

El problema de la galería de arte: elaboración de conjeturas y demostraciones con GeoGebra*

MANUEL GARCÍA-PIQUERAS
JOSÉ MANUEL DIEGO-MANTECÓN
TERESA F. BLANCO
MARÍA SOTOS SERRANO

El objetivo de este artículo es mostrar las potencialidades de GeoGebra, como herramienta tecnológica, para la resolución de problemas que requieren la formulación de conjeturas y sus demostraciones. Este tipo de problemas resulta, en ocasiones, tedioso para el alumnado de secundaria cuando se realiza en la clase tradicional con lápiz y papel. Esto ha provocado que, de alguna manera, estos problemas dejen de realizarse en el aula, a pesar de ser interesantes desde el punto de vista matemático, ya que fomentan el razonamiento lógico, el desarrollo de estrategias, la capacidad de abstracción y generalización, e incluso la creatividad.

En este artículo mostraremos un ejemplo de resolución mediante una serie de applets GeoGebra para un problema en concreto, que puede servir de guía al profesor de segundo ciclo de secundaria y bachillerato para aprovechar esta herramienta en el aula, con este u otros problemas similares. En particular, se ha seleccionado el famoso *problema de la galería de arte*, propuesto originalmente por Victor Klee en 1973 y resuelto posteriormente por otros autores como Vasek Chvátal y Steve Fisk (Aigner y Ziegler, 2005). A continuación, presentaremos el problema y mostraremos cómo puede ser atacado por el estudiante de segundo ciclo de secundaria y bachillerato: inicialmente se plantea el problema y

se propone una experimentación de casos particulares con GeoGebra que conduce a la formulación de una conjetura sólida y su posterior formalización, para terminar, demostrándola también con la ayuda de esta herramienta. Además, se presenta una ampliación que sugiere una posible adaptación del mismo a los diferentes niveles académicos del alumnado.

El problema de la galería de arte: experimentación y formulación de una conjetura

El enunciado del problema es el siguiente:

¿Cuál es el mínimo número de cámaras que se necesitan para vigilar una galería de arte?

Consideramos la planta de la galería de arte como un polígono simple del plano formado por lados, es decir, la galería de arte está cerrada por paredes (segmentos en el plano) que no se intersecan entre sí. Las cámaras de vigilancia permanecen en una situación fija dentro de la galería, aunque pueden controlar cualquier punto a su alrededor girando 360° . Los lugares vigilados son aquellos puntos del interior de la galería que se pueden conectar mediante un segmento con el punto en el que está situada la cámara; no está permitido atravesar las paredes. A lo largo del texto, utilizaremos el término sala para referirnos a la planta poligonal de la galería.

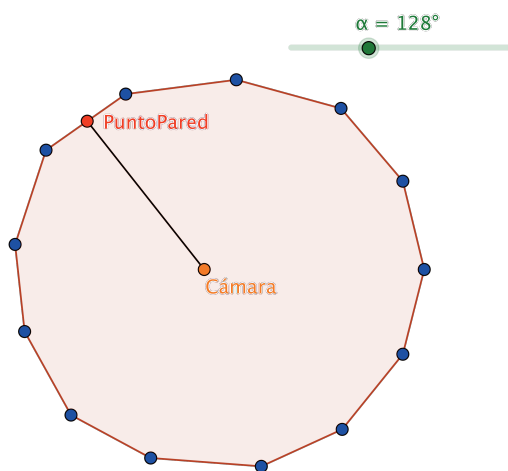


Figura 1. Sala convexa — Cámara Sala Convexa
<<https://bit.ly/2oO6Prd>>

Para resolver el problema con GeoGebra los alumnos podrían empezar experimentando con salas convexas, desarrollando el applet que se ilustra en la figura 1. Desde el punto *Cámara* se traza un segmento que gira en torno a dicho punto 360° ; el otro extremo del segmento, que llamamos *PuntoPared*, se sitúa en las paredes de la sala.

