suma+ 89
Artículos
Noviembre 2018
pp. 9-17

# Inscribir un cuadrado en un triángulo. Métodos de resolución en libros de geometría analítica del siglo XIX

Isabel M.ª Sánchez Sierra
M.ª Teresa González Astudillo

Este trabajo forma parte de uno más amplio sobre la geometría analítica en España en el s. XIX (Sánchez, 2015) en el que se caracteriza cómo se aborda esta parte de las matemáticas en este siglo. En este artículo analizamos las soluciones a un mismo problema —inscribir un cuadrado en un triángulo— dadas por diferentes autores de la época. Mediante este análisis mostramos una geometría analítica, propia del siglo XIX en España, que conserva aún reminiscencias de la geometría de Descartes, pero que también incorpora el uso de los sistemas de coordenadas tal y como lo hacemos en la actualidad.

*Palabras clave:* Historia de las matemáticas, Geometría analítica, Matemáticas en España, Educación matemática.

**To inscribe a square into a triangle. Methods of resolution in books of analytical geometry of the XIX century**

This work is part of broader study about analytical geometry in Spain during the XIXTH century (Sánchez, 2015) that characterized how this branch of mathematics is addressed in this century. Specifically, in this work we have analyzed the solutions to one problem —to inscribe a square into a triangle— given by different authors by the time. We show an analytical geometry that is typical of the nineteenth century in Spain, which retains reminiscences of the geometry by Descartes, but on the other hand includes the use of the coordinate systems as nowadays.

*Keywords:* History of mathematics, Analytical Geometry, Mathematics in Spain, Mathematics education.

Pocos temas hay que se presenten más disociados de su historia que las matemáticas, sin embargo mostrar el proceso de desarrollo de los conceptos matemáticos desde su origen hasta su forma final resulta ser una herramienta muy útil en el campo de la educación matemática. Diversas investigaciones (Sierra, 1997; Maz, 1999; González, 2004, Maz, Torralbo y Rico, 2006) ponen de relieve que la integración de la historia de las matemáticas en la enseñanza supone un elemento importante en la mejora de su calidad. Además el análisis histórico-epistemológico puede ofrecernos una información muy interesante sobre el desarrollo del conocimiento matemático en el seno de una cultura y sobre las vías en las que el conocimiento nace y cambia. El estudio de la historia permite conocer la aparición, en el desarrollo de un concepto, de dificultades epistemológicas que presentan una gran similitud con las que atraviesan los estudiantes (Sierra, 1997; Maz, 1999; González, 2004). Por todo ello el papel de la historia de las matemáticas en la enseñanza es legítimamente considerada una parte de la investigación en educación matemática (Bagni, 2000).

Es dentro de este tipo de investigación en el que enmarcamos el presente artículo. En él mostramos las características de la geometría analítica que se



Artículo recibido en *Suma* en octubre de 2017 y aceptado en agosto de 2018

enseñaba en España en el siglo XIX. Lo haremos mediante el análisis de las soluciones a un mismo problema dadas por diferentes autores de la época. Este estudio forma parte de un trabajo más extenso (Sánchez, 2015) en el que caracterizamos la geometría analítica en nuestro país en el siglo XIX. Lo hicimos mediante el análisis didáctico del contenido (Gómez, 2002; Maz, 2005; Gómez, Lupiañez, Marín y Rico, 2008; Maz 2009) de once libros de texto utilizados en la segunda enseñanza y la universidad, fijándonos en tres aspectos del texto: la estructura conceptual, los sistemas de representación y el análisis fenomenológico. En el presente artículo sólo nos ocuparemos de este último, mostrando diversas soluciones de un problema.

Comenzaremos la exposición explicando los antecedentes de la geometría analítica y su desarrollo en nuestro país en el XIX, para centrarnos finalmente en la solución del problema.



## Antecedentes

La geometría analítica nace en el siglo XVII de mano de René Descartes (1596-1650) y Pierre Fermat (1601-1665). Podemos encontrar algunos vestigios del uso de sistemas de referencia o representaciones similares a las coordenadas actuales en la obra de Apolonio de Perga (262-190 a. C.?) (González, 2007) y en la de Nicolás de Oresme (c. 1323-1382) (Chica, 2001), así como el uso del álgebra para la resolución de problemas geométricos en la obra de Al-Khwarizmi (Chica, 2001), pero no de forma general y sistemática. A diferencia de los matemáticos anteriores, tanto Descartes como Fermat desarrollaron un método general para la resolución de problemas geométricos mediante la aplicación del álgebra. En un principio será Descartes quien pase a la historia como el padre de la geometría analítica gracias a su *Geometría* (1637), apéndice del *Discurso del método*, y ello a pesar de que la geometría que describe en esta obra se parece poco a lo que hoy consideramos como geometría analítica. Más similar a la concepción actual es la que Fermat desarrolla en su libro *Ad locos planos et solidos isagoge* (1679), obra que fue publicada póstumamente, aunque fue escrita antes de la aparición de *La Geometría*, por lo que en la actualidad se le reconoce igual mérito que a Descartes.

