 1$ que sería $5x + 1$.

En la siguiente respuesta los alumnos expresan la solución con una fórmula en principio diferente que también está debidamente justificada:

> Hemos hecho una fórmula que es la siguiente: $(X-1) \times 5 + 6$
>
> Hemos pensado la fórmula porque el primero que compra gasta 6 tiques, el segundo 5, el tercero 5, por tanto si restas 1 a *X* [las personas que van después del primero que pide], lo multiplicas por cinco y sumas 6 haces esto [el primero que pide].

Vale la pena destacar que el hecho que los dos grupos de alumnos hayan llegado a dos expresiones algebraicas equivalentes a través de razonamientos diferentes nos supone una gran riqueza para poder ser trabajado y compartido en el aula. Los materiales recogidos en el blog pretenden poder dar ejemplos más allá de los que nos puedan surgir en nuestra aula.

Después de ejemplificar las distintas etapas del proceso de investigación ahora presentaremos una serie de problemas (actividades competencialmente ricas) también seleccionados de nuestro blog *Banco de recursos del FEM Matemàtiques*. Se han escogido con la intención que ayuden a dotar de significado el trabajo del álgebra y a trabajar los procesos de comunicación y argumentación.

## Ejemplos de problemas de investigación

A continuación incluimos 3 ejemplos de problemas de investigación: *Triángulos y triangulitos, Estrellas de fútbol* y *Cubos agujereados* con producciones de alumnos sobre los patrones encontrados. Además de esta selección en el blog pueden encon-

trarse más problemas ya que, de hecho, en casi todos los problemas editados podemos encontrar algún patrón o regla a descubrir y, por tanto, aprovechar para hacer un trabajo significativo del lenguaje algebraico. En el primer ejemplo hemos desglosado las fases de la investigación. En el segundo y el tercero mostramos cómo los alumnos llegan a deducir las expresiones semialgebraicas y algebraicas y a justificarlas perfectamente sin el desglose por etapas. Tal como comentamos en más de una ocasión las diferentes etapas aparecen entremezcladas.

### *Triángulos y triangulitos*[4]

(Problema del FM14 primera fase. Nivel segundo de la ESO)

Este problema trabaja el patrón de crecimiento de una figura que sigue una estrategia recursiva o secuencial: necesitamos saber el valor de la figura anterior para saber la de las siguientes. También se puede llamar iterativa o aditiva. Al mismo tiempo el problema es una introducción al mundo de los fractales a partir de la figura del *Copo de nieve de Koch* que se origina desde el triángulo equilátero creando figuras autosemejantes.

Si el triángulo inicial tiene un área de 9 cm², calcula el área de las figuras 2, 3 y 4 (figura 8).
¿Sabrías aproximarte al valor del área que resultaría si aplicáramos el proceso muchísimas veces?

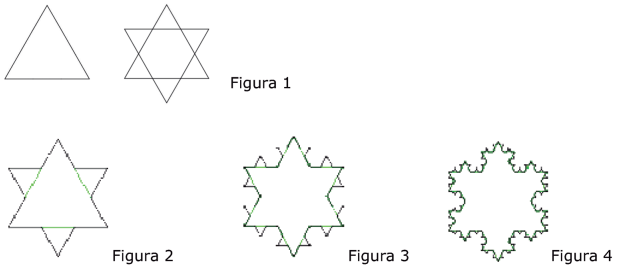



Figura 8

## Darse cuenta de las semejanzas o tipos de cambio

En este caso fue sencillo para los alumnos construir la figura 2 a partir de la figura 1 y luego calcular su área. Además del enunciado disponían de una plantilla triangular en la que podían dibujar y calcular el valor del área para estos primeros casos como podemos ver en la siguiente respuesta:

> Primero para poderlo hacer hemos dividido el triángulo inicial en 9 triángulos pequeños, de esta manera cada triángulo pequeño tendrá 1 cm² ya que el grande hace 9 (añade una imagen de un triángulo divido en 9 triángulos equiláteros; figura 9)
>
> Al añadir otro triángulo grande en realidad estamos añadiendo 3 triángulos pequeños, es decir 3 cm².
>
> Por tanto si el triángulo inicial medía 9 cm² y ahora hemos añadido 3 cm² esta figura medirá 12 cm².

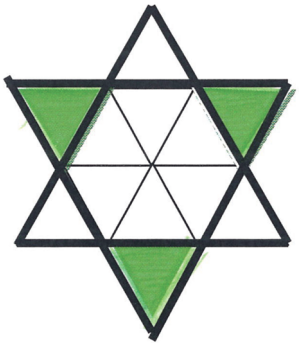


Figura 9

## Recoger datos y organizarlos

En el siguiente ejemplo estos alumnos organizan y ordenan los datos en una tabla. En las operaciones ya se intuye que han descubierto la regla aritmética que les lleva a calcular el área a partir de las figuras anteriores. Estas operaciones que ya tienen un significado para ellos se convertirán posteriormente en una expresión algebraica para determinar el área de la figura en cualquier caso (figura 10).

En este caso los alumnos completan la tabla hasta la figura 11 y luego se adentran en la siguiente etapa de la investigación conjeturando que «nos parece que se aproxima a 14,14 cm²».

## Realizar conjeturas y pruebas

A partir de la observación y exploración pueden ir comenzando a plantear sus conjeturas, quizás

| Figura | Operació | |
|---|---|---|
| Figura 5 | $12+\frac{1}{9}\cdot 12+\frac{1}{9^2}\cdot 4\cdot 12+\frac{1}{9^3}\cdot 4^2\cdot 12$ | 14,1893... cm$^2$ |
| Figura 6 | $12+\frac{1}{9}\cdot 12+\frac{1}{9^2}\cdot 4\cdot 12+\frac{1}{9^3}\cdot 4^2\cdot 12+\frac{1}{9^4}\cdot 4^3\cdot 12$ | 14,306355... cm$^2$ |
| Figura 7 | $12+\frac{1}{9}\cdot 12+\frac{1}{9^2}\cdot 4\cdot 12+\frac{1}{9^3}\cdot 4^2\cdot 12+\frac{1}{9^4}\cdot 4^3\cdot 12+\frac{1}{9^5}\cdot 4^4\cdot 12$ | 14,3583... cm$^2$ |
| Figura 8 | $12+\frac{1}{9}\cdot 12+\frac{1}{9^2}\cdot 4\cdot 12+\frac{1}{9^3}\cdot 4^2\cdot 12+\frac{1}{9^4}\cdot 4^3\cdot 12+\frac{1}{9^5}\cdot 4^4\cdot 12+\frac{1}{9^6}\cdot 4^5\cdot 12$ | 14,3815... cm$^2$ |

Figura 10

viendo primero algún tipo de patrón en las figuras más sencillas:

> Primero me he fijado en que los triángulos que añadimos son una novena parte de los triángulos pequeños de 1 cm$^2$ (figura 11).
>
> Por tanto, esta figura medirá 12 cm$^2$ de la antigua figura más 12/9 de 1 triangulo de 1 cm$^2$, es decir, $12+1,\widehat{3}=13,\widehat{3}$.

De este modo plantean un patrón recursivo o aditivo. En este caso, encuentran el valor del área del nuevo triángulo calculando la razón o relacionándolo con la del triángulo inicial o con la del triángulo de 1 cm$^2$: «Es 1/9 de 1/9 de 1cm$^2$, es decir, 1/81» (figura 12).

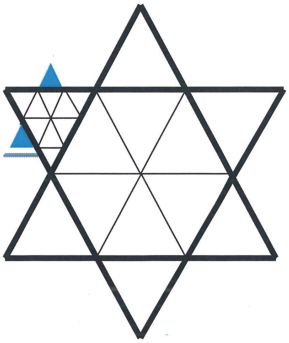


Figura 11

Después lo multiplican por 48 nuevos triangulitos que se han formado y suman esta área total añadida a la figura anterior: $13,\widehat{3}+48/81=$ $=13,935$ cm$^2$.

Otro grupo de alumnos exponen en su solución el patrón que aplican a cada figura, la calculan correctamente para una figura más de la pedida y conjeturan que «el área aumentará cada vez menos porque los triángulos se hacen cada vez más pequeños».

## Expresar las reglas y justificarlas

Finalmente, respondiendo a la última pregunta que les obliga a la abstracción y formulación de una regla, «¿Sabrías aproximarte al valor del área que resultaría si aplicáramos el proceso muchísimas veces?», acaban expresando matemáticamente el patrón y justificando la fórmula que obtienen y el porqué del factor 4/9:

> Después de pensar cómo expresar matemáticamente lo que hicimos para averiguar cómo conseguir el área de la figura siguiente llegamos a la conclusión que la fórmula era la siguiente:
>
> $$A_n=A_{n-1}+3\cdot 4^{n-2}\cdot\frac{1}{9^{n-2}}$$
>
> Área de la figura 1 es 9 cm$^2$ y la «n» es a partir de 2.
>
> Un triángulo tiene 3 lados.
>
> Cada triángulo que añadimos crea 4 nuevos segmentos.
>
> Cada triangulito era 1/9 del área.

Otros alumnos expresaron las relaciones solo con potencias de base 4 y 1/9 (figura 13).

Y finalmente algún grupo da el valor exacto con la fórmula de progresiones geométricas (figura 14).

$$A_n=9+3\cdot 4^0\cdot\frac{1}{9^0}+3\cdot 4^1\cdot\frac{1}{9^1}+\ldots+3\cdot 4^{n-2}\cdot\frac{1}{9^{n-2}}$$

Figura 13

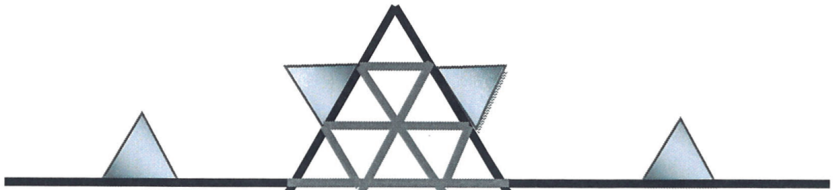


Figura 12

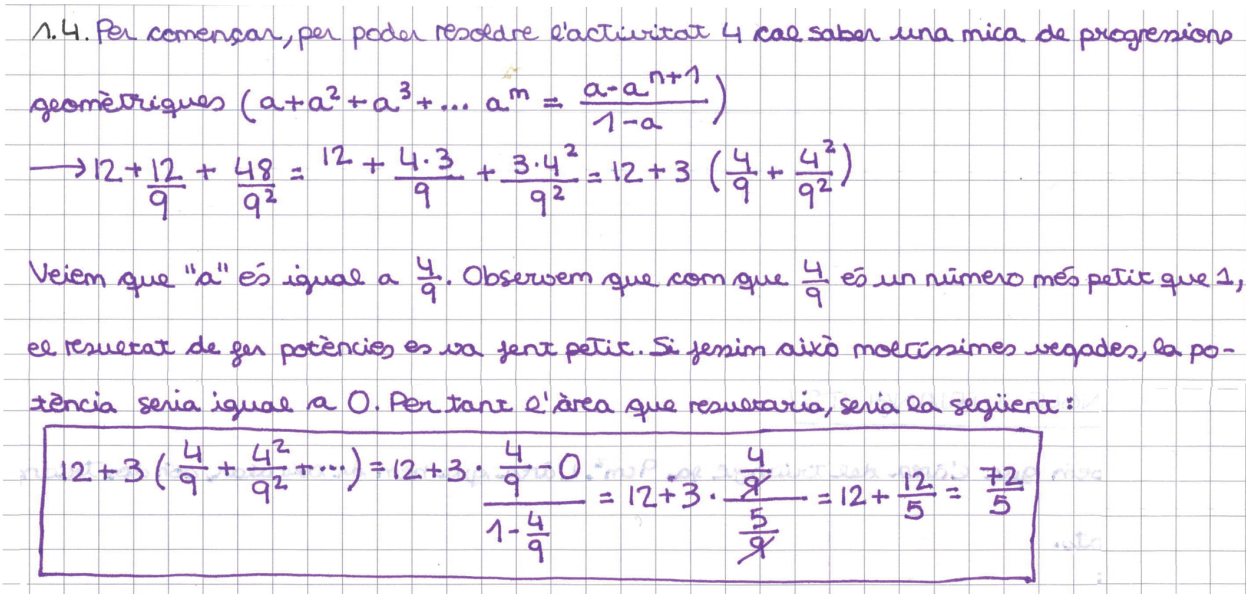



Figura 14



## *Estrellas de futbol*[5]

(Problema del FM14 primera fase. Nivel sexto de primaria)

> [...] d) ¿Cuántas trayectorias diferentes de la pelota puede haber en un rondo de 5 jugadores? (Cada jugador la puede pasar a cualquiera de los otros, pero se considera la misma pasada si la trayectoria de la pelota es igual, o sea, es el mismo que el jugador 1 le pase al 2 o al revés)
> e) ¿Sabríais encontrar una manera de determinar el número de trayectorias diferentes para un rondo de cualquier número de jugadores? Indica el resultado para 47 jugadores.

El esquema de la figura 15 les ayuda a responder fácilmente la pregunta d).

Otros dan una respuesta lógica a partir de las pasadas que puede hacer cada jugador (figura 16).

Luego se les pide que pasen de un caso simple a uno mayor lo que les conduce a tener que necesitar una expresión algebraica que les ayude a predecir qué pasará cuando ya no pueden contar, manipular o dibujar: haciendo una conjetura, viendo la regla aritmética que relaciona a las variables y luego generalizando con una fórmula o expresión algebraica.

> También se podría pensar de otra manera: cada jugador puede pasar a 4 jugadores. Por tanto se podrían pasar 4 × 5 veces, si no fuera porque de A hacia B es igual a B hacia A. Por tanto, hemos de dividir por dos. (4 x 5) / 2 = 10. Es decir, (n.° jugadores) x (n.° jugadores – 1) / 2.

A partir de las respuestas recogidas en la figura 16 y esta última se podría trabajar la equivalencia entre los dos planteamientos que nos conduce a la fórmula para sumar los $n$ primeros números naturales: $1+2+3+\dots+n = n\cdot(n+1)/2$.

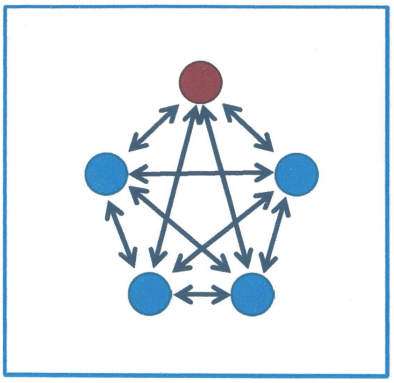


Figura 15

El jugador A té 4 opcions de passada
El jugador B té 3 opcions diferents
El jugador C té 2 opcions
El jugador D té 1 sola passada
El jugador E ja no en pot fer cap de difernent
Total: 4+3+2+1= 10 passades

Figura 16

## *Un cubo agujerado*[6]

(Problema del FM14 primera fase. Nivel segundo de la ESO)

Cogemos un cubo formado por 27 cubitos más pequeños, 3 por arista, y le sacamos las tres filas centrales de cubitos como se muestra en la figura 17.

a) ¿Cuántos cubitos forman la figura resultante?

[...] c) Cogemos ahora un cubo formado por cinco cubitos de arista y le sacamos la fila central de cada cara, ¿cuántos cubitos forman la figura resultante?

[...]f) ¿Podéis descubrir qué pasará con un cubo formado por un número impar de cubitos cualesquiera de arista?

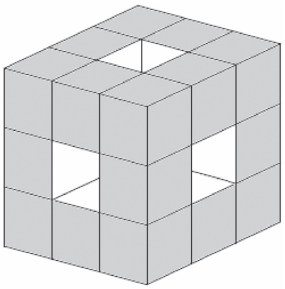


Figura 17

Este problema es un buen ejemplo para trabajo del bloque de Geometría en 3D. Invita a explorar la búsqueda de un patrón y permite plantear la actividad con material manipulativo (construcciones con cubitos) en las primeras preguntas, para ayudar posteriormente en la abstracción en la actividad f. Algunos, en la primera pregunta, hacen un recuento ayudándose de la figura que da el enunciado (figura 18).

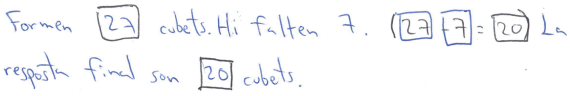



Figura 18

Otros ven una regularidad en cada una de las filas que se sacan y el cubito central y dan un paso más en la abstracción de una posible fórmula ya que lo expresan de manera que después se podría aplicar a cualquier medida de cubo (n.º arista impar). Se intuye que se dan cuenta del patrón aunque la expresión es puramente aritmética:

> $3^3$ es el número de cubitos que están formando el cubo, es decir 27. Como que sacamos las 3 filas centrales pero estas tienen un cubito en común, decimos que en lugar de tener 3 cubitos cada fila, tiene 2. A continuación haríamos: $3^3-(2\cdot 3+1)=20$.

Para el apartado f) donde se pide la generalización, algunos de los alumnos dan la respuesta mediante expresiones semialgebraicas como en el siguiente ejemplo. Observemos que en este caso deben encontrar una expresión polinómica de tercer grado. Es un paso importante de abstracción y visualización de las relaciones en el patrón (figura 19).

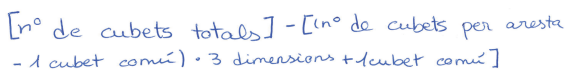



Figura 19

[Traducción: [n.° de cubitos totales]−[(n.° de cubitos por arista−1 cubito en común)·3 dimensiones+1 cubito en común]]



Otros son capaces de encontrar una fórmula:

> Un cubo tiene 6 caras y de estas seis caras, de cada una hemos sacado la fila central de cubitos. Si hacemos eso habríamos sacado dos veces los mismos cubitos (las caras opuestas del cubo comparten la fila central) y, por tanto, cada cara en lugar de sacar toda la fila, saca la mitad. También tenemos que contar que no podemos sacar el cubito central, ya que está compartido con otras filas y lo sacaríamos diversas veces, así que sacamos la mitad de la fila menos uno. Pero haciendo así tenemos el problema de que no estamos contando con el cubito de en medio, por tanto la fórmula final será:

$$x = a^3 - ( 6 ( ( a-1 ) / 2) + 1 )$$

Figura 20

En Arbona y otros (2017) se puede encontrar una propuesta para analizar las producciones de alumnos en términos de adquisición del patrón. En López y Riquelme (2018) se pueden encontrar propuestas para la evaluación competencial.

## Conclusión

A partir de plantear a los alumnos situaciones competencialmente ricas hemos visto producciones donde nos muestran cómo son capaces de introducirse en el lenguaje algebraico dotándolo de sentido para ellos con poco o ningún conocimiento previo de las reglas algebraicas. A partir de la resolución de problemas, las reglas expresadas ya no son una colección de letras, números y operaciones abstractas sino un lenguaje que pueden aprender de modo intuitivo al intentar expresar la relación matemática que han observado en un patrón. Con este planteamiento, además, se da mucho peso al trabajo de la competencia comunicativa ya que los alumnos deben argumentar y justificar a los demás los resultados que han encontrado.



## Referencias bibliográficas

Arbona, E., M. J. Beltrán, A. Jaime y R. Gutiérrez (2017), «Aprendizaje del álgebra a través de problemas de patrones geométricos», *Suma,* n.º 86, 39-46.

Burgués, C. (2011), *Constant o variable, el canvi depèn de tu. Relacions i canvi, un bloc fonamental del currículum* [Vídeo].
<http://srvcnpbs.xtec.cat/creamat/joomla/index.php/formacio-creamat/conferencies/771-constant-o-variable-el-canvi-depen-de-tu-relacions-i-canvi-un-bloc-fonamental-del-curriculum->.

Burgués, C., y J. Sarramona (2013), *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic Identificació i desplegament a l'ESO,* Generalitat de Catalunya, Departament d'ensenyament.

Calvo, C., J. Deulofeu, J. Jareño y L. Morera (2016), *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria obligatoria*, Síntesis, Madrid.

López, M., y C. Riquelme, (2018), *Banc de recursos del FEM Matemàtiques.*
<http://bancfm.blogspot.com.es/>.

*Real Decreto 1105/2014, de 26 de Diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato,* Boletín Oficial del Estado del 1 de marzo de 2015, Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 169-546.
<https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/03/pdfs/BOE-A-2015-37.pdf>.

Mireia López Beltran
*Universitat Politècnica de Catalunya*
<mireia.lopez.beltran@upc.edu>

Cyntia Riquelme Carvallo
*Padre Damián Sagrados Corazones, Barcelona*
<criquelme@padredamiansscc.net>

1 <http://bancfm.blogspot.com.es/>.

2 Para más información sobre actividades competencialmente ricas ver la introducción del blog:
<http://bancfm.blogspot.com.es/p/blog.html>.

3 Ver esta experiencia de aula sobre la necesidad de utilizar una tabla para recoger los datos.

4 <https://twitter.com/sergidelmoral/status/941421886721986561> y <https://twitter.com/sergidelmoral/status/950835237919092736>.

5 Enunciado y ficha completa en:
<http://bancfm.blogspot.com.es/2015/06/triangles-i-trianglets.html>.

6 Enunciado y ficha completa en:
<http://bancfm.blogspot.com.es/2015/09/estrelles-de-futbol.html>.

7 Enunciado y ficha completa en:
<http://bancfm.blogspot.com.es/2016/06/cubs-foradats.html>.

suma+ 88
Artículos
Julio 2018
pp. 55-63

# Generación de una base de orientación para la resolución de problemas

Joana Villalonga Pons

La resolución de problemas es una actividad compleja de gestionar en el aula. En ella intervienen aspectos vinculados tanto al trato que recibe la resolución de problemas como al que toma la educación en sí misma. La evaluación, en particular la reguladora, y más concretamente el uso de instrumentos que permitan al propio resolutor reflexionar sobre su actividad, emergen como un factor clave en dicha gestión. El estudio que aquí se presenta corresponde a una parte de la investigación más amplia sobre el tema desarrollada por el autor. Concretamente, se estudia la posibilidad y el modo de generar una base de orientación para la resolución de problemas matemáticos para alumnos de entre 11 y 13 años de edad.

*Palabras clave:* Resolución de problemas, Bases de orientación, Autorregulación, Regulación del aprendizaje, Evaluación.

**Progeneration of a problem solving-related orientation basis**

Mathematical problem solving is a difficult activity to address in the classroom. Different aspects regarding both the problem solving meaning as well as the education understanding influence this practice. Assessment, the regulation of the learning in particular, and consequently the use of devices that allow the students to reflect on their own learning activity are seen as a key aspect for this purpose. The present paper describes part of a bigger study of the author regarding this topic. Specifically, it analyses the possibility and the way to develop a problem solving-related orientation basis for 11-13-year-old students.

*Keywords:* Problem solving, Orientation basis, Self-regulation, Learning regulation, Assessment.

La resolución de problemas pone de manifiesto la mayoría de conocimientos y habilidades matemáticas (Departament d'Ensenyament, 2017), convirtiéndose con ello en un aspecto fundamental, tanto de las matemáticas en sí mismas como de la educación matemática. Así ya lo manifestaron Halmos (1980), al situar los problemas como el corazón de las matemáticas, y el NCTM (1980), al concebirlos como el centro de cualquier proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Desde finales de los años 70 se ha trabajado para caracterizar la resolución de problemas, al mismo tiempo que estudiar la gestión de procesos de enseñanza y aprendizaje que permitan a los estudiantes convertirse en mejores resolutores (Ponte, 2007). Sin embargo, la noción de problema matemático ha sido utilizada de múltiples maneras, desde la realización de ejercicios rutinarios hasta el desarrollo de la actividad matemática profesional (Schoenfeld, 1992). Esta variedad junto a cierta falta de reconocimiento al respecto, ha llevado a los educadores de matemáticas a sentirse incómodos con respecto a este concepto (Ponte, 2007).

En el siglo XXI, con las múltiples reformas de los currículos, con enfoques centrados en procesos (NCTM, 2000) como en competencias



Artículo recibido en *Suma* en enero de 2017 y aceptado en marzo de 2018

(Niss y Højgaard, 2011), la resolución de problemas ha vuelto a emerger con fuerza convirtiéndose en un objetivo importante de la investigación educativa, en la que interesan proyectos de investigación de diseño a largo plazo que trabajan con grupos de docentes en activo para establecer pautas prácticas para iniciativas sostenibles de resolución de problemas (Stacey, 2016).

A lo largo de estos años ha habido avances significativos en la comprensión de los aspectos cognitivos, metacognitivos y afectivos que intervienen en la resolución de problemas en matemáticas, como también una considerable investigación sobre la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos en las aulas (De Corte y otros, 2000; Schoenfeld, 2013). Sin embargo, quedan aún más preguntas que respuestas sobre esta compleja actividad, en particular en relación a cuándo y cómo intervenir en las tareas exploratorias que se pueden proponer en el aula (Mason, 2016). ¿Cómo lograr que los alumnos superen situaciones de bloqueo?, ¿cómo conseguir que los alumnos identifiquen sus errores y traten de corregirlos?, ¿cómo alcanzar que los alumnos dejen por escrito las acciones que llevan a cabo?, son algunos de los numerosos aspectos para los que se desearía respuesta, al interesarnos por la gestión de la resolución de problemas, cuando esta es la actividad principal en el aula.



Por otro lado, al percibir la evaluación como una parte sustancial de todo proceso de enseñanza y aprendizaje, y por tanto centrada en la obtención de información tanto sobre aquello que hay que hacer para resolver una determinada tarea de resolución de problemas como con aquello que cada alumno ha hecho al tratar de resolverla, resulta indispensable disponer de instrumentos de evaluación que posibiliten la consecución de dichos objetivos. Sin embargo, se ha observado que la forma tradicional de evaluación de la resolución de problemas en matemáticas no puede revelar realmente lo que los estudiantes aprenden y conocen, con lo que se hace evidente una clara necesidad de cambios en la evaluación que permitan la valoración de estas competencias más complejas (Rosli, Goldsby y Capraro, 2013).

se ha observado que la forma tradicional de evaluación de la resolución de problemas en matemáticas no puede revelar realmente lo que los estudiantes aprenden y conocen

De acuerdo con ello, el interés por caracterizar la resolución de problemas en el marco competencial actual de la educación, en el que la evaluación toma un papel esencial, requiere la generación y aplicación de instrumentos para la resolución de problemas en las aulas para que los alumnos aprendan a regular su propio aprendizaje. Con ello en la mente, nos preguntamos cómo se puede elaborar un instrumento con finalidad reguladora para ayudar a desarrollar la competencia de resolución de problemas matemáticos de los estudiantes.

## Marco conceptual

### *Resolver un problema y autorregulación*

El gran volumen de referencias sobre la resolución de problemas matemáticos pone de manifiesto que la resolución de problemas es una actividad compleja de llevar a cabo en el aula, tanto para estudiantes de cualquier edad (Mason, Burton y Stacey, 1982; Polya, 1945) como para docentes que intentan crear ambientes de trabajo adecuados (De Corte y Verschaffel, 2003; Schoenfeld, 2013).

En cuanto al proceso de resolver un problema, puede entenderse como un comportamiento dirigido a alcanzar objetivos específicos (Schoenfeld, 2007). Se trata de una actividad humana dinámica no necesariamente lineal, que requiere la organización y activación de múltiples habilidades y estrategias (De Corte y otros, 2000; Mason y otros, 1982; Polya, 1945). Conciliar estos aspectos no solo requiere de la posesión de conocimientos (conceptuales matemáticos, de recursos matemáticos o heurísticas de resolución), sino también de cierta competencia autorreguladora al tiempo que sentirse motivado y capacitado para desarrollar las acciones que pueden conllevar

(Schoenfeld, 2013). Esta capacidad de autorregulación, sin perder de vista el objetivo a lograr, así como la influencia de las dimensiones afectivas como las creencias, actitudes y emociones, se sitúan como factores clave en el proceso de resolver un problema de manera satisfactoria (Schoenfeld, 1992; 2013).

Al resolver un problema, el resolutor involucrado pasa por distintos momentos o, como llamaremos, etapas de resolución, como son familiarizarse con el problema, contemplar las ideas con las que ha trabajado anteriormente, inspirarse en el camino a seguir para hallar alguna solución, así como verificar el proceso que finalmente ha llevado al resultado. Así se desprende de las investigaciones de diversos autores, desde sus distintas perspectivas (Polya, 1945; Mason y otros, 1982; Schoenfeld, 1992). En relación a ello, destacan las cuatro fases de Polya (1945), por las que, a su entender, cualquier resolutor debe involucrarse al resolver un problema: *Entender el problema*, *Configurar un plan*, *Ejecutar el plan*, y *Examinar la solución obtenida,* al tiempo que resaltar una lectura profunda del problema (Schoenfeld, 2007). Por su parte, Mason y otros (1982) distinguen entre procesos, fases y estados. Por procesos entienden el hecho de concretar (que asocian a conjeturar) y generalizar (justificar). Estos procesos se desarrollan a través de tres fases, que identifican como abordaje, ataque y revisión. A su vez, cada una de estas fases aparecen de acuerdo con unos estados concretos: de introducirse e involucrarse; reflexionar; persistir y profundizar; y ser escéptico y contemplar.

En cuanto a la actividad que conlleva resolver un problema, como en las bases de cualquier comportamiento competente, se encuentran los conocimientos que uno posee pero también, y junto a ello, cómo uno organiza y accede a dichos conocimientos (Schoenfeld, 2007). Al iniciar el proceso de resolver un problema es necesario prever los posibles caminos a seguir, sus etapas intermedias así como sus posibles resultados. Esta previsión permite no solo escoger el camino a seguir sino también el orden de las acciones necesarias para aplicarlo (Sanmartí, 2007). Así lo constata el perfil que caracteriza a los resolutores expertos, quienes pasan más tiempo comprendiendo y analizando la situación expuesta en el problema y reflexionan continuamente sobre el estado de resolución, que calculando (De Corte y otros, 2000); comportamientos típicamente ausentes en resolutores de problemas menos eficientes (De Corte y Verschaffel, 2003), quienes muestran inseguridad ante la resolución de un problema, o no terminan los procesos iniciados, en particular por realizar las tareas aplicando diferentes maneras de hacer o de razonar, sin suficiente coherencia ni orden, siguiendo procesos algorítmicos vacíos (Sanmartí, 2007). Estos alumnos, por consiguiente, necesitan reconocer las distintas etapas de resolución en que se encuentran así como aprender a reflexionar sobre sus conocimientos y procesos de pensamiento existentes. Para ello, y más especialmente los resolutores menos eficientes, al intentar resolver un problema, conviene tomar especial nota de los caminos que no lleven a ninguna parte, presentando cada línea de pensamiento lo más elaborada y completa como sea posible, expresándola con claridad y lógica (Mason y otros, 1982).

con apoyo adecuado en la comprensión de cómo funcionan las cosas, los estudiantes pueden convertirse en solucionadores de problemas más eficientes y autorregulados

Se ha observado que, con apoyo adecuado en la comprensión de cómo funcionan las cosas, los estudiantes pueden convertirse en solucionadores de problemas más eficientes y autorregulados (Schoenfeld, 2013). Esta capacidad reguladora no se adquiere automáticamente, pero emerge con el tiempo (De Corte y Verschaffel, 2003). Por ello, será importante proporcionar a dichos alumnos aquella ayuda que les permita interpretar una tarea, identificar sus sub-objetivos y planificar una estrategia (De Corte y Verschaffel, 2003) para promover que aprendan a evaluar y regular su propio pensamiento (Sanmartí, 2007).

## *Evaluación: instrumentos que promueven autorregulación*

Ante una perspectiva socioconstructivista de la educación, en la que está constituida el currículo catalán actual (Departament d'Ensenyament, 2017), en la que se considera que el conocimiento se construye mediante un proceso en el que las ideas pueden evolucionar gracias a situaciones problemáticas que favorecen la explicitación y el contraste de puntos de vista, la evaluación se convierte en un elemento fundamental de la dinámica de cualquier proceso de aprendizaje (Sanmartí y Jorba, 1995).

Se ha comprobado que los alumnos que tienen éxito en la escuela se caracterizan, entre otras destrezas, por su capacidad para identificar y corregir sus errores. Como no todos los alumnos desarrollan esta destreza por sí mismo, el reto del docente es comprender sus causas, pues solo ayudándoles a reconocerlas no será posible aprenderlos a corregir (Sanmartí, 2007). Para que esta intervención sea adecuada y significativa, tanto para el aprendizaje como la enseñanza, se requiere de un sistema de evaluación que permita analizar el estado del estudiante de acuerdo con las tareas propuestas. Sin embargo, la forma tradicional de evaluar la resolución de problemas, basada principalmente en una evaluación final y, especialmente, calificadora del desempeño de los alumnos por parte de los docentes, no puede realmente revelar lo que los estudiantes aprenden (Rosli y otros, 2013). Es necesaria, entonces, una evaluación que preste atención en la observación y la reflexión de los alumnos, tanto para evaluar su comprensión como para tener en cuenta sus sentimientos y sus creencias acerca de lo que están trabajando (Lester y Kroll, 1991).

Bajo una concepción competencial de la educación, apreciamos que la capacidad de análisis sobre los procesos de resolución junto con una aplicación adecuada de ellos es, en gran parte, la esencia de una educación en la que se pretende que los alumnos adquieran la competencia en resolución de problemas y puedan seguir desarrollándola en ocasiones posteriores de manera autónoma. Observamos entonces, que para lograr que los alumnos alcancen los objetivos mencionados, se requiere de un proceso evaluativo doble. Por un lado se requiere de una evaluación de los procesos del propio estudiante, como resolutor. Por otro, al tratarse de un objetivo educativo, es fundamental una evaluación que permita al aprendiz la adquisición de la misma.

En este sentido, se distinguen dos finalidades de la evaluación. Por un lado, una función identificada como calificadora, cuyo objetivo recae principalmente en el establecimiento de grados de aprendizaje. Por otro, la que pretende actuar como medio para regular los aprendizajes y de ahí que se hable de su función reguladora. Esta función reguladora puede ser canalizada de dos modos: de manera formativa, cuando las decisiones son tomadas fundamentalmente por los docentes, o en modo formadora, cuando las decisiones son tomadas principalmente por el estudiante (Sanmartí, 2007) y, por tanto, vinculada a procesos de autorregulación. En este sentido, surge, de forma natural, la necesidad de una evaluación reguladora de la resolución de problemas (Lester y Kroll, 1991) y, por consiguiente, el establecimiento de instrumentos y de su implementación que permitan desarrollarla de manera consecuente.

Entre las referencias a instrumentos específicos que permiten desarrollar una finalidad reguladora de la evaluación, encontramos las rúbricas de desempeño (Rosli y otros, 2013; Sanmartí, 2010) con carácter formativo, y las bases de orientación (Sanmarti, 2010) con carácter formador. Sin embargo las referencias a estos instrumentos de evaluación para la resolución de problemas en la enseñanza obligatoria son escasas (Rosli y otros, 2013), especialmente en relación a las bases de orientación.

Interesados por los instrumentos que promueven la autorregulación, nos centramos en las bases de orientación. Las bases de orientación, construidas de acuerdo con los elementos esenciales de procesos de autorregulación (Jorba y Sanmartí, 2004) por parte del que aprende, se definen como aquellos instrumen-

Es necesaria, entonces, una evaluación que preste atención en la observación y la reflexión de los alumnos

tos que resumen de manera gráfica y ordenada la acción que se pretende realizar, con la finalidad de promover que los estudiantes anticipen y planifiquen las operaciones que han de llevar a cabo para resolver con éxito distintos tipos de tareas escolares (Sanmartí, 2007).

## Metodología

Este artículo aborda una parte de una investigación más amplia sobre el diseño y uso de las bases de orientación (BO) como herramientas autorreguladoras del aprendizaje para la resolución de problemas en matemáticas (Villalonga, 2017).