Se trata de imitar la emisión de un rayo láser. Para ello, hemos implementado en dicho applet un script, realizado en *GGBScript*, un lenguaje de *scripting* propio de GeoGebra, que ejecuta el algoritmo encargado de realizar las siguientes acciones:

1. Permitir colocar la cámara tanto en el interior de la sala como en sus paredes, pero nunca en el exterior.
2. Mantener siempre el rayo, es decir, el segmento que une los puntos *Cámara* y *PuntoPared*, en el interior de la sala.
3. No permitir que dicho segmento atravesase ninguna pared de la sala.
4. Facilitar la animación del giro del rayo, de 0° a 360° , en torno a la cámara.
5. Posibilitar que los vértices de la sala puedan moverse libremente.

Sin entrar en detalles sobre la programación del script, este es el aspecto más complicado a la hora de diseñar el applet, puesto que el comando *Interseca* de GeoGebra tiene un error de diseño: devuelve distintos puntos de intersección, aunque estos no varíen en realidad.

Desplazando el deslizador o pulsando el botón play se activa la animación. Además de utilizar el deslizador, los estudiantes pueden experimentar moviendo los diferentes vértices. Siempre que la sala se mantenga convexa percibirán que la colocación de una única cámara es suficiente para vigilarla en su totalidad, independientemente del número de paredes y de que sea regular o irregular. De esta experimentación los alumnos pueden generar una primera conjetura:

Cualquier sala poligonal puede vigilarse con una única cámara.

Tras esta primera experimentación podríamos preguntarnos si la conjetura se cumple para cualquier polígono no convexo. Entonces, pediríamos

a los alumnos que construyan diferentes polígonos no convexos y que verifiquen si pueden vigilarse con una única cámara, y si esta puede estar situada en cualquier punto de la sala. Por ejemplo, si disponemos de una sala como la representada por la figura 2 no será suficiente una sola cámara. El alumnado comprobaría esto experimentalmente al activar el rastro de *PuntoPared*: seleccionamos *PuntoPared*, pulsamos el botón derecho del ratón y marcamos la casilla *Mostrar el rastro*. Independientemente de dónde esté colocado el punto *Cámara*, el alumnado comprueba que *PuntoPared* no alcanza a recorrer la totalidad de las paredes.

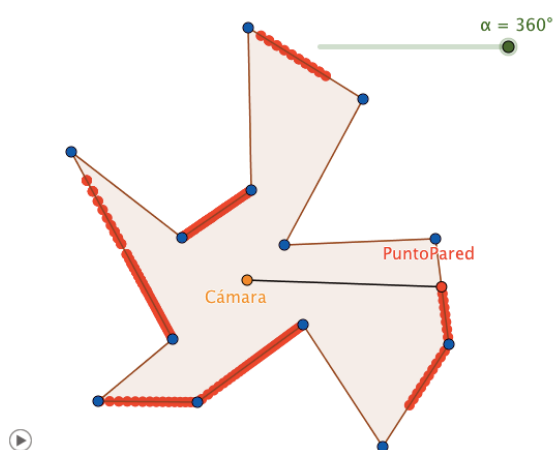


Figura 2. Sala poligonal no convexa
<<https://bit.ly/2oOAu3O>>

Al encontrar salas que necesitan más de una cámara, desechamos nuestra primera conjetura y surge la siguiente pregunta: ¿qué es lo que caracteriza a estas nuevas salas?

El alumnado suele responder a esta última cuestión diciendo que tienen *picos*. En lenguaje matemático, diremos que se trata de polígonos no convexos, es decir, hay al menos dos puntos del polígono que definen un segmento no contenido en dicho polígono. No estaría de más comentarles esta caracterización, para que se hagan una idea de cómo se formalizan ciertas ideas matemáticas.

Como nuestro objetivo consiste en hallar el menor número de cámaras necesario, no nos queda más remedio que estudiar siempre el caso más problemático; es decir, figuras no convexas con muchos picos. En este momento el profesor podría mostrar un polígono como el de la figura 3 que tiene un único pico y que puede vigilarse con

una sola cámara, si esta se sitúa en un lugar concreto. Como puede observarse en dicha figura, la cámara podría situarse en cualquier punto del trapecio $PRSQ$, que resulta de la intersección del rectángulo $BCDE$ y el triángulo PAQ , ya que desde esos puntos se puede trazar un segmento al resto de puntos de la sala sin que interfiera ninguna pared por medio.