*A diferencia de los matemáticos anteriores, tanto Descartes como Fermat desarrollaron un método general para la resolución de problemas geométricos mediante la aplicación del álgebra*

La geometría de Descartes se asemeja, en ciertos aspectos, a la geometría analítica actual, ya que esta deriva de aquella, pero también existen importantes diferencias entre las dos. La más importante es la interpretación que hace Descartes de las letras y los números que forman las ecuaciones; mientras que actualmente se considera que tanto los parámetros como las incógnitas representan cantidades, Descartes considera que representan segmentos de rectas. Esto conlleva una serie de problemas: por una parte se hace necesario que las fórmulas sean homogéneas —principal problema que tuvieron los geómetras antiguos para aplicar el álgebra a la geometría— ya que si $a$ representa un segmento, $a^2$ representa un área y $a^3$ un volumen, por tanto la expresión $a^2b^2-b$ no tiene sentido. Descartes solucionará este problema introduciendo el concepto de *segmento unidad*, que utiliza de forma implícita. Así, en la expresión «$a^2b^2-b$ debemos considerar la cantidad $a^2b^2$ dividida una vez por la unidad, y la cantidad $b$ multiplicada dos veces por la unidad» (Descartes, 1637/trad. 1947: 52) lo que le permite operar libremente con expresiones de distinta dimensión.

Por otra parte, esta interpretación de las ecuaciones le lleva a ignorar las soluciones negativas por considerarlas *falsas*. Hemos de tener en cuenta que, bajo su planteamiento, lo que se obtendrían serían segmentos de longitud negativa.

Otra importante diferencia entre el modo de hacer de Descartes y el actual se encuentra a la hora de dar la solución de un problema. En la actualidad una vez que se ha obtenido la solución algebraica simplemente se da su interpretación geométrica, sin embargo Descartes construye, a partir de la solución algebraica, la solución geométrica con regla y compás como se venía haciendo hasta entonces.

Muchas de estas características de la geometría de Descartes seguirán presentes en la geometría analítica que se estudiaba en España en el siglo xix (Sánchez, 2015).

## La geometría analítica en España

En España el primer texto sobre la geometría analítica de Descartes es *Elementos de Matemáticas* (1706) del jesuita Pedro de Ulloa. Anterior a ella es *Análisis geométrica* de Omerique (1634-1698), en la que trata la geometría analítica de manera muy distinta a Descartes o Fermat, a pesar de lo cual mereció los elogios de Newton (Peralta, 1999).

Durante el siglo xviii la producción matemática española es muy extensa, siendo sus principales protagonistas los jesuitas y los militares, aunque no encontramos en nuestro país ninguna obra original sobre geometría analítica.

Al comienzo del siglo xix los avances conseguidos en España en el estudio de las ciencias —en particular las matemáticas— durante el siglo xviii se paralizaron, en primer lugar por la guerra de la Independencia y posteriormente por el clima de inestabilidad política y las sucesivas guerras presentes durante todo el siglo. Aunque en la primera mitad se llevará a cabo cierta obra en el campo de las matemáticas, no será hasta mediados de siglo cuando se inicie la recuperación, aunque la verdadera modernización se llevará a cabo en el último tercio, fruto de la libertad ideológica existente en el sexenio junto a la calma política de la Restauración (Peralta, 2008; Etayo, 1992).

En relación a la geometría analítica, la podemos encontrar en los libros de texto utilizados en la segunda enseñanza y en los estudios universitarios, en un principio en la Facultad de Filosofía y a partir de 1857 en la Facultad de Ciencias (Sánchez, 2015). Entre ellos destacaremos el *Tratado elemental de matemáticas* (1813) de J. M. Vallejo; la *Geometría Analítica-descriptiva* (1819) de M. Zorraquín; los *Elementos de Matemáticas puras y mistas* (sic) de A. Lista (1825); el *Curso completo de matemáticas Puras* (1829) de J. Odriozola; el T*ratado Completo de Matemáticas* (1846) de A. Gómez Santa María; *Curso completo elemental de Matemáticas puras* (1846) de S. F. Lacroix; el *Tratado de Geometría Analítica* (1862) de J. Cortázar; las *Lecciones de Geometría Analítica* (1883) de S. Mundi; la *Geometría Analítica* (1883) de I. Sánchez Solís y el *Tratado de Geometría Analítica* (1906) de M. Vegas. Dichas obras tuvieron gran difusión en su época, bien por la relevancia de sus autores, bien por aparecer en las listas de libros de texto aprobadas por los distintos gobiernos para los niveles educativos señalados.