El estudio se desarrolló principalmente de acuerdo con un proceso de investigación-acción que, mediante aproximaciones sucesivas, permitió, por un lado, la elaboración e implementación de un instrumento con finalidad reguladora y, de manera paralela, la obtención de evidencias de su uso, en un marco cualitativo. En particular, se apostó por el diseño de una BO para la resolución de problemas en alumnos de 6.º de Educación Primaria y 1.º de Educción Secundaria Obligatoria, cuando se espera que los alumnos hayan alcanzado cierta competencia en resolución de problemas matemáticos.

Se llevaron a cabo tres implementaciones con el uso de una BO para la resolución de problemas (ver anexo 2 para un ejemplo de ellas), más una prueba piloto inicial. En todas ellas se analizaron, en particular, las producciones de los alumnos al resolver los problemas matemáticos propuestos. En cada una de las tres implementaciones sucesivas se utilizó una BO concreta, fruto del análisis de la implementación anterior, de acuerdo con las producciones de los alumnos y las observaciones de los propios alumnos y sus docentes. En todos los casos las BO fueron implementadas en grupos-clase de 6.º de Primaria y 1.º de la ESO de distintos centros educativos de Cataluña. Los alumnos participantes fueron invitados a resolver, en días distintos, un conjunto específico de problemas atípicos en su práctica diaria (ver anexo 1 para un ejemplo de ellos) utilizando la BO diseñada para cada implementación.

La práctica llevada a cabo, novedosa para todos los participantes, se desarrolló en distintos periodos comprendidos entre junio de 2014 y junio de 2016, de acuerdo con la programación de los docentes participantes. Los problemas a trabajar fueron llevados al aula en sesiones distintas, invitando siempre a los alumnos a utilizar la BO para resolver el problema en cuestión. En cada sesión, los alumnos recibían una copia en papel del problema en la que debían de escribir su propia resolución así como una copia de la BO para guiar su actividad. Para garantizar, en la medida de lo posible, que los alumnos entendían el vocabulario, estructura y propósito general de la BO, previamente a la primera ocasión del uso de la BO, el docente en cuestión debía explicar el propósito de la BO a los alumnos y conjuntamente con la clase discutieron y aclararon el significado y el propósito de cada elemento de la BO. En el resto de lecciones comprendidas en el periodo de experimentación, los alumnos no utilizaron la BO ni trabajaron con los problemas propuestos.

Los resultados y reflexiones que se presentan en este artículo son parte de los surgidos al analizar el marco teórico, indispensable para el diseño de los instrumentos a elaborar de acuerdo con los objetivos que deben promover, y el comportamiento y percepciones de los alumnos al resolver los problemas utilizando una BO para reconocer las necesidades y ajustar los objetivos marcados en su uso.



## Resultados

### *Qué entender por problema matemático*

> Las bases de orientación [...] se definen como aquellos instrumentos que resumen de manera gráfica y ordenada la acción que se pretende realizar

De acuerdo con las reflexiones de Mason (2016), entendemos que algo o alguna situación es un problema solo cuando quien pretende resolverlo experimenta un estado conflictivo, asume la tarea de dar sentido a la situación

y se involucra en alguna actividad creativa con sentido para afrontarlo. Más concretamente, y bajo las influencias de las referencias consultadas, definimos problema matemático como una cuestión desconocida, planteada a través de un conjunto de datos dentro de un contexto, para la que no se dispone de ninguna respuesta inmediata o de ningún proceso matemático rutinario prefijado de resolución, sino que, de manera contraria, invita a la indagación matemática, estimulando la curiosidad y la voluntad de trabajar en ella, promoviendo así una participación activa en el proceso de resolución que a su vez revela algo desconocido hasta el momento. Con ello entra en juego la reflexión, la toma de decisiones, el diseño de estrategias y la evaluación de la tarea desarrollada.

De ello se desprenden dos hechos inmediatos. Por un lado, la necesaria distinción entre problema propiamente dicho, cuando, aún teniendo los conocimientos necesarios, se desconoce cómo resolver la tarea, y un ejercicio, cuando la tarea puede resolverse de manera automática o rutinaria. Por otro lado, que la noción de problema matemático no es absoluta, sino relativa a las capacidades y habilidades de la persona que se enfrenta al problema.

Entendemos que resolver un problema matemático es un proceso propio de quien lo resuelve, creativo y no lineal de indagación matemática que requiere de la activación y la relación de distintos tipos de conocimientos matemáticos (básicos, heurísticos y sobre recursos) para dar respuesta a una cuestión planteada contribuyendo, a su vez, al fomento de otros conocimientos y cuestiones. Este proceso conlleva la activación de distintas acciones que, de acuerdo con su finalidad, permite identificar ciertas etapas por las que cualquier resolutor eficiente pasa. Si bien estas etapas son identificables por las acciones que los resolutores desarrollan y son perceptibles cuando emergen, conviven interrelacionándose hasta el final del proceso, mostrando con ello la naturaleza no lineal y más bien cíclica que caracteriza dicho proceso. En este sentido, identificamos un mínimo de tres etapas por las que cualquier resolutor involucrado pasa al reolver un problema, con las que se puede establecer un paralelismo entre el proceso de resolver un problema y el discurso de un texto narrativo caracterizado por tener una *introducción*, que en nuestro caso identificamos con *comprender la situación conflictiva*; un *desarrollo*, que equivaldría a *escoger un camino para desenredar la situación* y, por último, un *final*, que se corresponde con *revisar el desarrollo de lo hecho de acuerdo con las condiciones expuestas*. Como no tiene sentido revisar una tarea sin haberla hecho, ni resolver una situación que no hemos intentado entender, estas etapas aparecen de manera paulatina y consecutiva en el tiempo, conviviendo e interrelacionándose hasta el final del proceso que generan, formando un continuo en el tiempo, pues unas no tienen sentido sin las otras. Clarificar, finalmente, que la identificación de las tres etapas se trata de una nomenclatura formal que permite canalizar el camino hacia un objetivo, dar respuesta coherente a las cuestiones formuladas. Atendiendo el hecho que cualquier resolutor implicado en la resolución de un problema debe pasar por ellas y su orden de aparición observado, preferimos referirnos a ellas como los niveles de implicación en las que un resolutor se ve inmerso al resolver un problema. En la tabla 1 se describen estos tres niveles de implicación.

| *Etapas de resolución* ↓ *Niveles de implicación* | *Subniveles de implicación* |
|---|---|
| Comprender el problema | — Familiarizarse con la situación y condiciones expuestas en el enunciado.<br>— Extraer la información del enunciado y recomponer la necesaria para entender mejor la situación. |
| Tener un plan de acción | — Utilizar la redefinición del enunciado para buscar maneras con las que atacar la situación problemática<br>— Convencer que alguna de las maneras permite llegar a alguna conclusión sobre la situación expuesta. |
| Validar lo realizado | — Interpretar los resultados y con ellos dar una respuesta coherente y consistente.<br>— Evaluar, en el sentido de sintetizar, completar y mejorar, las soluciones encontradas. |

Tabla 1. Niveles y subniveles de implicación básicos del proceso de resolver un problema

### *Qué entender por BO para la resolución de problemas matemáticos*

Atendiendo a la definición general de BO por un lado, y por otro, analizado el proceso que conlleva resolver un problema, definimos una base de orientación para la resolución de problemas como la secuencia necesaria de acciones basada en el comportamiento de resolución de problemas de resolutores expertos que, atendiendo las necesidades de los resolutores no expertos para los que se elabora, proporciona, de manera emergente, independencia y autonomía para resolver problemas matemáticos. Se trata entonces de un instrumento adaptativo, que toma formas distintas en función de la edad y de las necesidades de los alumnos, y que se actualiza de acuerdo con sus dificultades y logros.

De acuerdo con el proceso de resolver un problema, una BO para la resolución de problemas debe:

- construirse en base a las etapas mínimas de resolución identificadas, a las que nos referimos como niveles de implicación,
- contener todas aquellas acciones que se desea que los alumnos desarrollen con la práctica de resolver problemas, como descriptores de las etapas,
- reflejar continuidad no lineal pero vinculante entre las etapas en que implicarse y las acciones a realizar, atendiendo que estas etapas se inician de manera sucesiva pero conviven hasta finalizar la resolución y que las acciones deben describir actos que hacen realizables (operacionalizan) las etapas.

De ello, surge la tabla 2, en la que se presenta la selección de acciones vinculadas a cada una de los niveles y subniveles de implicación, así como sus vínculos, y que identificamos como la base para la creación de cualquier BO para la resolución de problemas.

## Reflexiones finales

Resolver un problema matemático se trata de una actividad propia que conlleva un proceso personal, creativo y no lineal, dirigida a objetivos concretos: encontrar respuesta a una cuestión que, al ser una pregunta para la que el resolutor no tiene respuesta o métodos directos que le permitan responder, está caracterizada por momentos de atasco (entendido como bloqueo y error). El desarrollo de esta actividad conlleva ciertos niveles de implicación, requiere decisión y control sobre uno mismo y se ve influenciada por el entorno. En este sentido, la gestión de las actividades de aula influye, de manera directa e indirecta, en la gestión de estas variables.

Observamos cómo la resolución de problemas en un marco competencial de la educación,

| *Implicación* | | *Acciones* | | |
|---|---|---|---|---|
| *Niveles* | *Subniveles* | *Desarrollar* | *Conectar* | *Comprender* |
| Comprender el problema | Familiarizarse | identificar, señalar, separar, entender, aclarar, clarificar | | |
| | Organizar | expresar, representar, plantear, introducir, profundizar | jugar, manipular, hacer pruebas, probar | |
| Tener un plan de acción | Buscar | observar, recordar, examinar, combinar, repetir, cambiar, comparar, acercarse, diseñar, apuntar, intentar | | escribir, anotar, detectar, localizar volver, reiniciar |
| | Convencer | estructurar, argumentar, razonar, detallar, documentar | revisar, repasar, analizar, justificar | |
| Validar lo realizado | Interpretar | comprobar, verificar, refutar, consolidar, completar | | |
| | Evaluar | mejorar, simplificar, extender, incorporar, utilizar | | |

Tabla 2. Descriptores clave para la generación de una BO para la resolución de problemas

en la que la resolución de problemas se concibe como motor para promover el interés y el aprendizaje de las matemáticas, pero también como una competencia fundamental de la matemática, resulta un medio para tres fines, no necesariamente disjuntos pero que requieren de ser reconocidos al llevar problemas al aula para atender bien qué aspectos se quieren trabajar y especialmente evaluar en cada uno. Estos aspectos son:

— Atraer el interés y la implicación matemática de los alumnos.
— Integrar, manipular y descubrir conocimientos matemáticos en los alumnos.
— Aprender a pensar matemáticamente y actuar (lo que también conlleva comunicar) de manera consecuente.

*Resolver un problema matemático se trata de una actividad propia que conlleva un proceso personal, creativo y no lineal, dirigida a objetivos concretos*



En particular, e interesados por la gestión del último de los casos identificados, observamos la necesidad de disponer de sistemas de autorregulación que permitan a los alumnos menos eficientes en la resolución de problemas gestionar y tomar decisiones de manera responsable para seguir adelante con sus resoluciones a un problema, como muestran dominar los resolutores eficientes. Sin embargo, es evidente la ausencia de mecanismos de evaluación reguladora en el aprendizaje y enseñanza de la resolución de problemas que permiten desarrollarlo. En particular, se requiere de mecanismos que ayuden a los alumnos a regular sus acciones y con ellos desarrollar sus habilidades necesarias para la resolución de problemas, como interpretar la tarea, identificar sus subobjetivos, planificar una estrategia o evaluar sus desarrollos. En respuesta a ello, el estudio desarrollado muestra la posibilidad de generar instrumentos que contribuyan en este aspecto. De hecho, se muestra el modo de generar una BO para la resolución de problemas de acuerdo con estudios paralelos (Villalonga, 2017)sobre resolución de problemas, y se observa que la generación e implementación adecuada de ellas contribuye de manera positiva en el fin propuesto.

## Referencias bibliográficas

*Currículum educació primària* (2017), Servei d'Ordenació Curricular d'Educació Infantil i Primària, Departament d'Ensenyament, Generalitat de Catalunya.

De Corte, E., L. Verschaffel y P. Op'tEynde (2000), «Self-Regulation: A Characteristic and a Goal of Mathematics Education», en M. Boekaerts, P. R. Pintrich y M. Zeinder (eds.), *Handbook of Self-Regulation*, ElsevierAcademic-Press, 687-726.

De Corte, E., y L. Verschaffel (2003), «El desarrollo de habilidades de autorregulación en la solución de problemas matemáticos», *Pensamiento Educativo*, n.º 32, 286-305.

Halmos, P. (1980), «The Heart of Mathematics», *American Mathematical Monthly*, n.º 87(7), 519-524.

Jorba, J., y N. Sanmartí (2004), «La función pedagógica de la evaluación», en A. Parcerisa, y M. Rovira (eds.), *Evaluación como ayuda al aprendizaje*, Graó, Barcelona, 21-44.

Lester, F. K., y D. L. Kroll (1991), «Evaluation: A new vision». *The Mathematics Teacher,* n.º 84(4), 276-284.

Mason, J. (2016), «When Is a Problem…? «"When" Is Actually the Problem!», en P. Felmer, E. Pehkonen, y J. Kilpatrick (eds.), *Posing and solving mathematical problems. Advances and New Perspectives,* Springer, Switzerland, 263-285.

Mason, J., L. Burton y K. Stacey (1982), *Thinking Mathematically*. Pearson, Harlow.

NCTM (1980), *An agenda for action: Directions for school mathematics for the 1980s*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston.

— (2000), *Principles and Standards for School Mathematics,* National Council of Teachers of Mathematics, Reston.

Niss, M., y T. Højgaard (2011), *Competencies and Mathematical Learning*, Englishedition, IMFUFA, Roskilde University.

Polya, G. (1945), *How to solve it,* Princeton University Press, Princeton.

Ponte, J. P. (2007), «Investigations and explorations in the mathematics classroom», *ZDM Mathematics Education*, n.º 39, 419-430.

Rosli, R., D. Goldsby y M. M. Capraro (2013), «Assessing Students' Mathematical Problem-Solving and Problem-Posing Skills», *Asian Social Science,* n.º 9(16), 54-60.

Sanmartí, N., y J. Jorba, (1995), «Autorregulación de los procesos de aprendizaje y construcción de conocimientos», *ALAMBIQUE Didáctica de las Ciencias Experimentales,* n.º 4, 59-77.

Sanmartí, N. (2007), *Evaluar para aprender: 10 ideas clave*, Graó, Barcelona.

— (2010), *Avaluar per aprendre. L'avaluació per millorar els aprenentatges de l'alumnat en el marc del currículum per competències*. Direcció General de l'Educació Bàsica i el Batxillerat, Cataluña.

Schoenfeld, A. H. (1992). «Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics», en D. Grouws. (ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*, MacMillan, Nueva York, 334-370.

— (2007), «What is Mathematical Proficiency and How Can It Be Assessed? Assessing Mathematical Proficiency», *MSRI Publications*, n.º 53, 59-73.

— (2013), «Reflections on problem solving theory and practice», *The Mathematics Enthusiast*, 10(1 y 2), 9-34.

Stacey, K. (2016), **«**Reaction: Teachers, Problem-Posing and Problem-Solving**»,** en P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (eds.), *Posing and solving mathematical problems. Advances and New Perspectives*, Springer, Switzerland, 387-391.

Villalonga, J. (2017), *La competencia matemática. Caracterización de actividades de aprendizaje y de evaluación en la resolución de problemas en la enseñanza obligatoria* [Tesis doctoral], UAB. Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals.

## Anexo 1. Problema Piloto

La figura 1 presenta el problema utilizado en la prueba piloto del estudio, previa a diseñar e implementar alguna base de orientación para la resolución de problemas y que, por tanto, los alumnos resolvieron sin ser invitados a utilizar ninguna BO.

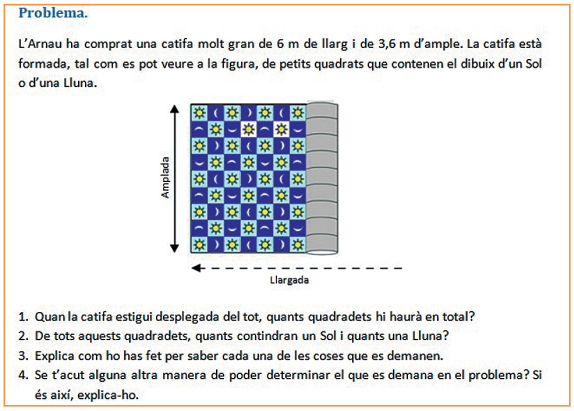



Figura 1. Problema utilizado en la prueba piloto del estudio

## Anexo 2. Ejemplo de BO

Se presenta aquí la BO utilizada en la segunda fase de implementación del estudio, resultado del análisis de la primera fase de implementación.

| Nivells d'implicació | Accions |
|---|---|
| Comprenc el problema | Assenyalo les preguntes que he de respondre i entenc tot allò que se'm demana que faci. |
| | Assenyalo les dades i m'asseguro que les entenc. |
| | Expresso el problema per entendre'l millor fent un dibuix, esquema, diagrama... (el que em sembli més adequat) i faig proves si m'és necessari. |
| Per a cada pregunta formulada: | |
| Tinc un pla d'acció | Penso alguna estratègia de resolució a partir de la representació i les proves o exemples que he fet, i tracto d'aplicar-la. |
| | Trobo les dades i els raonaments i/o algorismes que necessito per aplicar l'estratègia. |
| | Aplico l'estratègia i l'escric de manera que s'entengui tot allò que he pensat. |
| Reviso la meva tasca | Si no me'n surto, detecto on em bloquejo o m'equivoco i aplico una nova estratègia (amb tot el que necessiti). |
| | Una vegada resolt,<br>— investigo si hi ha altres solucions i les trobo. Si només n'hi ha una, raono per què no n'hi ha més.<br>— raono si es podria fer d'altres maneres. |
| | Rellegeixo què he fet, i m'asseguro que ho explico tot i que responc de manera raonada i que s'entén relacionant-ho, si cal, amb la resta de preguntes i tasques demanades |

Tabla 3. BO utilizada en la segunda implementación del estudio



Joana Villalonga Pons
*Stockholms Universitet*
<joana.villalonga@mnd.su.se>

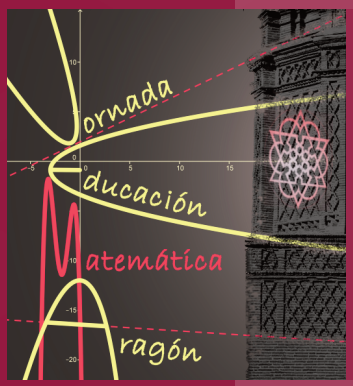
# III Jornada de Educación Matemática en Aragón

*Dale brillo a la JEMA*

## Conferencias plenarias

– *Mª = matemáticas por matemáticas,* a cargo de Marta Macho Stadler
– *Me gustan los problemas*, a cargo de José Angel Murcia
– *Cuando la muerte se pone creativa con los matemáticos,* a cargo de Eduardo Sáenz de Cabezón

## Talleres




– *«Arqueología matemática». Analizando reglas aritméticas de problemas antiguos,* a cargo de Antonio Oller Marcén
– *BlocksCAD y las matemáticas: ignición,* a cargo de Carlos Rodríguez Jaso y Pablo Beltrán Pellicer
– *Las matemáticas en los dibujos animados en infantil y primaria,* a cargo de Pablo Beltrán-Pellicer y José Mª Muñoz-Escolano
– *Calculadora científica-metodología activa*, a cargo de Maria Angeles Rodríguez Burgui
– *Criptografía desde César hasta Enigma,* a cargo de Paz Jiménez Seral y Manuel Vázquez Lapuente
– *Tocando las matemáticas,* a cargo de José Ángel Murcia
– *Operaciones básicas: Cálculo flexible basado en números,* a cargo de M.ª Angeles Esteban Polo

## Comunicaciones

Espacio abierto a todos aquellos participantes que quieran compartir sus experiencias de aula.

## Ambienta la JEMA

Invitamos al profesorado asistente a mostrar actividades realizadas con alumnos: fractales, poliedros, trabajos con papiroflexia, con hilos, fotografías, maquetas, instrumentos...

**Más información e inscripción a partir del 24 de septiembre en**

https://sites.google.com/site/ijemaragon

**22 y 23 de febrero de 2019**

**Facultad de Eduación de la Universidad de Zaragoza**

**Presentación de comunicaciones y otros trabajos en**

sapmciruelos@gmail.com

**Actividad reconocida con 10 horas de formación por el Departamento de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de Aragón**

# secciones



suma+ 88
Secciones
Julio 2018
pp. 67-71

# Tareas ricas para trabajar con potencias y raíces

David Barba Uriach
Cecilia Calvo Pesce



## Ell@s tienen la palabra

En esta sección dedicada a las matemáticas en primaria, nuestra intención es la de analizar dinámicas de clase centradas en la conversación y la comunicación. Nos interesamos especialmente por actividades ricas que podemos proponer para generar este ambiente de clase y por las preguntas que podemos formular a los alumnos durante la ejecución y discusión de estas actividades para fomentar conversaciones que les permitan construir nuevos conocimientos y los inviten a comunicar sus razonamientos.

En esta entrega de «Ella@s tienen la palabra» propondremos analizar un conjunto de tareas ricas asociadas al estudio de potencias y raíces que permiten generar un ambiente de clase centrado en la comunicación y en la construcción del conocimiento a partir de la voz de los alumnos. Al igual que Afzal Ahmed en su libro *Better Mathematics: A Curriculum Development Study,* entendemos por tareas ricas aquellas que en un inicio son accesibles a todos los alumnos pero permiten plantear nuevos retos a partir del enunciado inicial. Aquellas que invitan a los alumnos a tomar decisiones, a que especulen, que formulen hipótesis, que justifiquen, que expliquen, que reflexionen, que interpreten…, tareas que promueven el debate y la comunicación, alentando preguntas del tipo «¿qué pasaría si?»

Artículo solicitado por *Suma* en marzo de 2018 y aceptado en abril de 2018

En esta ocasión analizaremos tareas relacionadas con un tema que aparece en los últimos cursos de primaria: la potenciación, una operación que presentaremos simplemente como una manera de abreviar multiplicaciones (esto es posible porque las potencias que se trabajan en esta etapa escolar tienen todas exponente natural el cual indica la cantidad de veces que debe multiplicarse por sí mismo el número que aparece en la base).

## Ejemplos de tareas

Las tareas ricas sirven para introducir un tema, para practicarlo, para profundizar en su estudio o como colofón de su trabajo en el aula. En la serie de ejemplos que presentaremos en relación a «potencias y raíces» buscamos ilustrar todos estos momentos. Acompañamos cada tarea de un pequeño comentario, en ocasiones sobre la gestión y en ocasiones sobre la solución.

En la siguiente tarea nuestro propósito es estudiar el potencial de las potencias de una misma base para generar números pares.

*Tarea 1. Potencias de base 10*

Presentamos estas seis tarjetas, en el reverso de las cuales los alumnos pueden anotar su valor y les pedimos que se repartan la tarea de investigar qué números pares menores que 120 pueden obtener sumando algunas de estas tarjetas.




Cuando los alumnos hayan comprobado que todos los números pares hasta 120 pueden obtenerse combinando algunas de estas tarjetas (por ejemplo: $60 = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2$ o $64 = 2^6$) podemos preguntarles, qué otros pares se pueden conseguir con esas tarjetas (122, 124 y 126), qué número anotarían en una tarjeta extra para obtener todos los números hasta 120 (pares o impares), hasta qué número llegarían si agregaran una nueva tarjeta con la potencia séptima de base 2, etc...[1]

En la siguiente tarea el propósito es estudiar cómo se comportan los números cuadrados.

*Tarea 2. Números cuadrados*

¿Cuál puede ser la cifra de las unidades de un número cuadrado? Y si miramos las dos últimas cifras de estos números ¿cuáles son las posibilidades?
¿Cuál es el menor número cuadrado que comienza en 5?, ¿y en 7?

Aunque es conocido el hecho de que solo las cifras 0, 1, 4, 5, 6 y 9 aparecen en el lugar de las unidades de los números cuadrados, no lo es tanto que menos del 25% de números de dos cifras pueden aparecer en los últimos dos lugares de este tipo de números.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 01 | 02 | 03 | 04 | 05 | 06 | 07 | 08 | 09 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |
| 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 |
| 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 |
| 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 |
| 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 |
| 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 |
| 80 | 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 |
| 90 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 |

Figura 1. Cifras finales de números cuadrados

Entre los primeros treinta números cuadrados aparecen todos los dígitos entre 1 y 9 como cifra inicial, pero ciertamente el 5 y el 7 son los que más se hacen esperar ($23^2 = 529$ y $27^2 = 729$); eso no quiere decir que esos dígitos sean menos probables que otros como cifra inicial. Podemos proponer a los alumnos que se repartan los 100 primeros números cuadrados y que estudien estadísticamente su cifra inicial (el resultado no varía sustancialmente al hacerlo en el rango 1-100 respecto a hacerlo en el rango 1-1000 como

muestra la siguiente imagen y este no varía respecto a hacerlo en el rango 1-10 000) y que se sorprenderán al observar cómo la frecuencia decae con el aumento de la cifra[2].

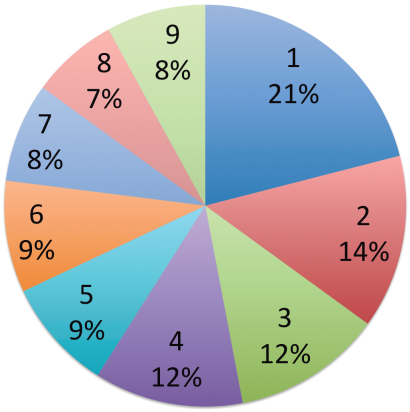



Figura 2. Frecuencia relativa de los dígitos 1 al 9 como primera cifra de los primeros 100 números cuadrados

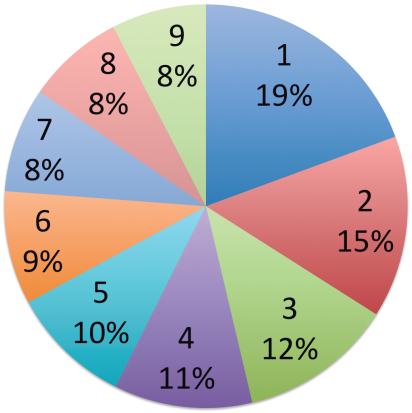



Figura 3. Frecuencia relativa de los dígitos 1 al 9 como primera cifra de los primeros 1 000 números cuadrados

En la tarea siguientes queremos dar sentido al hecho de llamar números cúbicos al resultado de potencias de base natural y exponente 3.

*Tarea 3. Números cúbicos*

Completar estas cuatro sentencias y que detecten el patrón subyacente pidiendo que escriban cuáles serían las dos igualdades que seguirían a estas

$3 + 5 = ___^3$

$7 + 9 + 11 = ___^3$

$13 + 15 + 17 + 19 = ___^3$

$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = ___^3$

Trabajando con material manipulativo podemos ir un paso más allá y entender por qué todos los números cúbicos se pueden descomponer como suma de impares consecutivos:

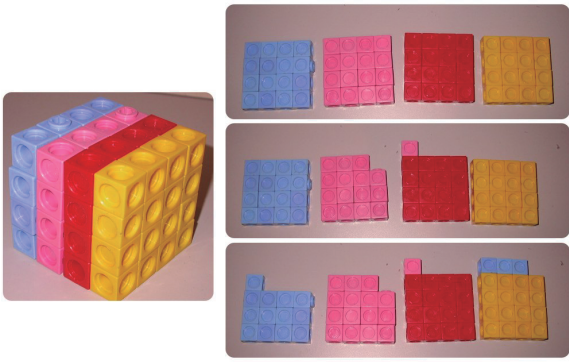


Figura 4. $4^3 = 4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 =$
$= (4^2 - 3) + (4^2 - 1) + (4^2 + 1) + (4^2 + 3)$

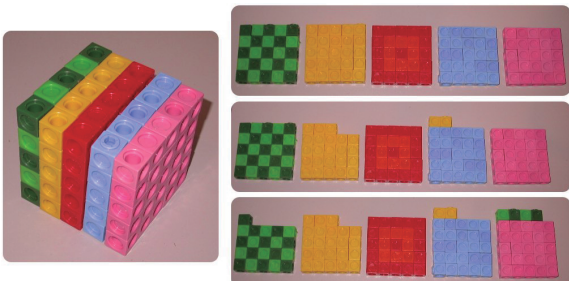


Figura 5. $5^3 = 5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 =$
$= (5^2 - 4) + (5^2 - 2) + 5^2 + (5^2 + 2) + (5^2 + 4)$

En la tarea siguiente se trata de dar sentido a las potencias con base racional. Los números cuadrados y cúbicos aparecen al usar exponente 2 y 3 combinado con una base natural, pero la potencia debe entenderse en primaria como una operación aplicable a cualquier base positiva y exponente entero. Es así que podemos calcular, tanto de manera exacta como aproximada, por ejemplo, $2{,}7^2$. Para el cálculo exacto recurrimos a los conocimientos sobre multiplicaciones decimales y planteamos $2{,}7 \times 2{,}7 = 7{,}29$ y para el cálculo aproximado podemos plantear razonamientos de este tipo: «como $2{,}7 \approx 3$, $2{,}7^2 \approx 3^2 = 9$». Este cálculo apoyado en el «redondeo» puede complementarse con un razonamiento de acotación: «como 2,7 está entre 2 y 3, $2{,}7^2$ está entre $2^2 = 4$ y $3^2 = 9$». Afirmaciones como esta ayudan

a entender que el cálculo exacto no es el único que trabaja con afirmaciones de total certeza.

Proponemos a continuación una tarea que invita a explorar este tipo de razonamientos que puede ser apoyado por el contexto del cálculo de áreas.

*Tarea 4. Potencias con base racional*

Ya sabemos que $3{,}5^2$ está entre $3^2$ y $4^2$ pero ¿de cuál de los dos está más cerca? Compara la aproximación así obtenida con 3x4.
¿Podrías generalizar las respuestas anteriores a otros números como 11,5 u 8,5?

Superponiendo un cuadrado de lado 3, uno de lado 3,5 y uno de lado 4 se puede ver que la diferencia entre los dos cuadrados más pequeños es menor que la diferencia entre los dos cuadrados más grandes y de allí deducir que $(n+0{,}5)^2$ está más cerca de $(n+1)^2$ que de $n^2$.



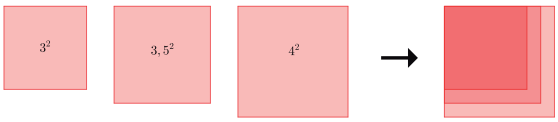



Figura 6. Superposiciones de cuadrados de lados respectivos 3, 3,5 y 4

Superponiendo un cuadrado de lado 3,5 y un rectángulo de lados 3 y 4 se puede ver que el rectángulo de lados desiguales tiene un área ligeramente menor que el cuadrado (el área que sobra por la derecha, $0{,}57 \times 3$, es menor que la que sobra por debajo, $0{,}5 \times 3{,}5$) por lo que ofrece una muy buena aproximación por defecto: $3^2 < 3 \times 4 < 3{,}5^2 < 4^2$. Pero podemos decir más: la diferencia entre las áreas que sobran por un lado y por el otro es de 0,25, de lo cual deducimos que $3 \times 4$ da una aproximación por defecto que difiere del valor real en 0,25, o lo que es lo mismo, $3{,}5^2 = 12{,}25$.

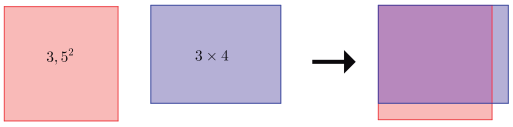



Figura 7. Superposición de cuadrado de lado 3,5 y rectángulo de $3 \times 4$

La generalización del razonamiento anterior permitiría decir $11{,}5^2 \approx 11 \times 12 = 132$ u $8{,}5^2 \approx 8 \times 9 = 72$, o calcular mentalmente $11{,}5^2 = 132{,}25$ u $8{,}5^2 = 72{,}25$.

En la tarea siguiente se trata de dar sentido a las raíces cuadradas. Si estudiamos las potencias de exponente 2 es natural preguntarse qué número elevado al cuadrado tiene un determinado resultado. Es un hecho matemático importante saber que para números positivos esta pregunta siempre tiene respuesta y que a ella le llamamos, la raíz cuadrada del número en cuestión.

Cuando el número al que queremos calcular la raíz cuadrada es un cuadrado perfecto la respuesta es un número natural, cuando es otro tipo de número natural la respuesta es un número real que tiene una expresión decimal infinita. La búsqueda de la raíz cuadrada de un número positivo es muy previa a plantearse la existencia de un algoritmo para realizar ese cálculo y en este sentido, puede y debe estar presente en las aulas de primaria[4].

Los alumnos de primaria, luego de elevar al cuadrado con naturalidad números entre 1 y 20 pueden determinar √1, √4, √9…, √361. En este contexto les podemos presentar esta tarea, como un reto para ir completando entre todos durante unos cuantos días

*Tarea 5. Raíces cuadradas*

¿Qué resultados enteros entre 0 y 20 se pueden obtener usando un 1, un 6, un 9, una o más √ y la cantidad que se desee de estos símbolos: +, -, x, : y ()?

Algunas de las soluciones posibles son:

| | | |
|---|---|---|
| 1 = 6 : √9 - 1 | 2 = 9 - 6 - √1 | 3 = 6 : √9 + 1 |
| 4 = √(1+6+9) | 5 = √(16+9) | 6 = 6 x √1⁹ |
| 7 = 6 + √1⁹ | 8 = 6 + √9 - 1 | 9 = 1 x 6 + √9 |
| 10 = 1 + 6 + √9 | 11 = 9 + √√16 | 12 = √(16x9) |
| 13 = √169 | 14 = √196 | 15 = √1 x 6 + 9 |
| 16 = √1 + 6 + 9 | 17 = 6 x √9 - 1 | 18 = 1 x 6 x √9 |
| 19 = 16 + √9 | ¿Se puede conseguir el 20? ¿Y el 0? | |

Un último comentario antes de dejar el tema de las raíces cuadradas. La búsqueda de, por ejemplo, √8 debería ser entendida por los alumnos como un reto que les permitirá profundizar sus conocimientos sobre los números decimales.

No hay ningún número natural que elevado al cuadrado dé 8 por lo tanto, habrán de buscar un decimal que cumpla esta condición. La búsqueda de ese decimal ha de realizarse en el rango de 2 a 3 ya que $2^2 = 4 < 8 < 9 = 3^2$ , por lo cual podría estudiar los resultados de $2{,}1^2$, $2{,}2^2$, …, $2{,}9^2$. Ninguna de estas potencias tiene resultado 8 pero $2{,}8^2 < 8 < 2{,}9^2$ y eso permite volver a afinar el rango de búsqueda[5], calcular $2{,}81^2$, $2{,}82^2$,…, $2{,}89^2$ y continuar este proceso hasta dar sentido al resultado que le devuelve la calculadora al pedirle que calcule $\sqrt{8}$: 2,828427125.

## Reflexión final

En esta entrega de «Ell@s tienen la palabra» nos hemos centrado en tareas para trabajar con potencias y raíces. Las tareas que planteamos sobre potencias buscan combinar cálculo exacto y aproximado (para elevar un número decimal que está exactamente en la mitad de dos números naturales consecutivos, basta multiplicar esos dos números naturales y sumar 0,25), buscar patrones (si la cifra de las decenas de un número es impar solo podrá ser un número cuadrado si acaba en 6), resaltar propiedades fundamentales (todo número entero se puede obtener como suma de potencias de base 2) o dar sentido al vocabulario habitual en este tema (cuando el exponente es 3 decimos que estamos elevando al cubo). En el caso de la tarea relacionada con la raíz cuadrada, hemos puesto el acento en la noción de raíz cuadrada como operación inversa de la potencia de exponente 2, que es suficiente para plantear tareas que inviten a nuestros alumnos a resolver problemas y a hablar de matemáticas.



David Barba Uriach
*Universitat Autònoma de Barcelona*

Cecilia Calvo Pesce
*Escola Sadako, Barcelona*
<tienenlapalabra@revistasuma.es>

1 Se pueden encontrar otras tareas similares en el post «Las primeras potencias» del blog *Puntmat* <http://puntmat.blogspot.com.es/2015/10/les-primeres-potencies.html>.