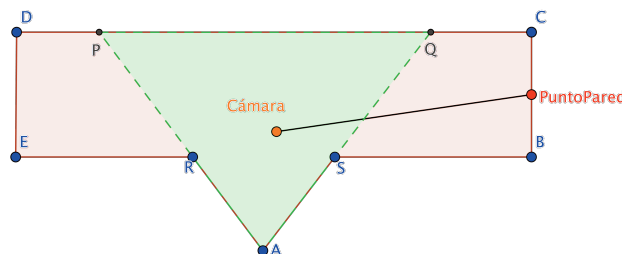


Figura 3. Sala heptagonal cóncava con un pico
<<https://bit.ly/2NWifuz>>

En polígonos con dos picos consecutivos que tienen un punto en común, como en el pentágono de la figura 4 (el punto D es común a los picos E y C), los alumnos podrían también experimentar que toda la sala se puede vigilar con una única cámara situada en este caso en la intersección de los triángulos AEQ y PCB .

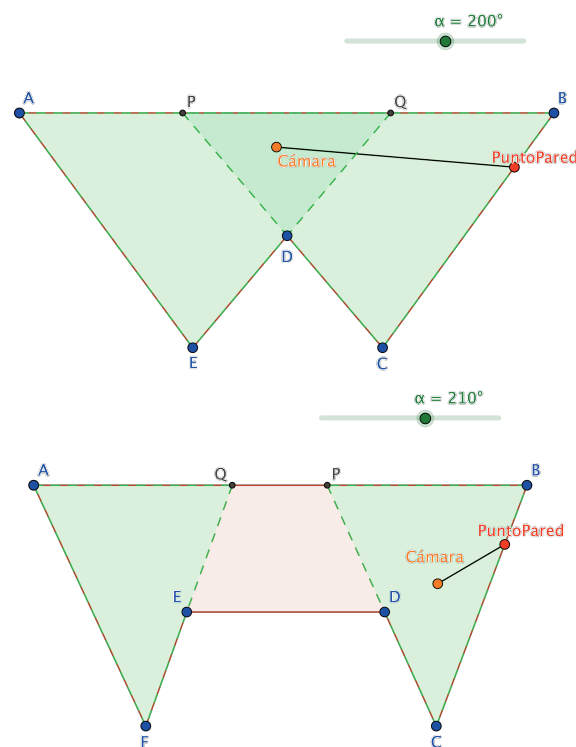


Figura 4. Salas pentagonal (superior) y hexagonal (inferior)

En el caso de polígonos con dos picos consecutivos que no tienen ningún punto en común, como por ejemplo, el hexágono de la figura 4, se necesitarían como mínimo dos cámaras: una situada en cualquier punto del triángulo AFQ y otra en PCB . Estas estructuras poligonales con picos consecutivos, unidos por segmentos, donde los triángulos que contienen a los picos no se intersecan entre sí, las denominaremos polígonos tipo *rastrillo*.

La experimentación con GeoGebra permite a los alumnos establecer la siguiente conjetura:

Las salas con estructura poligonal tipo rastrillo necesitan tantas cámaras como picos tienen para ser vigiladas.

Formalización de la conjetura

Estamos en condiciones de realizar un estudio de las salas poligonales que tengan forma de rastrillo. Los alumnos podrían recoger con GeoGebra, de forma sistemática, los distintos casos de salas con $m = 1, 2, 3, \dots$ picos. El resultado podría sintetizarse en la figura 5.

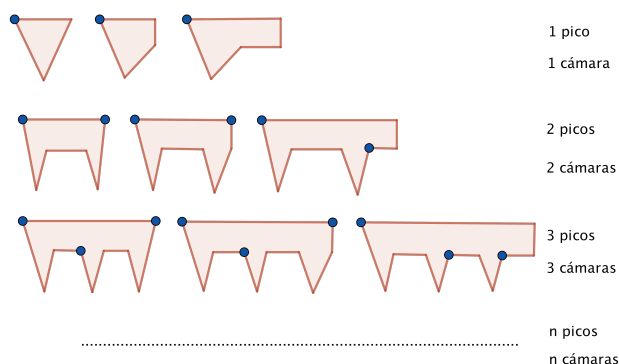


Figura 5. Salas poligonales con forma de rastrillo (los triángulos que contienen a los picos no se intersecan) y puntos en azul donde pueden situarse las cámaras