El análisis de estas obras nos ha permitido caracterizar la geometría analítica en nuestro país en el siglo xix. Así hemos visto que hasta el último cuarto de siglo se encuentran dos versiones de geometría analítica en los libros de texto. Una, basada en el concepto de lugar geométrico y en el uso de coordenadas, similar a la que conocemos actualmente; y otra —muy próxima a la geometría de Descartes— denominada por muchos geómetras aplicación del álgebra a la geometría[1]. Este último tipo se caracteriza por seguir operando con segmentos, lo que obliga a que las ecuaciones sean homogéneas y por tanto se continúa aludiendo al segmento unidad, que permite hacer homogénea cualquier ecuación. Por otra parte se hace necesaria una interpretación de las soluciones negativas de un problema y por último, tras la resolución algebraica esta se construye geométricamente, lo que obliga a insertar una parte teórica en la que se explica cómo se construyen las fórmulas (Sánchez, 2015).

El análisis de estas obras nos ha permitido caracterizar la geometría analítica en nuestro país en el siglo xix

## El problema: Inscribir un cuadrado en un triángulo dado

Para mostrar la forma de trabajar antes descrita, incluimos en este artículo el análisis de las soluciones al problema «inscribir un cuadrado en un triángulo». Lo encontramos resuelto en prácticamente todas las obras citadas anteriormente, excepto en la de Odriozola y las del último cuarto de siglo. En la mayoría, la resolución es muy similar, por ello presentamos solo las dadas por Zorraquín, Alberto Lista, Gómez Santa María y Lacroix, por considerarlas las más representativas.

## La solución de Alberto Lista

La obra analizada es la segunda edición (1825) de los *Elementos de Matemáticas puras y mistas*, que alcanzó su tercera edición en 1838. Bajo este título, que es como se denominan las asignaturas de Matemáticas en los primeros planes de estudios de segunda enseñanza, se publicaron multitud de textos para este nivel educativo a lo largo del siglo XIX (Vea, 1995). Dada la importancia del autor en su época, podemos suponer que esta obra fue una de las más usadas en la segunda enseñanza.

La solución dada por Lista (1825: 127) es la más utilizada por otros autores de la época y muestra claramente la manera de hacer geometría analítica en el siglo XIX.

En primer lugar se supone el problema resuelto geométricamente y de ahí se deduce el planteamiento algebraico que se basa en la semejanza de triángulos:

> Sea el triángulo dado *ABC*, y supongamos ya inscrito el cuadrado, y sea *DEFG*.
>
> Sea la base *AC* = *a*, la altura *BH* = *b*, y el lado del cuadrado *DE* = *IH* = *x*. Los triángulos semejantes *ABC*, *DBE* dan $\frac{AC}{BH}=\frac{DE}{BI}$ ó analíticamente $\frac{a}{b}=\frac{x}{b-x}$.
>
> Resuelta la ecuación, da $x=\frac{ab}{a+b}$, fórmula que se construye buscando una cuarta proporcional á *a* + *b*, *a* y *b*.

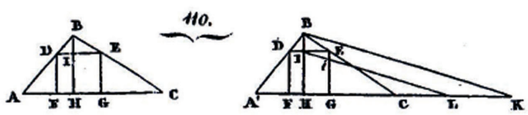


Figura 1. Lista (1825), figura 110

Una vez resuelta la ecuación y hallado el valor de la incógnita es necesario interpretar y construir geométricamente la solución para considerar el problema resuelto, para lo cual se recurre, en este caso, a la cuarta proporcional por la expresión algebraica que se ha obtenido.

Para ello toma sobre la prolongación de la base dos puntos *L* y *K* de manera que $HL = a$ y $LK = b$. Traza por este último punto la recta *KB*, y una paralela a ella por *L*, formándose así dos triángulos semejantes de los que se obtiene la proporción $\frac{b}{a+b}=\frac{IH}{a}$, es decir el segmento *IH* es el segmento buscado.

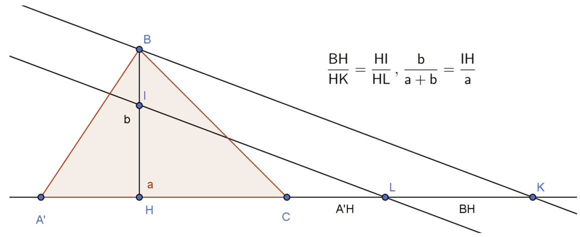


Figura 2. Primer paso de la solución

Para construir la solución traza una paralela a la base del triángulo por el punto *I*, y seguidamente dos perpendiculares por los puntos *D* y *E* (que son los puntos de corte de dicha paralela con los lados del triángulo) respectivamente, obteniéndose así el cuadrado inscrito pedido como se puede ver en la siguiente imagen reconstruida utilizando Geogebra.