2 Se pueden encontrar otras tareas similares en los dos posts sobre «Los primeros números cuadrados» del blog *Puntmat* <http://puntmat.blogspot.com.es/2015/09/els-primers-nombres-quadrats-i.html y http://puntmat.blogspot.com.es/2015/09/els-primers-nombres-quadrats-ii.html>.

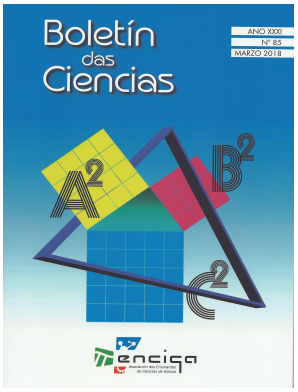
3 Se pueden encontrar otras tareas similares en el post «Los primeros números cúbicos» del blog *Puntmat* <http://puntmat.blogspot.com.es/2015/09/els-primers-nombres-cubics.html>.

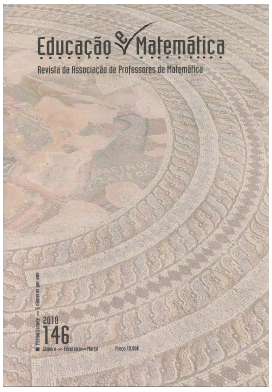
4 En <https://puntmat.blogspot.com.es/2018/04/arrels-quadrades-primaria-i-tant.html> se recogen enlaces a diversas entradas del blog Calaix +ie de Joan Jareño que permiten reflexionar sobre los algoritmos asociados al cálculo de la raíz cuadrada.

5 Hemos comprobado la conveniencia de visualizar el efecto lupa relacionado con la densidad de los decimales tal como se explica en <http://ateneu.xtec.cat/wikiform/wikiexport/cursos/curriculum/inf_pri/aramat/m2/m2s2>.

# Publicaciones recibidas (1)

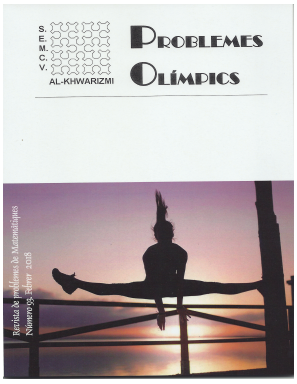
Boletin das Ciencias
*ENCIGA, Asociación dos Ensinantes de Ciencias de Galicia*
Ano xxxi, n.º 85, marzo 2018
Santiago
ISSN: 0214-7807

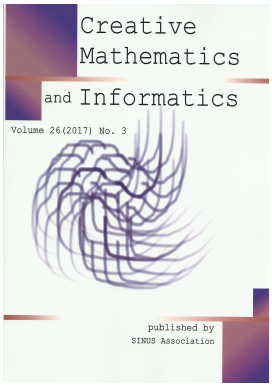



Educaçao e Matemática
*Revista da Associaçao de Professores de Matemática*
N.º 146, Janeiro-Fevereiro-Março 2018
Silveira, Portugal
ISSN: 0871-7222

Problemes Olímpics
*SEMCV Al Khwarizmî*
N.º 93, febrer 2018
València
ISSN: 1578-1771

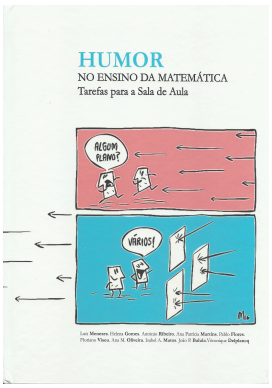



Creative Mathematics and Informatics
Matemática
*SINUS* Association
Vol. 26, N.º 3, 2017
Baia Mare, Romania
ISSN: 1584-286X

Investigación y ciencia
Prensa cientifica, S.A.
n.º 501, Junio 2018
Barcelona
ISSN: 02210136X




Humor no ensino da matemática
Menezes, L., Gomes, H., Ribeiro, A., Martins, A. P., Flores, P., Viseu, F., ..., Delplancq, V. (2017)
Escola Superior de Educaçao - Instituto Politécnico de Viseu
Viseu, Portugal
ISBN: 978-989-54036-0-8

suma+ 88
Secciones
Julio 2018
pp. 73-80

# A vista de GeoGebra

## 1.ª parte

José Luis Muñoz Casado



Un placer poco valorado hoy en día es la observación. En el anonimato que la sociedad produce, pasear, observar e intentar resolver la ecuación anónima que un objeto lleva implícita te hace sentir que compartes con alguien un secreto oculto y por unos instantes formas parte de un todo.

Observar con ojos matemáticos no es fácil al principio, vivimos envueltos en la cotidianidad visual dando por sentado las cosas sin apreciar la ciencia y sabiduría detrás de ellas. Por ejemplo, ¿por qué las alcantarillas son circulares?

Desde hace tiempo me gusta salir con los alumnos por la ciudad y mostrarles que la belleza de las matemáticas está en cualquier rincón, en un logotipo, en una baldosa o en una escultura.

Últimamente a los alumnos les llama la atención las diferencias entre ver una ciudad a pie de calle y ver una ciudad a vista de pájaro. A vista de calle es una actividad apasionante que ilustra a los alumnos en la apreciación de las matemáticas, sin embargo, a vista de pájaro la ciudad adquiere otra dimensión, surgen figuras geométricas y patrones que desde el suelo se pueden intuir pero que desde el aire muestran todo su esplendor.

Gracias a las herramientas TIC que hoy en día existen podemos realizar un viaje a vista de

CreoGebra

Artículo solicitado por *Suma* en marzo de 2018 y aceptado en abril de 2018

GeoGebra para observar esa geometría oculta de las ciudades, las posibilidades 3D de GeoGebra también nos permitirán modelizar algunas de las estructuras que desde el suelo podemos observar.

## Ortofotos

Muchas administraciones ya ponen a disposición del público en sus webs fotos aéreas de sus términos municipales. El objetivo de estas imágenes es tener una representación fiel del estado del municipio, sin embargo, todas las fotografías aéreas están sujetas a las limitaciones geométricas impuestas por la perspectiva, la orografía del terreno y las deformaciones introducidas por el objetivo de la cámara.

Una fotografía es una representación cónica de la realidad y por tanto la geometría escondida tras ella es la geometría proyectiva, una geometría que no conserva ni distancias ni ángulos. Esta geometría, como todos sabemos, comenzó a estudiarse de forma sistemática en el Renacimiento, Giotto (1267-1336), Fra Angelico (1390-1455), Masaccio (1401-1428), Filippo Brunelleschi (1377-1446), Piero della Francesca (1415-1492) , Leon Battista Alberti (1404-1472), Leonardo da Vinci (1452-1519) y otros muchos más pintaron cuadros y elaboraron tratados que pusieron de manifiesto la distorsión producida por la perspectiva cónica (figura 1).

Algo parecido sucede al tomar una fotografía aérea, nuestro centro de proyección será el objetivo y la imagen obtenida aparecerá en el CCD o negativo (figura 2).



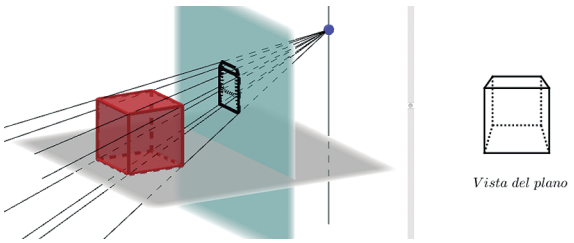



Figura 1. Perspectiva

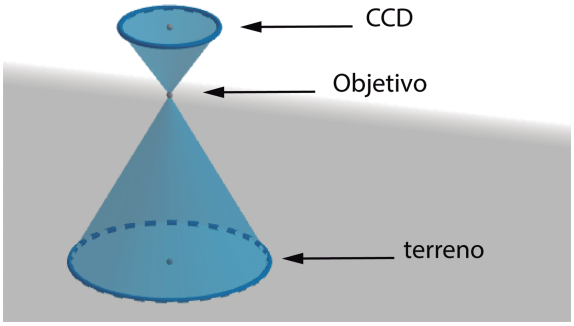



Figura 2. Modelo de cámara áerea

Todavía aparecen más factores que influyen en la toma de la fotografía como son la inclinación de la cámara, el objetivo usado y la velocidad a la que se mueve la cámara.

En las figuras 3, 4 y 5 se puede ver qué obtenemos si analizamos la inclinación de la cámara.

Según la inclinación del eje de la cámara con respecto al suelo, obtendremos una distorsión u otra (figuras 6, 7 y 8).

La pérdida de distancias y ángulos es muy significativa cuando se quiere usar dicha imagen para obtener información sobre parcelas, piscinas, edificaciones, etc. Por este motivo, muchos ayuntamientos han realizado las denominadas ortofotografías.

Una ortofotografía es una imagen aérea de una región corregida para obtener una proyección ortogonal de dicha zona y por tanto, sin las deformaciones propias de una proyección cónica. La importancia de esta técnica no es asunto baladí como se muestra en la existencia del *Plan Nacional de Ortofotografía (PNA)* y *el Sistema de información Geográfica de parcelas agrícolas (SIGPAC)*. Cada Comunidad Autónoma ofrece su propio servicio de ortofotografía muy enfocado al sector agrario. Las ortofotografías combinan perfectamente las imágenes áreas de alta resolución con las propiedades geométricas del plano, por tanto, se pueden usar para calcular distancias y áreas.

## Construcciones

A vista de pájaro muchos de los objetos tridimensionales a ras de suelo se convierten en sim-

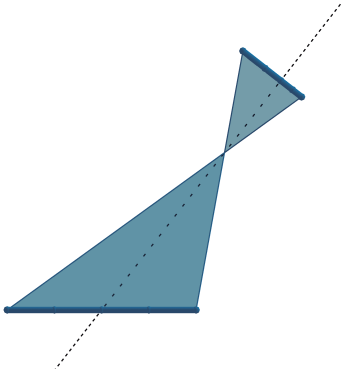


Figura 3. Eje muy oblicuo

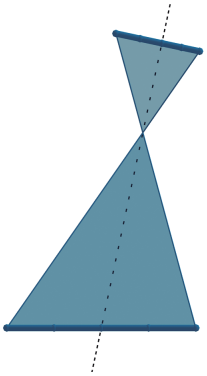


Figura 4. Eje oblicuo

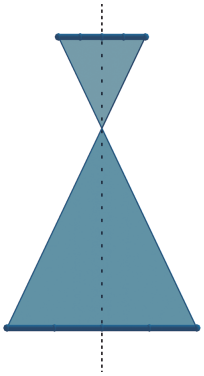


Figura 5. Eje perpendicular

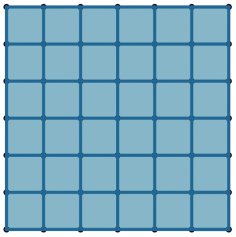


Figura 6. Imagen obtenida con eje perpendicular

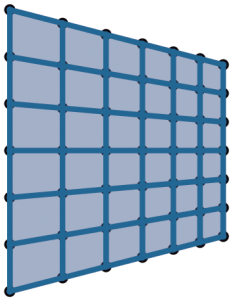


Figura 7. Imagen obtenida con eje inclinado 20°

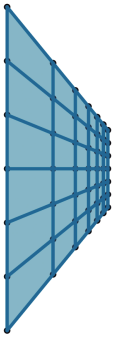


Figura 8. Imagen obtenida con eje inclinado 60°



ples objetos planos, perdiendo gran parte de su atractivo, sin embargo, no dejan de ser interesantes pues desde el aire se puede apreciar esos pequeños detalles que el diseñador tuvo en el momento de la creación. En este artículo mostraremos varios ejemplos.

Uno de los paseos que suelo realizar consiste en recorrer el Paseo de la Castellana y observar la geometría de los edificios (figuras 9 y 10).



Figura 9. Cuatro Torres Business Area
Foto: Eurostarshoteles

Observando con más detalle vemos que cada torre tiene su propia geometría que podemos estudiar con los alumnos.

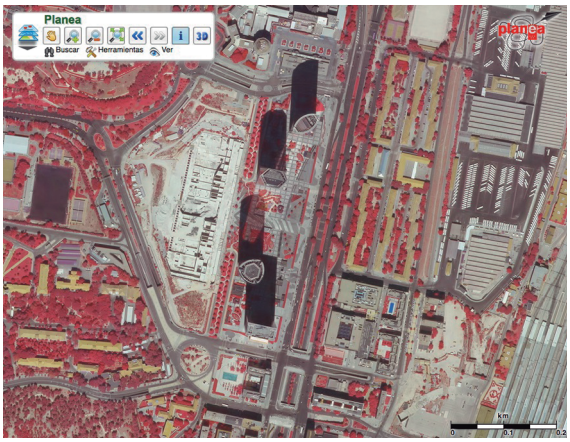



Figura 10. Ortofotografía con falso color (25 cm)
Fuente: Planea. Comunidad de Madrid



## *La Torre espacio*

Situada en la denominada Cuatro Torres Business Area se encuentra la Torre Espacio. Tiene una altura de 224 metros y 57 plantas sobre el nivel del suelo. Su construcción comenzó en 2004 y finalizó en marzo de 2007 (figuras 11, 12 y 13).

Una simple vista a pie de calle nos muestra la grandiosidad de este edificio. Un análisis más detallado nos muestra sus peculiaridades, tiene una base cuadrada que poco a poco se va transformando, el perfil del edificio parece describir una curva conforme el número de plantas asciende y termina en forma *semicircular*.



Figura 11. Cara sur



Figura 12. Cara norte

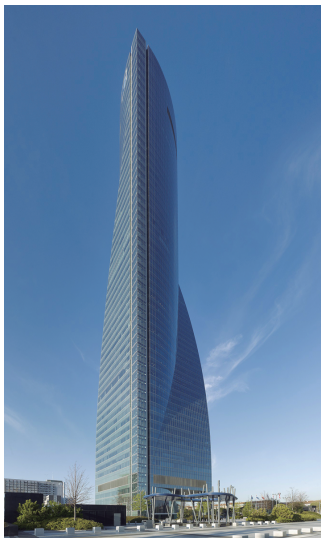


Figura 13. Torre Espacio

En este punto podemos recurrir a la ortofoto (figura 14) y observar que el edificio que comienza con cuatro caras formando un cuadrado en la planta baja termina con dos caras formadas por dos cuartos de circunferencia en la planta 57.

La primera vez que observas este edificio se acumulan las preguntas: ¿Habrá alguna relación entre la base y la azotea? ¿Cuál será la curva que parece describir el perfil de la fachada? ¿Cómo

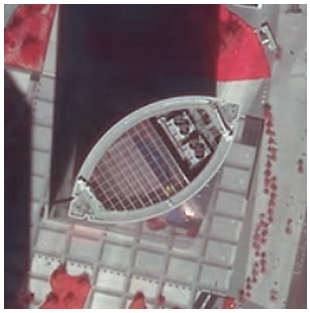


Figura 14. Ortofoto de Torre Espacio

conseguir curvar el edificio respetando las escaleras de incendio? Estas preguntas y otras muchas suelen ser el detonante para proponer el estudio de la geometría del edificio.

Matemáticamente podemos ver la torre como un prisma cuadrado de altura 235 metros. En este prisma tenemos dos restricciones que son la escaleras de incendio, dos prismas cuadrados contenidos dentro del edificio y situados en «vértices opuestos».

¿Cómo conseguir curvar el edificio respetando las escaleras de incendio?

Obviamente el diseño de la fachada depende de la altura. Una exploración *in situ* muestra que en las seis primeras plantas no se produce ninguna acción, es decir, son rectas. Es a partir de la planta número 7 cuando observamos que la fachada se va curvando. Esta forma de curvar la fachada es lo que caracteriza a la Torre Espacio y es matemáticamente una idea muy simple, constructivamente no tanto.

Se parte de un cuadrado base con sus dos escaleras de incendio. Debemos iniciar un arco que irá creciendo en cada planta hasta completar el cuarto de vuelta en la última planta (figuras 15, 16 y 17).

Podemos modelizar con los alumnos las diferentes plantas del edificio. Casi sin darnos cuenta, GeoGebra nos ofrece la posibilidad de pasarnos a 3D e intentar obtener un modelo tridimensional del edificio.

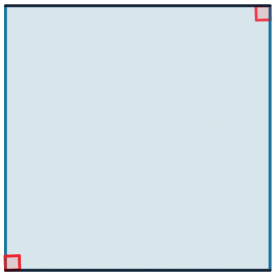


Figura 15. Planta 0

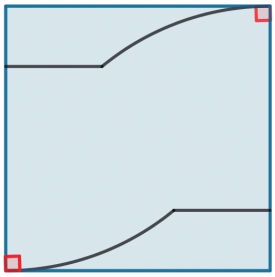


Figura 16. Planta 25

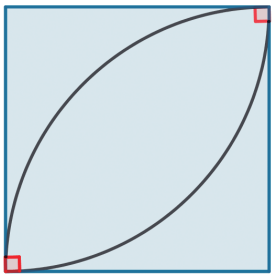


Figura 17. Planta 55

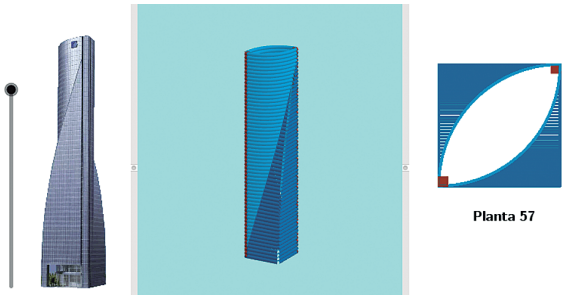



Figura 18. Torre Espacio. Modelo 3D

## *Torre PwC*

Otro edificio situado en el complejo es la Torre PwC. De nuevo, ver el edificio *in situ* te deja la sensación de pequeñez. Tiene una altura de 236 metros y 52 plantas. Su construcción comenzó en 2004 y acabó el 12 de abril de 2008.

A pie de calle se puede observar su diseño curvo e intuir los arcos que generan la fachada. Sin embargo, es a vista de GeoGebra donde el

alumno observa la verdadera estructura del edificio (figura 19).

Sin entrar en los detalles del proyecto, podemos proponer a los alumnos su modelización con GeoGebra tanto en 2D usando la ortofoto, como en 3D (figuras 20, 21 y 22).



Figura 19. Torre PwC



Figura 20. Ortofoto Torre PwC

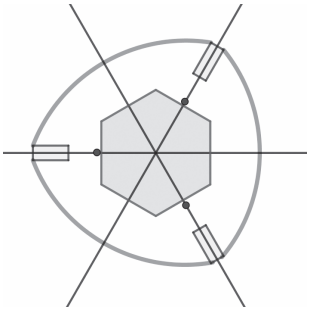


Figura 21. Modelización ortofoto

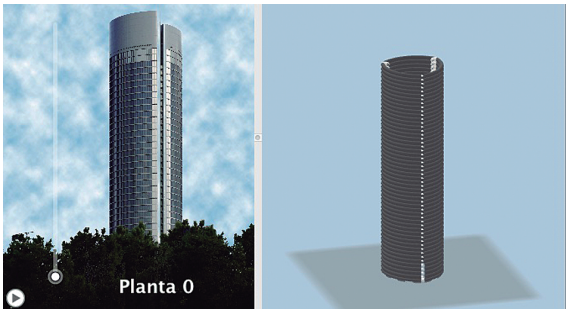



Figura 22. Torre PwC. Modelo 3D

## Puente monumental de Arganzuela

No me gustaría terminar sin mencionar el elemento urbanístico que inspiró este artículo, Madrid Río, un parque surgido a raíz del soterramiento de la M-30, una autopista emblemática de Madrid.

Podemos verlo a pie de suelo (figuras 23-26) y a vista de GeoGebra (figuras 27-29).

Escapándome un poco del nivel de secundaria y bachillerato no he podido resistir la tentación de representar con GeoGebra 3D uno de los puentes más emblemáticos de Madrid Río, el puente monumental de Arganzuela (figuras 30 y 31).



Figura 23



Figura 24

Diseñado por el arquitecto francés Dominique Perrault, su construcción comenzó en 2010 y finalizó en el año 2011. Con una longitud de 278 metros cruza el río Manzanares a la altura del Parque de la Arganzuela. Su ubicación estratégica lo convierte en un mirador desde el cual contemplar por un lado el Puente de Toledo y por otro el Puente de Praga.

La pasarela está formada por dos troncos de cono situados en ejes distintos. En el hueco central



Figura 25



Figura 26



Figura 27

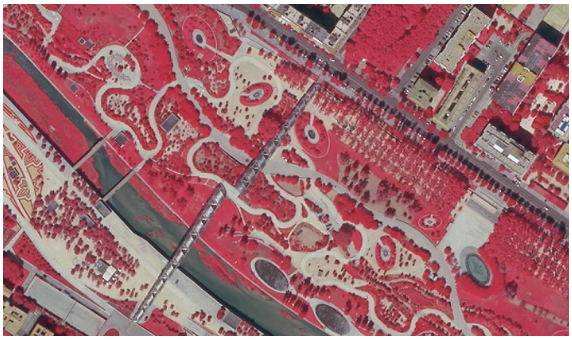


Figura 28

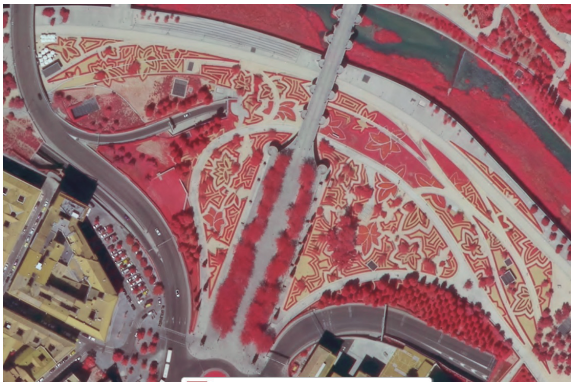


Figura 29



Figura 30



Figura 31

se diseñó un espacio común que permite conectar los conos. La característica principal de esta pasarela es su estructura helicoidal formada por dos espirales internas que se cruzan diagonalmente.

Desde un punto de vista matemático es interesante plantear su modelización. Veamos:

*Guía de construcción*

— En la barra de entrada escribiremos:
- m= 1.
- n=10.

— En la vista gráfica 1 creamos varios deslizadores:

| *Nombre* | *Valor mín.* | *Valor máx.* | *Incremento* | *Descripción* |
|---|---|---|---|---|
| radio | 0 | 1 | 0.01 | Controlará el tamaño de la circunferencia del cono |
| b | –5 | 5 | 0.1 | Controlará longitud del cono |
| c | b | m | 0.1 | Controlará longitud del cono |
| vueltas | –10 | 10 | 0.1 | Controlará el número de vueltas de la superficie helicoidal. |
| grosor | 0 | 5 | 0.1 | Controlará la anchura de la superficie helicoidal |

— En la barra de entrada escribimos
- s=Superficie(n + radio u cos(v), -m + u, radio u sen(v), u, b, c, v, -2π, 2π)
  (Ecuación paramétrica de un cono cuyo vértice se encuentra en (n,-m,0))
- f=Superficie(s(t, vueltas t + k), t, b, c, k, 0, grosor)
  (Hélice sobre el cono s).
- t=Superficie(-n + radio u cos(v), m + u, radio u sen(v), u, -c, -b, v, -2π, 2π)
  (Ecuación paramétrica de un cono cuyo vértice se encuentra en (-n,m,0))
- g=Superficie(t(t, vueltas t + k), t, -c, -b, k, 0, grosor)
  (Hélice sobre el cono t)

Opcionalmente también podemos parametrizar las curvas que aparecen en el puente en sentido contrario a la superficie helicoidal y las circunferencias de la construcción (figuras 32 y 33).

En estos tres ejemplos de construcciones hemos visto cómo las matemáticas saltan a la vista. La simetría, la perpendicularidad, el paralelismo, la proporción y otros tantos conceptos geométricos muestran una belleza armoniosa que muchas veces damos por obvia. Mirar con ojos matemáticos es disfrutar de forma especial, contemplar un objeto, una calle, una escultura, una baldosa y comprender que el lenguaje oculto que transmite es sublime, y en ese punto GeoGebra es una herramienta perfecta, no solo nos



Figura 32. Detalle del extremo del puente

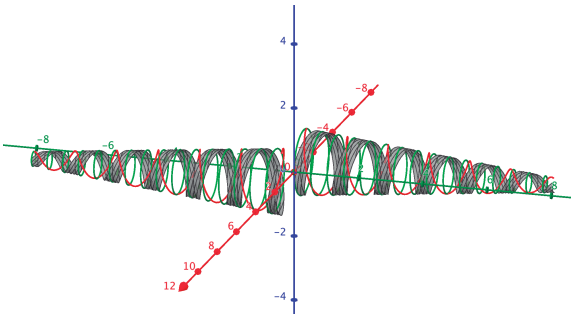


Figura 33. Modelo 3D del Puente Monumental de Arganzuela

permite leer una imagen sino manipular y explorar nuevos lenguajes.

## Referencias bibliográficas

Cano, D., M. C. Escribano, J. C. Garro, J. Rojo, J. Tarrés y S. Victoria (2016), «Un trabajo con espirales», *Pensamiento Matemático*, vol. VI, n.º 2, 047-062.

Gómez , M., *Proyecto y construcción de dos torres de 235 m de altura en Madrid. MC-2,* Estudio de ingeniería, Madrid.

Martínez, J., y M. Gómez (2008), «Torre Sacyr-Vallehermoso. La estructura del edificio», *Hormigón y Acero*, vol. 59, n.º 249, 123-150.

*Información Territorial y Cartografía Regional. Planea.*,Dirección General de Urbanismo. Consejeria de Medio Ambiente, Administración Local y Ordenación del Territorio, Madrid.

José Luis Muñoz Casado
*IES Salvador Dalí*
<creogebra@revistasuma.es

suma+ 88
Secciones
Julio 2018
pp. 81-85

# María Josefa Wonenburger Planells, una algebrista de Oleiros

Marta Macho Stadler

Tengo tendencia a ser feliz.
María Josefa Wonenburger Planells




María Josefa Wonenburger Planells durante la inauguración de un monolito en su honor en el Paseo de las Ciencias (parque de Santa Margarita, La Coruña)
Fuente: Wikimedia Commons

# Mujeres matemáticas: rompiendo moldes

## María Josefa cuenta su historia



Me llamo María Josefa Wonenburger Planells. Nací en Oleiros (La Coruña) el 19 de julio de 1927. A mucha gente le sorprende mi primer apellido que, evidentemente, no es de origen gallego. Uno de mis parientes lejanos llegó desde el norte de Europa hasta estas tierras, también del norte, de otro norte. Supongo que se enamoraría de las gentes que pueblan Galicia, de sus paisajes, de su manera de vivir… porque nunca más se fue. Pero tampoco es gallego mi segundo apellido; el de mi madre es de origen valenciano, ella llegó desde la costa mediterránea hasta la costa atlántica, donde se enamoró y se quedó para siempre.

Mi padre se llamaba Julio. Desde muy joven tuvo que ponerse a trabajar. Mi abuelo había levantado una fundición en La Coruña, y falleció en un accidente laboral. Así que su hijo mayor, Julio, con tan solo 16 años se hizo cargo de la fábrica.

Mi madre se llamaba Amparo. Una de sus hermanas vivía en La Coruña por motivos profesionales de su marido, y mi madre la fue a visitar. Allí, Amparo conoció a Julio y se casaron en 1926. Un año más tarde, como ya os he contado, nací… y luego llegaría mi hermana.

Artículo solicitado por *Suma* en marzo de 2018 y aceptado en abril de 2018

Tuve una gran suerte de nacer en el seno de una familia acomodada que, además, me apoyó y me animó en todo aquello que quise emprender. Las cosas ahora son muy distintas a las de antes; en aquella época, las mujeres no solían estudiar carreras superiores. No estaba mal visto que estudiaran magisterio y se dedicaran a la enseñanza, pero la mayoría de ellas estaban destinadas a casarse y entregarse a su familia, sin ninguna pretensión laboral. Por ello, agradezco la decisión de mi madre y de mi padre de dejarme volar. Y volé… aunque desde pequeña sabía que la ilusión de mi familia era que estudiara una ingeniería para poder continuar con el negocio familiar. Pero mi sueño era otro: desde que las matemáticas se cruzaron en mi camino, supe que quería dedicarme a ellas, que quería saber más. ¿Y ocuparme de ellas en el futuro, profesionalmente? Eso ya no lo tenía tan claro, pero no quería lamentarme después, con el paso de los años, de haber dejado de lado una de mis grandes pasiones.



*desde que las matemáticas se cruzaron en mi camino, supe que quería dedicarme a ellas*

Recuerdo que, desde los primeros años en el colegio, las matemáticas me resultaban a la vez sencillas y divertidas. Me encantaba sumar, multiplicar, hacer muchas cuentas —no entiendo como a alguien le puede aburrir calcular y calcular—, hasta cuando acompañaba a mi madre al mercado me entretenía fijándome en los precios, en las cantidades, en los pesos de los alimentos… y verificaba si las cuentas del frutero o de la carnicera coincidían con las mías.

Tras acabar el bachillerato en 1944, para estudiar la carrera de matemáticas debía trasladarme a Madrid. Pero esperé un año en Galicia, por consejo de mi familia: había una gran crispación política en ese momento y no era conveniente vivir lejos de casa. Durante ese largo año de espera, recuerdo que una de mis primas, que estudiaba arquitectura, me dejó algunos de sus libros de matemáticas. Uno de ellos era de Julio Rey Pastor[1]: los *Elementos de Análisis Algebraico*. ¡Apasionante aprender con un texto escrito por *uno de los grandes*! ¡Me resultaba tan emocionante! Aunque debo confesar que no lo entendía todo…

En 1945 me fui a Madrid a estudiar matemáticas en la Universidad Central[2]. Durante toda la carrera me alojé en la Residencia de Señoritas[3]. Fue una época fecunda e inspiradora en la que, además de aprender matemáticas, compartí actividades, reflexiones e intimidad con mujeres excepcionales que me enseñaron mucho más que ciencia. ¡Incluso me contaron que Marie Curie se alojó en esta residencia, en *mi* residencia, durante una visita que hizo a Madrid![4]

Recuerdo que en la facultad me gustaba ayudar a mis compañeros; muchos se acercaban para que les ayudara a solucionar problemas o para resolver alguna duda; me decían que era muy generosa, pero a mí me parecía natural hacerlo. No me gustaba tomar apuntes en clase: solo escuchaba, no quería perderme nada, absolutamente nada. Después, por la noche, ya en la residencia, reproducía las explicaciones que había dado el profesor en el aula. Era como *pasar a limpio* los apuntes que tenía en mi cabeza.

Tras los cinco años de estudio —y de disfrute, porque disfruté de las enseñanzas y del aprendizaje individual—, emprendí mis estudios de doctorado entre 1950 y 1953. Recuerdo que mi querido padre falleció en 1951; fue una época dura, pasé seis meses en Galicia acompañando a mi madre y mi hermana para sobrellevar la pérdida juntas.

Algunos de mis profesores me recomendaron viajar al extranjero para completar mi formación. Así que en los últimos años de doctorado, esa idea no dejaba de rondar mi cabeza. Asistía con interés a las conferencias que se impartían como parte de mi formación, con especial ilusión cuando los que las dictaban procedían de otros países. Recuerdo alguno de los seminarios impartidos por Julio Rey Pastor —¡con lo que había disfrutado con su libro *Elementos de Análisis Algebraico* antes de empezar la carrera!— o por Ernst Witt[5] que era profesor en la Universidad de Hamburgo.

Por cierto, Ernst Witt realizó su tesis doctoral con «la madre del álgebra abstracta», Emmy Noether[6]… aquello parecía providencial. ¿Por qué? Porque en la residencia me enteré de la exis-

tencia de unas ayudas llamadas *becas Emmy Noether* para estudiar en el Bryn Mawr College[7], en Estados Unidos… donde casualmente impartió docencia Emmy Noether. ¡No podía dejar pasar la oportunidad! Pero nunca contestaron a mi solicitud. A pesar de esta gran desilusión, pude viajar a Estados Unidos en 1953, gracias a la concesión de una beca Fullbright[8]. Partí en barco, con otros becarios, hacia la Universidad de Siracusa (Nueva York) para realizar un curso previo antes de comenzar mis estudios. Y después me fui a la Universidad de Yale, donde mi supervisor fue Nathan Jacobson[9]. Con él realicé mi tesis doctoral, que defendí en 1957 bajo el título de *On the Group of Similitudes and its Projective Group*.

Regresé ese mismo año a España: ya no tenía financiación para permanecer por más tiempo en Estados Unidos. Para mi sorpresa, no me convalidaron mi título de doctora de la Universidad de Yale. Así que tuve que volver a realizar cursos de doctorado y una nueva tesis doctoral, dirigida por Germán Ancochea[10]; y todo ello gracias a una beca que me concedió el Instituto Matemático Jorge Juan del Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Por problemas administrativos, ¡tampoco obtuve mi título de doctora en España! Sin embargo, defendí mi tesis bajo el título de *Representación espinorial de los grupos de semejanza*. ¡Parecía una broma pesada! ¡Dos tesis y ninguna reconocida en España!

Un golpe de suerte —como se comenta al principio de este escrito, *tengo tendencia a ser feliz*— me llevó a Canadá. En efecto, tuve mucha suerte, porque Israel Halperin[11] había pedido ayuda a Nathan Jacobson: necesitaba alguien con conocimientos de álgebra para colaborar con él en sus trabajos sobre álgebras de von Neumann[12]. Con las pocas perspectivas de futuro que tenía en España, permanecí en Canadá durante seis años, los dos primeros con una beca postdoctoral y después ya con un contrato de profesora en la Universidad de Toronto donde, por cierto, era la única mujer ocupando un puesto como docente.

**Mathematics Genealogy Project**

**Maria Josepha Wonenburger**

MathSciNet

Ph.D. Yale University 1957

Dissertation: *On the Group of Similitudes and Its Projective Group*

Advisor: Nathan Jacobson

Students:
Click here to see the students listed in chronological order.

| Name | School | Year | Descendants |
|---|---|---|---|
| Berman, Stephen | Indiana University | 1971 | 10 |
| Crawford, Robert | Indiana University | 1970 | |
| Fincher, Bobby | Indiana University | 1972 | |
| Gibson, Edward | Indiana University | 1979 | |
| Marcuson, Richard | Indiana University | 1972 | |
| Moody, Robert | University of Toronto | 1966 | 7 |
| Sherman, Gary | Indiana University | 1971 | |
| Warren, Bette | Indiana University | 1976 | |

According to our current on-line database, Maria Wonenburger has 8 students and 25 descendants.
We welcome any additional information.

Captura de pantalla del árbol genealógico de María Wonenburger en el repositorio «Mathematics Genealogy Project»: aparece su director de tesis (Nathan Jacobson) y los nombres de las ocho personas a quien ella ha dirigido a su vez. Como puede verse, en este especial «árbol genealógico investigador», María Wonenbuger tiene 25 descendientes.

A pesar de mi mala suerte con *el reconocimiento* de mis tesis, he dirigido unas cuantas… La primera de ellas fue en Toronto: me sorprendió tanto que Robert Moody[13] me pidiera que le dirigiera su trabajo doctoral. ¡Yo que era una extranjera! ¡Y por si fuera poco, la única profesora en la universidad! Robert se doctoró en la Universidad de Toronto, en 1966, con la memoria titulada *Lie Algebras Associated With Generalized Cartan Matrices*.

Después de Toronto, volví a Estados Unidos. Allí tenía diferentes ofertas de varias universidades, mientras que en España mi futuro era impreciso, ya que debía pasar una oposición, y esperar a que surgiera alguna plaza. Fuera de mi tierra valoraban mis conocimientos y mi trabajo, en España las cosas eran bien diferentes. Fue una gran decepción.