De la recogida sistemática de datos se deduce que salas poligonales tipo rastrillo de $m = 1$ pico se corresponden con polígonos de $n = 3, 4, 5$ lados, salas con $m = 2$ picos se corresponden con polígonos de $n = 6, 7, 8$ lados, y así sucesivamente. El número de cámaras mínimo coincide con el número de picos. Un análisis de estos

datos indica que dada una sala poligonal con un número de lados $n = 3k$, el número mínimo de cámaras necesarias será dicho factor k , o lo que es lo mismo, la parte entera de $n/3$. Si se aumenta el número de lados en una o dos unidades, el número de cámaras será el mismo y no cambiará hasta conseguir el siguiente múltiplo de 3. De lo anterior los alumnos pueden establecer la siguiente conjetura:

El número mínimo de cámaras necesario para vigilar una sala de n lados es $\lfloor n/3 \rfloor$.

Una vez establecida la conjetura, conocida como el *teorema de la galería de arte*, se ha de indicar al alumno que es necesario proceder a su demostración, ya que en matemáticas la comprobación de una serie de casos particulares no implica necesariamente su validez en general.

Pasos previos a la demostración de la conjetura

Antes de atacar la demostración, sería conveniente introducir al alumnado en dos proposiciones sobre las que se va a sustentar: la *3-coloración* de los vértices de una triangulación y el principio del *efecto dominó* (o *principio de inducción*).

3-coloración de los vértices de una triangulación

Respecto a la 3-coloración de los vértices de una triangulación de la sala, trabajaremos con el applet GeoGebra de Maíz y Muñoz (2014). Para pintar los vértices de una triangulación de una sala, sin agregar nuevos vértices, se necesitan solo 3 colores, de manera que no haya dos vértices del mismo color consecutivos, es decir, unidos por un mismo segmento.

Cuando en la hoja de GeoGebra marcamos la casilla *Ver triangulación*, la sala poligonal mostrada queda dividida automáticamente en varios triángulos. Los vértices están todos *pintados* de azul; 1 o 2 clics sobre ellos permite cambiarlos de color: 1 clic cambia a rojo, 2 cambia a verde y 3 vuelve al azul. Cuando un triángulo tiene sus vértices de

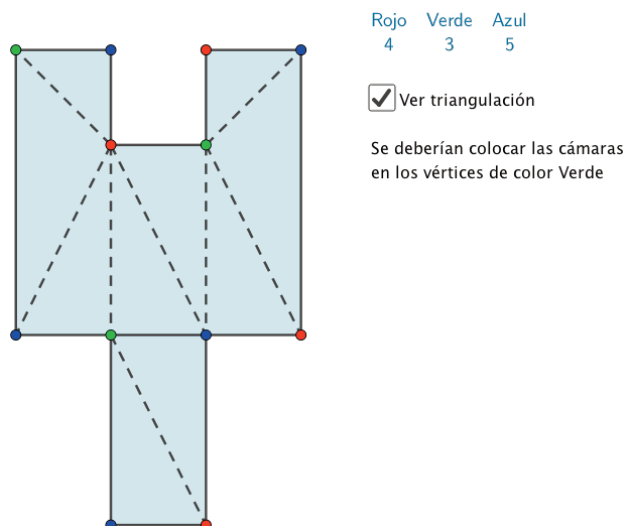


Figura 6. Hoja GeoGebra para la 3-coloración de la triangulación de una sala

color diferente, este queda marcado automáticamente con un color que lo resalta. Una vez que tengamos todos los triángulos resaltados, escogeremos el color que se haya empleado menos veces para pintar los vértices de la sala. Así, por ejemplo, en la figura 6, solo hemos empleado el color verde en 3 ocasiones. Si colocamos una cámara en todos los vértices de color verde, tendremos vigilada la totalidad de la sala poligonal.