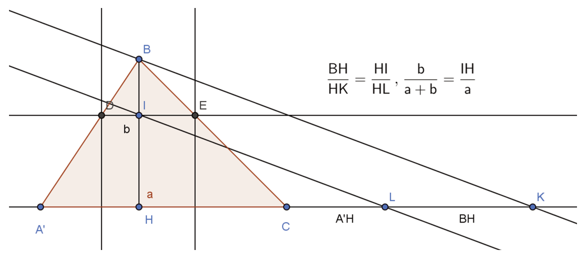


Figura 3. Solución del problema con Geogebra

## La solución de Mariano Zorraquín

La obra analizada se titula *Geometría analítica-descriptiva*. Esta obra, cuya única edición data de 1819, fue escrita para la Academia Militar, pero será recomendada como texto para el estudio de la geometría analítica en secundaria y en la Facultad de Ciencias desde el año 1847 a 1867.

La estrategia de resolución del problema que estamos tratando es similar a la utilizada por Alberto Lista, pero la construcción que propone Zorraquín es distinta. Además, aunque este recurre también a la semejanza de triángulos, los que utiliza son diferentes de los usados por Lista.

Para inscribir un cuadrado en el triángulo *SOR* (Zorraquin, 1819: 23-24), comienza suponiendo el problema resuelto y plantea el problema geométricamente:

> Sea *MNPQ* el cuadrado; se verificará que el lado *MN* cortará á la altura SG del triángulo en un punto *I* tal que *IG* = *MN*.

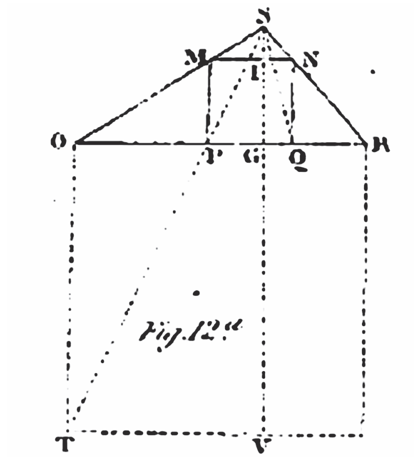


Figura 4. Zorraquín (1919), figura 12

De este planteamiento obtiene la ecuación, que resuelve, hallando la solución algebraica del problema:

> Para expresar analíticamente esta relación, compararemos los triángulos semejantes *SMN*, *SOR*, y haciendo *SG* = *a*, *OR* = *b*, *MN* = *IG* = *x*, se tendrá:
>
> $$\frac{a}{b}=\frac{a-x}{x} \quad \text{y} \quad x=\frac{ab}{a+b}$$

Análogamente a Lista, pasa a construir la solución, que es una cuarta proporcional a $a$, $b$ y $a+b$.

> Sobre *OR* fórmese el cuadrado *TR*, y tírese la *ST*; por el punto *P* en que corta á *OR* levantese la perpendicular *PM* que será el lado del cuadrado pedido,

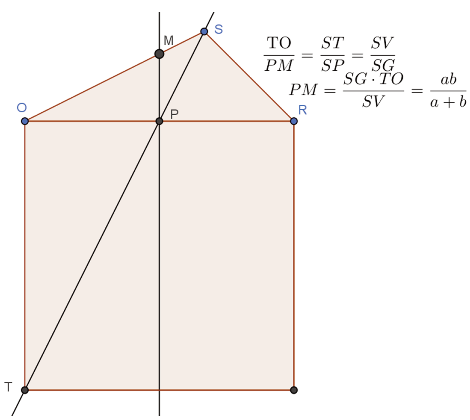


Figura 5: Construcción de la solución. Paso 1

> [...] porque los triángulos semejantes *SMP*, *STO*, y *SPG*, *STV* dan *TO* : *PM* :: *ST* : *SP* :: *SV* : SG y
>
> $$PM=\frac{SG\times TO}{SV}=\frac{ab}{a+b}$$