Me quedé en Indiana hasta 1983. Esa época fue realmente fantástica. Conocí y compartí conocimientos con grandes matemáticos, se organizaban congresos, cursos, seminarios… y allí dirigí siete tesis doctorales.

Pero, ese mismo año tuve que regresar a España: mi madre estaba enferma. Lo dejé todo sin pensar en mí: mi madre me necesitaba.

## María Josefa Wonenburger Planells, una extraordinaria matemática

La primera parte de este artículo está basada en las primeras páginas de Souto y Tarrío (2006). He preferido dejar a María Josefa que cuente su historia, una historia que casi parece una novela por las dificultades sufridas y los logros obtenidos por esta mujer incansable, comprometida y de una inteligencia excepcional.

Fue una experta en teoría de grupos clásicos y álgebras de Clifford[14]. Se la puede considerar como la *madre de la teoría de Kac-Moody*, porque este tipo de álgebras se introdujeron en la tesis de su alumno Robert Moody, como ella misma nos ha contado antes.

¿Dónde habría llegado María Josefa de poder continuar con su brillante carrera científica? No es fácil responder a esta pregunta pero, sin duda, muy lejos. Habría dirigido muchas más tesis doctorales, habría creado una escuela, habría colaborado con matemáticos y matemáticas de diferentes áreas, ¿quizás habría ganado alguno de los grandes premios de las matemáticas a nivel internacional?

Aunque permaneció apartada del mundo académico tras regresar a España en 1983, ha sido conocida gracias al empeño de su amigo, el matemático Federico Gaeta (1923-2007). Como comentan María José Souto Salorio y Ana Dorotea Tarrío Tobar (2006), él fue quien animó a estas dos matemáticas a contactar con María Josefa.

Gracias, amigas, por contarnos la historia de esta extraordinaria mujer con tanto cariño y entrega. Gracias a vosotras María Josefa Wonenburger Planells recibió la atención y el reconocimiento que merecía, aunque fuera con tantos años de retraso.

En efecto, entre otros, María Josefa fue nombrada socia de honor de la Real Sociedad Matemática Española (2007) y doctora honoris causa por la Universidad de La Coruña (2010).

Además, la Unidad Mujer y Ciencia de la Xunta de Galicia creó en 2007 el *Premio María Josefa Wonenburger Planells* para «reconocer aquellas mujeres gallegas con trayectorias notables en el ámbito de la ciencia y la tecnología».

Desde 2011, en el Paseo de las Ciencias del parque de Santa Margarita (La Coruña), un monolito recuerda sus logros, y desde 2012 un parque lleva su nombre en Oleiros, el lugar donde nació.

María Josefa falleció en La Coruña el 14 de junio de 2014. La imagino, incluso en ese momento, sonriendo.



María (2001) con parte de su descendencia matemática. Fuente: Oberwolfach Photo Collection <https://opc.mfo.de/detail?photo_id=9112>

## Referencias bibliográficas


Barja, J. M. (2014), «La tres veces doctora», *Opinión A Coruña,* 17 de junio de 2014.

*Discurso de la Profesora Ana Tarrío en el acto de presentación del premio María Wonenburger que concede la Xunta de Galicia* (2006), <http://www.culturagalega.org/album/docs/sobre%204.pdf>.

*Entrevista a María Wonenburger en el programa Efervesciencia (Radio Galega)* (2007), <http://blogs.crtvg.es/efervesciencia/arquivo-historico-maria-wonenburger/>.

León, M. de (2014), «María Wonenburger, una gran matemática gallega y universal», *El Mundo,* 20 de junio de 2014.

*María Josefa Wonenburger Planells,* Wikipedia: <https://es.wikipedia.org/wiki/María_Wonenburger>.

*María Josefa Wonenburger Planells. Unha figura mundial das matemática* (en gallego), con enlaces a sus trabajos escaneados y una galería de fotos: <http://culturagalega.gal/album/detalle.php?id=214>.

Souto, M. J., y A. D. Tarrío (2006), «María Josefa Wonenburger Planells. Mujer y matemática», *La Gaceta de la RSME,* vol. 9 (2), 2006, 339-364. [Accesible online en: <http://www.rsme.es/comis/mujmat/documentos/Maria.pdf>.]

— (2015), *María Wonenburger. Una científica adelantada a su tiempo* [Unidad didáctica dirigida al alumnado de educación secundaria], Xunta de Galicia. <http://igualdade.xunta.gal/sites/default/files/files/documentos/unidade_didactica_maria_wonemburger-ilovepdf-compressed.pdf>.

«Nostalgia viva de la matemática feliz», Episodios de la cultura científica, *La Opinión de La Coruña,* 31 de mayo de 2015.

Marta Macho Stadler
*Universidad del País Vasco*
<marta.macho@ehu.eus >



1 Julio Rey Pastor (1888-1962) fue un matemático español. Gracias a una beca de la Junta para la Ampliación de Estudios, viajó a Europa, donde completó su formación con la elite de la matemática europea. Desarrolló su carrera profesional en Argentina aunque, gracias a sus numerosas publicaciones, tuvo también una gran influencia en la enseñanza de las matemáticas en España.

2 La Universidad Central pasaría a llamarse Universidad Complutense de Madrid a partir de 1970.

3 La Residencia de Señoritas fue el primer centro oficial creado para fomentar la enseñanza universitaria para mujeres en España. Desde su creación, en 1915, fue dirigida por la pedagoga María de Maeztu (1881-1948), que seguía los principios del proyecto denominado *Institución Libre de Enseñanza.* La residencia desapareció tras la Guerra Civil. En 1940 se refundó con el nombre de Colegio Mayor Santa Teresa de Jesús, ya sin ninguna vinculación con los principios institucionistas, dirigido por Matilde Marquina García perteneciente a la Sección Femenina de Falange Española de las JONS.

4 Marie Curie (1867-1934) visitó en tres ocasiones España. En 1919, acompañada por su hija Irène (1897-1956), participó en el *I Congreso Nacional de Medicina* celebrado en Madrid. En 1931 regresó, invitada por el Gobierno de la Segunda República, esta vez acompañada por su hija Ève (1904-2007). Fue en esa ocasión en la que se alojó en la Residencia de Señoritas. Finalmente retornó a España en 1933, como vicepresidenta de la Comisión Internacional de Cooperación Intelectual de la Sociedad de las Naciones, en la que la científica trabajaba para promover las vocaciones científicas.

5 Ernst Witt (1911-1991) fue un matemático alemán, uno de los grandes algebristas de su época. Fue el fundador de la teoría de formas cuadráticas sobre cuerpos arbitrarios.

6 Emmy Noether (1882-1935) fue una matemática alemana, considerada por algunos científicos (como David Hilbert o Albert Einstein) como la «mujer más importante en la historia de las matemáticas». Realizó contribuciones fundamentales en los campos de la física teórica y el álgebra abstracta.

7 El *Bryn Mawr College* es una universidad privada femenina situada en Bryn Mawr (Filadelfia, Pensilvania, Estados Unidos). Fue fundada en 1885.

8 Las becas Fullbright estaban convocadas por el Instituto de Educación Internacional de Estados Unidos, y se acababan de convocar en España. María Josefa Wonenburger Planells perteneció a la primera generación de becados con estas ayudas.

9 Nathan Jacobson (1910-1999) fue uno de los algebristas más importantes de su generación. Se le deben más de una docena de libros de texto fundamentales en esta área.

10 Germán Ancochea Quevedo (1908-1981) fue un destacado matemático español. Realizó su tesis doctoral en París bajo la dirección de Élie Cartan (1869-1951).

11 Israel Halperin (1911-2007) fue un matemático canadiense, alumno y colaborador de John von Neumann (1903-1957).

12 Las álgebras de von Neumann son álgebras de operadores acotados sobre un espacio de Hilbert, provistas de una involución, y cerradas con la topología débil de operadores. Son una clase especial de C*-álgebras.

13 Robert Moody (1941) es un matemático canadiense, codescubridor (junto a Victor Kac) de las llamadas *Álgebras de Kac-Moody*, un tipo especial de álgebras de Lie.

14 Un álgebra de Clifford es un álgebra asociativa importante en teoría de formas cuadráticas y del grupo ortogonal (en matemáticas y en física).

# Publicaciones recibidas (2)

La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española
*RESME*
Vol. 21, n.º 1, 2018
Madrid
ISSN: 1138-8927







Noubiaix
*Revista de la FEEMCAT i de la SCM*
N.º 41, desembre 2017
Barcelona
ISSN: 2014-2021

XXII Cangur de la SCM
Enunciats i solucions
Cangur 2017
*SCM, IEC, Departament d'Ensenyament, CiMs-Cellex*
2018
Barcelona
DL: B 4744-2018



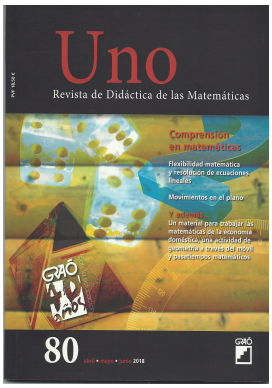




XXX Congreso Enciga
Boletin das Ciencias
*ENCIGA, Asociación dos Ensinantes de Ciencias de Galicia*
Ano XXX, n.º 84,
novembro 2017
Santiago
ISSN: 0214-7807

Investigación y ciencia
Prensa cientifica, S.A.
n.º 500, mayo 2018
Barcelona
ISSN: 02210136X




UNO
Revista de Didáctica de las Matemáticas
Ed. Graó
N.º 80, abril-mayo-junio 2018
Barcelona
ISNN : 1133-9853

suma+ 88
Secciones
Julio 2018
pp. 87-94



MMACA



# Del MMACA al aula

La segunda entrega desde el MMACA llega en plena efervescencia de la tercera edición de la Conferencia MATRIX, que organizaremos en Cornellá y Barcelona del 29 al 31 de octubre. El MMACA ha sido elegido para acompañar al MoMath (Museo Nacional de Matemáticas de Nueva York), coorganizador fijo, en la organización del encuentro, que se está consolidando como un evento significativo de colaboración entre las entidades volcadas en la difusión de las matemáticas.

Las anteriores ediciones (Dresden 2014 y Leeds 2016) han sentado las bases de la colaboración entre entidades y han constituido la plataforma de lanzamiento de varios proyectos internacionales, basados en contenidos que constituyen el corpus principal de esta sección de *Suma* dedicada al MMACA.

De hecho, algunos de los módulos expositivos y de los materiales para talleres que estamos presentando nacieron —o se pulieron— en el ámbito de los encuentros de MATRIX.

No hay duda que la conversación está en la base de la creación, la exploración, la mejora y la implementación de nuevos materiales.

Creemos que cada vez más se hace patente la necesidad de una colaboración más organizada (tanto en lo práctico como en la reflexión teórica)

Artículo solicitado por *Suma* en marzo de 2018 y aceptado en abril de 2018

entre las instituciones de la educación reglada y no-reglada.

En general, nos gusta más la terminología derivada de la anglosajona, que habla de educación formal y no-formal, esencialmente porque facilita no olvidarnos de la tercera componente: la educación informal [1].

La educación no-formal contempla actividades educativas organizadas y útiles para una comunidad educativa identificada y con objetivos didácticos declarados [2]. Estamos convencidos de que muchas de las respuestas a los retos, no sé si nuevos, a los que se enfrenta la escuela (competencias, educación permanente, nuevas tecnologías, etc.) se pueden encontrar en esta colaboración, que es un paso determinante hacia la creación de la *comunidad educativa* que tanto nos ha gustado durante tanto tiempo (y a algunos de nosotros nos sigue gustando, todo sea dicho).

Cuando utilizamos la *ficha de evaluación competencial*, elaborada por la gente del CESIRE-CREAMAT, para testar los materiales de la exposición permanente del MMACA, los resultados fueron excelentes. Las actividades, que se proponen en la modalidad de taller no dirigido, donde los usuarios se mueven libremente y escogen los módulos que más les interesan, cumplen con los objetivos comunicativos, de accesibilidad, de respeto de las inteligencias múltiples, de elaboración personal de ideas, de autonomía y de resolución de problemas que conforman el aprendizaje competencial.

Así, en esta sección, seguimos proponiendo algunos de estos materiales, escogidos entre los que se pueden utilizar más fácilmente en clase.



## El juego de las fichas (Valores y forma)

Esta actividad, como la de los *Rascacielos* —que presentamos en la entrega anterior— se debe a la carencia de noticias en los veranos de los periódicos italianos.

En este caso también, nos pareció fácil e interesante sacar este material del papel y darle dimensiones, color y el tacto de la madera.

Inciso: en realidad, hemos realizado este módulo de muchas maneras, ya que lo cutre no nos espanta. La última versión es un formato gigante, con tablero de lona y piezas de colchoneta, que estamos estrenando en la exposición itinerante en La Bisbal, pero que es parte de un proyecto de *exposición horizontal* que estamos desarrollando para llevar la exposición en espacios no convencionales.

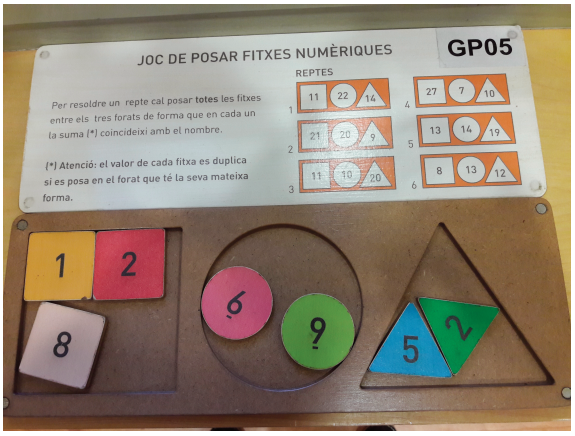



Figura 1. Juego de las fichas
(módulo exposición permanente del MMACA)

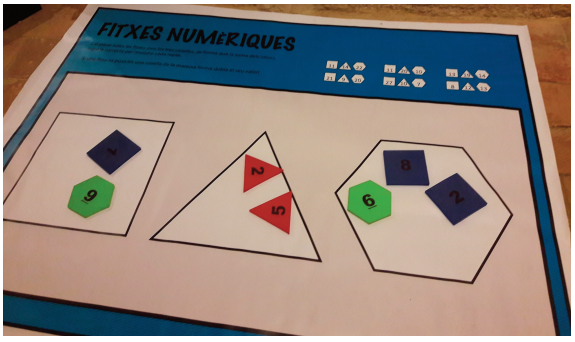



Figura 2. Juego de las fichas
(módulo exposición horizontal del MMACA)

La actividad siempre consiste en escoger uno de los retos y colocar las fichas en las cajas de diferente forma de manera que en cada caja las fichas sumen el valor indicado en el reto. La única regla es que si la ficha y la caja tienen la misma forma su valor se duplica, esto hace que la resolución (especialmente las primeras veces) no sea tan simple y que la actividad resulte aún más interesante [3].

Evidentemente, los conocimientos matemáticos requeridos son tan básicos que este material resulta muy accesible a todo tipo de público. Así que solo tuvimos que crear más retos para adaptar la propuesta al formato exposición [4]. A partir del reto que proponía el periódico, resultó muy simple modificar ligeramente las condiciones para encontrar nuevos retos. Por ejemplo:

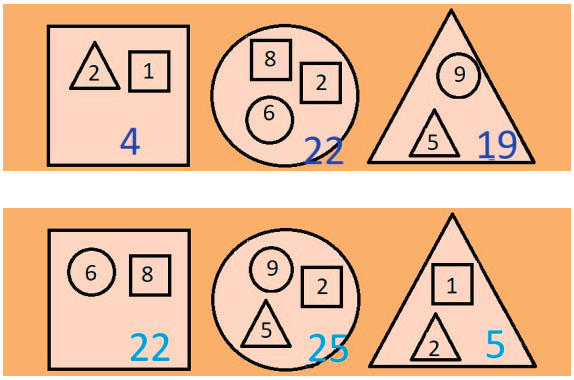



Figura 3. Retos del juego resueltos

En el momento en que decidimos que esta actividad era adecuada para los cursos de formación del profesorado tuvimos la necesidad de generar más retos.

Lo más sencillo parecía ser poner en cada caja unos números cualesquiera, con la condición de que la suma de los valores asignados a las tres cajas (que indicaremos con $\Sigma_{cajas}$) estuviera entre 33 y 66, ambos incluidos [5].

Todo funcionó hasta que apareció una ¡tríada imposible! Por ejemplo:

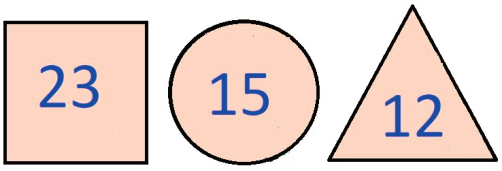



Figura 4. Reto sin solución

Toda crisis bien resuelta comporta un cambio importante de estrategia y un estudio más cauteloso de las variables en juego [6].

Así, una vez fijada la anterior condición de que $32 < \Sigma_{cajas} < 67$, empezamos a formularnos otras preguntas:

— ¿Todas las $\Sigma_{cajas}$ entre 33 y 66 son posibles?
— ¿Son soluciones únicas o hay más de una combinación de valores posibles?
— ¿Hay un algoritmo para contestar a estas preguntas sin necesidad de comprobar caso por caso?
— ¿Cuál es el mejor sistema para construir nuevos retos?
— ¿Sería sencillo, útil, interesante, productivo, etc., cambiar el valor o el número de las fichas?

Responder a estas preguntas, algunas sencillas y otras más complejas, nos llevó a distintas conclusiones y aplicaciones.

Por un lado parece bastante intuitivo que algunas de las $\Sigma_{cajas}$ tienen más de una solución (empezando por la $\Sigma_{cajas} = 33$), aunque parece también obvio que no todas las tendrán (por ejemplo $\Sigma_{cajas} = 66$).

Por otro lado, solo hay un modo de comprobar si todo valor intermedio entre 33 y 66 es una suma posible: ¡Hacer los 33 casos y algunas de sus variantes! Con paciencia («pa ciència, la nostra» [7]) y resignación, llegamos a la conclusión de que efectivamente todos los valores intermedios de la suma son solución de, por lo menos, un reto (algunos de más de dos). Aun así, en el momento de distribuir la suma entre las tres cajas, pueden aparecer retos imposibles, como hemos visto [8].

La imposibilidad de encontrar un algoritmo que nos permitiera llegar a conclusiones contrastadas sugiere que nos encontramos delante de un problema que requiere análisis combinatorio y un enfoque computacional [9]. Esto abre un interesante campo de discusión, reservado obviamente a las sesiones de formación del profesorado o con alumnos de final de la ESO o del Bachillerato. Está claro que las millonarias inversiones previstas para desarrollar calculadoras cuánticas no se gastarán para resolver este problema, pero podemos aprovechar este ejemplo tan sencillo para introducir el tema y proponer una actividad de *enriquecimiento*, tanto personal como de grupo, perfectamente coherente con nuestro planteamiento de desarrollo competencial.

Finalmente, este material se puede proponer en un taller que, como en el caso de los *Rascacielos*, tenga el objetivo de *construir la actividad*.

Así que otra vez, a cada pareja de alumnos[10] se les daba un tablero vacío, con las tres cajas de distinta forma y las fichas numeradas para que las pusieran a placer en las cajas. En este punto, tras explicar la sencilla regla de que al coincidir la forma de la caja y de la ficha el valor de esta se duplica, solo era necesario leer la suma del valor de la ficha en cada caja y escribirlo en su interior. Después de esto, se vaciaba el tablero y el reto estaba listo para ser pasado a otros compañeros.

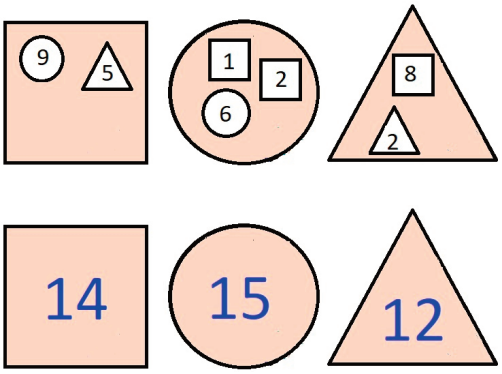



Figura 5. Construcción de un reto

Falta reflexionar sobre si puede ser interesante cambiar la cantidad o el valor de la fichas. Es evidente que se puede hacer y puede que merezca la pena experimentarlo pero, por otro lado, debemos tener cuidado de no aumentar demasiado el número de fichas o su valor: se desviaría la atención hacia el cálculo, cuando en realidad nos interesa que se centen en la estrategia y puedan ágilmente cambiar de hipótesis, es decir, de distribución de fichas.

Además, el juego entre las dos fichas que tienen el mismo valor (2) pero forma distinta y el 1, que puede doblar su valor y llega a sumar lo mismo, jugando con las cajas, que las dos anteriores fichas examinadas, es muy acertado y ofrece pequeñas variaciones difíciles de detectar.

David Barba y Cecilia Calvo citaron este juego en la sección número 85 de *Suma*[11], proponiendo además otra actividad, aparentemente más simple, sobre la misma idea de construir cantidades numéricas combinando valores más pequeños.

Como en varias ocasiones (y la lista de agradecimientos sería casi tan larga como la de las personas que en estos años han escrito en *Suma*) decidimos aprovechar la sugerencia y usar la actividad propuesta por Cecilia y David en un taller para alumnos de 4.º de Primaria, antes de introducir la del *Juego de las fichas*.

Interpretamos la actividad a nuestra manera, construyendo el material en el aula, con el alumnado, manteniendo las mismas reglas y llamando la actividad la *Máquina de sumar*.

Estuvimos asignando el valor a la primera ficha, un hexágono de PVC con dos pequeños trozos de plástico imantado para que se aguantaran sobre una pizarra metálica: el número 1 por un lado y el 2 por el otro.

Para evidenciar el valor 3 acordamos escribir esa cifra en una cara de otro hexágono. La pregunta siguiente resulta obvia: ¿Qué número necesitamos escribir en la otra cara de este mismo hexágono?

**Actividad 2**

Tenemos 4 tarjetas, cada una de ellas contiene un número en un lado y otro número en el otro:

– un 1 y un 2

– un 3 y un 6

– un 9 y un 18

– un 27 y un 54

Elige una o más de estas tarjetas, ponlas encima de la mesa y mira cuánto suman en total los números que ves. ¿Cuáles son las tarjetas que tienes que poner encima de la mesa para obtener todos los números del 1 al 50? ¿Puedes continuar? ¿Hasta qué número?

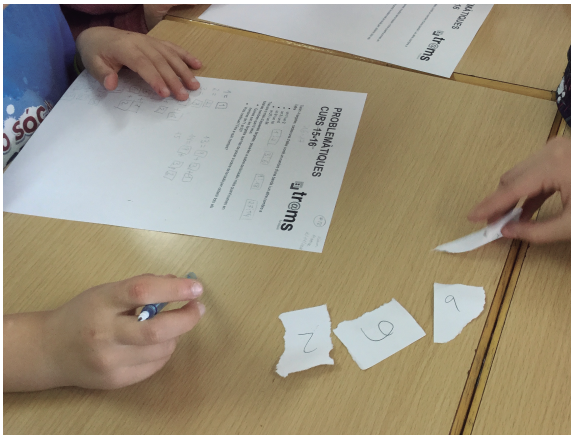



Figura 6. Imágenes del artículo de David Barba y Cecilia Calvo en el número 85 de *Suma*

Fue fácil demostrar que no necesitábamos ni el 4 (3 + 1) ni el 5 (3 + 2), ya que podíamos mostrar esos valores sobre la pizarra. Acordamos así que la cara 2 del segundo hexágono llevaría el número 6.

Llegaba ahora el turno de la pieza sucesiva. ¿Qué número íbamos a poner? El alumnado se alternaba en la pizarra para demostrar que su opción era la correcta y finalmente acordamos que necesitábamos un 9. ¿Y detrás?

Más rápido de lo que nos imaginábamos alguien propuso el 18, justificando su respuesta con el hecho de que en los casos anteriores el valor de la segunda cara era el doble del valor de la primera.

Un salto tan grande, de 9 a 18, encontró muchas objeciones, que fueron desapareciendo mientras sucesivas combinaciones de fichas aparecían en la pizarra (en gris los valores de los reversos de las fichas):

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ficha 1 | 1 | 2 | | 1 | 2 | | 1 | 2 | | 1 | 2 | | 1 | 2 | | 1 | 2 | |
| ficha 2 | | | 3 | 3 | 3 | 6 | 6 | 6 | | | | 3 | 3 | 3 | 6 | 6 | 6 | |
| ficha 3 | | | | | | | | | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 18 |
| VALOR | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| ficha 1 | 1 | 2 | | 1 | 2 | | 1 | 2 | | 1 | 2 | | 1 | 2 | | 1 | 2 | |
| ficha 2 | | | 3 | 3 | 3 | 6 | 6 | 6 | | | | 3 | 3 | 3 | 6 | 6 | 6 | |
| ficha 3 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | | | | | | | | | | 9 |
| ficha 4 | | | | | | | | | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 |
| VALOR | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |
| ficha 1 | 1 | 2 | | 1 | 2 | | 1 | 2 | | 1 | 2 | | 1 | 2 | | 1 | 2 | ? |
| ficha 2 | | | 3 | 3 | 3 | 6 | 6 | 6 | | | | 3 | 3 | 3 | 6 | 6 | 6 | ? |
| ficha 3 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | ? |
| ficha 4 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | ? |
| VALOR | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 |

Figura 7. Composición de números con la *máquina de sumar*

A un ritmo distinto, todo el alumnado iba entendiendo el mecanismo y participando en la composición de los números sucesivos. Una creciente minoría intentaba anticipar el reto sucesivo y todos se extrañaban de lo rápido que se iban incrementando los valores en las caras de las fichas. Les parecía imposible que, con tan solo 4 fichas, se pudiera llegar a componer el número 80, de manera que el sucesivo hexágono llevaría los valores 81 y 162 en las dos caras, para llegar a componer el número 242.

Podría ser interesante expandir la actividad construyendo unas fichas como las del dominó triangular que se podrían montar, como engranajes, encima de una línea que haga de base.

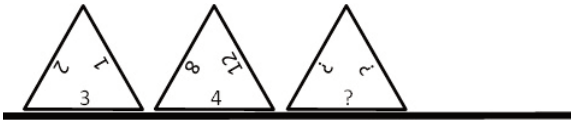



Figura 8. *Máquina de sumar* con *engranajes* triangulares

Se mantendría la idea de construir, una a una, las fichas con los estudiantes, anotando las combinaciones necesarias para formar los números sucesivos, las observaciones, las constantes, las relaciones…

No demasiado complicado resultaría pasar de las fichas triangulares a las cuadradas.

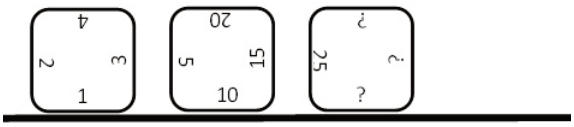



Figura 9. *Máquina de sumar* con *engranajes* cuadrados

Con el alumnado de los dos grupos de 4.ºde Primaria solo tratamos las primeras fichas, ya que lo que nos interesaba era comprobar si, después de esta actividad, más alumnado dominaría mejor y en menor tiempo las reglas del *Juego de las fichas*. Efectivamente, el experimento tuvo éxito. Nos queda la curiosidad de ver si la actividad con las fichas triangulares y cuadrada genera más competencias o si representa una innecesaria reiteración.

Trabajando con las fichas más simples no fue necesario hablar de potencias. Es muy posible que, trabajando con las fichas triangulares y cuadradas, o con el alumnado de la etapa sucesiva, este contenido emerja de sus observaciones de las regularidades que aparecen. Naturalmente, es la mejor manera de introducir un nuevo tema o verlo en un contexto de resolución de un reto.

Lo que sí hicimos fue una muy breve incursión en el mundo del sistema binario (básicamente: el *Juego de las sillas* y las *Tarjetas para adivinar*

*un número*, que también construimos —hasta el valor 15— para que se las llevaran y le propusieran la actividad a la familia o a otros compañeros del colegio).

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 | 3 | 4 | 5 | 8 | 9 |
| 5 | 7 | 6 | 7 | 6 | 7 | 10 | 11 |
| 9 | 11 | 10 | 11 | 12 | 13 | 12 | 13 |
| 13 | 15 | 14 | 15 | 14 | 15 | 14 | 15 |

Figura 10. Las tarjetas para adivinar un número

### *Conclusiones*

El *Juego de las fichas*, muy fácil de construir y de presentar, está presente en las exposiciones permanente e itinerante y lo usamos también en las ferias matemáticas. Lo incluimos en la Maleta de Cálculo, como módulo para la *pop-up exhibition*. En la guía que acompaña la maleta, seguimos aconsejando que, si se quiere llevar este material a clase, o a un taller, cada alumno construya su reto, para que después circulen en el aula y así otros puedan resolverlos y construyan entre todos un repertorio compartido.



## Un juego competitivo con las Torres de Hanoi

Una de las cosas más sorprendentes de la aventura en el MMACA es descubrir nuevas facetas en materiales tan conocidos como, en este caso, las *Torres de Hanoi o de Brahama*.

Inventado por un matemático francés, Édouard Lucas en 1883, es un magnífico ejemplo de cómo una buena narración puede ayudar al éxito de un material. Si se le añade, como en este caso, una pizca de exotismo (los monjes del templo) y misterio algo morboso (el fin del mundo), la eternidad está a un paso.

Doy por conocidas la historia y el reto de un material del que existen distintas versiones (en todo caso, por si las moscas [12]). También el MMACA lo ha presentado en alguna exposición itinerante y lo ha utilizado en las ferias y en los talleres.




Figura 11. *Las Torres de Hanoi o de Brahama* (módulo MMACA)

Sus relaciones con los triángulos de Sierpinski y Pascal, la estructura del sistema binario o los Caminos de Hamilton [13], presentan un curioso paralelismo que puede estimular la fantasía y una investigación personal (siendo el enriquecimiento de los contenidos uno de los objetivos didácticos que nos proponemos conseguir).

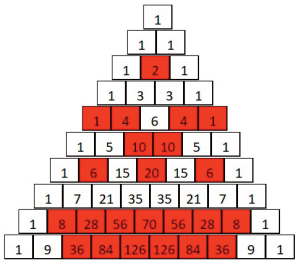



Figura 12. Triángulo de Pascal

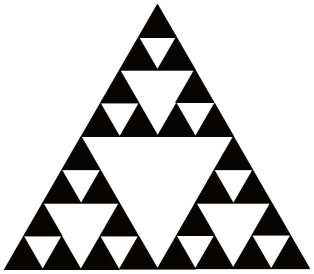


Figura 13. Triángulo de Sierpinski

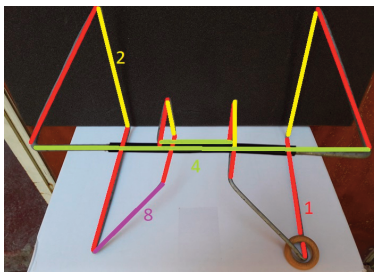



Figura 14. Camino de Hamilton sobre un hipercubo




Figura 15. Póster de la exposición *Ramon Llull y el ars combinatoria*, en el CCCB (Centro de Cultura Contemporánea de Barcelona)



De hecho, incluimos estas actividades en el taller que acompañaba a la exposición *La máquina de pensar. Ramon Llull y el ars combinatoria*, en el CCCB, (14/07/16–11/12/16), y que se pudo ver durante las Jornadas C2EM[14].

Teniendo en cuenta todo lo anterior, sería normal considerar que no hay mucho más para investigar. Pero nada más lejos de la realidad.

De hecho, la actividad que os explicamos a continuación no tiene otros valores que ser sorprendente, divertida y provenir de la práctica cotidiana de un joven educador del MMACA. Para mantener el exotismo que acompaña desde su origen a este material, la hemos llamado *Las Torres de Ho Chi Mind*[15]. Es una actividad competitiva para dos jugadores.



Figura 16. Disposición de las piezas para empezar el juego

La estructura es la misma, pero empezamos con 6 o 7 anillos fuera de los palos.

Cómo en el juego tradicional cada jugador, por turnos, debe poner un solo anillo o mover de un palo a otro uno de los anillos ya puestos (cualquiera menos el último que ha puesto el adversario, única variación introducida para evitar entrar en un bucle).

Gana el primero que consigue apilar tres anillos de dimensión consecutiva.

Puede que sea por el hecho de ser nuevo, pero nos está gustando mucho. Hay unos vuelcos repentinos entre situaciones ganadoras y perdedoras que son muy divertidos y recuerdan los del *Nim Circular* o del *Quarto*.

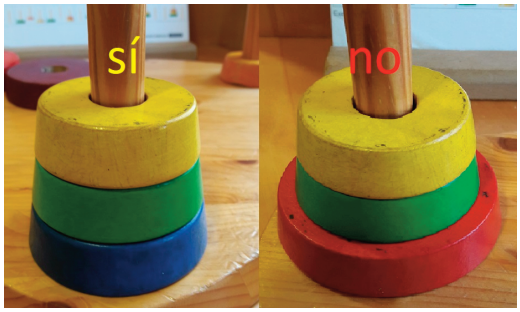


Figura 17. Solución correcta y equivocada del juego

Por ahora, solo lo hemos probado con amigos y todavía estamos discutiendo si existe una estrategia ganadora. Nada mejor que involucrar en la partida a los lectores de *Suma*.

MMACA
*Museu de Matemàtiques de Catalunya, Cornellá de Llobregat (Barcelona)*
<contacte@mmaca.cat>



1 La educación informal contempla el aprendizaje *espontáneo* que se realiza en situaciones cuya finalidad no es la educativa (recreo, diversión…) y no van dirigidas a unos usuarios específicos.

2 UNESCO, 1998.

3 Como en otras de esas actividades, es sorprendente la rapidez con la que usuarios de toda edad se empoderan del material y empiezan a resolver los retos con extrema soltura.

4 En el primer artículo de esta sección explicamos que nos costó casi dos años transformar unas actividades pensadas para el aula al formato correcto para una exposición. En este caso, si con un módulo se puede hacer más de una actividad, se evita la necesidad del educador de pasar continuamente a deshacer los retos resueltos. La solución encontrada por el anterior usuario no es un obstáculo para el siguiente: solo se le pide escoger un reto diferente.

5 $1+2+2+5+6+8+9=33$; $2\times(1+2+2+5+6+8+9)=66$.

6 ¡Ay, qué suerte si los políticos y los economistas leyeran *Suma*!

7 https://twitter.com/paciencianostra?lang=ca.

8 A alguien no le habrá extrañado que en el momento de buscar un reto imposible hayamos asignado a las tres cajas un valor impar. Aun cuando 3 de las 7 fichas tienen un valor impar, el hecho de duplicar su valor en el momento de depositarlas en una caja de la misma forma, hace que a priori parezca más fácil que el valor de cada caja sea un número par. Hasta podríamos llegar a ponernos un nuevo reto: ¿Habrá una combinación imposible si las tres cajas suman un valor par?

9 Dejamos a algún experto en lógica resolver la duda si estamos delante de un problema NP-completo. (<https://es.wikipedia.org/wiki/NP-completo>). Por lo que compete al ámbito de nuestra propuesta, nos parece suficiente evidenciar cómo, detrás de un reto sencillo, accesible a todo tipo de usuario, se pueden investigar aspectos complejos de las matemáticas y que además tiene una enorme vigencia en el desarrollo tecnológico.

10 Siempre tendemos a estimular los aspectos colaborativos y comunicativos en todas las actividades.

11 Barba, D. y C. Calvo, «Tareas ricas para practicar sumas», *Suma* 85, julio 2017, págs.60-61.

12 https://es.wikipedia.org/wiki/Torres_de_Han%C3%B3i.

13 https://mth487.wordpress.com/2015/10/16/the-tower-of-hanoi/.

14 http://www.cccb.org/rcs_gene/DdP_la_maquina_de_pensar_LLULL_ES.pdf.