Por supuesto, esta actividad se ocupa solo de un caso particular y no puede sostener una afirmación general, sin embargo, ilustra la estrategia que vamos a adoptar con nuestros alumnos para demostrar la conjetura. Para completar dicha estrategia necesitaremos extender la 3-coloración al caso general; es aquí donde entra en juego el efecto dominó o principio de inducción.

El principio del efecto dominó

El principio del efecto dominó establece que, si se coloca un conjunto cualquiera de fichas de dominó de pie, una detrás de otra, todas las fichas del conjunto caen si se cumplen las dos condiciones siguientes:

- I. Cae la primera ficha.
- II. Si cae una ficha cualquiera, entonces también cae la siguiente.

Demostración de la conjetura

En primer lugar, consideraremos una triangulación de la sala que no necesite agregar otros vértices. Siguiendo la estrategia anterior, trataremos de probar que toda *triangulación* es 3-coloreable, mediante el principio del efecto dominó.

- i) La primera ficha de nuestro dominó será la sala más simple. Es decir, una triangular de $n = 3$ lados. Esta ficha cae, es decir, esta sala es 3-coloreable.
- ii) Consideramos una ficha distinta de la primera, es decir, una sala cualquiera con un número de lados $n > 3$ y suponemos que todos los polígonos con menos lados que n pueden ser 3-coloreables. Entonces, se podría preguntar a los alumnos si también caerá esta ficha.

Dada una triangulación de esta sala de n lados, con $n > 3$, vamos a dividirla en dos mitades. Para ello, escogemos dos vértices cualesquiera que estén conectados mediante una diagonal. En la figura 7, hemos escogido la diagonal AC , que separa en dos la triangulación total del polígono de n lados $ABCD\dots$. Por un lado, tenemos el triángulo ABC , y por otro, la triangulación del polígono $ACD\dots$. Estas dos triangulaciones pertenecen a polígonos cuyo número de lados es menor que n . Como habíamos supuesto que todas las salas con menos de n lados son 3-coloreables, entonces la triangulación $ACD\dots$ también lo será, debido a la suposición (ii) anterior.

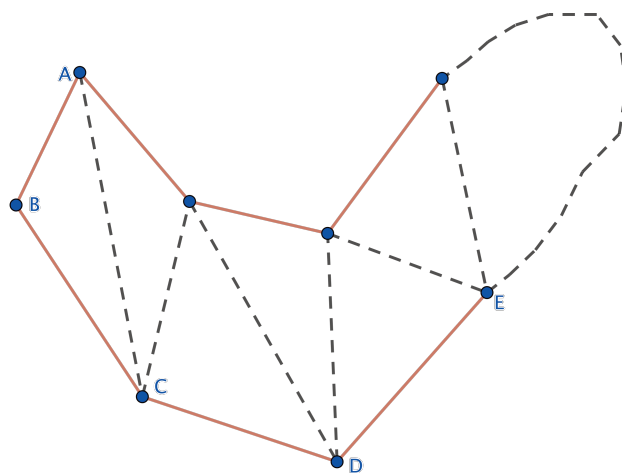


Figura 7. Triangulación de una sala con n lados, siendo $n > 3$

Para acabar de ver que toda la triangulación $ABCD\dots$ es 3-coloreable, solo faltará colorear el vértice B de un color distinto al que tengan A y C en la triangulación $ACD\dots$ (figura 7). Así pues, toda triangulación de una sala cualquiera dada es 3-coloreable.

Por último, como hay n vértices, existe al menos un color que se utiliza como mucho para $\lfloor n/3 \rfloor$ vértices. Ahora bien, este color estará presente en todos los triángulos de la triangulación; si colocamos una cámara en cada uno de esos vértices tendremos asegurada la vigilancia de la totalidad de la sala poligonal, tal y como queríamos demostrar.