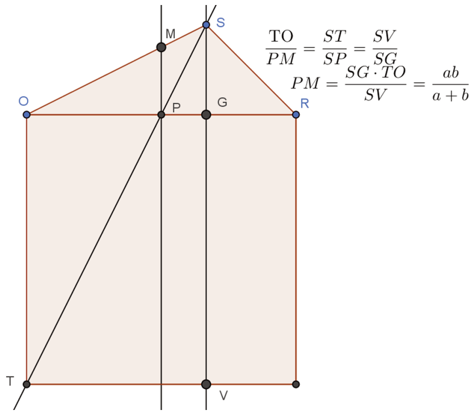


Figura 6: Construcción de la solución con Geogebra

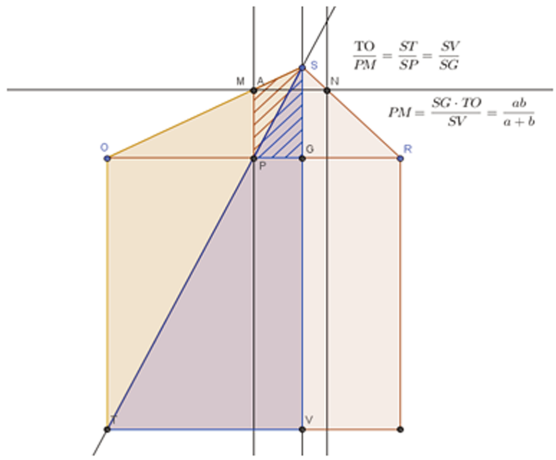


Figura 7: Comprobación de la solución con Geogebra

Pero Zorraquín va más allá, y enuncia un problema más general: Construir un cuadrado que tenga sus cuatro ángulos sobre tres rectas que se cortan de dos en dos.

Este problema admite dos soluciones, el cuadrado que se acaba de hallar y el *P'N'* que se obtiene mediante los triángulos semejantes *SM'N'* y *SOR* (figura 8).

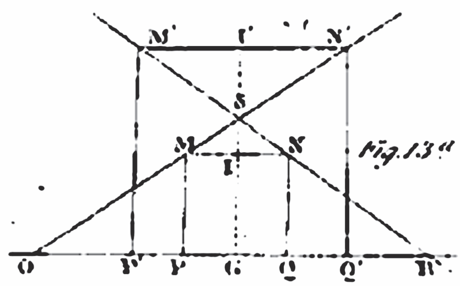


Figura 8. Zorraquín (1919), figura 13

### La solución de Lacroix

La obra analizada es la octava edición del *Curso completo elemental de Matemáticas puras* de S. F. Lacroix (1846). Esta obra aparece como texto en las listas de libros para la Facultad de Filosofía publicadas para los cursos 1846/47 y 1847/48.

La originalidad de la solución de Lacroix consiste en que propone dos métodos de resolución (Lacroix, 1846: 152-154). El primero combinando geometría analítica y sintética, como acabamos de ver en los casos de Zorraquín y Alberto Lista. En este caso la solución es idéntica a la propuesta por este último. Pero además, Lacroix resuelve el problema utilizando sistemas de coordenadas y ecuaciones de la recta, de forma análoga a como lo haríamos hoy en día.

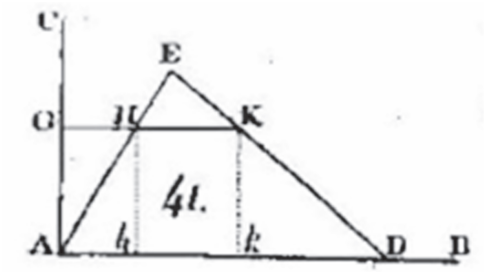


Figura 9. Lacroix (1846), figura 41

Comienza resolviendo un problema más general y después el que nos ocupa como caso particular.

> […] Siendo dadas dos rectas *AE* y *DE*, fig. 41, por los ángulos que forman con una tercera *AB*, y por la parte *AD* que interceptan sobre esta tercera, hallar sobre una línea *AC*, perpendicular á *AB*, un punto *G*, por el cual tirando una recta *GK* paralela á *AB*, la parte *HK* comprendida entre *AE* y *DE* sea de una magnitud dada.

Para resolverlo utiliza en esta ocasión métodos puramente algebraicos:

> Para formar las ecuaciones de las rectas *AE* y *ED*, llamaremos $a$ y $a'$ las tangentes de los ángulos *EAD* y *EDA* que ellas forman respectivamente con la recta *AB*; tómese esta por el eje de abscisas, cuyo orígen puede imaginarse en *A* igualmente que el de las ordenadas, que concibo paralelas á *AC*; además hágase $AD = \alpha$.
>
> La primera recta tendrá por ecuacion $y = ax$, puesto que pasa por el origen *A*; como la segunda debe pasar por el punto *D*, para el cual se tiene $y = 0$ y $x = \alpha$, se deberá inferir que la de dicha segunda será $y = -a'(x - \alpha)$ (…).

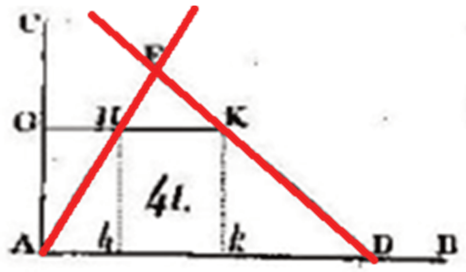


Figura 10. Rectas *AE* y *ED*

Continúa obteniendo las abscisas de los puntos *H* y *K*. Para ello toma la recta *GK* y la corta con las rectas *AE* y *ED*, obteniendo las abscisas de los puntos indicados. La diferencia de las mismas da la distancia *HK*, que debe ser igual a la magnitud dada. Igualando ambas obtiene la longitud del segmento *AG*, con lo que concluye.