15 https://ca.wikipedia.org/wiki/Ho_Chi_Minh.

suma+ 88
Secciones
Julio 2018
pp. 95-102

# Optimización didáctica de un problema de optimización

Miquel Albertí Palmer



Crónica de una clase no anunciada

Los problemas de optimización se abordan, por lo general, en segundo curso de Bachillerato y la metodología para resolverlos hace uso del cálculo diferencial. Aunque también pueden abordarse mucho antes con la tecnología disponible hoy en día poniendo en juego competencias difícilmente desarrollables mediante el cálculo de derivadas, voy a centrarme en 2.º de Bachillerato.

## Un problema de optimización

Preparando un examen sobre derivadas para mis alumnos de Matemáticas de 2.º de Bachillerato quise plantear un problema de optimización con cierto significado funcional y que tocase algo más que aspectos geométricos propios de los problemas en los que se buscan perímetros, áreas o volúmenes máximos o mínimos. Tal y como fue redactado, el problema se reproduce en la figura 1. Me referiré a él como PA y su versión en castellano es la siguiente:

> PA. Con un punto de la curva $y = 1 - x^2$ y el origen de coordenadas se construye un rectángulo como el de la figura. Hallad las dimensiones del rectángulo de área máxima limitado entre dicha curva y los semiejes de coordenadas positivas.

Artículo solicitado por *Suma* en marzo de 2018 y aceptado en abril de 2018

En el momento de su redacción no caí en la cuenta, pero más tarde vi que ese enunciado daba significado a un ejercicio realizado en clase un mes antes, cuando nos dedicábamos a hallar los extremos relativos de diversas funciones. Fue entonces que calculamos los máximos y mínimos de una función polinómica bastante sencilla como es $f(x) = x - x^3$.

Volviendo al problema PA, dado que los rectángulos así construidos tienen por base la abscisa $x$ del punto de la curva $(x, f(x))$ y por altura su ordenada $f(x)$, el área de dicho rectángulo es:

$$A(x) = x \cdot f(x) = x \cdot \left(1 - x^2\right) = x - x^3$$

Pese a temer que el planteamiento podría generar algunas dudas por su sencillez, no desistí en proponerlo. Imaginé que la primera dificultad estaría relacionada con la construcción de un rectángulo mediante las coordenadas del punto de una curva. Se trata de algo muy sencillo para quien está acostumbrado a hacer matemáticas a diario, pero si no se ha trabajado antes una situación similar puede poner de manifiesto dificultades de significado. Aquí había dos. Una era tener presente que las coordenadas de los puntos de la curva son $(x, 1-x^2)$. La otra, que hay que multiplicar su abscisa y su ordenada para cuantificar el área de dicho rectángulo.

Durante el examen surgió otra duda imprevista. Una parte significativa del alumnado no tenía claro el significado de la expresión «semiejes de coordenadas positivas». Al parecer muchos de ellos nunca se habían topado con semejante descripción de las semirrectas OX y OY. O no la recordaban.

Llegada la hora de corregir los exámenes se hizo evidente que mis temores en cuanto a la interpretación del área del rectángulo definido por el punto de la curva como producto de las coordenadas $x$ y $f(x)$ no estaban fundados, pues más alumnos de los que había imaginado interpretaron la situación correctamente.

Pero me llevé una sorpresa al ver que cuatro personas de la treintena que habían realizado la prueba habían tratado de resolver el problema resolviendo otro que consideraron equivalente al planteado. Esas personas, en lugar de buscar el rectángulo de área máxima buscaron el rectángulo de diagonal máxima, creyendo que ambos problemas eran equivalentes y que el rectángulo de área máxima sería también el rectángulo que tuviese la mayor diagonal.

Ninguna de ellas logró terminar la resolución, aunque sí plantearon bien la función que proporcionaba la longitud de dicha diagonal:

$$D(x) = \sqrt{x^2 + \left(1 - x^2\right)^2}$$

De haber resuelto este problema podrían haber visto si el resultado se correspondía o no con el planteado realmente, pero las dificultades y errores en algunos cálculos se lo impidieron.



3. Amb un punt de la corba $y=1-x^2$ i l'origen de coordenades es construeix un rectangle com el de la figura. Trobeu les dimensions del rectangle d'àrea màxima tancat entre aquesta corba i els semieixos de coordenades positives.

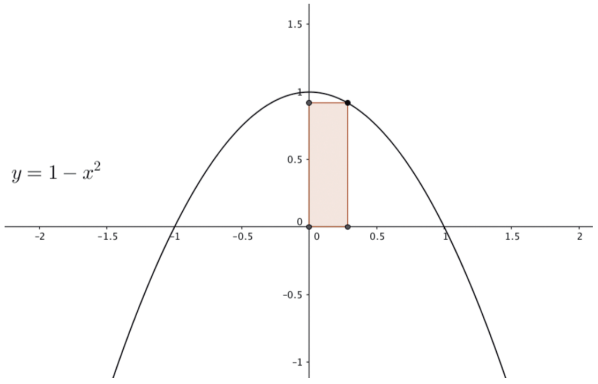



Figura 1. Problema de optimización

El problema PA había sido interpretado como el problema PB:

> PB. Con un punto de la curva $y = 1 - x^2$ y el origen de coordenadas se construye un rectángulo como el de la figura. Hallad las dimensiones del rectángulo con diagonal máxima limitado entre dicha curva y los semiejes de coordenadas positivas.

Apareció así un primer problema didáctico: establecer o no la equivalencia entre ambos problemas de optimización. ¿Es PA equivalente a PB? Es decir, ¿tienen las mismas soluciones?

## Un problema didáctico es un problema de aprendizaje

Cuando devolví los resultados de la prueba expuse ese problema. Para mí, era «didáctico»; para ellos, era de «aprendizaje». Por una parte, era un problema didáctico, en tanto yo pretendía abordar una situación nueva, una meta equivalencia, no ya entre ecuaciones o expresiones numéricas, sino entre problemas. Por otra, era un problema de aprendizaje matemático porque consideraba esencial que ellos mismos tratasen de averiguar si ambos problemas eran equivalentes o no.

Les emplacé a que trabajasen la cuestión y a que me trajesen, al cabo de unos días, una resolución con la que pudiésemos dilucidar si el rectángulo de área máxima es también el de máxima diagonal.

Nada más proponerles esa tarea, algunos de los más avanzados (y que habían resuelto correctamente el problema planteado en el examen) aventuraron respuestas negativas. Uno de sus argumentos fue:

> No será el rectángulo de máxima diagonal porque parece que los rectángulos con mayor diagonal son cuando $x = 0$ y $x = 1$, los extremos de la curva. Y ahí el área es cero.

Como tantas veces ocurre en matemáticas habían analizado la situación llevando las cosas a extremos patológicos. Para completar su argumento solo necesitaban justificar que todos los puntos del arco de la curva $y = 1 - x^2$ entre los puntos (0, 1) y (1, 0) están más cerca del origen de coordenadas que estos dos extremos. Pero ya nos habíamos excedido de la hora de clase y la cuestión quedó sin concluir (volveré a ella más adelante).

Las sesiones siguientes fueron por otros derroteros, pues había que avanzar en los contenidos propios de 2.º curso. Y los contenidos nos llevaron (me llevaron a mí, y yo les llevé a ellos) al cálculo integral.

Siempre es una pena lo que apremia el tiempo, especialmente en el último curso de Bachillerato con las pruebas PAU al acecho. Sin embargo, eso no impidió que una persona me entregase por escrito la resolución del problema de la diagonal. Su resolución llegaba más lejos que las realizadas durante el examen, y aunque no acababa de concluir correctamente la cuestión, me pareció lo suficientemente rica como para, tras pedirle permiso, compartirla con toda la clase.

Esto significaba hacer un paréntesis en el desarrollo del cálculo integral, concretamente, en la integración por partes. Pero como profesor no podía dejar escapar la oportunidad de que viviesen algunos procesos matemáticos que considero fundamentales. Así que con el permiso de esa persona hice una clase no anunciada.

La resolución comenzaba construyendo la función (figura 2) que determina la longitud de la diagonal del rectángulo en cuestión cuyos extremos son los puntos (0, 0) y $(x, 1-x^2)$. A continuación desarrollaba dicha función:

$$D(x) = \sqrt{x^2 + \left(1 - x^2\right)^2} = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$$

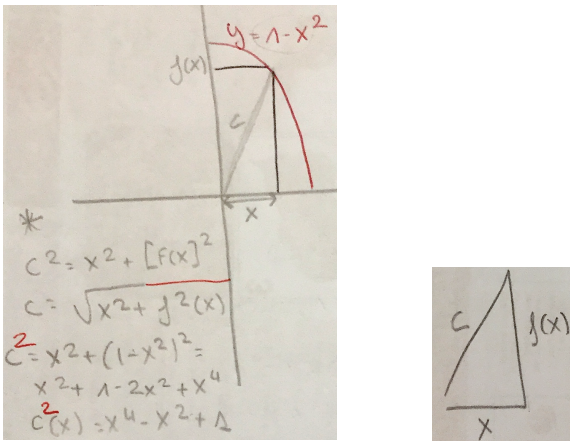



Figura 2. Ilustraciones de una resolución del problema PB (diagonal máxima) con anotaciones mías

Entonces tomaba la función del radicando para derivarla buscando un máximo. Compartí con la clase la observación de que no se especificaba ese paso y que, pese a haber visto en clase que los extremos relativos de una función y de su cuadrado son equivalentes, debería haber expresado por escrito por qué derivaba $D^2(x)$ y no $D(x)$.

En cualquier caso, la derivada proporcionaba dos candidatos a máximo o mínimo:

$$\left(D^2\right)'(x)=0 \Rightarrow 4x^3-2x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\cdot\left(2x^2-1\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\dfrac{\pm 1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Llegado este punto, la persona autora substituía esos valores en la segunda derivada:

$$\left(D^2\right)''\left(\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}\right)=4>0$$

$$\left(D^2\right)''(0)=-2<0$$

Y entonces ocurría algo extraordinario porque pese a clasificar $x=1/\sqrt{2}$ y $x=-1/\sqrt{2}$ como mínimos, escribió lo siguiente (figura 3).

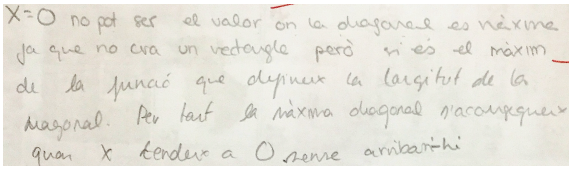



Figura 3. «*x = 0* no puede ser el valor con la diagonal máxima, ya que no crea un rectángulo pero sí es el máximo de la función que define la longitud de la diagonal. Por tanto, la máxima diagonal se consigue cuando *x* tiende a 0 sin llegar hasta ahí.»

Este párrafo incitó una serie de reflexiones. Por una parte, el cálculo analítico decía una cosa. Por otra, quien debía interpretar los resultados no lo hacía como debía, pues en lugar de adaptar su intuición al cálculo, ¡hacía justo lo contrario! Trataba de adaptar el cálculo a su intuición.

En primer lugar, tenemos una duda filosófica. Un rectángulo de base o altura nula, ¿es un rectángulo? Hubo extensa discusión cerca de ello. Se formularon argumentos a favor y en contra:

> —Si no tiene base, no es un rectángulo.
>
> —Pero que la base sea cero, no significa que no la tenga, sino que es nula.
>
> —Un rectángulo de base o altura nulas, no existe. El rectángulo se destruye. No hay rectángulo.

En matemáticas, ¿a qué aferrarse? Quizá lo mejor sea dejar la decisión a lo que el cálculo nos dice. Y el cálculo dice que para $x = 0$ tenemos un rectángulo de máxima diagonal. ¿Qué discontinuidad de pensamiento nos permite afirmar que para todo $x > 0$ tenemos rectángulos y para $x = 0$ ya no? El cálculo no distingue entre ambos casos ($x > 0$ y $x = 0$). Y el cálculo es hijo de nuestra lógica y modo de pensar, aunque dudemos de ello cuando sus extremos nos hacen asomarnos al abismo de nuestra intuición.

Ocurre algo similar con el valor de $2^0$. Confiemos, por tanto, en el cálculo y aceptemos el polígono de base 0 y altura 1 como un rectángulo de tales dimensiones. ¿Nos crea un conflicto conceptual? Probablemente, sí. No concebimos un rectángulo así porque tal figura no existe en la realidad, no puede dibujarse ni trazarse por ordenador ni podemos imaginárnosla como no sea un segmento. Es la realidad del cálculo y hay que aceptar sus consecuencias.

Pero la persona autora iba más allá de la inexistencia del rectángulo patológico, pues se refería a él como una especie de imperfección del cálculo. Al no poder concebirlo, el error estaba en el cálculo, que ofrecía el caso límite de una serie de rectángulos cuya mayor diagonal se alcanzaría en aquel cuyo base tiende a cero, pero sin llegar a ser exactamente cero. Esto nos lleva a dos nuevas preguntas o problemas:

> PC. ¿Existe un último rectángulo antes del que se obtiene para *x* = 0? ¿Cuál es el primer número después del cero?
>
> PD. ¿Por qué no aparece la solución *x* = 1?

Planteé a mis alumnos la cuestión PC. Quienes fueron capaces de responder lo hicieron con ideas del estilo de las siguientes:

El número positivo más pequeño.

0,000…1

0,001, 0,0001, 0,00001, el límite cuando x tiende a 0 es indeterminado y tiene infinitas respuestas.

0 coma infinitos 0, 1.

$1{\cdot}10^{-\infty}$

$0{,}1{\cdot}10^{-\infty}$

Pero «el número positivo más pequeño» no es sino expresar un sinónimo de la pregunta. El resto de respuestas pueden resumirse en dos:

$$0,\hat{0}1$$

$$10^{-\infty}$$

Sobre la primera, puede decirse que carece de sentido añadir un 1 al final de una serie infinita de ceros. De la segunda, puede afirmarse que no expresa un número, sino el límite de una sucesión con límite nulo y no estrictamente positivo:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{10^x}=0$$

Quienes respondieron con expresiones como $10^{-\infty}$ no eran conscientes de que, como número, es equivalente a 0.

Desde la perspectiva didáctica, me pregunté: ¿cómo es posible que esos estudiantes sean capaces de calcular límites complejos aplicando recursos algebraicos (factorización, extracción y reducción de factores comunes de polinomios) y diferenciales (regla de L'Hôpital) y no puedan ofrecer reflexiones más profundas sobre la pregunta formulada? ¿De qué sirve ser competente en el cálculo de límites si no se comprende la continuidad que con ellos se pretende justificar o rebatir?

Así que tuve que dirigir sus pensamientos hacía la respuesta de PC provocando el siguiente diálogo en el que solo un par de ellos participó:

—Decidme un número mayor que cero, inquirí.

—El 2.

—¿Podés decirme otro más próximo todavía?

—El 0,5.

—¿Podéis acercaros más todavía?

—La mitad de 0,5: 0,25.

—Y eso que hemos hecho con el 0,5, ¿no podemos hacerlo con 0,25?, pregunté.

—Sí, con todos.

—Entonces, ¿adónde nos conduce esto?

—Al cero.

—¿Cuál sería entonces el último?

—No hay último.

—No, intervine. Porque el numerador nunca será nulo. En resumen: si hubiese un primer número positivo, llamémosle $x$, entonces $x/2$ sería menor y positivo. Luego tendríamos que $x$ no sería el primero o que $x = x/2$, de lo cual $x = 0$. Pero esto es imposible porque $x > 0$. Conclusión: no existe un número (racional) que sea el primero mayor que 0.

Con respecto a la segunda pregunta (PD), la de por qué no aparecía la solución $x = 1$, cabe decir que no fue tratada en clase. Llegados a este punto temía acabar desarrollando no solo una clase no anunciada, sino todo un currículo entero. De nuevo, el tiempo apremiaba. Pero digamos al menos que la solución $x = 1$ no aparece porque en el punto de abscisa $x = 1$ la función no posee ningún punto singular o extremo relativo que pueda ser descubierto por la derivada como si de un extremo relativo se tratase, lo que sí ocurre con $x = 0$. El valor $x = 1$ es un extremo de la situación y del arco de la curva para nosotros, esto es, en el problema planteado, porque el enunciado limita la situación al intervalo [0, 1]. Ahí, en la abscisa $x = 1$ acaba el problema, pero no la curva. Evidentemente, la propia función no puede ser consciente de dicha limitación.

## Dos rectángulos no equivalentes

La resolución del problema de la diagonal (PB) muestra que existe un rectángulo cuya diagonal es mínima. Tiene por base $x = 1/\sqrt{2}$ y la misma altura, por lo que se trata del único cuadrado que puede formarse con el origen de coordenadas y un punto del arco de la curva. Evidentemente, esta solución no se corresponde con la del problema de área máxima (PA), que es $x = 1/\sqrt{3}$, por lo que hay que concluir que PA y PB no son equivalentes.

Hay todavía otro modo de ver que la diagonal máxima no va a proporcionar la solución, pues el círculo con centro en el origen de coordenadas que pasa por los extremos (0, 1) y (1, 0) de la curva original incluye todos los puntos del arco de esta (figura 4).

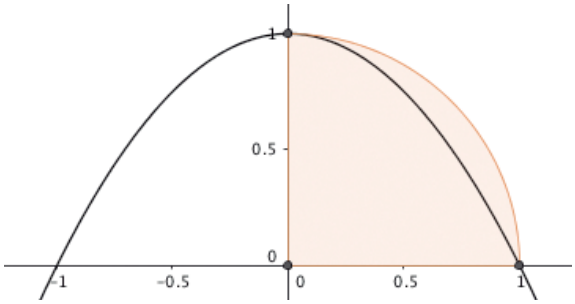



Figura 4. Los puntos interiores del arco $y = 1-x^2$ en el intervalo [0, 1] están más cerca del origen de coordenadas que los del arco circular de radio 1



## En segundo, el tiempo es primero

En 2.º de Bachillerato, no solo el tiempo apremia, también los alumnos, sus familias y la comunidad educativa de secundaria. El alumnado de bachillerato no depende de sí mismo para enfocar su futuro, sino que depende también de los demás y del sistema de acceso a la universidad. No son pocos los alumnos que necesitan altas cualificaciones para poder acceder a los estudios que desean. Sus familias lo saben y se preocupan por ello. Ya no basta con superar las PAU. De hecho, hace años que superar la selectividad dejó de ser el objetivo principal al realizar esa prueba. El objetivo es obtener una calificación que permita estudiar lo que uno quiere. Esa nota cuantifica el grado de libertad de cada estudiante.

Al principio de curso algunos alumnos suelen informarme de que necesitan una buena nota de matemáticas, incluso llegan a especificar: «necesito, por lo menos, un ocho». Ante situaciones así no es fácil realizar nuestra labor como profesores de matemáticas.

El bachillerato es una rendija de dos cursos académicos abierta entre la ESO y la universidad que, de hecho, se reduce a uno, puesto que el primer curso de Bachillerato es la entrada a una nueva etapa educativa, con reglas de juego y exigencias distintas. Hoy en día carece de entidad suficiente como para ser considerada una verdadera etapa educativa, pues el primer curso de Bachillerato se convierte en una puesta a punto de los alumnos que lo inician entre los que se encuentran quienes han superado muy bien la ESO y los hay que la han superado sin haber acreditado las competencias matemáticas correspondientes (recordemos que la superación de la ESO no implica la superación de todas las competencias de todas las materias). Por eso, ya en 1.º de bachillerato, el horizonte de la selectividad se aprecia más cercano de lo que debería ser.

Hay que añadir además que los contenidos de 2.º son los que marcan la prueba de selectividad y que constituyen un cambio extraordinario de concepción, tanto desde el punto de vista educativo como del matemático. La anticipación de esos contenidos en 4.º de la ESO tampoco resuelve el problema, si es que no lo acrecienta, pues solo puede hacerse con un tipo de alumnado sobradamente competente. Por eso me encuentro a menudo con estudiantes de 2.º de Bachillerato que…

— No conocen lo que es una demostración matemática sencilla.
— No han vivido situaciones elementales como que el rectángulo definido por un punto de una curva tiene por base la abscisa de ese punto y por altura su ordenada.
— No han experimentado y reflexionado lo suficiente en 1.º lo que significan la continuidad y el límite de una función.
— No han reflexionado suficiente sobre el concepto de continuidad en ámbitos físicos.
— No han reflexionado sobre aspectos del infinito tan necesarios para el concepto de límite como que no existe un primer número real positivo, ni un último número (natural o real) positivo…

Por todo ello me veo obligado a despojar mis clases de 2.º de Bachillerato del aspecto constructivista que considero imprescindible en el aprendizaje matemático. Lo hago traicionando mis principios y traicionando lo que considero que son las matemáticas. Así que comunico a mis alumnos que van a tener que hacer unos cuantos

actos de fe porque no hay tiempo para ver, experimentar y vivir las matemáticas como son.

Respecto del cálculo diferencial, hay varios aspectos que me parecen fundamentales conocer con relación al cambio de paradigma que supuso en su momento y al papel que jugó en la historia, no solo de las matemáticas:

— Descartes y Fermat iniciaron la tarea resolviendo, cada uno a su modo, el problema de la tangente en un punto de una curva.
— Newton y Leibniz, dos de las mentes más preclaras de la historia de la humanidad, necesitaron décadas para llegar a concretar lo que hoy en día conocemos como cálculo diferencial.
— El cálculo supuso un cambio extraordinario de lo que hasta entonces podía ser considerado como matemáticas, pues trabajaba con sumas infinitas y procesos infinitos.
— El cálculo no va de demostrar teoremas y proposiciones al estilo euclidiano, sino de elaborar un nuevo método para resolver nuevos problemas. No existen teoremas de Newton ni de Leibniz como sí existen los de Tales o de Pitágoras. Quizá Arquímedes y quienes en la antigüedad trabajaron con el método de exhaución sean quienes más se aproximaron a ese nuevo método matemático desarrollado en el siglo XVII.
— Los teoremas sobre cálculo que sí llevan nombre son posteriores a Newton y Leibniz: Barrow, Rolle, Cauchy…
— El desarrollo del cálculo implicó la creación de un nuevo concepto, el de límite, con el que se fraguaron unas nuevas matemáticas.

¿Cómo vivir todo esto que llevó siglos en tan solo unos meses? El concepto de derivada remite al concepto de límite, y este al de continuidad. La inmensa mayoría de mis alumnos de bachillerato son incapaces de poner un ejemplo de fenómeno real en el que exista una relación de continuidad. Cuando les pregunto si consideran el crecimiento a lo largo del tiempo una función continua sus respuestas se dirigen a justificar el dominio de dicha función y no su continuidad, pues creen que se trata de una relación continua porque para cada año o instante de tiempo se tiene una estatura determinada. Hablan del dominio y no de la continuidad.

*La inmensa mayoría de mis alumnos de bachillerato son incapaces de poner un ejemplo de fenómeno real en el que exista una relación de continuidad.*

Sin embargo, saben qué hay que hacer para demostrar que determinadas funciones son o no continuas en un punto dado. Lo hacen del mismo modo que calculan integrales en física antes de hacerlo en matemáticas: realizan operaciones sin apenas comprensión ni significado. Una comprensión que precisa de un tiempo del que el 2.º curso de bachillerato adolece.

¿Cómo desarrollar el cálculo en unos meses sin reducirlo a aprender las técnicas de derivación y a resolver problemas de optimización planteados exprofeso? ¿Cómo plantear un currículo de matemáticas en el que se disponga del tiempo para reflexionar y madurar los nuevos conceptos y procesos que cambiaron el mundo hace tres o cuatro siglos? ¿Cómo facilitar la experimentación del cálculo integral a través de varias sumas infinitas elementales? ¿Cómo no banalizar la relación entre derivada e integral diciendo que son una lo contrario de la otra? Si se reduce a eso, ¿para qué bregaron Newton, Leibniz y tantos otros con sumas infinitas?

## Conclusiones

Las sesiones de clases no anunciadas expuestas obedecen a la victoria obtenida por mi Dionisio sobre mi Apolonio. Ante el potencial didáctico que aprecié en aquel problema de optimización (PA), no pude reprimir el deseo de que mis alumnos viviesen lo que es hacer matemáticas y reflexionar sobre el significado del cálculo. Más todavía cuando la intuición toma parte en la partida.

La domesticación de la intuición es un tema que debería tratarse más a menudo en clase de matemáticas. Tall y Dreyfuss (1981) lo hacen con relación a las derivadas poniendo en entredicho concepciones que los alumnos dan por sentadas. Se refieren a ello como pensamiento matemático avanzado.

La intuición juega un papel fundamental en la concepción de lo que es una función derivable, pues a menudo se confunde la derivabilidad con la continuidad de la derivada. Walter Rudin (1974) ilustró hace ya tiempo que existen funciones continuas cuya derivada es discontinua:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cdot sen\left(\dfrac{1}{x}\right) & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$$

Resulta extraordinario que se hayan creado funciones cuya única razón de existir sea corroborar o contradecir una intuición.

Con relación al concepto de límite, merece la pena detenerse en la demostración que Ortega (2002) ofrece del teorema de Bolzano. En dicha demostración, la demostración es el método, pues la existencia del punto donde se anula la función se construye por medio de una sucesión que debe ser convergente hacia un punto, aunque se desconozca cuál es. Esto nos llevaría a considerar que existen filosofías dentro de las matemáticas. El constructivismo es una de ellas. ¿Aceptamos la existencia de este punto sin poder concretar de cuál se trata? El razonamiento nos dice que debe de existir, pero dicha potencialidad no es definitiva. En algunos aspectos esa demostración es similar a la de George Cantor para ver que los números reales entre 0 y 1 son innumerables. Si la traigo a colación es por la relación que tiene con el problema del primer número después del cero (PC).

En conclusión, ¿cómo va a vivir un estudiante todo eso? Se precisaría un curso académico completo para experimentar el concepto y la definición de continuidad, el concepto de límite y su necesidad, el concepto y el proceso de derivada a la que Tall (1981) se refería como «procepto», lo que es y el significado y notación de la diferencial, la integral y su relación con las sumas infinitas, el infinito y sus derivados (numerable y no numerable) y, por encima de todo, el proceso histórico. Sin duda sería apasionante poder vivir todo eso porque yo y la inmensa mayoría de mis colegas matemáticos estudiamos matemáticas por la geometría y por el cálculo diferencial.

Pero ese suceso tiene probabilidad demasiado cercana a cero. Así que tendré que volver a las clases anunciadas en las que casi todo se comunica y apenas se experimenta. Se comunica el problema que provoca la construcción de la herramienta que lo resuelve (derivada, matriz, determinante) y se comunica, porque no hay tiempo para más, el modo en que deben aplicarse las herramientas para resolver los problemas: tangentes a una curva, optimización, resolución y discusión de sistemas de ecuaciones, posiciones de rectas y planos en el espacio. Quien sepa hacer todo eso será declarado competente, aprobará el curso y también la selectividad. ¿Obtendrá la nota suficiente? Si es lo suficientemente reflexivo como para ir un paso más allá de las clases anunciadas y ver ese punto de sutileza en algunos de los problemas que se le planteen en la prueba… sí.



## Referencias bibliográficas

Ortega, J. M. (2002), *Introducció a l'ànàlisi matemàtica*, Universitat Autònoma de Barcelona, Servei de Publicacions, Bellaterra.

Rudin, W. (1974), *Principios de análisis matemático*, Ediciones del Castillo, Madrid.

Tall, D., y S. Vinner (1981), «Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity», *Educational Studies in Math*, 12, 151-169.

Miquel Albertí Palmer
*INS Vallès, Sabadell (Barcelona)*
<cucna@revistasuma.es>

suma+ 88
Secciones
Julio 2018
pp. 103-107

# Enriquecimiento de la argumentación visual de alumnos con talento matemático

Rafael Ramírez Uclés (coordinador)
Pablo Flores Martínez

Tú el talento y yo los hombros.



## El rincón de ESTALMAT

*ESTALMAT* (Estímulo del talento matemático) es un proyecto de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Los objetivos fundamentales del proyecto fueron descritos por su fundador, Miguel de Guzmán. Tratamos de detectar, orientar y estimular de manera continuada el talento matemático excepcional de estudiantes de secundaria y bachillerato, sin desarraigarlos de su entorno, mediante una orientación semanal durante los dos primeros años, que llevamos a cabo cada semana del curso académico por tres horas, y continuando en la etapa de enseñanza secundaria y bachillerato con diferentes formatos en las distintas sedes.

Actualmente el proyecto se desarrolla en 10 comunidades autónomas, pero sigue estando en expansión desde sus orígenes en 1998 <www.estalmat.org>. En este proyecto están implicados alrededor de 200 profesores en toda España, provenientes tanto de las universidades como de la enseñanza secundaria.

En ESTALMAT tenemos un rincón lleno de material que ha sido elaborado a través de los años por el profesorado del proyecto. Queremos compartir con todos los lectores de *Suma* nuestras experiencias y, para ello, mostraremos algunos de estos materiales para que puedan ser un punto de partida para el profesorado que desee llevar

Artículo solicitado por *Suma* en marzo de 2018 y aceptado en abril de 2018

a sus estudiantes por los bellos paisajes de la matemática.

La investigación en Fórmula 1 ha aportado grandes inventos muy útiles para el más pequeño de los utilitarios. Una tarea rica pensada para un estudiante muy capaz, tiene mucho potencial para ser convertida en una tarea para todos, incluso para los que tienen dificultades. Un buen primer paso para atender a la diversidad.

Queremos resaltar el papel del profesor como primer escalón para que el talento de TODOS nuestros estudiantes pueda llegar a lo más alto. Y eso no es cuestión de suerte.

> Muchos creen que tener talento es una suerte; nadie que la suerte pueda ser cuestión de talento. (Jacinto Benavente)

El talento tendrá más fortuna si se apoya sobre los hombros adecuados.

> Si he visto más lejos es porque me he subido a hombros de gigantes. (Isaac Newton)



En esta entrega os presentamos algunas de las tareas propuestas en la sesión «Visualización» impartida en el segundo curso de ESTALMAT Andalucía Oriental. El enriquecimiento que se pretende va encaminado en dos direcciones. Por un lado, trabajar técnicas de argumentación matemática: condiciones necesarias y suficientes, contraejemplos, conjeturas, etc. Por otro lado, favorecer el desarrollo de sus habilidades de visualización, focalizándonos especialmente en la localización de errores en la argumentación visual.

La estructura de la sesión está basada en el *reposo curricular* (Ramírez y Flores, 2016), donde se tienen en cuenta las características de los estudiantes con talento, el enriquecimiento de contenidos matemáticos y elementos de razonamiento. Los contenidos matemáticos que se trabajan son la teselación del plano y el relleno del espacio. La metodología que recomendados es iniciar cada tarea individualmente y luego hacer una puesta en común en pequeño grupo. Finalmente se comparten y discuten las respuestas en el grupo clase.

Se persigue que los estudiantes conozcan técnicas de argumentación para justificar sus razonamientos, especialmente para hacer un uso eficaz de la visualización. En experiencias previas y en revisiones de la literatura de investigación, se han localizado errores como establecer falsas analogías entre el plano y el espacio («si los triángulos rellenan el plano, los tetraedros rellenan el espacio») o razonar a partir de ejemplos concretos, extrayendo conclusiones examinando solo algunos de todos los casos posibles («Se ve en este dibujo que las alturas de un triángulo siempre son menores que todos sus lados»). Además de errores implicados al utilizar elementos matemáticos implicados en el razonamiento, como técnicas de argumentación falaces, como implicaciones inversas, procesos inductivos incompletos o deductivos poco justificados, usar conjeturas tomándolas como verdaderas, o contraejemplos que no lo son, etc.

> Si dos rectas son paralelas, están contenidas en dos planos que son paralelos. Por lo tanto si no son paralelas, no puede haber dos planos paralelos que las contengan.

Presentamos distintas tareas, comentando los aspectos más destacados sobre la forma de llevarlas al aula, ejemplos de respuestas de los estudiantes y reflexiones sobre su solución.

*Tarea 1. Lluvia de ideas: relleno del espacio*

Responde individualmente a las siguientes preguntas:

1.1 ¿Qué cuerpos rellenan el espacio?
1.2 El cubo rellena el espacio. Justifica tu respuesta.
1.3 Define qué se entiende por cuerpo que rellena el espacio.
1.4 Buscar ejemplos de poliedros que rellenan el espacio.
1.5 Estudiar la relación que existe entre los poliedros que rellenan el espacio y los polígonos que rellenan el plano.
1.6 ¿Rellena el tetraedro el espacio?

Se pide que de una manera intuitiva identifiquen los cuerpos que rellenen el espacio. Se introducirá el problema de relleno del espacio en relación con problemas reales de diseño, almacenaje y transporte, analizando el nombre de tetrabrick.

Se compartirá una lluvia de ideas sobre el concepto de relleno del espacio, guiándoles a que valoren la exactitud y generalidad de sus aportaciones. Se les motiva a que expresen argumentos que justifican por qué el cubo rellena el espacio.

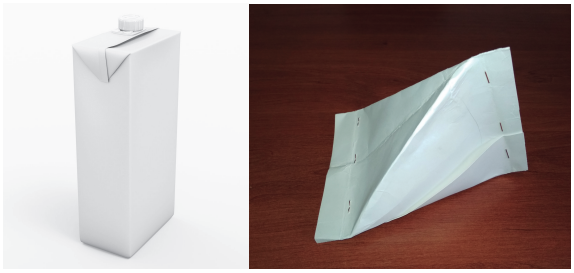


Figura 1. Tetrabrick: ¿hexaedro o tetraedro?

[Respuesta a 1.2] El cuadrado rellena el plano, por lo tanto el cubo puede rellenar el espacio, ya que podemos dividir el espacio en tres planos y cada uno puede ser rellenado con las caras del cubo.

Se prevé que el razonamiento sobre un caso concreto les ayude a extraer propiedades generales para definir qué se entiende por rellenar el espacio, que se abordará en la actividad 1.3, en la que, primero de manera individual y luego mediante la puesta en común, se definirá «rellenar el espacio» y se les pedirá que busquen ejemplos de poliedros que lo hagan.

[Respuestas a 1.3] Conseguir colocar figuras en la correcta composición de modo que no queden huecos libres y que se pueda extender indefinidamente.

Establecer una secuencia para colocar poliedros infinitas veces de forma que no quede ningún punto del espacio que no esté dentro de ellos.

Es esperable que presenten ideas intuitivas interesantes, por lo que la puesta en común no se limitará a valorar la corrección de las aportaciones, procurará motivarles para *pulir* argumentaciones, emplear lenguaje matemático preciso y examinar razones que permiten la generalización.

En la actividad 1.4, en caso de que únicamente aparezcan rellenos del espacio con cubos o prismas rectos, recomendamos presentar otros poliedros que rellenan el espacio, como el sólido de Kelvin, y discutir si proceden de los anteriores a partir de truncamientos u otras transformaciones que mantienen la cualidad de rellenar el espacio.

[Respuesta a 1.4] Ejemplos que rellenan son el cubo, el prisma hexagonal, el prisma triangular, ortoedro…

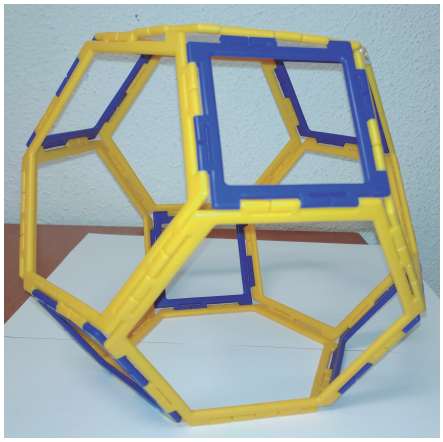


Figura 2. Sólido de Kelvin

Para relacionar los poliedros que rellenan el espacio y los polígonos que rellenan el plano (actividad 1.5), se puede comenzar analizando los polígonos regulares que teselan el plano para que identifiquen propiedades de sus ángulos interiores (divisores de 360º). Posteriormente se puede sugerir obtener pirámides y prismas con base estos polígonos y discutir si esos poliedros rellenan el espacio.



[Respuesta a 1.5] El cubo rellena el espacio porque los ángulos forman 90° y al poner 4 forman 360° y no dejan puntos del plano entre ellos.