Una suposición no tan evidente

La primera demostración del Teorema de la galería de Arte fue realizada por Chvátal (1975). Steve Fisk (1978) realizó una demostración simplificada que también puede encontrarse en O'Rourke (1987) y Tucker (1994), y que fue merecedora de estar en *El Libro de las Demostraciones*, denominado por Paul Erdős «como el libro donde Dios recopila las demostraciones perfectas de los teoremas matemáticos» (Aigner y Ziegler, 2005). El motivo de incluir la demostración de Fisk en el presente artículo se debe a dos razones fundamentales:

- Creemos que existe un número significativo de alumnos, en segundo ciclo de secundaria y bachillerato, que reconocerían cierto grado de belleza y elegancia en dicha demostración, adquiriendo nuevos criterios para una valoración de las matemáticas.
- En la demostración damos por sentado que todo polígono puede ser triangulado, sin necesidad de agregar nuevos vértices, sin embargo, ¿es posible asegurarlo en general?

La existencia de triangulación de un polígono puede parecer natural y evidente; se encuentran evidencias de este hecho en Garey, Johnson, Preparata y Tarjan, (1978) así como en Fournier y Montuno (1984). Sin embargo, creemos conveniente resaltar que en el espacio no está garantizada la existencia de dicha triangulación. Así, existen poliedros que no pueden ser descompuestos en tetraedros sin agregar nuevos vértices.

Uno de los casos más simples es el *poliedro de Schönhardt* (1928) cuya implementación en GeoGebra 3D es un buen ejercicio para trabajar la visión espacial del alumnado. La idea básica de su construcción consiste en imaginar un prisma, cuya base sea un triángulo equilátero, como si fuera un *bote de conserva*, para luego girar la tapa hasta oír cómo se abre. Las figuras 8 y 9 proporcionan unas vistas realizadas con GeoGebra de este poliedro.

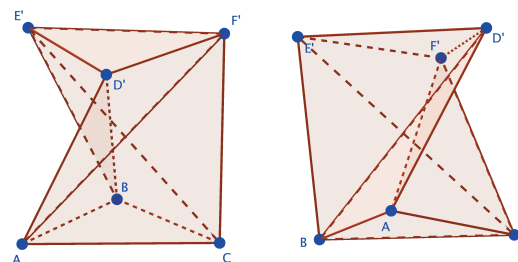


Figura 8. Vistas del poliedro de Schönhardt

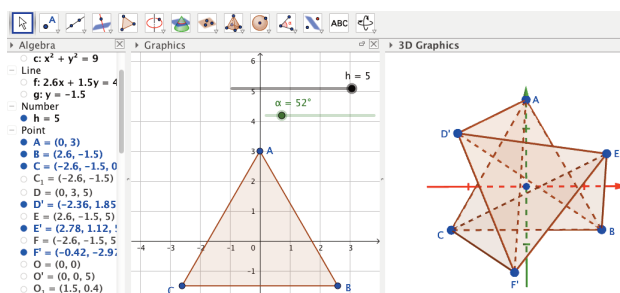


Figura 9. Applet en Geogebra del poliedro de Schönhardt
<<https://bit.ly/2QbExU3>>

A continuación, se detalla el proceso de construcción:

- Paso 1: Construimos el triángulo equilátero ABC contenido, por ejemplo, en el plano XY . En nuestro caso, el triángulo estará inscrito en la circunferencia centrada en el origen y de radio $r=3$, de modo que el vértice A tiene coordenadas $(0, 3, 0)$ en el espacio.
- Paso 2: A continuación, reproducimos los vértices del triángulo anterior en un plano paralelo, por ejemplo, en $z=h$, siendo h el valor que tome un deslizador. Esto podemos hacerlo definiendo tres puntos D, E y F , en función de las coordenadas de A, B y C , respectivamente. Así, en línea de comandos ejecutaríamos las siguientes sentencias:

$$D = (x(A), y(A), b)$$

$$E = (x(B), y(B), b)$$

$$\text{y } F = (x(C), y(C), b)$$

- Paso 3: Aplicamos una rotación axial para cada vértice del triángulo DEF , mediante un ángulo α respecto al eje OZ (el que une los centros de los triángulos ABC y DEF). Así, a partir de los vértices D, E y F , obtendremos D', E' y F' , respectivamente (ver figura 10). Unimos estos vértices para formar el triángulo equilátero $D'E'F'$. El ángulo α de la rotación axial, lo definiremos mediante un deslizador con valor angular comprendido entre 0° y 60° . Tiene esta restricción puesto que para $\alpha = 0^\circ$ tenemos un prisma triangular y para $\alpha = 60^\circ$ las aristas que unen ABC con $D'E'F'$ se cortan en un único punto. Para $\alpha > 60^\circ$ se obtienen poliedros con más de 6 vértices.