> Para obtener los puntos *H* y *K*, […] basta hacer $y = AG$; luego si se supone[2] $AG = t$, se sacará $t = ax$, $t = -a'(x - a)$: tomando el valor de $x$ en cada una de estas ecuaciones, saldrá $x = \frac{t}{a}$, $x = \frac{\alpha a' - t}{a'}$.
>
> Estas expresiones son las de las abscisas *Ah* y *Ak*, cuya diferencia da $hk = HK$, á causa de las paralelas; y designando por $m$ la magnitud que debe tener *HK*, se hallará
>
> $$m = \frac{\alpha a' - t}{a'} - \frac{t}{a}$$
>
> […] y por consiguiente
>
> $$t = \frac{(\alpha - m)aa'}{a + a'}$$
>
> Este es el valor de *AG*, que satisface la cuestion propuesta.

Y utilizando este resultado obtiene la solución del problema del cuadrado:

> Supóngase que en vez de dar á la línea *HK* una magnitud conocida, se pida que ella sea igual á la línea *AG*, lo cual equivale á inscribir un cuadrado en un triángulo.

En este caso en vez de igualar *HK* a *m* lo iguala a *t*, lo que dará $t = \frac{\alpha a' - t}{a'} - \frac{t}{a}$, de la cual se deducirá $t = \frac{\alpha a a'}{aa' + a + a'}$.

## *La solución de Gómez Santa María*

La obra analizada es el *Tratado completo de matemáticas* de Agustín Gómez Santa María (1846: 29-31). Desde su publicación será recomendada como texto para el estudio de la geometría analítica en secundaria y en la Facultad de Ciencias desde 1847 a 1867.

> Prob. 1º. Dadas la base y la altura de un triángulo, determinar el lado del cuadrado inscrito en dicho triángulo.

La forma de resolución es similar a los anteriores, aunque la construcción geométrica es distinta a la que encontramos en otras obras. Lo relevante de esa solución es que antes de hacer la construcción se hace la distinción entre si los datos del problema son numéricos o gráficos, pues en el primer caso tal construcción no sería necesaria, cosa que el resto de autores no se plantea. Además analiza la solución dependiendo de las medidas de los lados y los ángulos del triángulo dado.

Como el resto de los autores supone resuelto el problema. Utilizando la semejanza de triángulos obtiene la proporción: $AC : BH :: EF : BI$.

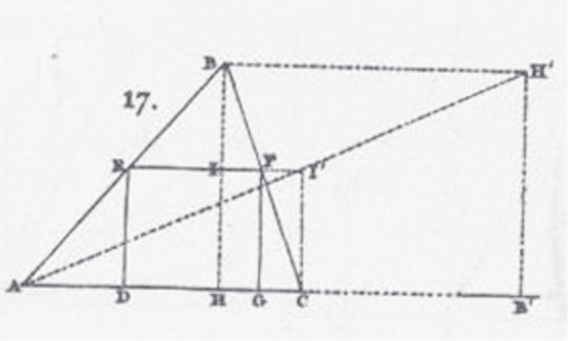


Figura 11. Gómez Santa Maria (1846), figura 17

Tomando $AC = b$, $EF = x$, $BH = h$, $AC = b$, $EF = x$, $BH = h$ y $BI = h - x$ obtiene de la proporción anterior: $b : h :: x : h - x$ y operando $x = \dfrac{bh}{b+h}$.

Como hemos señalado una vez obtenido el valor de $x$ hace la consideración de que si los datos que se conocen son numéricos para calcular $x$ simplemente habrá que operar con ellos, pero si son líneas habrá que construir la solución:

> Luego si las cantidades *b* y *h* que han de hacer conocer el lado del cuadrado son números que representan los valores de la base y altura del triángulo apreciadas con la mitad de longitudes, el *valor* de la incógnita está también conocido por el cociente de su producto entre su diferencia: pero si las cantidades *b* y *h* que figuran en esta formula son las lineas en sí mismas, la longitud del lado del cuadrado puede hallarse gráficamente, construyendo una cuarta proporcional a *b* + *h*, á *b* y á *h*.

Construye la cuarta proporcional a $b$, $h$ y $b + h$:

> [...] prolongando la base *AC* = *b* en una porción *CB'* = *h*, levantando en *B'* la perpendicular *B'H'* = *h*, tirando la *AH'* y levantando en *C* otra perpendicular hasta esta. Por consiguiente la paralela *I'E* á la base, dará en sus intersecciones con los lados *BC* y *BA* del triángulo dos vértices del cuadrado inscrito, y la porción *FE* comprendidas entre dichas intersecciones, será por si, uno de los lados del mismo.