El apartado 1.6 es el que presenta una mayor dificultad, pues hay una idea muy extendida de que el tetraedro mantiene propiedades del triángulo. Para profundizar se pueden utilizar materiales manipulativos (puzles de pirámides, cuerpos geométricos, polydron, troquelados, geomag…) así como Geogebra u otras aplicaciones informáticas (Flores, 2007).

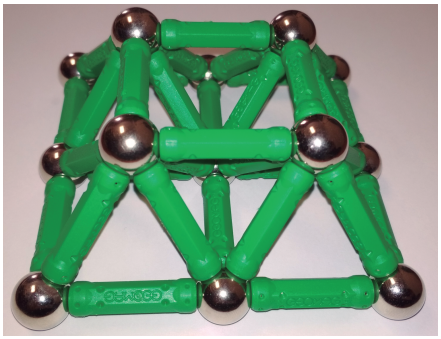


Figura 3. Estructura con pirámides

[Respuesta a 1.6] El tetraedro no rellena el espacio porque al juntar tetraedros se quedan huecos irremediablemente.

El relleno del espacio por tetraedros podría aparecer intuitivamente al establecer una analogía incorrecta con la teselación del plano por triángulos equiláteros. Si algún alumno hiciera depender la teselación del tetraedro de la medida del rectilíneo del ángulo diedro de las caras del tetraedro, se suministrará información sobre los rectilíneos de diversos poliedros regulares.

[Respuesta a 1.6] No, porque su ángulo mide aproximadamente 70° que no es divisible entre 360°.

| Rectilíneo del ángulo diedro | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *Tetraedro* | *Cubo* | *Octaedro* | *Dodecaedro* | *Icosaedro* |
| 70° 31′ 44″ | 90° | 109° 28′16″ | 116° 33′ 54″ | 138° 11′ 23″ |



*Tarea 2. Condiciones de los poliedros que rellenan el espacio*

Justificar la veracidad de las siguientes afirmaciones:

2.1 *Si* un polígono rellena el plano, *entonces* el prisma recto que se forma a partir de él, rellena el espacio.
2.2 Un poliedro rellena el espacio *si y solamente si* es un prisma recto de base un polígono que rellena el plano.
2.3 Un poliedro rellena el espacio *si y solamente si* rellena un cubo.
2.4 *Si* un poliedro A rellena el espacio y se descompone en otros poliedros B iguales, *entonces* el poliedro B rellena el espacio.
2.5 *Si* un poliedro rellena el espacio, *entonces* cualquier sección (corte del poliedro con un plano) suya rellena el plano.
2.6 Un poliedro rellena el espacio *si y solamente si* se rellena a sí mismo.
2.7 *Si* un poliedro rellena el espacio, *entonces* podemos deformarlo «de manera conveniente» para obtener otros poliedros que rellenan el espacio.

En estas actividades se pretende que los estudiantes diferencien entre expresiones que emplean «si […] entonces» y «si y solamente si». Para ello se presentarán varios ejemplos que utilicen estos conectivos y los relacionen con expresiones que emplean el conectivo lógico *implicación* (⇒) y *doble implicación* (⇔), hasta llegar a establecer la diferencia entre relacionar dos afirmaciones con una simple o doble implicación. Para favorecer el desarrollo de la argumentación visual, es recomendable usar contraejemplos concretos que demuestran que la implicación no es cierta en uno de los sentidos. Demostrar la veracidad de una implicación requiere una justificación razonada de modo general.

En las respuestas donde manifiesten ideas intuitivas, se les pide que *argumenten* precisando los términos utilizados y validando la generalidad de las afirmaciones que hagan a partir de casos concretos:

[Respuesta a 2.1] Sí, porque es igual pero con volumen.

[Respuesta a 2.4] Verdadero, porque esas partes se pueden juntar de forma que formen una figura igual al poliedro inicial que rellena el espacio.

En las preguntas de doble implicación, se distinguen por separado las dos afirmaciones (la necesaria y la suficiente). Por ejemplo, en 2.2, una implicación hace referencia a la actividad 2.1 (verdadera), pero se puede probar con un contraejemplo, como empleando el sólido de Kelvin, que un poliedro que rellena el espacio no debe ser *necesariamente* un prisma de esas características.

[Respuesta a 2.2] Falso, porque hay prismas que no son rectos que rellenan el espacio.

En la actividad 2.3, nuevamente se muestra la diferencia entre mostrar que una condición es cierta, necesitando argumentarla, mientras que basta un contraejemplo para ver que la otra implicación no es correcta.

[Respuesta a 2.3] Si un poliedro rellena un cubo, podemos estar seguros de que rellena el espacio, porque el cubo rellena el espacio.

[Respuesta a 2.3] Un prisma recto de base hexágonos regulares es un poliedro que rellena el espacio, pero un cubo no puede rellenarse con ellos porque sus ángulos son distintos.

Es interesante contrastar respuestas diferentes a las actividades, especialmente cuando algún estudiante haya argumentado que es cierta y otro muestre un contraejemplo que la rebate.

[Respuesta a 2.6] Falso, el prisma hexagonal no se rellena a sí mismo con prismas hexagonales más pequeños.

[Respuesta a 2.5] Se puede obtener una sección pentagonal (no regular) de un cubo, y ese polígono no rellena el plano. Además, el plano puede ir cortando a los cubos en figuras diferentes…

En la actividad 2.7 conviene que identifiquen qué transformaciones se pueden hacer en un cuerpo que rellena el espacio para que el objeto resultante también lo rellene. Además de las isometrías, existen otras transformaciones que transforman una figura que rellena el espacio, en otra que también lo rellena. En la búsqueda de distintos cuerpos para rellenar el espacio, se estimulará a relacionar las figuras que se obtienen a partir de transformaciones de otras. El trabajo en grupo, tanto previo como durante la puesta en común, obligará a verbalizar las situaciones visuales y les exigirá mayor precisión en el lenguaje.

> [Respuesta actividad 2.7] Dividirlo en partes iguales, isometrías, formar un prisma oblicuo a partir de uno recto (solo si se desplaza su cara superior en una sola dirección sin rotar).

> [Respuesta actividad 2.7] Aumentar proporcionalmente las longitudes de los lados. En un cuerpo que tenga caras opuestas, quitarle un trozo a una cara y pegárselo en la opuesta.

Tras la puesta en común, se puede relacionar esta actividad de deformación para buscar nuevas piezas que rellenan el espacio, con la construcción de mosaicos en el plano, como los polígonos nazaríes de la Alhambra o *tipo Escher,* en los que se modifica el relleno del plano con cuadrados, triángulos o hexágonos.

Como conclusión de la sesión, es interesante pedir que los participantes identifiquen una afirmación correcta relativa a figuras que rellenan el espacio y justifique suficientemente la validez de esta afirmación, convirtiéndola en «su teorema», y empleando en su formulación los términos empleados en la clase: implicación, doble implicación, si […] entonces, si y solo si.

## Referencias bibliográficas

Flores, P. (2007), «Pirámides rellenas de … pirámides. Puzzles espaciales que favorecen la visualización», en P. Flores, F. Ruiz y M. de la Fuente (coord.), *Geometría para el siglo XXI,* Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) y SAEM THALES, Badajoz, 223-247.

Ramírez, R., y P. Flores (2006), «Planificar el enriquecimiento para alumnos de alta capacidad matemática: reposo curricular», *Suma,* n.º 83, 33-41.

Rafael Ramírez Uclés
*Universidad de Granada*
<rramirez@ugr.es>

Pablo Flores Martínez
*Universidad de Granada*
<pflores@ugr.es>

# Servicio de Publicaciones de la FESPM



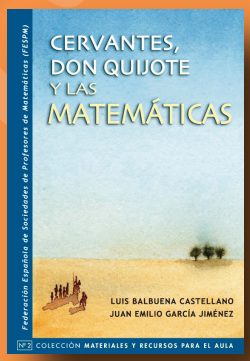













<www.fespm.es/-Servicio-de-publicaciones->

<publicaciones@fespm.es>

suma+ 88
Secciones
Julio 2018
pp. 109-120

# Actividades con calculadora en el aula de secundaria

M.ª Teresa Navarro Moncho



## Sí a las calculadoras

El objetivo de este artículo es dar a conocer una propuesta didáctica realizada por el grupo de calculadoras de la FESPM con la colaboración de la División Educativa de Casio. Las actividades que se presentan han sido diseñadas e implementadas por los profesores y las profesoras del grupo. Estas actividades pretenden, en la medida de lo posible, aligerar la carga que supone al profesorado la incorporación de un recurso en el aula proporcionando una serie de propuestas, con actividades contextualizadas en un entorno de resolución de problemas, preparadas para ser llevadas directamente al aula.

Con este artículo se inaugura la sección «Sí a las calculadoras» que contará en las sucesivas entregas con la colaboración de los diferentes miembros del grupo de calculadoras de la FESPM.

Desde hace mucho tiempo las investigaciones en didáctica de las matemáticas están a favor de la introducción a edades tempranas del uso de las calculadoras y no apoyan la teoría de que su uso oxida el cerebro (International Congress on Mathematical Education, 1986).

El informe Cockroft (1982) dedicó parte de su análisis al estudio de las posibilidades de las calculadoras en el proceso de aprendizaje de las matemáticas e indica que las conclusiones de la

Artículo solicitado por *Suma* en abril de 2018 y aceptado en mayo de 2018

mayoría de las investigaciones reflejan una mejora en la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas, en las destrezas personales de cálculo, en la comprensión de los procesos y en la resolución de problemas. De otras investigaciones no se desprende una mejora significativa pero nunca un empeoramiento.

En la misma línea el National Council of Teachers of Mathematics (1980, 1989) recomienda que todos los estudiantes utilicen la calculadora para concentrarse en el proceso de resolución de problemas en lugar de hacerlo en los cálculos que llevan asociados; para tener oportunidad de acceder a matemáticas que estén más allá del nivel de destrezas de cálculo de los estudiantes; para explorar, desarrollar y consolidar conceptos, incluyendo estimación, conjetura, aproximación y propiedades; para experimentar con ideas matemáticas y descubrir regularidades; y, para realizar tediosos cálculos que surgen del trabajo con datos reales en la resolución de problemas. Recomienda también a editores y autores de libros de texto que integren el uso de la calculadora en los materiales de cada curso.



Desafortunadamente estas recomendaciones no se ven reflejadas ni en los libros de texto ni en las aulas de nuestro país. Es más, las posiciones más frecuentes del profesorado frente al uso de las calculadoras en el aula se pueden resumir en tres tipologías. Se permite su uso para la realización de cálculos, sin dar una guía clara de los procedimientos para obtener un mayor rendimiento matemático; se dejan utilizar para comprobar operaciones que previamente se han realizado con lápiz y papel o mentalmente y por último, se prohíbe totalmente su uso.

## Breve historia de un largo camino

La FESPM consciente de la escasa utilización de las calculadoras en el aula creó, a raíz de un seminario federal en el 2008, el grupo de trabajo de calculadoras en el curso 2008-2009. Desde entonces, el grupo formado por profesores y profesoras de todo el territorio nacional ha realizado diversos tipos de actividades: manifiestos



Figura 1. Grupo de calculadoras

a favor de la incorporación de las calculadoras como recurso didáctico en todos los niveles educativos, a favor de su uso en todas sus versiones (elemental, científica, gráfica, con cálculo simbólico) en las pruebas externas; participando activamente en la formación del profesorado a través de cursos presenciales y a distancia, impartiendo talleres, mini cursos y charlas en jornadas y congresos; y, diseñando y experimentando en el aula actividades con calculadora.

Tras años de experiencia diseñando actividades, experimentándolas en el aula y compartiéndolas con el profesorado, decidimos, con la colaboración de la División Educativa de Casio, dar un paso más y cristalizar este trabajo en un libro de actividades preparadas para ser llevadas directamente al aula de manera que los estudiantes exploren de forma práctica y autónoma múltiples conceptos matemáticos, o simplemente para compartir algunas ideas de cómo utilizar la calculadora como recurso didáctico.

En el VIII CIBEM, celebrado en Madrid en el mes de julio de 2017, presentamos nuestro primer trabajo *Actividades para el aula con calculadora científica*. Este libro, que está disponible en las páginas web de la FESPM[1] y de la División Educativa de Casio[2], contiene actividades para secundaria de tres grandes bloques de contenidos: Aritmética, Álgebra y Estadística.




Figura 2. Actividades para el aula con calculadora científica

## Así es este libro

Este libro pretende, en la medida de lo posible, aligerar la carga que supone al profesorado la incorporación de un recurso, como es la calculadora, en el aula. Por ello, contiene una serie de actividades para ser llevadas directamente al aula y que se desarrollan a partir de situaciones o problemas contextualizados basados en supuestos reales que han sido probadas en el aula.

Cada actividad consta de una página que va dirigida al alumnado y las siguientes, al profesorado. En la página dirigida al alumnado se contextualiza en supuestos cotidianos el problema y se plantean una serie de cuestiones. En las páginas dirigidas al profesorado se especifican los materiales que son necesarios para realizar la actividad en los términos en los que está propuesta, se refleja en qué nivel se ha experimentado la actividad, ahora bien, es el profesorado quien debe elegir el nivel educativo en función de las características de su alumnado. Estas páginas incluyen también algunas orientaciones didácticas y técnicas que se han estimado convenientes para el desarrollo de la actividad. Finalmente, se incluye una posible respuesta que pueda ofrecer el alumnado del nivel educativo al que se dirige. Aunque existen diferentes métodos de resolución, en este libro se ha optado por escoger las soluciones que se han considerado más didácticas, mostrando el máximo número de funcionalidades de la calculadora.



## Algunas actividades

### *Expresión decimal de fracciones. Midiendo la longitud del meridiano terrestre*

El 25 de junio de 1792, Pierre Méchain y Jean-Baptiste Delambre iniciaron los trabajos para la determinación de la longitud del meridiano que pasa por París.

El encargo provenía de la Academia de Ciencias de París, que propuso la adopción de un pa-

trón de longitud procedente de la naturaleza: el metro, definido como la diezmillonésima parte del cuadrante de un meridiano terrestre.

Ante la imposibilidad de medir todo un cuarto de meridiano desde el polo Norte al Ecuador, la solución adoptada fue medir un trozo y calcular matemáticamente el valor del total. El arco de meridiano escogido en la propuesta de la academia fue el comprendido entre Dunkerque (latitud N 51° 2' 9,20") y Barcelona (latitud N 41° 21' 44,95").



ARITMÉTICA

22 | Expresión decimal de fracciones
Midiendo la longitud del meridiano terrestre

El 25 de junio de 1792, Pierre Méchain y Jean-Baptiste Delambre iniciaron los trabajos para la determinación de la longitud del meridiano que pasa por París.

El encargo provenía de la Academia de Ciencias de París, que propuso la adopción de un patrón de longitud procedente de la naturaleza: el metro, definido como la diezmillonésima parte del cuadrante de un meridiano terrestre.

Ante la imposibilidad de medir todo un cuarto de meridiano desde el polo Norte al Ecuador, la solución adoptada fue medir una parte y calcular matemáticamente el valor del total.

El arco de meridiano escogido en la propuesta de la academia fue el comprendido entre Dunkerque (latitud N 51° 2' 9,20") y Barcelona (latitud N 41° 21' 44,95").

Los astrónomos y geodestas franceses pretendían determinar, mediante técnicas de triangulación, la longitud del arco comprendido entre estas dos ciudades, situadas sobre dicho meridiano.

Dunkerque
Barcelona

1 ¿Qué resultado crees que deberían haber obtenido, aproximadamente?

Nota: Considera que la Tierra es un planeta esférico de radio $R = 6\,370$ km y que la longitud de arco de una circunferencia es $L = 2\pi R\frac{\alpha}{360}$, donde $R$ es el radio de la circunferencia y $\alpha$ el arco expresado en grados sexagesimales.

2 Compara el resultado que has obtenido con el que se obtiene de Google Maps.

86 CASIO División Educativa

Figura 3. Midiendo la longitud del meridiano terrestre

Esta actividad se realizó con un grupo de 3.º de ESO del IES Abastos de Valencia. Se utilizaron dos sesiones de clase. En la primera se dieron las instrucciones de la investigación y en la segunda se realizaron los cálculos.

La actividad consistía en calcular la distancia entre las ciudades francesas de Limoges y Toulouse a partir de sus coordenadas y posteriormente comparar dicho cálculo con el valor que ofrece GoogleMaps, tanto entre la distancia entre las dos ciudades en línea recta como por carretera.

Los alumnos para empezar tuvieron que buscar cuáles eran las coordenadas de Limoges y Toulouse, 45º 51'N 1º 15'E y 43º 36'N 1º 26'E, respectivamente.

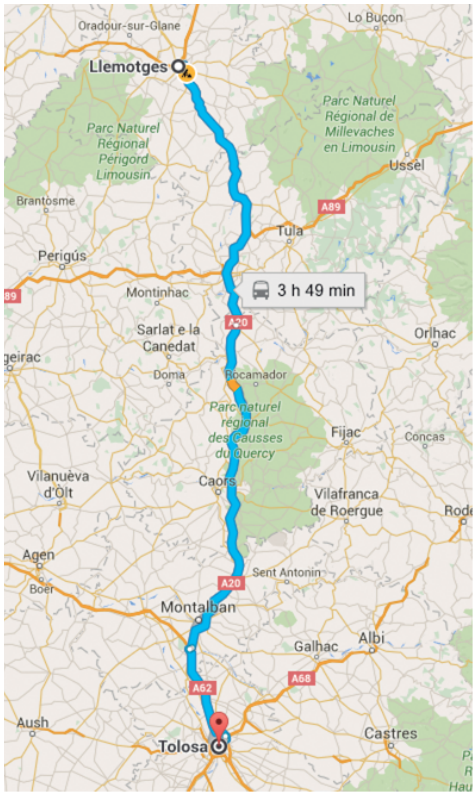



Figura 4. Limoges-Toulouse

Las dos ciudades pertenecen al mismo hemisferio y se puede suponer, como una buena aproximación, que tienen la misma longitud, por tanto pertenecen al mismo meridiano. Para calcular la distancia entre las dos ciudades era necesario suponer que la Tierra es esférica y tomar como radio 6 370 Km.

Con estas aproximaciones se obtuvieron qué operaciones se tenían que realizar para calcular la distancia.

$$L = 2\pi \cdot 6370 \frac{45°51' - 43°36'}{360°}$$

Dichos cálculos se realizaron después con la ayuda de la calculadora.

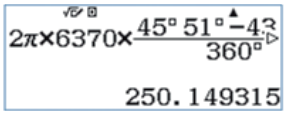



Figura 5. Los cálculos con la calculadora

Ahora bien, ¿250 km entre Limoges y Toulouse era una buena aproximación?

GoogleMaps permite obtener la distancia entre dos puntos por carretera. Utilizando la autopista A20 de Francia, la distancia entre ambas ciudades es de 291 km, pero si se utiliza la opción de obtener la distancia en línea recta, GoogleMaps nos indica que la distancia entre Limoges y Toulouse es aproximadamente 253 km.




Figura 6. Limoges-Toulouse

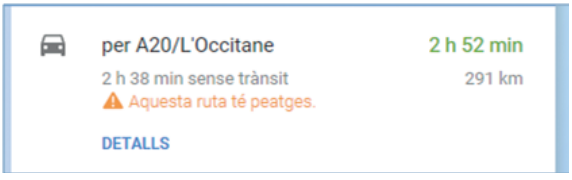



Figura 7. Distancia Limoges-Toulouse. A20

## *Fractales: el conjunto de Cantor. ¿Sabes qué son los fractales?*

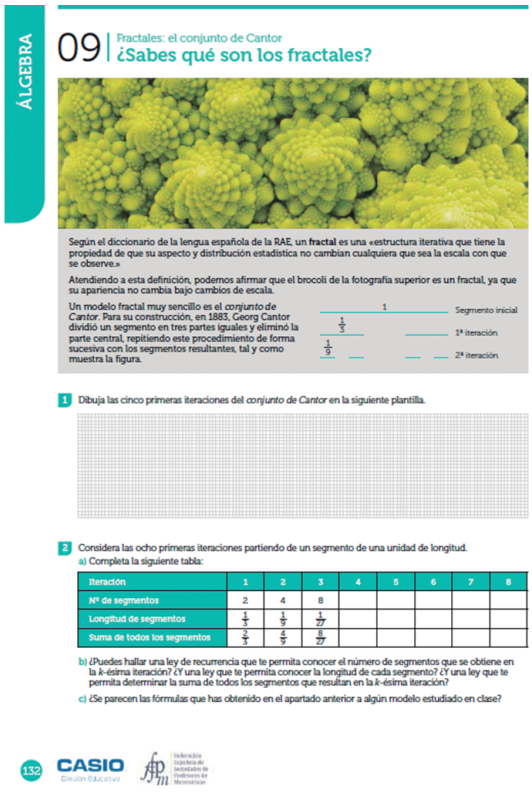
Según el *Diccionario de la lengua española* de la RAE, un fractal es una «estructura iterativa que tiene la propiedad de que su aspecto y distribución estadística no cambian cualquiera que sea la escala con que se observe».

Atendiendo a esta definición, podemos afirmar que el brócoli es un fractal, ya que su apariencia no cambia bajo cambios de escala.

Un modelo fractal muy sencillo es el conjunto de Cantor. Para su construcción, en 1883, Georg Cantor dividió un segmento en tres partes iguales y eliminó la parte central, repitiendo este procedimiento de forma sucesiva con los segmentos resultantes.

Esta actividad se implementó en un grupo de 3.º de ESO (opción académicas) en el IES El Almijar de Cómpeta (Málaga) durante el curso 2016-2017. El grupo estaba compuesto por veintinueve alumnos y alumnas. Se utilizó una sesión de clase para la realización de esta actividad.




ÁLGEBRA

09 Fractales: el conjunto de Cantor
¿Sabes qué son los fractales?

Según el diccionario de la lengua española de la RAE, un **fractal** es una «estructura iterativa que tiene la propiedad de que su aspecto y distribución estadística no cambian cualquiera que sea la escala con que se observe.»

Atendiendo a esta definición, podemos afirmar que el brocoli de la fotografía superior es un fractal, ya que su apariencia no cambia bajo cambios de escala.

Un modelo fractal muy sencillo es el *conjunto de Cantor*. Para su construcción, en 1883, Georg Cantor dividió un segmento en tres partes iguales y eliminó la parte central, repitiendo este procedimiento de forma sucesiva con los segmentos resultantes, tal y como muestra la figura.

1 — Segmento inicial
1/3 — 1ª iteración
1/9 — 2ª iteración

1 Dibuja las cinco primeras iteraciones del *conjunto de Cantor* en la siguiente plantilla.

2 Considera las ocho primeras iteraciones partiendo de un segmento de una unidad de longitud.
a) Completa la siguiente tabla:

| Iteración | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nº de segmentos | 2 | 4 | 8 | | | | | |
| Longitud de segmentos | 1/3 | 1/9 | 1/27 | | | | | |
| Suma de todos los segmentos | 2/3 | 4/9 | 8/27 | | | | | |

b) ¿Puedes hallar una ley de recurrencia que te permita conocer el número de segmentos que se obtiene en la *k*-ésima iteración? ¿Y una ley que te permita conocer la longitud de cada segmento? ¿Y una ley que te permita determinar la suma de todos los segmentos que resultan en la *k*-ésima iteración?

c) ¿Se parecen las fórmulas que has obtenido en el apartado anterior a algún modelo estudiado en clase?

132 CASIO

Figura 8. ¿Sabes qué son los fractales?

La metodología que se utilizó fue el trabajo cooperativo, se formaron grupos heterogéneos, de forma que la composición de cada grupo fuera una representación lo más fiel posible de la composición de la clase. No era la primera vez que el alumnado trabajaba de esta forma ya que al finalizar cada unidad se suele hacer una sesión de repaso/refuerzo de los contenidos de la misma. De igual forma el alumnado está acostumbrado al uso de la calculadora y no es necesario dar instrucciones para su uso durante el desarrollo de la actividad.

El papel del docente fue doble, por un lado supervisó el buen funcionamiento de los distintos grupos y por otro, resolvió las dudas que fueron surgiendo en los distintos grupos, siempre con la premisa de ser cuestiones que no se hubiesen podido resolver entre los miembros del grupo.

Esta actividad tiene dos partes, una manipulativa, en la que tuvieron que dibujar las cinco primeras iteraciones del conjunto de Cantor y la otra en la que trabajaron diversas regularidades numéricas presentes en la obtención del mismo. La primera dificultad a la que se enfrentaron fue la de elegir el tamaño del segmento inicial de forma que las iteraciones que se piden queden dibujadas de forma clara; se produjo una conexión entre un problema geométrico y otro numérico.

Una vez que los grupos terminaron la fase manipulativa, se encontraron con una fase numérica en la que tuvieron que completar una tabla sin saber a priori la ley de formación de esta.

A partir de este hecho se les pidió que obtuvieran el término general con la que se forman las distintas filas de la tabla y que las identificaran dentro de los tipos estudiados en la unidad.



| Iteración | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | ... | k |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N.º de segmentos | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | ... | $2^k$ |
| Longitud de cada segmento | 1/3 | 1/9 | 1/27 | 1/81 | 1/243 | 1/729 | 1/2187 | 1/6561 | ... | $(1/3)^k$ |
| Suma de todos los segmentos | 2/3 | 4/9 | 8/27 | 16/81 | 32/243 | 64/729 | 128/2187 | 256/6561 | ... | $(2/3)^k$ |

Tabla 1. ¿Sabes qué son los fractales?

Esta forma de trabajar mejora sustancialmente la atención a la diversidad en el aula, ya que se emplea la tutoría entre iguales como herramienta de apoyo a la labor del docente.

Con esta actividad se pretende utilizar los contenidos de la unidad de sucesiones y progresiones para dar a conocer al alumnado el concepto de fractal. También se pretende que se refuerce el trabajo con regularidades numéricas hecho en la unidad, centrándonos en la búsqueda de las mismas, eliminando para ello la carga de cálculo aritmético que tiene la actividad a través del uso de la calculadora. De esta forma se busca el doble objetivo de establecer conexiones entre las matemáticas y la realidad y de que, manipulando el comportamiento de regularidades sencillas, sea capaz de simbolizarlo de forma algebraica.

Mientras el alumnado se dispuso en grupo se les repartió la ficha con la que iban a trabajar. Tras introducir brevemente (con ayuda de algunas imágenes) el concepto de autosimilitud y el concepto de fractal, el alumnado comenzó a trabajar.

Con esta actividad el alumnado manipuló, investigó y dedujo los términos generales asociados al número de segmentos, a la longitud de cada segmento y a la suma de todos los segmentos presentes en cada iteración encaminada a la obtención del conjunto de Cantor.

## *Regularidades numéricas. Pirámides de cubos*

Las figuras geométricas en el espacio pueden seguir unos patrones aritméticos interesantes.

La pirámide de la actividad se construye mediante cubos iguales siguiendo el siguiente patrón:

— La primera capa está formada por cuatro cubos y tiene dos cubos de altura.
— Cada una de las capas posteriores está formada por cubos de manera que su altura es dos cubos más que la pirámide previa.

ÁLGEBRA

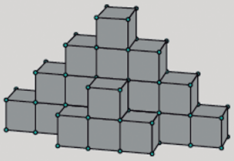
07 | Regularidades numéricas
## Pirámides de cubos

Las figuras geométricas en el espacio pueden seguir interesantes patrones numéricos. Trata de encontrar dichos patrones en la siguiente figura:

Se observan dos especies de pirámides formadas por cubos. La primera de ellas, la más pequeña, está formada por 4 cubos y tiene 2 cubos de altura.

La segunda pirámide, situada tras la primera, tiene una altura dos cubos superior a la pirámide que le precede.

Cada capa tiene una altura dos cubos superior a la capa anterior, hasta alcanzar los 10 cubos de altura. A partir de esa capa, las siguientes tienen, sucesivamente, alturas inferiores en dos cubos a las capas anteriores.



1 ¿Cuántos cubos hay que utilizar para completar la figura que se ha descrito?

2 ¿Cuántos cubos habría que usar en total para construir una figura como la descrita pero de 50 cubos de altura?

126 CASIO

Figura 9. Pirámides de cubos

Siguiendo este patrón se planteó al alumnado que resolvieran las dos situaciones siguientes:

— Cuando llegamos a la altura de 10 cubos se vuelve a descender con dos cubos de la misma manera. ¿Cuántos cubos utilizamos en total?
— Cuando llegamos a la altura de 50 cubos se vuelve a descender con dos cubos de la misma manera. ¿Cuántos cubos utilizamos en total?

Esta actividad se llevó al aula en un grupo de 3.º de ESO del IES Abastos de Valencia. Se distribuyó el alumnado en grupos de cuatro miembros, se les repartió la actividad y se les entregaron policubos para que construyeran la torre y obtuvieran las primeras conclusiones de la actividad.

Con el material manipulativo construyeron las pirámides y se dieron cuenta que en cada capa se puede formar un cuadrado con los cubos.

Mientras construían se les invitó a que buscasen patrones y regularidades numéricas.



Figura 10. Vista frontal policubos



Figura 11. Vista lateral policubos



Así, en la primera capa observaron que está formada por $4 = 2^2$ cubos.

La segunda capa, por $16 = 4^2$ cubos.

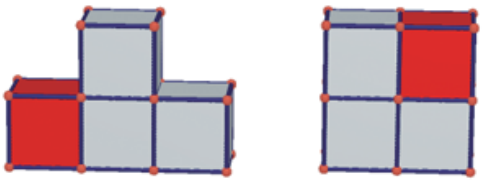


Figura 12. Primera capa

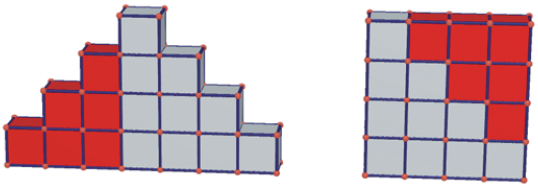
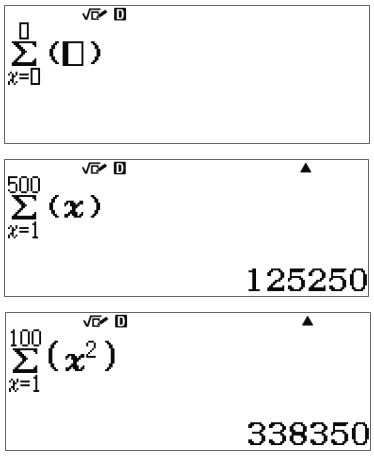


Figura 13. Segunda capa

Comprobaron la tercera capa ($36 = 6^2$) para darse cuenta de que cada capa está formada por el cuadrado de un número par.

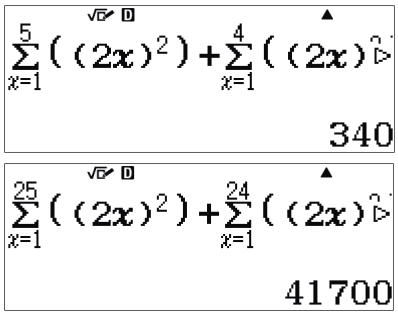
Se utilizó esta actividad para introducir la función sumas finitas de la calculadora Casio Classwiz fx-991 SP. En primer lugar se les pidió que calculasen la suma de los 500 primeros números naturales y la suma de los primeros 100 cuadrados perfectos.




Figuras 14, 15, 16

Una vez instruidos en la función sumas finitas, utilizaron la calculadora para obtener el número de cubos que se necesitan en cada una de las situaciones que se les planteó.

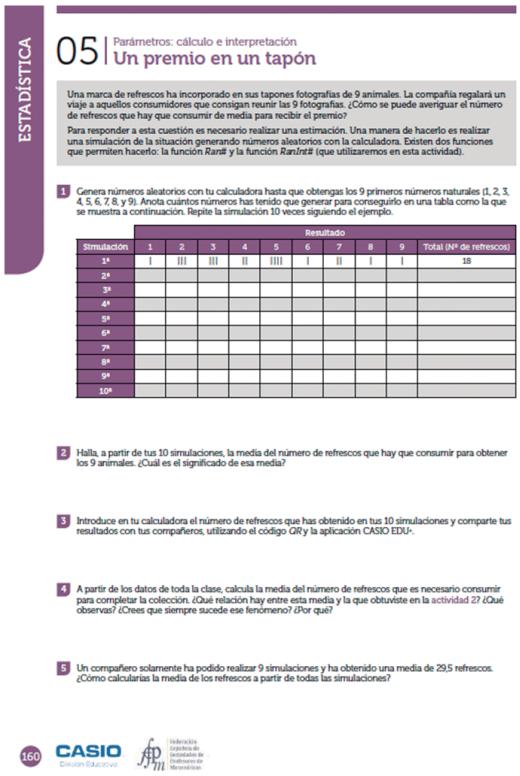
Si la altura es de 10 cubos el total de cubos utilizado es la suma de los cuadrados de los cinco primeros pares consecutivos más la suma de los cuatro primeros pares consecutivos. El número de cubos necesarios es 340. Análogamente, si la altura es de 50 cubos, el total de cubos es 41 700.




Figuras 17, 18

## *Parámetros: cálculo e interpretación. Un premio en un tapón*

Una marca de refrescos ha incorporado en sus tapones fotografías de 9 animales. La compañía regalará un viaje a aquellos consumidores que consigan reunir las 9 fotografías. ¿Cómo se puede averiguar el número de refrescos que hay que consumir de media para recibir el premio?


ESTADÍSTICA

05 | Parámetros: cálculo e interpretación
Un premio en un tapón

Una marca de refrescos ha incorporado en sus tapones fotografías de 9 animales. La compañía regalará un viaje a aquellos consumidores que consigan reunir las 9 fotografías. ¿Cómo se puede averiguar el número de refrescos que hay que consumir de media para recibir el premio?

Para responder a esta cuestión es necesario realizar una estimación. Una manera de hacerlo es realizar una simulación de la situación generando números aleatorios con la calculadora. Existen dos funciones que permiten hacerlo: la función *Ran#* y la función *RanInt#* (que utilizaremos en esta actividad).

1 Genera números aleatorios con tu calculadora hasta que obtengas los 9 primeros números naturales (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, y 9). Anota cuántos números has tenido que generar para conseguirlo en una tabla como la que se muestra a continuación. Repite la simulación 10 veces siguiendo el ejemplo.

| | Resultado | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Simulación | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Total (Nº de refrescos) |
| 1ª | I | III | III | II | IIII | I | II | I | I | 18 |
| 2ª | | | | | | | | | | |
| 3ª | | | | | | | | | | |
| 4ª | | | | | | | | | | |
| 5ª | | | | | | | | | | |
| 6ª | | | | | | | | | | |
| 7ª | | | | | | | | | | |
| 8ª | | | | | | | | | | |
| 9ª | | | | | | | | | | |
| 10ª | | | | | | | | | | |

2 Halla, a partir de tus 10 simulaciones, la media del número de refrescos que hay que consumir para obtener los 9 animales. ¿Cuál es el significado de esa media?

3 Introduce en tu calculadora el número de refrescos que has obtenido en tus 10 simulaciones y comparte tus resultados con tus compañeros, utilizando el código *QR* y la aplicación CASIO EDU+.

4 A partir de los datos de toda la clase, calcula la media del número de refrescos que es necesario consumir para completar la colección. ¿Qué relación hay entre esta media y la que obtuviste en la actividad 2? ¿Qué observas? ¿Crees que siempre sucede ese fenómeno? ¿Por qué?

5 Un compañero solamente ha podido realizar 9 simulaciones y ha obtenido una media de 29,5 refrescos. ¿Cómo calcularías la media de los refrescos a partir de todas las simulaciones?

160 CASIO

Figura 19

Esta actividad fue llevada al aula en un grupo de 2.º de ESO del IES Veles e Vents de Torrent (Valencia) formado por veinticuatro alumnos y alumnas. Dicho grupo estaba familiarizado con el uso de la calculadora, pues era un recurso que se utilizaba de manara habitual en el aula, tanto de manera libre como guiada.

Se utilizaron dos sesiones de clase para la realización de la misma.