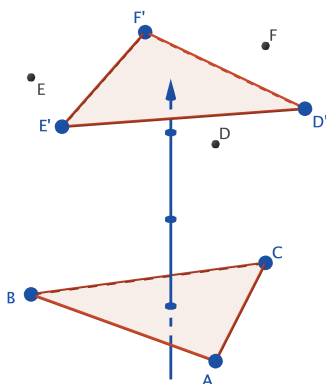


Figura 10. Paso intermedio de la construcción del poliedro de Schönhardt mediante GeoGebra

- Paso 4: Para finalizar, trazamos las aristas: AD', AF', BE', BD', CE' y CF' , y, mediante la herramienta Polígono, marcamos los triángulos que faltarían por marcar: $AD'F', ACF', BD'E', ABD', CE'F'$ y BCE' , que conforman las caras del poliedro de Schönhardt de vértices $ABCD'E'F'$.

Es importante observar que cada uno de los seis vértices del poliedro de Schönhardt está conectado mediante aristas con otros cuatro, es decir, en cada vértice inciden solo cuatro aristas. Esto hace que no sea *tetraedrizable*, es decir, que no se pueda formar ningún tetraedro contenido

en el poliedro sin agregar nuevos vértices, ya que siempre quedaría una arista del tetraedro fuera del poliedro. Schönhardt demostró esta cuestión y también que todo poliedro no tetraedrizable debe tener al menos seis vértices (Bagemihl, 1948).

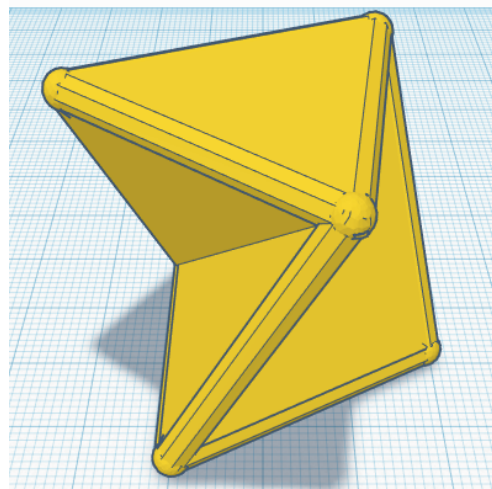


Figura 11. Vista en 3D <<https://bit.ly/2NB0wnr>> del archivo STL generado a partir del applet del poliedro de Schönhardt <<https://bit.ly/2QbExU3>>

La vista gráfica 3D de GeoGebra permite que el alumnado visualice el poliedro de Schönhardt, así como su no tetraedrizabilidad. Existe una interesante posibilidad, que consiste en generar un archivo en formato *.stl* para su posterior impresión en 3D. En Lieban (2018) tenemos las indicaciones necesarias para exportar diseños en 3D realizados con GeoGebra a STL; la figura 11 es el resultado de aplicar dicha exportación al applet del poliedro de Schönhardt (figura 9). En cualquier caso, circulan múltiples diseños predefinidos de libre distribución en internet (Taalman, 2015; Charters, 2017) para utilizar en una impresora 3D convencional.

Para concluir esta sección y volviendo al problema de la galería de arte, convendría indicar distintos resultados que lo amplían y complementan. Por ejemplo, la posibilidad de que la sala poligonal contenga *buecos* (O'Rourke, 1987). De este modo contribuiremos a mostrar que la actividad científica no cesa cuando resolvemos un determinado problema, sino que se abren nuevos interrogantes.

Conclusión

En este artículo se ha presentado un ejemplo de la utilización de GeoGebra como herramienta tecnológica para la resolución y demostración de problemas matemáticos. En particular, se han mostrado algunas de sus potencialidades que pueden motivar su uso en el aula para trabajar las matemáticas.