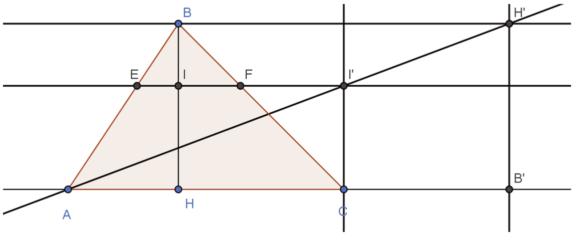


Figura 12. Solución con Geogebra

Tras esta construcción hace la observación de que todos los triángulos de la misma base y altura tienen la misma solución. Para construir cualquiera de estos triángulos basta tomar un punto cualquiera en la recta $BH'$ como tercer vértice del triángulo (los otros dos son $A$ y $C$ por tener la misma base).

También señala que a la vista de la solución geométrica se deduce que si el triángulo es obtusángulo en $C$ o en $A$, no tendría solución ya que al ser los ángulos del cuadrado rectos hay que levantar una perpendicular a la base y si un lado forma ángulo obtuso esta perpendicular saldría fuera del triángulo, limitación que no se observa en la solución algebraica. Esta observación no la hacen otros autores al resolver este mismo problema.

> Esta limitación evidente, no podia resultar escrita en la expresión de *X*, porque habiendo nacido de la única condición del ser semejantes los triángulos *BEF* y *BAC*, y gozando de esta propiedad aun en el caso que acabamos de suponer, claro es que la fórmula que dá á conocer la longitud de *X* es aplicable sin restricción alguna.

Tras este problema plantea otro que es una generalización del mismo:

> Prob. 2. Dadas la base y la altura de un triángulo, inscribir un rectángulo, conocida la relación de sus lados.

En este caso no construye la solución obtenida, que es $x = \dfrac{bh}{nh+b}$, donde $n$ es la relación entre los lados del rectángulo, y $b$ y $h$ la base y altura del triángulo respectivamente como en el problema anterior. Lo interesante de la solución es que hace uso explícito de la unidad:

> La construcción en el problema presente es enteramente la misma del que le precede [...].
>
> Únicamente debe recordarse que el producto *nh* puede mirarse como el de la recta *h* repetida el *número n* de veces, ó bien como el de dos rectas cuyas longitudes fueran dadas. En el primer concepto *nh* es una sola linea, *n* veces mayor que *h*; mientras que en el segundo por aparecer dos dimensiones, seria preciso imaginar á *nh* dividido por la unidad en esta forma *nh*/1 la cual hace ver que es una cuarta proporcional á 1, *h* y *n* que habrá de determinarse aisladamente para operar despues con ella como lo exige la construcción de *x*.

## Conclusiones

Como señalábamos al comienzo, el desarrollo de las soluciones del problema planteado nos muestra dos formas muy distintas de hacer geometría analítica en el siglo XIX.

Una muy similar a la actual, que se basa en el uso de sistemas de coordenadas, como muestra la segunda solución de Lacroix.

Y otra, totalmente perdida en nuestros días, muy próxima a la geometría de Descartes, que conjuga geometría analítica y sintética, en la que se siguen construyendo las soluciones geométricamente, arrastrando por tanto problemas inherentes a este tipo de geometría. Uno de ellos es la necesidad de que las ecuaciones sean homogéneas, utilizando para ello el segmento unidad, como hemos visto en una de las soluciones propuestas por Gómez Santa María.

Por otra parte se hace necesaria la solución geométrica, lo que obliga a construir las soluciones una vez resuelto el problema algebraicamente. Es decir, el álgebra solo es una herramienta que permite encontrar de una forma más rápida y directa la construcción que debe hacerse con regla y compás. Solamente Gómez Santa María plantea la cuestión de que los datos sean numéricos o geométricos. Esto hace que, a pesar de utilizar el álgebra para resolver los problemas, no abandonan la geometría por completo en ningún momento; y este no desligarse de la geometría hace que se tenga una visión geométrica de la parte algebraica que se ha perdido en la actualidad y se interpreten o incluso justifiquen geométricamente las soluciones. Hoy en día una vez que se obtienen las ecuaciones algebraicas del problema se olvida la situación geométrica de fondo hasta llegar a la solución, de la cual solo damos, como mucho, la interpretación geométrica.