En la primera sesión se planteó el problema al alumnado y se generó un primer debate intenso sobre si la compañía cumpliría su promesa y si todos los animales tendrían o no la misma pro-

babilidad de salir. Tras consensuar que todos los animales tenían la misma probabilidad de salir se debatió cómo simular el problema, cuántas simulaciones como mínimo era necesario realizar y cómo distribuir el trabajo.

Tras hacer varias pruebas con las funciones Ran# y RanInt# de la calculadora Casio Classwiz fx-991 SP, llegaron al acuerdo de simular la situación generando un número aleatorio entre 1 y 9 con la función RanInt#, que cada uno haría diez simulaciones y las compartiría con el grupo mediante la aplicación CASIO EDU+, aplicación que ya conocían.

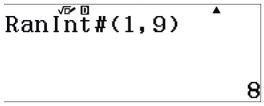



Figura 20

Para recoger el resultado de las simulaciones utilizaron una tabla como la que se muestra en la tabla 2.

En la segunda sesión se puso en común el trabajo individual recogido en la aplicación anteriormente citada. En primer lugar se compararon las medias aritméticas de cada estudiante y obtuvieron la media de las medias aritméticas (27,5). Después, a partir de las frecuencias de todas las simulaciones, se obtuvo de nuevo la media aritmética de refrescos para conseguir el premio (27,5) y se comparó con el valor anterior.

Llegados a este punto surgió en el grupo la necesidad de saber si el resultado que habían obtenido era mayor o menor del esperado teóricamente. Así que, guiados por la profesora, calcularon el valor esperado.

Al comprar el primer refresco, dado que aún no disponemos de ningún animal, tenemos una probabilidad de éxito de $9/9 = 1$. Al comprar el segundo refresco, como ya disponemos de un animal, la probabilidad de obtener un animal distinto es de 8/9. Una vez disponemos de 2 animales distintos, la probabilidad de que el tercer refresco contenga otro animal diferente a los dos primeros es de 7/9. Razonando de forma semejante para los otros casos se tiene que el número de refrescos que hay que comprar es, teóricamente 25,46:

$$\frac{9}{9}+\frac{9}{8}+\frac{9}{7}+\frac{9}{6}+\frac{9}{5}+\frac{9}{4}+\frac{9}{3}+\frac{9}{2}+\frac{9}{1}\cong 25,46$$

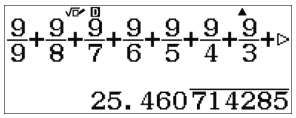



Figura 21

Para terminar la actividad se les planteó una colección de actividades de ampliación cuyo objetivo es propiciar la reflexión sobre las propiedades de la media aritmética.

| | Resultado | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Simulación | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Total (N.º de refrescos) |
| 1.ª | I | III | III | II | IIII | I | II | I | I | 18 |
| 2.ª | | | | | | | | | | |
| 3.ª | | | | | | | | | | |
| 4.ª | | | | | | | | | | |
| 5.ª | | | | | | | | | | |
| 6.ª | | | | | | | | | | |
| 7.ª | | | | | | | | | | |
| 8.ª | | | | | | | | | | |
| 9.ª | | | | | | | | | | |
| 10.ª | | | | | | | | | | |

Tabla 2. Simulación

## *Estadística descriptiva: Nos compramos un Crossover*

*Crossover* es un término de marketing que se utiliza en el ámbito automovilístico para definir la gama de automóviles todoterrenos compactos que incorporan las prestaciones y comodidades de los utilitarios.

Hemos decidido comprar un coche de estas características, no sin antes realizar un estudio del mercado.

Para ello, hemos comparado los precios de varios modelos con las mismas características, utilizando distintas vías: internet, llamadas telefónicas, visitas a concesionarios, etc.

Esta actividad de estadística se llevó al aula en el grupo digital 3.º de ESO V del IES Mare Nostrum de Alicante. Un grupo de veintiséis alumnos y alumnas familiarizados con el uso de las calculadoras y las TIC's.



Era la actividad planificada de final de unidad, donde por grupos, el alumnado debía recoger hasta diez precios de una de las marcas de este modelo de coche.

Previamente el profesor había establecido las seis marcas y los modelos básicos de gasolina, de manera que todos tuviesen características y prestaciones similares y tener de esta manera, unas directrices claras en la recogida de los datos y cumplir de este modo una de las máximas en la estadística, donde si la recogida de datos es buena, los resultados «podrán» ser buenos, pero si los datos no son buenos, tampoco lo serán los resultados.

El alumnado hizo el trabajo de campo en equipo, buscando diferentes precios vía internet, llamadas de teléfono a concesionarios de su marca y modelo e incluso con visitas a alguno de los concesionarios cercanos acompañados de alguno de sus familiares. Cada equipo consiguió los que pudo, desde cinco precios, el equipo que menos, hasta trece precios el equipo que más pudo recoger. En esta fase del trabajo hubo anécdotas como «profe, cuando le decimos que es para un trabajo que estamos haciendo de matemáticas, nos cuelgan el teléfono» cosa que les hizo aprender y modificar sus estrategias para conseguir los datos que necesitaban.

Cada grupo realizó su estudio, en el aula, calculando los parámetros estadísticos de centralización y de dispersión así como los diagramas de cajas y bigotes, haciendo uso de la calculadora Casio Classwiz fx-570 SP y la aplicación CASIO EDU+, con la que se creó una clase donde com-

| Coche 1<br>Riat Mont | Coche 2<br>Sia Sport | Coche 3<br>Monda Confo | Coche 4<br>Pisan Tecno | Coche 5<br>Benat Oleos | Coche 6<br>Bord Ghia |
|---|---|---|---|---|---|
| 23 462,00 € | 18 852,00 € | 21 450,00 € | 28 350,00 € | 23 350,00 € | 20 900,00€ |
| 24 841,00 € | 20 223,00 € | 23 000,00 € | 27 900,00 € | 31 750,00 € | 21 059,00 € |
| 25 847,00 € | 20 832,00 € | 23 829,00 € | 27 250,00 € | 30 100,00 € | 21 500,00 € |
| 29 325,00 € | 21 239,00 € | 24 400,00 € | 28 350,00 € | 23 850,00 € | 21 500,00 € |
| 26 400,00 € | 23 100,00 € | 26 100,00 € | 27 700,00 € | 27 750,00 € | 21 800,00 € |
| 26 400,00 € | 23 527,00 € | 26 600,00 € | 26 500,00 € | | 22 000,00 € |
| 25 900,00 € | 23 700,00 € | 26 900,00 € | 19 250,00 € | | 22 300,00 € |
| 26 500,00 € | 23 750,00 € | 27 500,00 € | 26 500,00 € | | 22 500,00 € |
| 28 530,00 € | 23 750,00 € | 27 600,00 € | 27 700,00 € | | 22 573,00 € |
| | 23 950,00 € | 27 900,00 € | 24 450,00 € | | 22 800,00 € |
| | | 27 900,00 € | | | 23 000,00 € |
| | | | | | 24 000,00 € |
| | | | | | 24 262,00 € |

Tabla 3. Precios *Crossover*

partir los datos y resultados de los seis grupos, visualizarlos y sacar unas primeras conclusiones.

Finalmente se agruparon los parámetros estadísticos y los gráficos en una sola tabla y en un único diagrama respectivamente, para de esta forma poderlos observar de manera conjunta y redactar las conclusiones finales.

| Modelo | Precio medio | Precio Mínimo | Precio Máximo | Rango | Desv. Típica |
|---|---|---|---|---|---|
| Riat Mont | 26 553,00 € | 23 462,00 € | 29 325,00 € | 5 863,00 € | 1 874,76€ |
| Sia Sport | 22 365,73 € | 18 852,00 € | 23 950,00 € | 5 098,00 € | 1 681,69 € |
| Monda Confo | 25 743,55 € | 21 450,00 € | 27 900,00 € | 6 450,00 € | 2 120,51 € |
| Pisan Tecno | 27 395,00 € | 24 450,00 € | 29 250,00 € | 4 800,00 € | 1 265,00 € |
| Benat Oleos | 27 360,00 € | 23 350,00 € | 31 750,00 € | 8 400,00 € | 3 326,62 € |
| Bord Ghia | 22 322,62 € | 20 900,00 € | 24 262,00 € | 3 362,00 € | 988,68 € |

Tabla 4. Precios medios *Crossover*

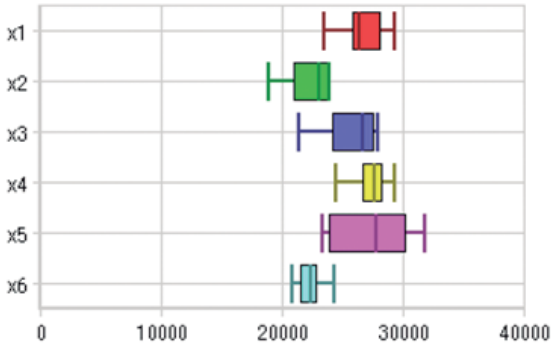



Figura 22. Comparación precios Crossover

El desarrollo de la actividad en el aula se llevó a término en una sesión de clase, ya que la calculadora facilita la introducción de los datos, los cálculos para la obtención de los parámetros estadísticos y los gráficos, y se pudo dedicar un tiempo mayor al análisis de los resultados obtenidos, a la ejecución de tablas comparativas para las observaciones y a la redacción de las conclusiones.

## El futuro del grupo

En el grupo de calculadoras seguiremos empeñados en que las calculadoras se conviertan en recursos habituales en el aula, de manera que de una vez por todas se supere el debate sobre su uso o su prohibición. Por ello, seguimos diseñando y experimentando en el aula nuevas actividades con la calculadora.

Esperamos poder presentar en breve un nuevo libro de actividades para el aula con calculadora científica.



En esta ocasión se plantearán actividades en las que se trabajan dos bloques curriculares: Funciones y Probabilidad.

Deseamos que encontréis en esta propuesta didáctica alguna actividad para llevar al aula y os animamos a descubrir la gran variedad de posibilidades que proporciona la calculadora como recurso didáctico.

## Para concluir

Las calculadoras hacen posible plantear problemas más reales, de la vida cotidiana, con datos más reales, eliminando los problemas «preparados» para que den resultados elegantes, breves, exactos y bonitos.

Es evidente que la calculadora no elimina las características y condiciones del auténtico proceso de la resolución de problemas: la necesidad de hacer planteamientos, buscar estrategias, buscar patrones y regularidades, generalizar, dividir el problema en subproblemas…, y por tanto, continúa vigente. Pero además, no podemos olvidar el potencial que tiene la calculadora de provocar y proponer nuevos problemas.

Podemos acabar diciendo que es sensato tener calculadoras disponibles para hacer cálculos siem-

pre que sea necesario. Con su uso, los problemas reales se hacen posible y se estimula la actividad matemática. Además, la calculadora proporciona métodos diversos para resolver problemas. En definitiva, la calculadora es un recurso muy importante para hacer matemáticas y pensar matemáticamente.

Y por ello, no entendemos cómo es posible que se siga prohibiendo o limitando su uso en muchas aulas de primaria y secundaria incumpliendo los decretos por los que se establecen sus currículos. Tampoco entendemos cómo es posible que se limiten y prohíban en algunas aulas universitarias, ni las limitaciones en las pruebas de evaluación externa. No logramos entender de qué tienen miedo aquellos que las limitan o prohíben, dado que las calculadoras sin conocimientos matemáticos no sirven de nada.



Figura 23. Grupo de calculadoras

## Referencias bibliográficas


Cockroft, informe (1985), *Las matemáticas sí cuentan*, M.E.C, Madrid.

ICMI (1986), *Las matemáticas en primaria y en secundaria en la década de los noventa. Simposio de Kuwait*, Mestral, Valencia.

Freudenthal, H. (1980), *Major Problems of Mathematics Education. Conferencia para la sesión del ICME-4 en Berkeley* (Traducido para la Antología de Educación Matemática), CINVESTAV-IPN, México.

National Council of Teachers of Mathematics (1980), *An agenda for action: Recommendations for school mathematics of the 1980s*, NCTM, Reston.

— (1989), *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, NCTM, Reston.


M.ª Teresa Navarro Moncho
*CEFIRE-Específic d'Àmbit Científic, Tecnològic i Matemàtic, València*
<Teresa.Navarro-Moncho@uv.es>

1 En el siguiente enlace se puede descargar gratuitamente el libro. <http://www.fespm.es/Libro-Actividades-para-el-aula-con>

2 En el siguiente enlace se puede descargar gratuitamente, <https://www.edu-casio.es/legal/aceptar-descarga-de-recursos?redirect=publicaciones/libro-actividades-para-el-aula-con-calculadora-cientifica>

suma+ 88
Secciones
Julio 2018
pp. 121-125

# Historia, juegos y elecciones

Joan Jareño Ruiz



## Los elementos de Euclides. Biblia de la geometría griega

Uno de los ejes de trabajo de Pedro Miguel González Urbaneja ha sido, desde hace muchos años, el de la introducción de la historia de las matemáticas en el aula. En su artículo publicado en el n.º 45 de *Suma* «La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza» (2004) <https://goo.gl/GX054I> apunta los ejes principales de las funciones y aplicaciones didácticas de la historia. Una de las ideas que subyace en su escrito es la de la importancia de la formación cultural del profesorado (en este caso sobre historia de las matemáticas) para que pueda redundar en la del alumnado. Es en este contexto que este libro cumple un objetivo principal: darnos a conocer la importancia de la obra de Euclides en la historia de las matemáticas, cuáles son sus contenidos principales y cómo se exponen, así como un recorrido por sus diferentes ediciones o su influencia en otros matemáticos y más allá del campo estricto de la matemática.

De hecho, la obra de Euclides marca el rumbo de la forma de proceder de las matemáticas posteriores a él: la necesidad de la demostración,

Reseñas

Artículo solicitado por *Suma* en marzo de 2018 y aceptado en abril de 2018

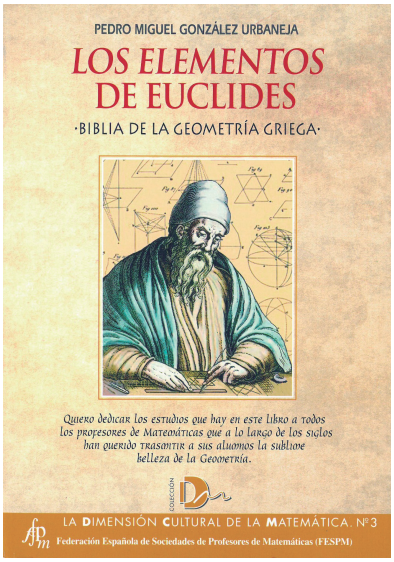
como argumentación inquebrantable, a partir de una colección mínima de definiciones y axiomas. Hasta la matemática griega esta tenía un carácter más bien utilitario. Sabemos que los conocimientos matemáticos mesopotámicos o egipcios (por citar los más accesibles a la cultura helénica) eran amplios, pero de un cierto sentido práctico. De ahí que, si los resultados que se obtenían eran suficientemente útiles, no tuvieran necesidad de justificación. Un ejemplo puede ser un método egipcio para calcular el área de los cuadriláteros multiplicando las medias de los lados opuestos. Es un método que a veces es exacto, a veces aproximado y muchas veces muy lejano al resultado real y que, en el aula, podemos estudiar, discutir y valorar. Es en la geometría griega donde, tras alejarse de este sentido meramente práctico, aparecen las primeras demostraciones, que una cierta tradición atribuye a Tales, la escuela pitagórica o a Hipócrates de Quíos. Demostraciones que irán creciendo en «cantidad y calidad» con las aportaciones de matemáticos posteriores. Pero hay que esperar a Euclides para encontrar un autor que recogerá todo ese saber, lo compilará y lo sistematizará.



Entre los aspectos propiamente históricos sobre el mismo libro de los Elementos (o mejor, «libro de libros» ya que está dividido en 13 partes), González Urbaneja nos explica cómo estos han sido reconstruidos, dado que no se ha encontrado nunca la obra original, a partir de fragmentos y versiones posteriores griegas, árabes, etc. También nos ilustra sobre las más importantes ediciones de la obra a lo largo de la historia. Utilizar el término «ilustrar» no es casual porque uno de los aspectos destacables de este libro es la abundantísima y bien seleccionada información gráfica. Entre estas ediciones es interesante destacar, por su carácter especial, la edición de O. Byrne de 1847 sobre los seis primeros libros y que se trata de una versión visual, hasta el punto que hace pocos años lo reeditó una editorial especializada en libros sobre arte: Taschen.

Pero el peso importante de la obra que comentamos es el análisis y comentario crítico de los 13 libros que forman los Elementos. En ellos vemos cómo González Urbaneja nos muestra los aciertos de Euclides en su modelo sistematizador. De qué forma intenta minimizar aquello que no es deducible, especialmente sus axiomas y postulados (sin olvidar la gran historia del 5.º del primer libro), y cómo gradúa sus deducciones para conseguir que unas se apoyen en las otras.

Quizás se pueda echar a faltar propuestas didácticas directas de trabajo, pero no parece ser este el objetivo del libro, sino proporcionar información suficiente para que sea el propio profesorado el que elabore las suyas, basándose en el análisis y documentación que se presenta. En esta línea es muy recomendable ver también los materiales que preparó hace unos años el propio González Urbaneja en una licencia retribuida del Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya, y en los que ya trató los Elementos además de otros temas de historia de las matemáticas. Son de acceso libre y los podemos encontrar en los siguientes enlaces: la memoria en <https://goo.gl/Zmh1mo> y los abundantes materiales complementarios en <https://goo.gl/28xWX9>.




Los Elementos de Euclides. Biblia de la geometría griega
Coordinación: Pedro Miguel González Urbaneja
Editorial: FESPM
Año de edición: 2017
ISBN: 978-84-945722-8-9
Páginas: 271

## Gardner para aficionados

En el año 2014, y con motivo de la conmemoración del centenario de Martin Gardner, se editó el libro *Gardner para principiantes*, como este también coordinado por Fernando Blasco. Fue reseñado en el número 79 de *Suma*. Ya entonces destacábamos la influencia indirecta que Martin Gardner, a través de sus artículos y libros divulgativos, ha tenido en la educación matemática. Sabiéndolo o no, ¿quién no ha propuesto en sus aulas alguna actividad recogida por Gardner en sus escritos? Es pues motivo de celebración que aquel título del 2014 haya tenido una continuación y que esta sea tan interesante como el primer volumen.

Una vez más Fernando Blasco ha conseguido reunir, alrededor de la figura de Gardner, un grupo de autores de máxima categoría: Adrián Paenza, Eduardo Sáenz de Cabezón, Mercedes Sánchez, Antonio Pérez Sanz, Josep Lluís Pol, Juan M. R. Parrondo, Natalia de Lucas, Marco Castrillón, Nelo Maestre, Bartolo Luque, Carlos Angosto, Vicente Muñoz, David Martín y Marta Macho. Una lista en la que encontramos primeras figuras de la divulgación matemática y de su didáctica. Si ya de por sí los aspectos divulgativos del libro son suficientemente interesantes para su uso en el aula, hay que destacar que, el hecho de incluir autores relacionados con el mundo de la educación, hace que en algunos de sus capítulos, aparezcan ideas más directamente relacionadas para su aplicación con nuestros alumnos.

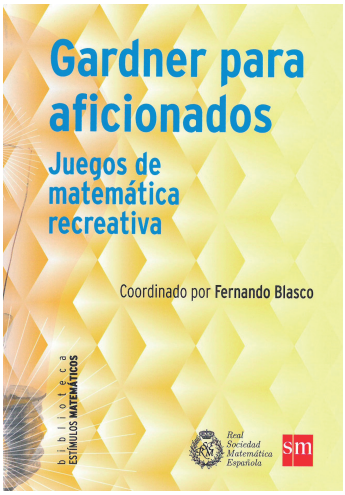
Lo fundamental de este libro es que no nos propone una simple reivindicación de Gardner o una revisitación a sus escritos, sino más bien una recreación *gardneriana*. La mayoría de autores escogen alguna propuesta de sus obras y nos la amplían con informaciones o investigaciones nuevas. Incluso alguno de los capítulos, como el que habla sobre las operaciones que se pueden hacer con las fichas de dominó tratándolas como fracciones, el dedicado a un popular juego para dispositivos móviles (el juego de las luces) o el que nos presenta «las matemáticas en color», son totalmente novedosos y no tienen su origen directo en las obras de Martin Gardner. Títulos más adecuados para esta obra serían *Gardner y un poco más* o *Más allá de Gardner*.

Como en las obras de Gardner los temas tratados, además de los citados anteriormente, son de lo más diverso: cuadrados mágicos, embaldosados, números perfectos, teoría de juegos, papiroflexia, el ábaco neperiano conservado en el Museo de Arqueología Nacional, Escher (y especialmente la rectificación de su obra *Galería de grabados*) y el efecto Droste de autorepetición (imprescindible el análisis sobre este efecto en la conocida serie televisiva *Cuéntame*), problemas resueltos por inducción, las matemáticas de las abejas o una revisitación de las obras de *Alicia* de Lewis Carroll, una de las obras preferidas y más trabajadas por Martin Gardner.

Ya que no tenemos a Gardner es un placer encontrar una obra como esta que nos lo recuerda y nos permite descubrir aspectos nuevos a partir de su legado, y con un estilo cercano muy parecido al suyo.

No me resisto a acabar esta reseña sin destacar un problema breve que propone Adrián Paenza en su capítulo y que seguro que nos invitará a pensar:

> Tres amigos A, B y C juegan al pimpón. Juegan dos y el que pierde sale. Eligen por sorteo los dos que comenzarán. Cuando han finalizado A ha jugado 15 partidas, B ha jugado 10 y C ha jugado 17.




Coordinación: Fernando Blasco
Editorial: RSME y SM
Año de edición: 2017
ISBN: 978-84-675-8289-5
Páginas: 172

Esta es la situación. La sorpresa está en la pregunta:

¿Quién perdió el segundo partido?

Seguro que os costará resistiros a resolver el reto.

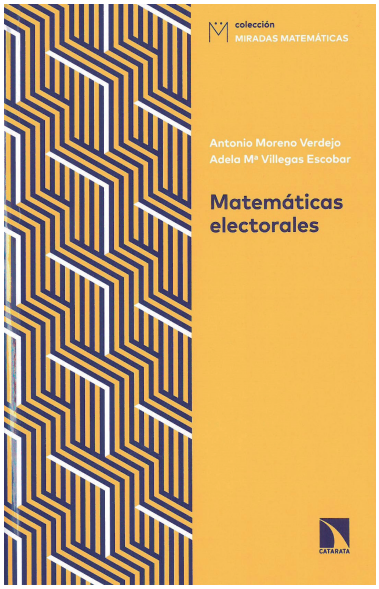
## Matemáticas electorales

Un nuevo título de la colección *Miradas matemáticas* en la que colaboran el ICMAT y la FESPM, de la cual se reseñó en el número 86 de esta revista *La engañosa sencillez de los triángulos*. Como ya se señaló entonces la colección tiene, por un lado, un carácter divulgativo, y por otro, la propuesta de algunas ideas para actividades en el aula.

El subtítulo del libro nos aclara su contenido: «Claves para interpretar sondeos y elecciones». Los dos primeros capítulos «¿Cómo se sabe lo que pienso?», «¿Puede un número limitado de entrevistas representar la opinión de los votantes de un país?» nos hablan de los sondeos, y los dos finales «¿Cuándo un sistema de elección es democrático? ¿Cómo se pueden asignar los escaños de una forma proporcional a los votos?» se refieren al análisis de los sistemas electorales. Son dos partes que, ya por temática, son bien diferentes, dado que una se refiere al análisis de intenciones (las de los votantes) y la otra, simplificando, a la gestión de resultados (qué decidimos a partir de los votos emitidos). Parecen de interés diferente, dado que la segunda tiene una repercusión real en nuestra vida diaria, mientras que las previsiones electorales no tendrían por qué tenerla. Pero es bien sabido que las publicaciones de los sondeos afectan a los resultados finales. Como ejemplo nos podemos preguntar sobre los motivos de las significativas diferencias entre previsiones y resultados en algunas de las elecciones recientes: ¿es un problema de diseño e interpretación de las encuestas?, ¿o es que los votantes modifican sus decisiones, influenciadas por los sondeos, a medida que se acerca el momento de introducir la papeleta en la urna? ¿O ambas cosas?

En conjunto, a pesar de su brevedad, es un libro de una cierta densidad y que pide una lectura atenta. En la primera parte se nos habla de las fases de una encuesta, desde su diseño a su publicación, y de la importancia de aspectos como el tamaño de la muestra, el nivel de confianza y el margen de error, índices que suelen mirarse poco pero son importantes para valorar con propiedad las interpretaciones que los medios de comunicación dan a los sondeos, especialmente en sus titulares. De esta primera parte también cabe destacar el capítulo en el que se analizan diferentes tipos de muestreo, tanto aleatorios (aleatorio simple, sistemático, estratificado…) como no aleatorios (por cuotas, voluntario, discrecional…). De cada uno se ponen ejemplos clarificadores y se comparan sus sesgos. La elección de la muestra es uno de los factores esenciales de la fiabilidad de una encuesta ya que su «calidad» cuenta más que su «cantidad».

Pere Grima, en su libro *La certeza absoluta y otras ficciones* nos lo ejemplifica con la imagen de un cocinero comprobando si la cantidad de sal




Matemáticas electorales
Autoría: Antonio Moreno Verdejo, Adela M.ª Villegas Escobar
Editorial: Catarata
Año de edición: 2017
ISBN: 978-84-9097-363-9
Páginas: 117

de una sopa es la correcta. Siempre prueba una cucharada, independientemente si la olla es para cuatro raciones o para treinta. Lo que hace antes es agitar bien el caldo para que la mezcla sea suficientemente homogénea.

En la segunda parte se toca una de las preguntas esenciales sobre un sistema democrático. Cito literalmente:

> ¿Cómo puede un colectivo llegar a juicios o preferencias coherentes basándose en los juicios o preferencias de sus individuos?

El capítulo 3 se centra en el análisis de diferentes métodos de elección social, especialmente de los que muestran grados de preferencia: mayoría simple, método de Borda, de Condorcet… Es un problema que ya Ramon Llull abordó en el siglo XIII en escritos como *De arte eleccionis*. Si tenemos más de dos candidatos y ninguno de ellos tiene más de la mitad de los votos, ¿cómo escoger al más «preferido»? Con unos mismos resultados y aplicando diferentes criterios de elección, aparentemente justos, podemos llegar, paradójicamente, a conclusiones totalmente contradictorias.

El cuarto y último capítulo se dedica a otro aspecto esencial: cómo se forman los parlamentos y cómo se distribuyen los escaños. Aquí los equilibrios a investigar son otros. Por ejemplo cómo asignar el tamaño de un parlamento y su distribución por circunscripciones de manera que se representen de forma justa territorios y población.

Por poner un ejemplo, el «coste» de un diputado en Madrid en las últimas elecciones generales (escogiendo una provincia con muchos diputados) fue de unos 97 000 votos, mientras que en Albacete (seleccionando una con pocos diputados) solo unos 55 000. El tema de discusión será si la necesidad de representación territorial y la idea general de «un ciudadano, un voto» y, por tanto, de que todos los votos valen lo mismo están suficientemente ajustadas.

Otro tema tratado en este capítulo se refiere a cómo asignar los escaños de cada circunscripción de forma proporcional a los resultados electorales obtenidos en cada una de ellas. Las decisiones se orientan a cómo hacer casar, de la mejor manera, un reparto en números naturales a partir de unas cuotas de resultados que difícilmente serán enteras.

Como se ve el libro trata aspectos de gran calado social y de necesario conocimiento como ciudadanos y ciudadanas. Además, entre los muchos y bien escogidos ejemplos, aprenderemos sobre los modelos electorales de otros países así como sobre la historia de los diferentes sistemas electorales utilizados en el Estado español.

Joan Jareño Ruiz
*CESIRE-Creamat*
<reseñas@revistasuma.es>

# SUMA+
# Recomendaciones a los autores

**TÍTULO** Deberá ser breve y evitar descripciones excesivas del contenido del artículo.

**RESUMEN** Presentará en no más de cinco líneas el contenido del artículo.

**NIVELES** No más de tres. Título aparte, tan solo apartado y subapartado.

**INICIO** No es conveniente iniciar el texto con un título de apartado. Conviene hacerlo con una introducción que no es necesario titular como «introducción», pues se sobreentiende.

**TEXTO** Procurar que la redacción sea directa y concisa. Evitar el uso innecesario y/o excesivo de oraciones subordinadas y paréntesis que puedan entorpecer tanto la lectura fluida como la comprensión del texto, sobre todo en una misma frase. Evitar redundancias, dequeísmos, el uso excesivo de las preposiciones «de» y «en» y la reiteración del pronombre relativo «que». Mientras sea posible, observar el mismo tiempo verbal a lo largo de todo el texto.

**ORTOGRAFÍA Y SINTAXIS** Uso apropiado de los signos de puntuación. En frases largas conviene que el lector respire.

**SENSIBILIDADES** Evitar comentarios políticamente incorrectos acerca de la facilidad o dificultad de comprensión de ideas, conceptos y argumentos. Usar expresiones neutras de tipo genérico para referirse a grupos de ambos sexos como, por ejemplo, alumnado, estudiantes, escolares, profesorado, docentes…

**REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS** Observar las pautas referidas en las *Normas de publicación* teniendo especial cuidado en que se trate exclusivamente de referencias citadas en el texto y de incluir en cada una de ellas el año, la editorial y la localidad de publicación.

**ILUSTRACIONES** Todas las imágenes, figuras, dibujos, fotografías y tablas deben ir acompañadas de un pie explicativo y estar referenciadas en el texto. Además, deberán tener la resolución señalada en las normas de publicación.

**LECTURA** Una lectura final y de un tirón del texto completo es de gran ayuda para mejorar su expresión y su puntuación.

# FESPM & Cía



# Seminario federal sobre resolución de problemas

Juana M.ª Navas Pleguezuelos



La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, consideró oportuna la organización de un seminario sobre *Resolución de problemas matemáticos* que se celebró en Madrid y Castro Urdiales, durante los días 21 y 22 de enero, 12, 13 y 14 de mayo de 2017, respectivamente.

El trabajo de este seminario se organizó en dos fases: un encuentro en Madrid donde se establecieron las pautas para el trabajo a realizar a través de la plataforma Moodle de la FESPM y posteriormente, se celebraron unas jornadas presenciales para exponer los materiales elaborados, debatir las propuestas realizadas en la fase previa y elaborar las conclusiones del trabajo.

Además de analizar el carácter fundamental de la educación matemática como objetivo docente, los participantes en el seminario reflexionaron sobre el papel que se le otorga en los nuevos currículos a la resolución de problemas y abordaron la necesidad de desarrollar estrategias para profundizar en la resolución de problemas dentro de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y de revelar la resolución de problemas como parte fundamental de la educación matemática, elaborando un bloque específico.

La visión que tienen los profesionales de la matemática y de la educación matemática, miembros de la FESPM, sobre los distintos aspectos abordados en el seminario es lo que pretende trasmitir este documento. En el mismo, se hacen recomendaciones para las Administraciones Educativas, para el profesorado y para otros estamentos sociales involucrados en la educación. Las personas participantes en este seminario hicieron propuestas de actuación futura a los órganos de gobierno de la Federación con respecto a la resolución de problemas, que se exponen a continuación.

## Conferencias del Seminario

### *Luis Puig.* La resolución de problemas entre la teoría y la práctica



Con los diferentes problemas expuestos a lo largo de la conferencia, se examinó el esquema del proceso de resolución de un problema según Polya: Comprender el problema, elaborar el plan, y ejecutarlo, dentro de esta ejecución puede incluir el uso de herramientas heurísticas, la gestión del proceso, *looking back* o mirar hacia atrás, y la revisión-extensión.

En particular, los ejemplos sirvieron para mostrar el uso de la herramienta heurística «considerar un caso (particular)», que consiste en:

1. Transformar el problema originalmente planteado en otro problema en el que se pregunta lo mismo, pero ahora solo sobre un elemento del conjunto del que hablaba el problema original.
2. Resolver el nuevo problema. Una vez resuelto, se tiene su resultado y su solución: Llamamos «resultado» a lo que contesta a la pregunta del problema y «solución» al conjunto de pasos que conducen desde los datos al resultado.
3. Se analiza la solución para ver si es posible llevarse la solución al problema original.
4. Si la solución no sirve para el problema original, se toma el resultado como una conjetura para el problema original, con lo que el problema original se transforma en un nuevo problema.
5. Se resuelve el nuevo problema de demostrar.

En la fase de revisión-extensión, no se trata de revisar para comprobar la corrección de lo que se ha hecho, ni de generalizar, sino de buscar problemas similares cuya solución pueda encararse usando la solución del problema recién resuelto, usando parte de la solución, o usando una variante de la solución. La revisión con vistas a la extensión consiste fundamentalmente en el análisis de la solución. Esta fase es crucial.

Los problemas propuestos fueron de un alto interés para todos los asistentes al seminario.

### *Jordi Deulofeu.* Sobre la resolución de problemas: contenido propio y método para aprender matemáticas

En esta conferencia se señalaron dos puntos clave: la planificación de la enseñanza y la gestión de la misma.

En relación con el diseño de tareas, los problemas propuestos deben proporcionar oportunidades de aprendizaje reales. El trabajo con problemas en el aula debería proporcionar oportunidades para:

— Ayudar a construir los conceptos más relevantes, las relaciones entre dichos conceptos y las distintas formas de representación de los mismos.
— Desarrollar y aplicar los procedimientos y las técnicas necesarios para resolver los problemas propuestos.
— Conocer y aprender a utilizar las herramientas heurísticas, tanto las de carácter general, que difícilmente pueden enseñarse de manera explícita, como las heurísticas específicas que pueden ser objeto de enseñanza.

Los problemas deberían ser la fuente principal para la elaboración de actividades de aula.

Determinar qué es un «buen» problema, como actividad de aprendizaje es difícil, pero algunas características que debería cumplir son:

— Que permita experimentar y/o construir y/o argumentar.
— Que admita diferentes niveles de resolución.
— Que se pueda enmarcar en una situación más amplia.
— Que posibilite la discusión y la reelaboración.
— Que se relacione con conceptos y técnicas curriculares.

Muchas de estas características dependen no solo de la situación/problema, sino de su formulación y presentación.

En cuanto a la gestión de la clase, la actitud del profesor debe ser la de crear un ambiente de resolución de problemas (de interrogación, de discusión, de colaboración) y proporcionar las ayudas necesarias para que los alumnos puedan avanzar en su proceso de resolución.

Son posibles y deseables distintas organizaciones que van del trabajo individual a las discusiones con el grupo clase, pasando por el trabajo en parejas y en pequeños grupos. Cada una de estas formas de trabajo aporta elementos importantes y a menudo complementarios, desde el fomento de la autonomía y la toma de decisiones fundamentadas, hasta la incentivación de las distintas interacciones que promueven la argumentación y la comunicación y, en definitiva, la construcción de conocimiento.

## Grupos de trabajo del Seminario

El seminario se organizó en torno a dos temas, cada uno de los cuales se trató en sendos grupos de trabajo, que fueron los siguientes:

### *Grupo I. Estrategias para profundizar en la resolución de problemas dentro de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Coordinado por Julio Rodríguez Taboda)*

En este grupo se hizo una propuesta de bloque curricular de resolución de problemas, que podría quedar formulado con los siguientes apartados:

— Objetivos
— Contenidos de Educación Primaria y de Educación Secundaria
— Metodología
— Evaluación

Los objetivos planteados son:

1. Elaborar, desarrollar y utilizar razonamientos y técnicas heurísticas como herramientas para la resolución de problemas.
2. Llegar a ser consciente de los procesos de razonamiento que se desarrollan al resolver problemas mediante la heurística y saber gestionar dichos procesos.
3. Considerar que la resolución de un problema no finaliza cuando se obtiene la solución, sino tras la fase de revisión y extensión del proceso realizado.
4. Adoptar una postura crítica ante los mensajes, informaciones y situaciones diversas, aplicando el estilo heurístico de resolución de problemas para analizarlos, confrontarlos, sacar conclusiones y tomar las decisiones más adecuadas.
5. Generar y elaborar ideas, planes y todo tipo de recursos personales para la resolución de problemas, practicando y reflexionando sobre distintas técnicas que ayuden a desarrollar la creatividad.
6. Mostrar actitudes propias de la actividad matemática: recogida, exploración y clasificación ordenada de la información, cuestionamiento y crítica constante, flexibilidad y apertura para aceptar otras ideas debidamente argumentadas y capacidad de comunicar resultados y procesos.
7. Conocer y valorar las propias habilidades y aptitudes para la resolución de problemas afrontando y superando los bloqueos propios del proceso de resolución.