Como hemos podido observar, GeoGebra facilita el estudio sistemático de casos particulares en la resolución de problemas, así como la elaboración de conjeturas y el desarrollo de demostraciones. Gracias a los applets dinámicos e interactivos esta tarea resulta más visual y quizá más estimulante que una resolución tradicional con lápiz y papel. GeoGebra permite generar y analizar en menos tiempo un número mayor de casos particulares, posibilitando de este modo un desarrollo más rápido de las conjeturas, evitando que algunos alumnos, sobre todo los menos interesados en esta materia, no se involucren suficientemente y abandonen la tarea.

Las características de GeoGebra permiten también variar las hipótesis de los problemas, planteando nuevos retos que estimulen la investigación y curiosidad del alumno en el aula. Hemos pasado, por ejemplo, en la actividad anterior de trabajar en el plano a trabajar en el espacio, con applets que permiten la construcción de figuras 3D, tras plantearnos si la existencia de triangulaciones para polígonos en el plano es una propiedad que puede extenderse al espacio.

Las posibilidades de diseño y construcción de GeoGebra también ayudan a resaltar el atractivo y la belleza de las matemáticas. El valor de exponer al alumnado ante resultados catalogados como bellos y elegantes permite elaborar una opinión crítica sobre el atractivo de las matemáticas; un aspecto que no debería desaprovecharse. Para conocer más sobre el uso de GeoGebra en actividades y problemas matemáticos se recomienda visitar García-Piqueras (2015).

Referencias bibliográficas

- AIGNER, A., y G. M. ZIEGLER (2005), *El libro de las demostraciones*. Nivola, Madrid.
- BAGEMHIL, F. (1948), «On indecomposable polyhedra», *American Mathematical Monthly, Mathematical Association of America*, 55 (7), 411–413, doi:10.2307/2306130.
- CHARTERS, T. (2017), «Schönhardt Polyhedron», recuperado de <www.thingiverse.com/thing:2320086>.
- CHVÁTAL, V. (1975), «A Combinatorial Theorem in Plane Geometry», *J. Combin. Th.* 18, 39–41.
- FISK, S. (1978), «A Short Proof of Chvátal's Watchman Theorem», *J. Combin. Th. Ser. B* 24, 374.
- FOURNIER, A., y D. Y. MONTUNO (1984), «Triangulating Simple Polygons and Equivalent Problems», *ACM Trans. Graphics* 3, 153–174.
- GARCÍA-PIQUERAS, M. (2015), «Un atardecer en África y América», *Suma*, n.º 78, 23–36.
- GAREY, M. R., D. S. JOHNSON, F. P. PREPARATA y R. E. TARJAN (1978), «Triangulating a Simple Polygon», *Inform. Process. Lett.* 7, 175–179.
- LIEBAN, D. (2018), *Tutorial for 3D printing with GeoGebra*, GeoGebraBook, <https://bit.ly/2Mf5set>.
- MAÍZ, F., y J. L. MUÑOZ (2014), «El Museo y los Vigilantes», *Día Escolar de las Matemáticas*, FESPM, <http://dem.fespm.es/dia-escolar-de-las-matematicas/actividades/article/el-museo-y-los-vigilantes>.
- O'ROURKE, J. (1987), *Art Gallery Theorems and Algorithms*, Oxford University Press.
- SCHÖNHARDT, E. (1928), «Über die Zerlegung von Dreieckspolyedern in Tetraeder», *Mathematische Annalen*, 98: 309–312, doi: 10.1007/BF01451597.
- TAALMAN, L. (2015), «Schönhardt Polyhedron», recuperado de <www.thingiverse.com/thing:685326>.
- TUCKER, A. (1994), «The Art Gallery Problem», *Math Horizons* 1, 24–26.

MANUEL GARCÍA-PIQUERAS
Universidad de Castilla-La Mancha
<manuel.gpiqueras@uclm.es>

JOSÉ MANUEL DIEGO-MANTECÓN
Universidad de Cantabria
<diegojm@unican.es>

TERESA F. BLANCO
Universidad de Santiago de Compostela
<teref.blanco@usc.es>

MARÍA SOTOS SERRANO
Universidad de Castilla-La Mancha
<maria.sotos@uclm.es>

* Este trabajo se ha elaborado bajo el marco del proyecto de investigación EDU2017-84979-R del gobierno de España.