Pero que los autores estén tan atados a la geometría también tiene sus inconvenientes, ya que en muchas ocasiones se complican innecesariamente los problemas al verse obligados a plantear siempre ecuaciones homogéneas y a construir las soluciones, tanto positivas como negativas, siendo la interpretación y construcción de estas últimas un asunto bastante complejo en algunos casos (Sánchez, 2015; Sánchez y González, 2017). Quizá fuera esta complicación innecesaria una de las razones de la desaparición de este modo de hacer geometría analítica, en favor de otros planteamientos más algebraicos.

Además, algunos autores relacionan el problema o lo deducen de otro más general, lo que hace que se presenten familias de problemas que tienen ciertas similitudes. Tal es el caso de Gómez de Santamaría que plantea como generalización la inscripción de un rectángulo en un triángulo o de Zorraquín cuando se plantea construir un cuadrado cuyos vértices estén en tres rectas. Asimismo, Gómez de Santamaría analiza qué pasaría si el triángulo fuera obtusángulo. Este estudio de las generalizaciones y particularidades que es bastante usual en los libros de texto antiguos parece que ha dejado de considerarse en la enseñanza actual en la que se plantean los problemas como singularidades en sí mismos sin establecer relaciones o conexiones con otros problemas.

## Referencias bibliográficas

Bagni, G. (2000), «The role of the history of mathematics in mathematics education: reflections and examples», *Proceedings of CERME-1*, Forschungsinstitutfuer Mathematikdidaktik, Osnabrueck, 220-231.

Chica, A. (2001), *La matemática en sus personajes. Descartes. Geometría y método*, Nivola, Madrid.

Descartes, R. (1637), *La Geometría*, traducido por Pedro Rossell en 1947, Espasa-Calpe, Buenos Aires.

Etayo, J. J. (1992). «El reinado de la Geometría Proyectiva», *Historia de la Matemática,* 115-138, <http://eudml.org/doc/42681>.

Gómez, A. (1846), *Tratado completo de matemáticas. Tomo IV,* Imprenta de Corrales y compañía, Madrid.

Gómez, P. (2002), «Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas», *Revista EMA* 7(3), 251-292.

Gómez, P., J. L. Lupiáñez, Á. Marín, Á. y L. Rico. (2008), «Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales», *Suma*, n.º 58, 7-23.

González, P. M. (2004), «La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza», *Suma,* n.º 45, 17-28.

— (2007), «Raíces históricas y trascendencia de la geometría analítica», *Sigma*, n.º 30, 205-236.

Lacroix, S. F. (1846), *Tratado elemental de geometría rectilínea y esférica, y de la aplicación del álgebra a la geometría. Tomo IV*, Imprenta Nacional, Madrid.

Lista, A. (1823), *Elementos de matematicas puras y mistas (sic). Tomo III*, Imprenta de Don Leon Amarita, Madrid.

Maz, A. (1999), «La historia de las matemáticas en clase: ¿por qué? y ¿para qué?», *Investigaciones en el aula de matemáticas. Matemáticas en la sociedad*, Sociedad Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática, Granada, 205-209.

— (2005), *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

— (2009). «Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas», *Investigación en Educación Matemática XIII,* SEIEM, Santander, 5-20.

Maz, A., M. Torralbo y L. Rico (Eds) (2006), *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la Educación Matemática,* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba, Córdoba.

Peralta, J. (1999), *La matemática española y la crisis de finales del siglo XIX,* Nivola, Madrid.

— (2008), «La matemática española del siglo XI», *La Ciencia antes de la Gran Guerra*, Fundación la Orotava de Historia de la Ciencia, 211-236.

Sánchez, I. M. (2015), *La Geometría Analítica en los libros de texto para secundaria y universidad en España en el siglo XIX*, Tesis doctoral, Universidad de Salamanca.

Sánchez, I. M., González, M. T. (2017), «La geometría analítica en España durante el siglo XIX: estudio de las soluciones negativas de una ecuación», *Enseñanza de las Ciencias,* vol. 35 n.º 3, 89-106.

Sierra, M. (1997), «Notas de historia de las matemáticas para el currículo de secundaria», *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, Horsori, Barcelona, 179-194.

Vea, F. (1995), *Las matemáticas en la enseñanza secundaria en España en el siglo XIX*, Seminario de Historia de la Ciencia y de la Técnica de Aragón. Facultad de Ciencias (Matemáticas), Zaragoza.

Zorraquín, M. (1819), *Geometría analítica-descriptiva*, Impresor de la Real Universidad, Alcalá.

Isabel M.ª Sánchez Sierra
*IES Vía de la Plata. Guijuelo*
<isamss@yahoo.com>

M.ª Teresa González Astudillo
*Universidad de Salamanca*
<maite@usual.es>

1 Denotaremos esta última como geometría analítica también, puesto que muchos geómetras así lo hacen en sus obras, refiriéndose indistintamente por este nombre a cualquiera de las dos citadas.

2 Hay una errata en el libro. En él pone $AG = 1$.