Los *contenidos* se organizan en torno a los niveles educativos de Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria, indicando en el primer caso los tipos de problemas que se pueden utilizar para desarrollar los objetivos planteados.

En lo referente a la *metodología*, se ha demostrado que empezar por enseñar conceptos y técnicas primero, y luego plantear problemas para aplicar los conocimientos supuestamente adquiridos no es, habitualmente, el mejor camino para ayudar al alumnado a construir las matemáticas. Se parte de que hay problemas especialmente adecuados para hacer emerger la necesidad de nuevos conceptos y técnicas y se establecen las premisas de preparación de la tarea, la actuación durante la realización de la misma, además de hacer notar que es importante que, antes de finalizar la actividad y, dependiendo de la diversidad de la clase, al menos todos los grupos /estudiantes hayan alcanzado algún éxito en el problema, para que ayude a aumentar su autoestima y su predisposición para un nuevo problema.

En este apartado metodológico se establece también la Base de Orientación (BO), que es una secuencia ordenada de acciones, fundamentada en los requerimientos de la tarea a realizar y en las necesidades del alumnado, que lleva a resolver un problema (dominios en la resolución de problemas y las dimensiones de cada dominio), que queda reflejado en la tabla 1.

En el apartado de la *evaluación* se señala que la evaluación de los aprendizajes es una tarea compleja y las matemáticas no escapan de esta dificultad. Si consideramos que una parte fundamental de las matemáticas la constituyen los procesos, y entre ellos la resolución de problemas, evaluar su adquisición, en el sentido de obtener información sobre su desarrollo por parte de los alumnos, es una tarea bastante compleja.

En primer lugar, hay que plantearse qué tipo de evaluación queremos realizar. Podemos considerar dos tipos de evaluación: la que tiene una función certificativa (evaluación de tipo calificativo, habitualmente al final del proceso) y la que tiene una función formativa (sus acciones y sus resultados tienen como objetivo participar en el proceso de aprendizaje). Hay todavía un tercer tipo, la evaluación formadora, que, aun formando parte de la anterior, tiene como finalidad específica promover que los alumnos se apropien de los objetivos de aprendizaje y de los criterios de evaluación, y que anticipen y planifiquen sus acciones. Contribuye a la autorregulación de los aprendizajes, para avanzar en la autonomía de los alumnos, algo fundamental para resolver problemas.

En conjunto, podemos diferenciar entre evaluación inicial, final o durante el proceso (según el momento en que se realice) y evaluación calificativa, formativa y formadora (según la finalidad). En resolución de problemas, esta diversidad de tipos de evaluación es importante, dada la complejidad del proceso que queremos evaluar.

La tarea fundamental para evaluar la resolución de problemas es el establecimiento de criterios (y niveles) para caracterizar qué significa sa-



| *Dominios* | *Dimensiones* |
|---|---|
| Comprendo el problema | 1. Distingo las preguntas que he de responder y entiendo todo aquello que se me pide que haga.<br>2. Distingo los datos y me aseguro de que los entiendo.<br>3. Expreso el problema para entenderlo mejor haciendo un dibujo, esquema, diagrama... (lo que me parezca más adecuado) y hago pruebas si me es necesario. |
| *Para cada pregunta formulada* | |
| Tengo un plan de acción | 4. Pienso alguna estrategia de resolución a partir de la representación y las pruebas o ejemplos que he hecho, y trato de aplicarlo.<br>5. Encuentro los datos y los razonamientos y/o algoritmos que necesito para aplicar la estrategia.<br>6. Aplico la estrategia y la escribo de manera que se entienda todo aquello que he pensado. |
| Reviso mi tarea | 7. Si no lo consigo, detecto dónde me bloqueo o me equivoco y aplico una nueva estrategia (con todo lo que necesite).<br>8. Una vez resuelto:<br>— investigo si hay otras soluciones y las encuentro. Si solo hay una, razono por qué no hay más.<br>— razono si se podría hacer de otras maneras.<br>9. Releo lo que he hecho, y me aseguro de que lo explico todo, que respondo de manera razonada y que se entiende. Relaciono, si hace falta, con el resto de preguntas y tareas solicitadas. |

Tabla 1

ber resolver problemas (hasta cierto nivel). En este sentido, la evaluación debe permitir obtener la información necesaria para determinar el nivel de adquisición del proceso de resolución de problemas, pero al mismo tiempo debe ser una herramienta que contribuya a la mejora del aprendizaje de los alumnos. Es importante que se utilicen varios instrumentos de evaluación durante el proceso de aprendizaje como parte importante del mismo.

La utilización de cualquier instrumento de evaluación debe ir acompañado de una devolución de la actividad realizada por el alumno, complementada con tareas de mejora o de ampliación.

Uno de los instrumentos útiles para aplicar criterios concretos sobre la resolución de problemas son las rúbricas. Se establece una lista de acciones que conformarían una rúbrica general, de la que seleccionamos aquellas acciones de la rúbrica general, y los niveles correspondientes, que mejor se corresponden con la resolución de un determinado problema, para elaborar la rúbrica aplicable.

También es importante implicar al alumnado en la evaluación, haciéndolo partícipe de dicho proceso. Esto significa desarrollar tareas donde se expliciten los aprendizajes al inicio de un tema, tareas de revisión de las producciones de los compañeros, con la correspondiente devolución de las mismas, así como tareas de autoevaluación.

Por último, otros instrumentos que se pueden utilizar son las bases de orientación (BO) referidas anteriormente.

## *Grupo II. Recursos para la resolución de problemas (Coordinado por Rafael Martínez Calafat y Antoni Vila Corts)*

En este grupo se comenzó por buscar el significado de *recursos* (RAE):

> Conjunto de elementos disponibles para resolver una necesidad o llevar a cabo una empresa.

Se partió de la premisa de que «el valor de un recurso no es intrínseco; el valor se lo da el profesorado». Consecuentemente, llegamos a una nueva premisa: la naturaleza del problema tampoco es intrínseca. Sin embargo, posiblemente hay propuestas de problemas que se prestan más que otras a convertirse finalmente en «buenos problemas», y propuestas que difícilmente podrán acabar siendo «buenos problemas».

Así pues, en este marco, todas las fases de toma de decisiones, de planificación de intenciones, de gestión del aula…, son de importancia capital, muy por encima del recurso/problema/actividad considerado únicamente en su formulación.

Hay tres niveles de reflexión a tener en cuenta cuando se habla de «recursos para la resolución de problemas»: la selección de los problemas, la organización de la tarea asociada y los recursos externos al resolutor que implicaremos en ella y el papel del profesorado.

En el primer nivel de reflexiones, con relación a la selección/reformulación/creación de problemas singulares o de colecciones de problemas, se han abordado preguntas como:

¿Qué características intrínsecas hay que exigir a un problema para que más fácilmente pueda llegar a ser un «buen problema»?

Debe ser accesible, que no cree frustración, que se mueva en contextos próximos o que en caso contrario sea lo suficientemente atractivo como para llamar la atención del alumnado resolutor, que admita un tratamiento parcial o un primer abordaje asequibles, aunque en cualquier caso debiera ser percibido como un reto, que su resolución le produzca algún tipo de satisfacción.

¿Qué criterios genéricos pueden ser útiles para conseguir «enriquecer» una propuesta de problema?

Se consideró que «siempre» puede enriquecerse un problema, cambiando el momento en el que es propuesto, enriqueciendo el contexto de la situación, variando el formato del enunciado…

¿Qué características debiera tener una colección de problemas?

Hubo consenso en considerar que un «listado de problemas» es útil en el mejor de los casos a su autor. Y establecer categorías en función de

contenidos matemáticos puede pervertir la propia idea de problema. Se partió de la idea de que una colección de problemas, en sí misma, tan solo tiene un valor informativo de un análisis que algún experto o algún compañero/a ha realizado; en ningún caso cabe suponer que es útil para una aplicación automática a un aula distinta de la que proviene; requerirá siempre de un segundo análisis: el de aquel que quiere utilizarla.

En cualquier caso, una colección de problemas, para ser útil en el sentido anterior, debiera contener para cada problema una doble «ficha de análisis»: por una parte, un análisis didáctico, y por otra parte, un análisis matemático.

¿Es posible ejemplificar colecciones de problemas, o problemas singulares, que puedan considerarse «de referencia»?

En los términos anteriores, se sugiere a la FESPM que inicie un «banco de problemas de referencia», editado o en versión web; pero en cualquier caso con criterios de organización y de búsqueda posterior que sean realmente funcionales.



En el segundo nivel de reflexiones, la organización de la tarea y los recursos externos al resolutor que lo ayudan en el proceso, se distinguieron esencialmente cuatro categorías de recursos, definidas principalmente por su función:

- Recursos o herramientas que ayudan al alumno en alguna fase de su proceso de resolución.
- Recursos o herramientas que juegan el papel de motor o activador en la creación de ambientes de resolución de problemas, incluyendo la activación de los aspectos emocionales positivos.
- Contextos, actividades o recursos externos al recinto-aula que también pueden jugar el papel de motor en la creación de ambientes de RP.
- Estrategias o decisiones (ajenas al resolutor) que lo ayudan en el proceso de resolución: trabajo cooperativo, análisis de resoluciones, elaboración de protocolos…

También se han abordado preguntas como: ¿Disponer de material manipulativo o tecnológico ayuda de forma intrínseca (por sí solo) en el proceso de resolución? ¿y en la creación de ambientes de RP? ¿Hay «riesgos»?

Hubo absoluto consenso a considerar que se trata de recursos imprescindibles en el aula de matemáticas, y por supuesto en la resolución de problemas, teniendo en cuenta que, cuando hablamos de recursos manipulativos y recursos tecnológicos y digitales, lo hacemos en su sentido más amplio.

Se perciben ciertos riesgos como pensar que, con la motivación subyacente en la utilización de este tipo de recursos, ya se crea un mayor y más eficaz ambiente de resolución de problemas o que por sí solos, estos recursos cambiarán la capacidad del alumnado resolutor. Otra cuestión es considerar que la resolución de problemas se trata de recursos.

Por lo tanto, la pregunta correcta sería ¿qué uso de los recursos manipulativos y tecnológicos es conveniente hacer, si realmente queremos crear estos ambientes de resolución de problemas en las clases de matemáticas?

¿Hay momentos, situaciones, fases… óptimos en el proceso de resolución de los alumnos, para facilitar el acceso a materiales manipulativos?

Se pueden mencionar numerosos ejemplos de problemas en los que la fase de exploración, de inmersión, de particularización, de experimentación, de conjeturación - verificación… son enormemente más ricas con la utilización de recursos tecnológicos y/o manipulativos. De forma «en cierta manera simétrica», en la fase de reflexión, de revisión, de generalización…, su utilización abre vías de gran recorrido. Otra ventaja residiría en la mayor capacidad para crear entornos de RP que se adapten a los distintos niveles y ritmos del alumnado.

¿El laboratorio de matemáticas es realmente un recurso útil para crear un ambiente de resolución de problemas?

Por supuesto es llevar al grado máximo el papel de los recursos antes mencionados. Y más si el laboratorio de matemáticas integra no solo la disponibilidad de materiales manipulativos muy diversos, sino también la de recursos digitales. En este caso el laboratorio podría convertirse en un motor de impulso para la ya sobradamente mencionada creación de ambiente de RP.

Sin embargo, los riesgos son mayores: hay que evitar convertir en anecdótica la presencia del alumnado en esos laboratorios, no debería reducirse su papel al de mera motivación, deberían tomarse las medidas adecuadas para evitar la fractura entre las matemáticas de dentro y fuera del laboratorio y por supuesto requiere una coordinación y un volumen de trabajo muy grande en el equipo de profesorado.

¿Son útiles y convenientes las plantillas de pautas y recomendaciones?

Sin duda tienen su utilidad en los primeros cursos de primaria; sin embargo, en cursos superiores se percibe el claro riesgo de que esas pautas puedan llegar indirectamente o involuntariamente a inculcar creencias en el alumnado de que los problemas pueden convertirse en no-problemas, incluso a pensar en que eso es lo deseable. Las bases de orientación podrían ser el recurso que cumpliese ese cometido, ya que por su naturaleza más reflexiva es muy difícil que pueda incurrir en los riesgos antes mencionados.

¿Qué tipos de contextos, actividades o recursos externos al recinto-aula también pueden jugar el papel de motor en la creación de ambientes de RP?

Los más conocidos son los concursos de resolución de problemas, aunque su imagen tiene una cierta connotación de elitista, y sin duda competitiva. Sin embargo, hay estrategias docentes que pueden convertirlos en un elemento motivador. Se han citado también ejemplos de actividades externas, convertidas en recursos motor de resolución de problemas como los paseos matemáticos, certámenes como el VIDEOMAT …

¿Qué tipos de decisiones pueden convertirse en recursos que potencien el trabajo de resolución de problemas?

Sin duda, el papel asumido por el profesorado en su conjunto es vital; pero en este apartado distinguimos tres decisiones suyas que pueden ser consideradas claramente como recursos, de hecho se valora la conveniencia de que en la medida de lo posible se presenten como una sola: el trabajo en grupo, las valoraciones de trabajos ajenos y la elaboración de protocolos.

En el tercer nivel de reflexiones, el papel del profesorado, se considera importante centrar el debate en torno a dos ejes de reflexión:

1. Cómo mantener vivo el ambiente de resolución de problemas en el aula
2. Cómo mostrarse como modelo de conducta metacognitiva.

Se abordaron las siguientes preguntas:

¿Orientar o conducir por un camino?, ¿dudar, reflexionar, explorar, experimentar, conjeturar…, o bien informar?

Por supuesto orientar, se trata simplemente de recomendaciones. En general, se acepta que el papel del profesor durante el proceso ha de ser flexible y adaptarse a las características del grupo… pero la intervención del profesor/a ha de notarse lo mínimo posible. Debemos dar oportunidad al descubrimiento por parte de las propias alumnas/os, y sería conveniente hallar estrategias que favoreciesen las puestas en común, en el gran grupo, con relación a la observación y análisis de distintas resoluciones de un mismo problema. Sin embargo, en esta fase final, el papel del profesorado ha de ser más intervencionista, ya que es indispensable para institucionalizar el aprendizaje.

¿Preguntar, incitar, cuestionar para hacer reflexionar o aportar respuestas? ¿Animar y propiciar o exigir?

Por supuesto las primeras opciones en cada caso, en general. Es necesaria una importante actitud «receptora» y de autoaprendizaje por parte del profesorado, para ir adquiriendo estas destrezas dirigidas a acompañar al alumnado en el proceso de resolución. Es muy importante dar tiempo para la resolución, no exigir prisas. El modelo propuesto contempla la resolución en grupo tras una inmersión individual.

Por otra parte, se ha coincidido en valorar el reconocimiento de la «tarea bien hecha» por parte del alumnado, no obviando que como seres humanos funcionamos a menudo motivados por este reconocimiento.

¿Y con relación al alumnado menos capacitado?

Este modelo de creación de ambientes de resolución de problemas, y jugando el profesorado

un papel como el descrito, debería permitir por una parte la creación y trabajo con propuestas comunes diversificando los niveles de dificultad y profundidad de las soluciones esperadas. El aprendizaje a través de la resolución de problemas quizás debiera ser el modelo habitual con el alumnado menos capacitado; quizás más que con el alumnado más interesado y más capacitado.

Y para finalizar, un aspecto muy importante: el profesor/a debería ser un buen resolutor de problemas, un buen «analista» de las propuestas existentes y un buen generador de nuevos problemas.

Con esta última reflexión cerraríamos este triángulo de tres niveles de reflexiones: los problemas (obtenidos externamente o generados por el propio profesorado) deben haber sido analizados previamente, viendo los diferentes caminos (árbol de resolución) que los alumnos pueden transitar para llegar a resolverlos. Y nuevamente aquí cabe mencionar la idea del banco de problemas como una herramienta fundamental que cada profesor, o grupo de profesores, ha de crear y mantener actualizado.

*¿Puede la federación plantear un banco de problemas? ¿Cómo se podría articular partiendo de las colecciones que ya existen? Hay que asignar roles, tareas, plazos… ¿quién?, ¿qué?, ¿cuándo?...*

*Nota.* Para ver las conclusiones completas de los grupos acceder a <http://www.fespm.es/-Seminarios->.

Juana M.ª Navas Pleguezuelos
*IES Pedro Jiménez Montoya, Baza (Granada)*
<juaninavas@gmail.com>

# VIII Jornadas de Enseñanza de las Matemáticas en Cantabria

Luis Ceballos Barón



## Sociedades federadas

El viernes 16 de febrero y el sábado 17 se celebraron las VIII Jornadas de Enseñanza de las Matemáticas en Cantabria (JEMC) organizadas cada dos años por la Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria (SMPC). Las JEMC se celebraron en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Cantabria y contaron con la asistencia de más de 180 profesores de Matemáticas de todos los niveles educativos: infantil, primaria, secundaria y universitaria.

Comenzamos a las 16:00 h con la recepción de los asistentes y la entrega de la documentación y los materiales. Una hora después tuvo lugar la inauguración. La mesa contó con la presencia del decano de la Facultad de Ciencias Francisco Matorras, la presidenta de la Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria Carmen Espeso Ortiz, la directora general de Innovación Educativa M. Isabel Fernández Gutiérrez y el vicerrector de Ordenación Académica y Profesorado de la Universidad de Cantabria Ernesto Anabitarte.

Tras la inauguración, pudimos disfrutar de la conferencia *Cuadriláteros con sorpresas. Investigando con GeoGebra* a cargo de José Luis Álvarez, del Instituto de GeoGebra de Cantabria, durante la que nos mostró interesantes propiedades de los cuadriláteros y cómo GeoGebra nos ayuda a descubrirlas, generalizarlas o investigarlas.



Figura 1. Recepción de los asistentes




Figura 2. La inauguración





Figura 3. El público en la inauguración

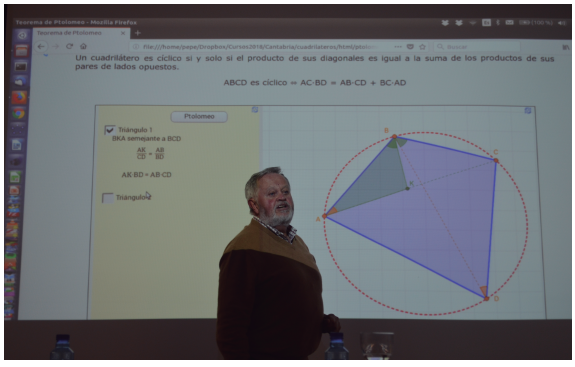



Figura 4. José Luis Álvarez

Al terminar la conferencia de apertura, los asistentes se distribuyeron en las siguientes comunicaciones simultáneas:

*GeoGebra 3D en Educación Secundaria y Bachillerato*, en la que José Manuel Arranz, del Instituto Álvaro de Mendaña de Ponferrada, expuso algunas de las construcciones en GeoGebra 3D que utiliza con sus alumnos.



Figura 5. José Manuel Arranz

*Matemáticas para pensar en Educación Infantil* estuvo a cargo de Laura Chamorro Peñas, asesora pedagógica de la editorial Santillana. Nos mostró diversos materiales para su utilización en esta etapa educativa, para estimular el pensamiento matemático de los alumnos.

En la comunicación *GeoGebra, una herramienta multidisciplinar en Educación Infantil y Educación Primaria*, Sandra Pana y Emilio Seoane del Colegio Castroverde, mostraron algunas de las muchas posibilidades de GeoGebra para construir materiales para trabajar en infantil y en primaria en diversas áreas.




Figura 6. Emilio Seoane y Sandra Pana

El taller práctico *Mate+. Matemáticas para pensar*, a cargo de Eduardo García Ferreiro, asesor pedagógico de la editorial Santillana, se centró en materiales para la etapa de primaria.

Además, durante todo el transcurso de estas Jornadas, tanto del viernes 16 como del sábado 17, los asistentes pudieron visitar los stands de Casio, Aloha, Santillana y la Editorial UC.



Figura 7. El estand de Casio



Figura 8. El estand de Aloha

El sábado arrancamos con los talleres simultáneos:

José Diego, de la Universidad de Cantabria, estuvo a cargo del taller *Proyecto STEMforYouth como elemento clave en la adquisición de las competencias LOMCE*. En él, grupos de estudiantes del IES Lope de Vega de Santa María de Cayón, IES Cantabria de Santander y el Colegio San José, presentaron sus proyectos STEM, acompañados de sus respectivos profesores: Arturo Bravo, Silvia Puente y Óscar Arcera.

Gonzalo Castanedo y Bernardo Santamaría, del Colegio Verdemar, organizaron el taller *Cooperativas escolares en el Colegio Verdemar, aprendizaje-producción y aprendizaje-servicio*, durante el que se presentó esta interesante propuesta.

El tercer taller fue *CLASSWIZ, una herramienta colaboradora en el aula*. Emilio Seoane del Colegio Castroverde y Claudia Lázaro del IES Santa Clara, mostraron algunas de las particularidades de las calculadoras Classwiz que las convierten en una magnífica herramienta para trabajar algunos conceptos de matemáticas en primaria. Al terminar el taller, cada uno de los asistentes fue obsequiado por Casio con una calculadora como la mostrada en el taller.




Figura 9. Proyecto *STEMforYouth*




Figura 10. *CLASSWIZ, una herramienta colaboradora*

Tras los talleres, se pudo visitar la estupenda exposición de poliedros cedida por el IES Marqués de Santillana de Torrelavega y el IES Muriedas. A continuación, se sirvió un café con pastas para todos los asistentes, durante el que pudimos intercambiar opiniones de manera informal.

Luego llegó el turno de la conferencia plenaria *La modelización como recurso en la enseñanza de las Matemáticas* por Onofre Monzó del IES Veles e Vents de Torrent y presidente de la FESPM.

La conferencia de clausura estuvo impartida por José Muñoz Santonja del IES Macarena de Sevilla. Con el título *Matemáticas a todo ritmo* hizo un repaso con mucho humor de las múltiples referencias que se hace a las matemáticas en las canciones.

Tras la clausura de las Jornadas, comida en el Hotel Hoyuela para despedir la actividad.



Figura 11. Exposición de poliedros del IES Marques de Santillana (Torrelavega) y del IES Muriedas (Camargo)




Figura 13. Onofre Monzó del Olmo, presidente de la FESPM, imparte la conferencia plenaria






Figura 12. Exposición de poliedros del IES Marques de Santillana (Torrelavega) y del IES Muriedas (Camargo)




Figura 14. José Muñoz Santonja imparte la conferencia de clausura

Los videos de la inauguración y de las tres conferencias plenarias pueden verse en el siguiente canal:

Luis Ceballos Barón
*IES Valle de Camargo, Revilla de Camargo (Cantabria)*
<secretaria@sociedadmatematicacantabria.es>

suma+
revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

88
julio 2018

**Consejo de Dirección**
<direccion@revistasuma.es>

Iolanda Guevara Casanova
Departament d'Ensenyament
de la Generalitat de Catalunya
Universitat Autònoma de Barcelona

Daniel Sierra Ruiz
IES El Picarral, Zaragoza

**Administración**
<administracion@revistasuma.es>

Miguel Latorre García

**Edita**
*Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM)*

**Web**
<www.revistasuma.es>

Beatriz Rubio Serrano
Universidad de Zaragoza

Jorge Pinilla López
Universidad de Zaragoza

**Cubierta**

Mercè Cassanyes i Caballeria

**Maquetación y corrección**

Miquel Albertí Palmer
INS Vallès, Sabadell (Barcelona)
Universitat Autònoma de Barcelona

Ricardo Alonso Liarte
IES Salvador Victoria, Monreal del Campo (Teruel)

Iolanda Guevara Casanova

Julio Sancho Rocher
IES Avempace, Zaragoza
Universidad de Zaragoza

Daniel Sierra Ruiz

**Consejo de Redacción**

Miguel Barreras Alconchel
IES Matarraña, Valderrobres (Teruel)
<pelanium@yahoo.es>

Carme Burgués Flamarich
Universitat de Barcelona
<cburgues@ub.edu>

José María Muñoz Escolano
Universidad de Zaragoza
<jmescola@unizar.es >

Josep Rey Nadal
MMACA (Museu de Matemàtiques a Catalunya)
INS La Garriga, La Garriga (Barcelona)
<jrey@xtec.cat>

Montserrat Torra Bitlloch
CESIRE, Àmbit matemàtic CREAMAT
Departament d'Ensenyament, Generalitat de Catalunya
<mtorra@xtec.cat>

**Consejo Editorial**

Agustín Carrillo de Albornoz Torres
Universidad de Córdoba
<agustincarrillo@fespm.es>

Juan Martínez-Tébar Giménez
IES Alto de los Molinos, Albacete
<juanmtg1@gmail.com>

Tomás Queralt Llopis
IES Les Alfàbegues, Bétera (Valencia)
Universitat de València
<tomas.queralt@uv.es>

Onofre Monzó del Olmo
IES Veles e Vents, Torrent (Valencia)
Universitat de València
<onofre.monzo@uv.es>

**Revista Suma**
Apartado de correos 286
08911 Badalona (Barcelona)
Tirada: 6000 ejemplares
Depósito legal: Gr 752-1988
ISSN: 1130-488X
Twitter: @suma_fespm

**Consejo Asesor**

Amador Álvarez del Llano
IES La Marina, Santa Cruz de Bezana (Cantabria)
<aalvar29@hotmail.com>

David Arnau Vera
Universitat de València
<david.arnau@uv.es>

Carmen Azcárate Giménez
Universitat Autònoma de Barcelona
<carmen.azcarate@uab.es>

Javier Bergasa Liberal
IES Navarro Villoslada, Pamplona
<jbergasl@educacion.navarra.es>

Salvador Caballero Rubio
IES Gaia, Sant Vicent del Raspeig (Alicante)
<salvador.caballero@gmail.com

Encarnación Castro Martínez
Universidad de Granada
<encastro@ugr.es>

Abilio Corchete González
IES Suárez de Figueroa, Zafra (Badajoz)
<acorchete@gmail.com>

Olimpia Figueras Mourut de Montppellier
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados IPN México
México D.F. (México)
<figuerao@cinvestav.mx>

M.ª José Fuente Somavilla
IES Augusto González de Linares, Santander
<mj.fuente@yahoo.es>

Maria Luisa Girondo
Universitat Rovira i Virgili (Tarragona)
<marialuisa.girondo@urv.net>

Horacio Gutiérrez Álvarez
Profesor de matemáticas, Oviedo
<horag3@gmail.com>

Arturo Mandly Manso
IES José Manzano, Don Benito (Badajoz)
<armandly@gmail.com>

Rafael Martínez Calafat
IES La Plana, Castelló de la Plana
<rmartinez@vila-real.uned.es>

Ricardo Moreno Castillo
Profesor de matemáticas, Santiago de Compostela
<moreno_castillo@hotmail.es>

Maite Navarro Moncho
IES Veles e Vents, Torrent (Valencia)
Universitat de València
<Teresa.Navarro-Moncho@uv.es>

M.ª Jesús Palacios de Burgos
Profesora de matemáticas, Madrid
<mjpalaciosdeburgos@hotmail.com

Pascual Pérez Cuenca
IES Figueras Pacheco, Alacant
<pascual.prz@gmail.com>

Antonio Pérez Sanz
IES Salvador Dalí, Madrid
<aperez.sanz@gmail.com>

Ana Belén Petro Balaguer
Universitat de les Illes Balears, Palma
<anabelen.petro@uib.es>

Luis Puig Mosquera
IES Sofía Casanova, Ferrol (A Coruña)
<luispuig@edu.xunta.es>

Mariano Real Pérez
Centro de Profesorado, Sevilla
<mariano31415@gmail.com>

Francesc Andreu Rosselló Llompart
Universitat de les Illes Balears, Palma
<cesc.rossello@uib.es>

Manuel José Sastre Álvarez
IES La Corredoria, Oviedo
<mjsastre@telecable.es>

Manuel Sol Puig
Institut Vilatzara, Vilassar de Mar (Barcelona)
Universitat de Barcelona
<msol@xtec.cat>

Carlos Oswaldo Suarez Alemán
Universidad de Cádiz
<carlososwaldo.suarez@uca.es>

Francisco Villegas Martín
Centro del Profesorado, El Ejido (Almería)
<pvillegas@thales.cica.es>

*Suma* es una revista de didáctica de las matemáticas de periodicidad cuatrimestral cuyo objetivo es tratar sobre los aspectos relacionados con su enseñanza y aprendizaje y destinada, sobre todo, al profesorado que trabaja en educación infantil, primaria, secundaria y universitaria.

La revista SUMA se edita en
Badalona (Barcelona) — España

suma+

*no se identifica necesariamente con las opiniones vertidas en las colaboraciones firmadas*

# Normas de publicación

1. Para el envío de artículos o cualquier consulta sobre su contenido se utilizará el correo electrónico de la redacción de *Suma* <articulos@revistasuma.es> o su dirección postal:

   Revista *Suma*
   Apartado de Correos 286
   08911 Badalona

2. Si los trabajos, imágenes incluidas, ocupan más de 5 Mb sólo se enviaran por correo postal en soporte magnético (CD-ROM, DVD-ROM o *pen drive*).
3. Los trabajos deben ser enviados como archivo en formato .TXT, .ODT, .RTF, .DOC, .DOCX, adjunto a un mensaje de correo electrónico en el que deben figurar:
   1) El título del trabajo, los nombres y apellidos de todos los autores, su lugar de trabajo y su dirección completa así como la sociedad federada a la que pertenecen (si se desea).

   Y a efectos de comunicación:
   2) El correo electrónico, teléfono y dirección postal del autor de contacto.
4. Se debe enviar una segunda versión del original en la que no aparezcan los nombres de los autores, ni información relativa a ellos o que pueda servir para identificarlos (por ejemplo, institución a la que pertenecen, citas y referencias bibliográficas propias, agradecimientos, datos del proyecto en el que se enmarca el trabajo). En esta versión se reemplazarán las citas y referencias bibliográficas por «Autor, 2012» o «Autor y otros, 2012». En las referencias bibliográficas propias se debe eliminar el título y el nombre de la revista o el título del libro donde se publica.
5. Se admiten diversos tipos de trabajos: teóricos, informes de investigaciones, divulgación, innovación didáctica…
6. Junto con el artículo se remitirá un resumen (máximo de 600 caracteres incluyendo espacios), una traducción del mismo y del título en inglés, y cinco palabras clave jerarquizadas (en castellano e inglés).

   *Ejemplo:* Investigación didáctica, Álgebra, Modelización y dificultades, Enseñanza y aprendizaje, Secundaria y bachillerato.
7. El texto irá una sola columna y tendrá una longitud máxima de 25 000 caracteres sin contar espacios pero incluyendo las tablas, las figuras y los anexos.
8. Los esquemas, dibujos, gráficas e imágenes serán enviados preferentemente en formato TIF o EPS, aunque será admisible el formato JPEG, de modo que, a una resolución mínima de 300 ppp, la imagen tenga un tamaño mínimo de 8 × 8 cm, y en color original. Se adjuntarán en una carpeta aparte del documento del texto, ya que las imágenes incrustadas en el texto no son válidas para su posterior edición. Cada archivo estará claramente identificado y se indicará en el texto el lugar donde se ubica. De igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.
9. Si alguna expresion no se puede escribir con los carácteres disponibles en la fuente Times New Roman, se incluirá, con un editor de ecuaciones, fuera del texto. Si esto no fuera posible, se incorporará como imagen. En tales casos se indicará el lugar que ocupan las fórmulas en el texto, haciendo referencia al nombre del archivo que las contiene.
10. Las referencias bibliográficas se dispondrán al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición.

    Ejemplos:

    Gómez, E. (1990), *Título,* Editorial, Lugar de edición.
    Gómez, E. (1990*a*), *Título,* Editorial, Lugar de edición.
    Gómez, E., y J. Pérez (1990), *Título,* Editorial, Lugar de edición.
    Gómez, E., J. Pérez y D. Hernández (1990), *Título,* Editorial, Lugar de edición.

    En los artículos de revistas y capítulos de libro se seguirá la pauta que se muestra a continuación:

    Gómez, E. (1990), «Título», *Revista,* n.° 31, 35-56.
    Gómez, E. (1990), «Título», en J. Pérez (ed.), *Título,* Editorial, Lugar de edición, 13-23.
11. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: «[…] supone un gran avance (Hernández, 1992)». Si el autor aparece explícitamente en el texto, tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: «[…] según Rico (1993)».
12. Si se cita una referencia de más de tres autores se puede citar el primero seguido de la expresión *y otros.* Por ejemplo: «Bartolomé y otros (1982)», «Gelpi y otros (1987)». Pero en la bibliografía deben aparecer todos los autores.
13. Todas las referencias bibliográficas deben corresponder a menciones hechas en el texto.
14. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente con superíndices a lo largo del artículo y se incluirán al final del texto.
15. A la recepción del trabajo se enviará un correo electrónico como acuse de recibo.
16. Cada trabajo será remitido a dos asesores para ser evaluado. Estos no serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo, aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo o recomendarán posibles modificaciones acordes con las normas y criterios de *Suma*.
17. Si los dos informes son positivos, el artículo será publicado. Si los dos informes son negativos, se desestimará su publicación. Si existe discrepancia entre los informes, se solicitará un tercer informe que decidirá su publicación o no.
18. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como —en caso afirmativo— la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido.
19. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

# Boletín de suscripción

| Tarifas | Suscripción anual | Número suelto | Monografía |
|---|---|---|---|
| Particulares | 25 € | 10 € | 15 € |
| Centros | 40 € | 15 € | 15 € |
| Europa | 50 € | 20 € | 15 € |
| Resto del mundo | 60 € | 22 € | 15 € |

Fotocopiar esta hoja y enviar:

por correo a: Encarni Amaro Parrado (Tesorería de la FESPM)
C/ La Palma nº1, 1ºB,
23740, Andújar-Jaén.

por correo-e a: admin@fespm.es

Deseo suscribirme a la revista *Suma*:

Nombre y apellidos: NIF/CIF:

Dirección: Teléfono:

Población: CP:

Provincia: País:

Correo electrónico:

Importe (€)

☐ Suscripción a partir del año (3 números) _____

☐ N.os sueltos _____

Total

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto)

☐ Transferencia bancaria (IBAN ES79 2100 2153 3802 0010 9089)

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM

Fecha y firma:

---

Nombre y apellidos:

IBAN: ⌊⌊⌊⌊ Entidad: ⌊⌊⌊⌊ Oficina: ⌊⌊⌊⌊ DC: ⌊⌊ Cuenta: ⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊

Banco/Caja:

Agencia n.º: Dirección:

Población: Provincia:

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que, periódicamente, les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista *Suma*.

Atentamente (fecha y firma):

Conforme a lo establecido en el art. 5 de la Ley Orgánica 15/1999 de Protección de Datos de Carácter personal, le informamos que los datos de carácter personal que Usted ha facilitado de forma voluntaria se incorporarán a un fichero automatizado cuyo responsable es la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), con el fin de llevar a cabo la gestión integral de nuestra relación comercial, cobrar tarifas, contactarle y enviarle información que pueda ser de su interés, estando prevista la comunicación de los mismos a aquellos profesionales y/o empresas que intervienen en la gestión del servicio solicitado, descritos en el Documento de Seguridad. Si no nos manifiesta lo contario entenderemos que Usted consiente el tratamiento indicado. Puede ejercitar sus derechos de acceso, cancelación, rectificación y oposición, mediante escrito dirigido a la dirección postal de SUMA junto con una fotocopia del DNI.